

À Geneviève, Xavier, Marie-Aude, Catherine, Marc et Baptiste

AVANT-PROPOS

La gestion de la production et des flux n'est pas seulement une question d'ingénieur, c'est aussi une affaire d'arbitrage économique. Les différents processus mobilisés ont pour fin ultime la satisfaction du consommateur final, dans des conditions qui garantissent la pérennité de l'entreprise. Les transformations de l'environnement économique et technique observées depuis une quarantaine d'années obligent les entreprises à mieux maîtriser leurs coûts, à davantage coopérer entre elles, à mieux anticiper les besoins des clients et à avoir plus de flexibilité et plus de réactivité. Il s'ensuit que la prise de décision est plus compliquée parce que la formulation des problèmes est plus complexe et que la cohérence entre ces décisions est plus difficile à assurer. Cette évolution défavorable s'est fort heureusement accompagnée de progrès importants dans les méthodes mobilisables pour mieux gérer la production et les flux. Celles-ci seraient restées sans impact notable si, parallèlement, les capacités de traitement de l'information ne s'étaient pas considérablement améliorées, grâce aux progrès de l'informatique, mais aussi au développement de méthodes génériques rendant facilement accessibles des démarches de simulation, d'optimisation et d'interactivité.

Table des
matières

À la différence de ce qui se passe dans d'autres pays et à quelques notables exceptions près, cet enjeu n'est pas très bien pris en compte dans l'enseignement supérieur français, les établissements de gestion considérant qu'il s'agit là avant tout d'une affaire d'ingénieurs et les écoles d'ingénieurs ou universités scientifiques n'abordant généralement ces problématiques que parcimonieusement, le plus souvent sous l'angle réducteur de la recherche opérationnelle. L'organisation de notre système éducatif encourage cette schizophrénie. Fort heureusement, on observe depuis quelques années des signes encourageants de décloisonnement dans la communauté académique, sans doute en raison d'une meilleure connaissance des entreprises et de leurs besoins, mais aussi sous l'influence des échanges universitaires d'enseignants et d'étudiants et celle du brassage des congrès scientifiques internationaux.

Index
thématique

*La gestion de la production et des flux repose sur un art subtil de définition judicieuse d'un ensemble de problèmes interdépendants et de mobilisation d'instrumentations diverses. Cet ouvrage propose des grilles de lecture susceptibles d'aider cette définition et expose les fondements des principales solutions disponibles. Il a une **vocation méthodologique et non prescriptive**, ce qui n'a pas toujours été bien perçu par certains lecteurs des éditions précédentes. Le choix de solutions doit reposer sur une bonne compréhension des hypothèses et raisonnements qui les fondent. C'est en effet la seule façon de s'assurer de la pertinence des options retenues et de bien en comprendre les limites afin de faciliter ultérieurement la nécessaire évolution du système de décision et du système d'information, en fonction des transformations de l'environnement technique, économique et social de l'entreprise. Cet ouvrage, destiné aux professionnels de la gestion de la production et des flux, aux étudiants de Sciences de Gestion de cursus universitaire ou consulaire et aux élèves d'écoles d'ingénieurs, a pour ambition de faciliter ce recul.*

Traiter de manière exhaustive cette problématique de la gestion de la production et des flux est hors de portée pour un seul auteur et nécessiterait plusieurs tomes. L'ambition poursuivie ici est plus modeste : nous avons cherché à présenter ce qui nous semble constituer aujourd'hui les principaux enjeux, approches et instrumentations mobilisables dans ce domaine. Le lecteur qui voudrait pousser plus loin sa réflexion pourra le faire à partir de la bibliographie de plusieurs centaines d'ouvrages qui est proposée ici. Mais avant de viser un niveau de spécialité poussée, il faut acquérir des bases solides. Pour tenir compte à la fois de la variété des besoins et de la difficulté des instrumentations mobilisables, certains passages sont repérés en marge par une bordure claire ou foncée pour signaler que le niveau de technicité est plus élevé.

Par rapport à l'édition précédente, le texte proposé a été considérablement remanié et enrichi. Il fait un large appel à la couleur, ce qui facilite le repérage de la structure du texte et permet l'utilisation de graphiques plus explicites. Une autre innovation majeure marque cette édition : la mise à disposition d'un CD-ROM. Ce support ne se contente pas de proposer la version électronique de ce livre, permettant d'utiliser les milliers de liens hypertextuels qui émaillent ce texte. Il offre également des liens (repérés par une icône en marge, comme celles figurant dans cette page), s'autorisant de démarrer un certain nombre d'animations qui éclairent des problématiques parfois difficiles à comprendre. D'autres liens lancent des logiciels qui illustrent l'usage des techniques présentées et permettent facilement de traiter des problèmes similaires utilisant d'autres données. Ces logiciels ont également pour objet de souligner que la mise en œuvre de solutions n'est pas le plus difficile, l'essentiel étant dans la formulation intelligente des problèmes. Tout ce matériel accessible sur le CD a été conçu pour être utilisé indifféremment sur un environnement Mac ou PC¹.

Pour terminer je voudrais remercier les très nombreux collègues et anciens étudiants pour leurs encouragements à terminer ce travail de longue haleine et *Economica* pour avoir accepté le pari technique et commercial que constitue ce livre.

Vincent Giard

Professeur à l'Université Paris-Dauphine
vincent.giard@dauphine.fr



Table des
matières

Index
thématique

1. Certains de ces logiciels font appel à Excel (version française), qui doit donc être préalablement installé sur votre micro-ordinateur. D'autres recourent à votre navigateur (Netscape, Explorer...) pour lancer une animation et utilisent un «plug-in» de Flash. Celui-ci est normalement présent sur les machines récentes. Si votre configuration est ancienne, vous pouvez télécharger gratuitement ce «plug-in» à partir du site de Macromedia (<http://www.macromedia.com/fr/downloads/>). Aucune garantie n'est donnée sur fonctionnement de ces logiciels, en raison de la multiplicité des versions de système d'exploitation et des configurations même si les essais se sont montrés probants toutes les configurations testées.

Ces logiciels n'ont aucune prétention autre que pédagogique. Ceux qui ont pour vocation d'illustrer des méthodes de résolution numériques sont enregistrés avec les données du problème courant. Vous pouvez créer sans difficulté un nouveau problème en saisissant de nouvelles données. Lors de cette création, un grand nombre de contrôles sont opérés, mais il en manque très certainement. Il est donc possible que certains jeux de données puisse ne pas conduire à une solution, en raison de leur incohérence au regard des méthodes mobilisées, et provoquer un diagnostic d'erreur. Après utilisation, vous pouvez enregistrer le fichier (qui comportera le programme et les données de votre problème) sous un autre nom pour une exploitation ultérieure.

En mars 2003, l'enregistrement sous Mac, lorsque l'anti-virus Norton est activé, déclenche le diagnostic «souche de Bloodhood. Macmacro» qui laisse penser à la présence d'un virus. Il ne s'agit pas d'un virus et cette alerte n'est pas fondée : le réenregistrement du fichier incriminé sous PC fera disparaître ce diagnostic. Pour éviter d'inquiéter inutilement l'utilisateur des Mac, l'option «enregistrer sous» ne figure pas dans le menu, mais la commande «pomme-S» reste toujours utilisable.

TABLE DES MATIÈRES

CHAPITRE I INTRODUCTION

I	LE CHAMP DE LA GESTION DE LA PRODUCTION ET DES FLUX	41
I.1	Définitions	41
I.1.1	Production et chaîne logistique	41
I.1.2	Gestion de la production et des flux	44
I.1.21	L'approche retenue	44
I.1.22	Typologies décisionnelles	44
I.2	Typologie des systèmes productifs	47
I.2.1	Production pour stock ou production à la commande	47
I.2.11	Définition des productions à la commande ou pour stock	48
I.2.12	Principales conséquences de cette typologie	49
I.2.2	Principaux modes d'organisation de la production	50
I.2.21	Organisation de type «série unitaire»	50
I.2.211	Définition	50
I.2.212	Ressources mobilisées	51
I.2.213	Ordonnancement	51
I.2.22	Organisation en ateliers spécialisés	51
I.2.221	Définition	51
I.2.222	Ressources mobilisées	53
I.2.223	Ordonnancement	53
I.2.23	Organisation en ligne de production ou d'assemblage	53
I.2.231	Définition	53
I.2.232	Ressources mobilisées	54
I.2.233	Ordonnancement	58
I.2.24	Les industries de process	58
I.2.25	Remarques	59
I.2.251	La technologie de groupe	59
I.2.252	Le choix économique entre ligne de production et ateliers spécialisés	60
I.2.253	Liaison entre le marché et l'organisation de la production	61
I.2.3	L'entreprise de réseau	62

I.2.31	Définition de l'entreprise de réseau et généralité du concept	62
I.2.32	Le particularisme des entreprises de réseau «au sens strict»	63
I.2.321	Satisfaction de demandes très fortement cycliques et aléatoires	63
I.2.322	Importance de la standardisation des ressources physiques	64
I.2.323	Importance de la coordination dans la programmation	65
I.2.324	Importance des degrés de liberté dans la localisation de certains traitements	66
I.3	Le processus au cœur de l'analyse de la production	67
I.3.1	Identification des processus	69
I.3.2	Transformation des processus	70
I.3.21	Le kaizen	70
I.3.22	Le reengineering	72
II	L'APPROCHE ÉCONOMIQUE DE LA GESTION DE LA PRODUCTION ET DES FLUX	74
II.1	L'éclairage économique de la prise de décision	74
II.1.1	Appel à l'instrumentation comptable	74
II.1.11	L'approche du coût de revient complet	75
II.1.12	Le coût fixe et le coût variable	77
II.1.13	Le coût préétabli et le coût réel	78
II.1.2	Critères d'élaboration d'indicateurs économiques	80
II.1.21	Principe de contrôlabilité	80
II.1.211	Structuration des décisions contrôlées	80
II.1.212	Contrôlabilité et évaluation des acteurs	81
II.1.213	La contrôlabilité du système d'évaluation	82
II.1.22	Principe de non-universalité	83
II.1.23	Principe d'agrégativité	83
II.1.231	Agrégativité dans l'espace du système productif	83
II.1.232	Agrégativité dans le temps	85
II.1.232a	La logique de l'agrégation dans le temps	85
II.1.232b	Problèmes concrets posés par l'application du principe	87
II.1.24	Agrégativité dans l'espace des produits	90
II.2	Mise en place de tableaux de bord	90
II.2.1	Positionnement temporel de l'indicateur par rapport à la décision	91
II.2.2	Relations causales entre indicateurs et décisions	91
II.2.3	Plus-value informationnelle d'un indicateur	92
II.2.4	L'incidence du temps dans la définition des indicateurs	93
II.2.5	Interprétation de l'indicateur et de ses variations	93
II.2.6	Cohérence spatiale et temporelle des tableaux de bord	94
III	PLAN DE L'OUVRAGE	95
III.1	Définition d'un fil directeur	95
III.2	L'architecture retenue	96

CHAPITRE II

LA DÉTERMINATION DU PORTEFEUILLE DE PRODUITS

I	LA RECHERCHE DE PRODUITS NOUVEAUX	99
I.1	Le processus d'introduction de produits nouveaux	100
I.2	La définition de produits nouveaux	101
I.3	Analyse de la variété des produits	102
I.3.1	Les formes de la variété	102
I.3.2	Les coûts de la variété	105
I.4	L'analyse des besoins	107
II	LA CONDUITE DES ACTIVITÉS DE CONCEPTION	109
II.1	Les instrumentations du développement de produits nouveaux	109
II.1.1	L'analyse de la valeur (AV)	110
II.1.2	Le Quality Function Deployment (QFD)	111
II.1.3	Le Design For Manufacturing (DFM)	115
II.1.4	Le pilotage des projets de développement par la gestion de projet	117
II.2	L'éclairage économique des décisions de conception	118
II.2.1	La vision du coût sur le cycle de vie	118
II.2.2	Les approches en termes de flux de trésorerie	121
II.2.3	Les approches en termes du coût-objectif	122
II.2.4	Problèmes méthodologiques posés par l'évaluation d'un projet de conception et développement d'un produit nouveau sur son cycle de vie ...	124
II.2.41	Problèmes de cohérence temporelle des décisions	124
II.2.411	Le coût de conception du produit et de son processus de fabrication	124
II.2.412	Le coût des équipements utilisés	125
II.2.413	Le coût des composants utilisés	127
II.2.42	Problèmes liés au caractère ex-ante de l'évaluation économique	129
II.2.421	Impact de l'incertitude sur la construction de l'échéancier des coûts engagés ..	129
II.2.422	L'appel à un double niveau de modélisation	130
III	ANALYSE ÉCONOMIQUE DE LA STANDARDISATION DES PRINCIPAUX ORGANES DANS LES INDUSTRIES DE PRODUCTION DE MASSE	133
III.1	Les origines de la standardisation	134
III.2	Vers une optimisation de la standardisation	134
III.2.1	Présentation du modèle de base	135
III.2.2	Utilisation de cette approche optimisatrice	140

CHAPITRE III

ANALYSE ET CHOIX DE PROJETS D'INVESTISSEMENT

I	PRÉSENTATION DES DÉCISIONS STRATÉGIQUES ET DES TECHNIQUES DE MODÉLISATION DU FONCTIONNEMENT D'UN SYSTÈME PRODUCTIF	143
I.1	Décisions stratégiques relatives aux ressources permanentes ...	144
I.1.1	Sous-traitance et approvisionnement	144
I.1.2	Équipements	145
I.1.3	Personnel	145
I.1.4	Informations	146
I.1.5	Flexibilité physique et flexibilité organisationnelle	147
I.2	La modélisation du fonctionnement d'un système productif	147
I.2.1	Les outils de simulation de processus	148
I.2.11	Les principes de fonctionnement des logiciels de simulation de processus .	148
I.2.12	Exemple	152
I.2.2	Vision systémique du fonctionnement du système productif	155
I.2.3	Les outils de cartographie de processus	160
I.2.4	L'amélioration d'un processus	167
II	L'ANALYSE D'UN PROJET D'INVESTISSEMENT	170
II.1	L'analyse physique d'un projet d'investissement	170
II.1.1	L'origine d'un dossier d'investissement	170
II.1.2	L'instruction du dossier d'investissement	171
II.1.21	La nécessaire prise en compte des mécanismes de propagation	172
II.1.22	Les phases de la transformation du processus	173
II.2	L'analyse économique d'un projet d'investissement	174
II.2.1	Le système de coûts à utiliser	174
II.2.11	Multiplicité des points de vue et donc des conventions de comptabilité de gestion possibles	174
II.2.12	Conventions comptables et cohérence temporelle des décisions	176
II.2.2	Détermination des flux nets de trésorerie (FNT) à prendre en compte dans les bilans actualisés	176
II.2.21	Le principe du bilan différentiel	177
II.2.22	La traduction comptable des flux de trésorerie	177
II.2.221	Les flux nets de trésorerie décrits à travers le compte de résultat	178
II.2.222	Les flux nets de trésorerie décrits à travers le bilan	181
II.2.23	La prise en compte de l'inflation	182
II.2.231	Le raisonnement en euros courants	182
II.2.232	Le raisonnement en euros constants	183
II.2.233	Le raisonnement à prix constants	185

II.3	Les analyses de sensibilité du projet d'investissement	185
II.3.1	Présentation du problème	185
II.3.2	Systématisation de l'analyse de sensibilité en univers certain	187
II.3.3	Analyse de sensibilité en univers aléatoire	190
II.3.4	Optimisation de certains paramètres en univers aléatoire	196
III	LA DÉTERMINATION DU PROGRAMME OPTIMAL D'INVESTISSEMENT	199
III.1	Critères de comparaison des projets d'investissement	200
III.1.1	Jugement des règles de choix proposées par les praticiens et les économistes . 200	
III.1.11	Règles de bon sens auxquelles devraient obéir les critères de choix.	200
III.1.12	Rejet des règles empiriques utilisées par certains praticiens	201
III.1.121	Critère du délai de récupération	201
III.1.122	Critère de la recette moyenne par euro engagé	201
III.1.123	Critère du revenu moyen sur valeur comptable de l'investissement	202
III.1.13	Critères proposés par les économistes	202
III.1.131	Le Flux Net de Trésorerie Actualisé (FNTA)	202
III.1.132	Le Taux de Rentabilité Interne (TRI)	203
III.1.2	Problèmes posés par l'actualisation	203
III.1.21	Signification de l'actualisation	204
III.1.211	Prise en compte d'une incertitude qui croît avec l'éloignement de l'horizon économique considéré	204
III.1.212	Introduction de la préférence de temps	205
III.1.213	Alternatives possibles dans l'utilisation des capitaux	205
III.1.22	Détermination du taux d'actualisation de référence	205
III.1.221	Importance du problème	205
III.1.222	Détermination du taux d'actualisation de référence	206
III.1.223	Impact de l'approche de l'analyse des projets par le bilan différentiel sur la rentabilité du programme d'investissement	209
III.2	Problèmes méthodologiques posés par la comparaison de deux projets	210
III.2.1	Homogénéité des FNTA calculés	210
III.2.11	Possibilité de retenir un projet ayant une rentabilité absolue négative	210
III.2.12	Possibilité d'«engraisser» un projet très rentable	210
III.2.13	Impossibilité de comparer directement certains projets	211
III.2.2	Prise en compte de l'inégalité des durées de vie des projets	211
III.2.21	Réinvestissement dans le même projet	212
III.2.22	Réinvestissement dans un «projet moyen»	213
III.2.23	Horizon économique borné arbitrairement	214
III.3	La définition du programme optimal d'investissement par la programmation linéaire	216
III.3.1	Les contraintes de dépendance réciproque des projets	217
III.3.11	Exclusion	217

III.3.12	Réalisation conditionnelle	217
III.3.13	Synergie	218
III.3.2	Les contraintes portant sur l'ensemble du programme	218
III.3.21	Contraintes de trésorerie	218
III.3.22	Contraintes physiques	219
III.3.23	Remarques	220
III.3.231	Permutation possible du rôle de certaines contraintes et de la fonction-objectif	220
III.3.232	Analyse multicritère et programmation linéaire	220
III.3.233	Prise en compte du risque	221
III.3.234	Raisons de la faible diffusion de l'approche rigoureuse du choix du portefeuille d'investissement	221
III.4	Exemples d'application de la démarche de détermination du portefeuille optimal d'investissement	223
III.4.1	Choix du programme optimal en univers certain	224
III.4.11	Programmation mathématique et taux d'actualisation prédéfini	224
III.4.12	Programmation linéaire et mathématique et taux d'actualisation égal au TRI du projet marginal	224
III.4.13	Programmation linéaire et critère du TRI maximal du budget investi	225
III.4.2	Choix du programme optimal en univers aléatoire	226
IV	QUELQUES COMPOSANTES TECHNICO-ÉCONOMIQUES DE LA RENTABILITÉ DES PROJETS D'INVESTISSEMENT	228
IV.1	L'implantation des centres de production	228
IV.1.1	La localisation optimale des ateliers spécialisés	229
IV.1.11	Présentation simplifiée du problème	229
IV.1.111	Exemple introductif	229
IV.1.112	Recherche d'une meilleure localisation	231
IV.1.12	Présentation d'un problème réel	233
IV.2	Détermination de la durée de vie optimale d'un équipement	234
IV.2.1	Détermination de la durée de vie optimale en univers certain	235
IV.2.11	Critères de détermination de la durée de vie optimale	235
IV.2.12	Détermination de la durée de vie optimale dans le cas d'un remplacement à l'identique	237
IV.2.121	Cas d'un horizon limité	237
IV.2.121a	Exemple introductif	237
IV.2.121b	Solution analytique	237
IV.2.121c	Résolution numérique de l'exemple introductif	238
IV.2.122	Cas de l'horizon infini	238
IV.2.122a	Exemple numérique	238
IV.2.122b	Solution analytique	239
IV.2.122c	Solution de l'exemple numérique	240
IV.2.122d	Remarques	240
IV.2.13	Détermination de la date de déclassement optimale	242
IV.2.131	Exemple introductif	242
IV.2.132	Solution	242
IV.2.2	Détermination de la durée de vie optimale en univers aléatoire	243
IV.2.21	Le problème posé	243

IV.2.22	Détermination de la loi de durée de vie d'un composant	244
IV.2.221	Estimation de la loi de durée de vie	244
IV.2.221a	Estimation à partir des fréquences observées	245
IV.2.221b	Utilisation de la fonction de hasard cumulée	247
IV.2.23	Détermination de la durée de vie optimale	249
IV.2.231	Détermination de l'espérance mathématique du coût de remplacement d'un composant au cours d'une période	250
IV.2.231a	Détermination de la probabilité P_{2s} qu'une panne de rang 2 se produise à la période s	252
IV.2.231b	Détermination de la probabilité P_{3s} qu'une panne de rang 3 se produise au cours de la période s	253
IV.2.231c	Cas général	254
IV.2.231d	Calcul de l'espérance mathématique du nombre de composants à changer au cours d'une période	254
IV.2.232	Détermination de la durée de vie optimale	255
IV.2.233	Le problème de la dispersion des résultats	256
IV.2.233a	Calcul de σ^2	256
IV.2.233b	Analyse des résultats	258

CHAPITRE IV

GESTION DE PROJET

I	PRÉSENTATION DE LA GESTION DE PROJET	259
I.1	Définition et caractérisation	259
I.2	Typologie des projets	262
I.2.1	Typologie des projets selon leur objet	262
I.2.11	Les projets de production unitaire	262
I.2.12	Les projets de conception de produits nouveaux	263
I.2.13	Gestion d'opérations exceptionnelles, complexes et d'une certaine envergure	264
I.2.2	Typologie des projets en fonction de leur importance économique dans l'entreprise 264	
I.2.3	Typologie des projets en fonction de leurs clients	266
I.3	L'organisation des projets	267
I.3.1	Les différentes structurations possibles des projets	268
I.3.2	La mise en place de procédures spécifiques	270
I.3.21	Nouvelles procédures mises en place dans les projets à rentabilité contrôlée	270
I.3.22	Nouvelles procédures mises en place dans les projets à coûts contrôlés	273
II	LES PROBLÈMES D'ORDONNANCEMENT DE PROJET	274
II.1	Exemple introductif	275
II.2	L'analyse des projets	277
II.2.1	L'organigramme des tâches	277
II.2.2	Détermination de la durée d'une tâche	279

II.2.3	Relations d'antériorité	282
II.3	Typologie des problèmes d'ordonnement de projet	284
II.3.1	Le critère à optimiser	284
II.3.2	La prise en compte explicite d'un certain nombre de contraintes	285
II.3.21	Les contraintes potentielles	285
II.3.211	Contraintes d'antériorité	285
II.3.212	Contraintes de localisation temporelle	285
II.3.22	Les contraintes cumulatives	286
II.3.23	Les contraintes disjonctives	286
II.3.3	Le caractère certain ou non des données utilisées	287
II.3.4	La méthode de résolution retenue	287
III	RECHERCHE D'UN ORDONNANCEMENT	288
III.1	Recherche d'un ordonnancement en univers certain avec prise en compte des seules contraintes potentielles	288
III.1.1	Recherche d'une solution optimale par la méthode Potentiel-Tâches	289
III.1.11	Classement des activités par niveaux	289
III.1.12	Le graphe Potentiel-Tâches	293
III.1.13	Recherche du chemin critique	294
III.1.131	Les conventions de repérage temporel	295
III.1.132	Calcul des dates au plus tôt de début et de fin de réalisation des tâches (ordonnement au plus tôt)	296
III.1.133	Calcul des dates au plus tard de réalisation des tâches et ordonnancement ' au plus tard	298
III.1.14	Les notions de marge libre et de marge indépendante d'une tâche	301
III.1.15	Programmation effective du projet	303
III.1.16	Présentation des résultats	306
III.1.2	Établissement du graphe Potentiel-Étapes	307
III.1.3	Comparaison des deux approches	311
III.2	Recherche d'un ordonnancement avec prise en compte de toutes les contraintes	312
III.2.1	Critère de la minimisation de la durée d'achèvement du projet	312
III.2.11	Les méthodes heuristiques de résolution	312
III.2.12	Exemple et limites de la portée des solutions	315
III.2.13	La formalisation du problème général par la programmation linéaire	319
III.2.131	Prise en compte des contraintes potentielles	319
III.2.132	Prise en compte des contraintes disjonctives et cumulatives et des gammes alternatives	321
III.2.2	Critère de lissage de charge de ressource(s)	324
III.2.21	Le lissage à durée minimale d'exécution du projet	324
III.2.22	Le lissage à durée quelconque d'exécution du projet	324
III.3	Formulation du problème d'ordonnement en univers aléatoire	325

III.3.1	L'approche aléatoire fondée sur le théorème de la limite centrale	325
III.3.2	Application de la démarche simulatoire fondée sur la méthode de Monte-Carlo	327
III.3.21	Démarche suivie	328
III.3.22	Exemple numérique	332
III.4	Révision de la formulation du problème	332
III.4.1	Décomposition de tâches critiques à des fins de chevauchement	334
III.4.2	Diminution de la durée de tâches critiques	335
III.4.21	Le problème posé	335
III.4.22	Exemple d'application	337
III.4.23	Algorithme de résolution dans le cadre d'une démarche «manuelle»	340
III.4.24	Remarques pratiques	341
III.4.3	Impact de l'approche hiérarchique de l'ordonnancement de projet	341
III.4.31	La transformation du graphe Potentiel-Taches dans le processus d'agrégation	342
III.4.32	Les effets pervers de l'approche hiérarchique	343
IV	LE SUIVI DU PROJET	343
IV.1	Le suivi des délais	344
IV.2	Le suivi des coûts – contrôle de gestion d'un projet	346
IV.2.1	Création du référentiel et détermination de la consommation budgétaire	346
IV.2.2	Analyse des écarts	348
IV.2.21	La démarche d'analyse	349
IV.2.211	Écart de planning	351
IV.2.212	Écart de productivité	351
IV.2.213	Remarques	353
IV.2.22	Comparaison du contrôle de gestion de projet et le contrôle de gestion classique	354
IV.2.221	Une prise en compte différente du temps	354
IV.2.222	Une construction différente du référentiel	355
IV.2.223	Des périmètres de responsabilité différents	355
IV.2.224	La difficile coexistence de plusieurs contrôles de gestion	356

CHAPITRE V

ORDONNANCEMENT EN ATELIERS SPÉCIALISÉS

I	INTRODUCTION AUX MODÈLES STATIQUES D'ORDONNANCEMENT	363
I.1	Modèles statiques – Cas des coûts de lancement indépendants de l'ordonnancement retenu	363
I.1.1	Ordonnancement de n tâches nécessitant l'intervention d'un seul centre de production	364

I.1.11	L'ordonnancement suivant la règle du temps opératoire minimum (règle TOM)	364
I.1.111	Exemple introductif	364
I.1.112	Graphique de Gantt	365
I.1.113	La règle TOM	367
I.1.12	La règle TOM pondéré	368
I.1.13	Ordonnancement suivant la règle de la date de livraison minimale	369
I.1.14	Ordonnancement suivant la règle de la marge minimale	371
I.1.15	Modélisation générale	371
I.1.2	Ordonnancement de n tâches nécessitant l'intervention de 2 centres de production	372
I.1.21	Cas du même ordre de passage sur les centres de production A et B	372
I.1.22	Cas de la non-unicité de l'ordre de passage sur les centres de production A et B	374
I.1.3	Ordonnancement de 2 tâches nécessitant l'intervention de m centres de production	375
I.1.4	Ordonnancement de n tâches nécessitant l'intervention de m centres de production	376
I.1.41	Ordonnancement de n tâches nécessitant l'intervention de 3 centres de production (ordre identique de passage)	376
I.1.42	Ordonnancement de n tâches nécessitant l'intervention de m centres de production (ordre identique de passage)	378
I.1.421	Le modèle de base	378
I.1.422	Prise en compte des temps de montage / démontage dépendants de l'ordre de passage des tâches	380
I.1.423	Ordonnancement de n tâches nécessitant l'intervention de m centres de production (ordre identique de passage – sans attente)	381
I.1.424	Le <i>flow shop</i> hybride	383
I.1.5	Ordonnancement de n tâches nécessitant l'intervention de m centres de production (cheminement libre – <i>open shop</i>)	384
I.1.6	Ordonnancement de n tâches nécessitant l'intervention de m centres de production (ordre de passage quelconque)	385
I.2	Modèles statiques: cas du coût de lancement total variable avec l'ordonnancement retenu	388
I.2.1	Présentation de l'algorithme de Little, Marty, Sweeney & Karel	390
I.2.11	Résolution du problème de la première itération	392
I.2.12	Résolution du problème de la deuxième itération	394
I.2.13	Résolution du problème de la troisième itération	396
I.2.14	Résolution du problème de la quatrième itération	398
I.2.15	Résolution du problème de la cinquième itération	399
I.2.16	Résolution du problème de la sixième itération	400
I.2.2	Remarques complémentaires	401
I.2.21	Détermination empirique de la tournée	401
I.2.22	Détermination optimale de tournées multiples	402
I.2.23	Problème stochastique du voyageur de commerce	402
I.2.24	Complexité des problèmes concrets	404
I.3	Tentative de caractérisation de l'approche statique	404

I.3.1	Critère d'optimisation	404
I.3.2	Liste des hypothèses décrivant le système productif	405
I.3.3	Méthodes de résolution	406
I.3.31	La méthode Tabou et le Recuit Simulé	407
I.3.32	Les algorithmes génétiques	408
II	L'APPROCHE ALÉATOIRE DYNAMIQUE	409
II.1	L'approche par la théorie des files d'attente	409
II.2	L'approche simulateur	410
II.2.1	La simulation de systèmes réels	410
II.2.2	La simulation de systèmes fictifs	411
II.2.21	Le cas des ateliers spécialisés indépendants	411
II.2.22	Cas d'une dépendance entre les centres de production	416
III	PERSPECTIVES ACTUELLES DE L'ORDONNANCEMENT EN ATELIERS SPÉCIALISÉS	416
III.1	Les approches possibles	418
III.1.1	Exemple introductif	418
III.1.2	Les solutions possibles	421
III.1.21	Placement progressif d'ordres de fabrication	421
III.1.22	Placement chronologiquement progressif d'opérations exécutables	424
III.2	Définition d'un Système Interactif d'Aide à la Décision de Lancement (SIADL)	432
III.2.1	Prise en compte de l'instabilité du problème d'ordonnancement	433
III.2.2	Mécanismes de proposition automatique d'un ordonnancement	436
III.2.21	Recherche d'un ensemble d'ordonnements admissibles	437
III.2.22	Utilisation d'heuristiques	437
III.2.3	Système interactif	440
III.2.4	Périodicité et horizon de l'ordonnancement	441
III.2.5	Critères d'évaluation de l'ordonnancement	442
III.2.51	La problématique des critères d'évaluation	442
III.2.511	Les indicateurs traditionnels	442
III.2.512	Les bases d'un indicateur d'évaluation économique	443
III.2.512a	Le concept de marge	443
III.2.512b	Distinction entre charges fixes et charges variables	444
III.2.512c	Le concept de charge différentielle	445
III.2.512d	Le concept de valeur ajoutée directe	446
III.2.512e	L'établissement d'un compte de résultats associé à la décision d'ordonnancement	446
III.2.52	Exemple d'évaluation économique d'un ordonnancement	447

CHAPITRE VI

TECHNIQUES DE PLANIFICATION DE LA PRODUCTION

I	L'INADÉQUATION DES POLITIQUES «CLASSIQUES» DE GESTION DES STOCKS AU CAS DES STOCKS DE FABRICATION.....	457
I.1	Dépendance des demandes des composants dans les stocks de fabrication	458
I.2	Irrégularité de la demande	459
II	LES CONDITIONS PRÉALABLES DE LA MISE EN PLACE D'UNE MRP.....	460
II.1	Existence d'un plan directeur de production	461
II.2	Existence d'une nomenclature complète des composants utilisés	463
II.3	Existence d'un système d'information fiable sur l'état des stocks	467
II.4	Existence d'un fichier des délais d'obtention	468
II.5	Existence de gammes et de données sur les capacités des centres de production	468
II.6	Existence de fichiers nécessaires à la détermination des priorités	469
III	LES PRINCIPES DE BASE DE FONCTIONNEMENT DE TOUTE MRP.....	470
III.1	Description du mécanisme élémentaire de calcul de la MRP	470
III.1.1	Détermination des besoins nets d'un composant	470
III.1.2	Détermination de la couverture des besoins nets	472
III.2	Utilisation «en cascade» du mécanisme élémentaire de calcul	474
III.3	Détermination des charges découlant du programme de production	475
III.4	L'ajustement «charge – capacité»	481
III.4.1	Ajustement par les stocks	482
III.4.2	Ajustement par adaptation de la capacité	486
III.4.3	Remarques	487

IV	REMARQUES COMPLÉMENTAIRES	489
IV.1	Améliorations des techniques de base de la MRP	489
IV.1.1	Introduction d'un stock de sécurité	489
IV.1.2	Présentation des règles de lotissement utilisables	491
IV.2	Utilisation périodique de la MRP – planification glissante –	494
IV.3	Relations entre la MRP et l'ordonnancement	496
IV.4	Intégration de la distribution dans la MRP: la DRP	496
IV.5	Améliorations possibles de la démarche suivie par la MRP	497
V	TECHNIQUES DE PLANIFICATION HIÉRARCHISÉE	498
V.1	Les fondements de la planification hiérarchisée	499
V.1.1	La structuration des produits dans la planification hiérarchisée	499
V.1.2	Les avantages offerts par la planification hiérarchisée	500
V.1.21	Faible coût de traitement	501
V.1.22	Meilleure fiabilité des données	501
V.1.23	Facilité d'implémentation	501
V.2	Phase 1 des traitements: programmation par type de références	502
V.3	Phase 2 des traitements: désagrégation de la programmation par type de références en programmation par famille de références	503
V.3.1	Première étape: détermination des familles mises en production	503
V.3.2	Deuxième étape: détermination initiale du volume de production des familles de références retenues	504
V.3.3	Troisième étape: détermination définitive du volume de production des familles de références retenues	505
V.3.31	Cas d'un volume insuffisant de production initialement programmée	505
V.3.32	Cas d'un volume excessif de production initialement programmée	506
V.4	Phase 3: désagrégation de la programmation par famille de références en programmation par références	507

CHAPITRE VII

LE JUSTE - À - TEMPS

I	L'ENVIRONNEMENT DE PRODUCTION DU JAT	510
II	LE PLAN DIRECTEUR DE PRODUCTION DU JAT	512
III	LE SYSTÈME KANBAN DE GESTION DES FLUX	513
III.1	Les étiquettes de production	513
III.2	Étiquettes de fabrication et étiquettes de transfert	515
III.3	Détermination du nombre d'étiquettes	516
III.3.1	Centre de production ne produisant que cette référence	516
III.3.11	Cas d'un lot de production égal à un seul conteneur et d'une utilisation exclusive d'étiquettes de fabrication	517
III.3.12	Cas d'un lot de production égal à plusieurs conteneurs et d'une utilisation exclusive d'étiquettes de fabrication	521
III.3.13	Cas d'une utilisation simultanée d'étiquettes de fabrication et d'étiquettes de transfert	522
III.3.2	Cas de la fabrication de plusieurs références par le même centre de fabrication	523
III.3.3	Cas de plusieurs centres de consommation	524
IV	REMARQUES COMPLÉMENTAIRES	524
IV.1	L'aménagement de l'espace dans les usines utilisant le JAT	524
IV.2	Le JAT en pratique	525
IV.3	Comparaison du Juste - À - Temps et de la MRP	526

CHAPITRE VIII

TECHNIQUES AVANCÉES DE PLANIFICATION

I	QUELQUES APPLICATIONS DE LA PROGRAMMATION LINÉAIRE À LA DÉFINITION DU PROGRAMME OPTIMAL DE PRODUCTION	528
I.1	La modélisation des processus de production par la programmation linéaire	528
I.1.1	Les ressources dans la modélisation par la programmation linéaire	529
I.1.2	Production de biens et de services	530
I.2	Modélisation mono-période des processus productifs	531
I.2.1	Centre de production unique	531

I.2.11	Productions indépendantes faisant appel à des gammes uniques	532
I.2.111	Le problème posé	532
I.2.112	Exemple d'application	533
I.2.12	Productions indépendantes faisant appel à des gammes alternatives	534
I.2.121	Le problème posé	535
I.2.122	Exemple d'application	536
I.2.123	Prise en compte de la polyvalence de certaines ressources	539
I.2.124	Détermination simultanée des quantités à produire et des filières de production	539
I.2.13	Productions liées de produits faisant appel à des gammes alternatives	540
I.2.131	Le problème posé	540
I.2.132	Exemple d'application	542
I.2.14	Productions liées de prestations de service faisant appel à des gammes alternatives	544
I.2.15	Détermination de la gamme optimale associée à la production d'un produit unique	545
I.2.151	Le problème posé	545
I.2.152	Exemple d'application	547
I.2.2	Cas de plusieurs centres de production isolés	548
I.2.21	Production à étages	548
I.2.211	Cartographie des flux	548
I.2.212	Application au cas de plusieurs productions indépendantes fabriquées par des gammes alternatives utilisant plusieurs ressources	549
I.2.22	Assignation de «clients» à un centre de production ou de distribution	552
I.2.221	Le problème posé	552
I.2.222	Exemple d'application	553
I.3	Modélisation multi-périodes des processus productifs	555
I.3.1	Fonctionnement d'un système productif produisant des flux de production sur plusieurs périodes	555
I.3.11	Introduction des équations dynamiques de conservation des stocks pour les ressources stockables	556
I.3.12	Définition dynamique des ressources non stockables	558
I.3.13	Lissage de la production	559
I.3.2	Cas particulier des prestations liées par des contraintes spatio-temporelles	561
I.3.3	Problèmes d'ordonnancement	561
II	APPLICATION DES MÉTHODES GÉNÉRALES DE LA PROGRAMMATION DYNAMIQUE À LA PROGRAMMATION DE LA PRODUCTION ET À LA GESTION DES STOCKS	562
II.1	Présentation de la méthode de la programmation dynamique .	562
II.1.1	Exemple introductif	562
II.1.2	Résolution par la programmation dynamique du problème posé	563
II.2	Application de l'algorithme général de la programmation dynamique à la planification de la production et à la gestion des stocks	567

II.2.1	Exemple introductif	567
II.2.2	Formulation du problème posé en un problème de programmation dynamique	569
II.2.21	Variables et paramètres utilisés	569
II.2.22	Formulation du programme dynamique	570
II.2.3	Résolution numérique de l'exemple introductif	572
II.2.4	Horizon de planification et stabilité du programme d'approvisionnement	573
II.3	Utilisation d'un algorithme spécifique pour le cas de coûts convexes de livraison et de stockage	575
II.3.1	Algorithme à utiliser dans le cas de fonctions de coûts convexe	576
II.3.2	Propriétés spécifiques du cas convexe	579
II.3.21	Modification des contraintes	580
II.3.22	Variations de la demande (théorèmes d'horizon de planification)	580
II.4	Utilisation d'un algorithme spécifique pour le cas de coûts concaves de production et de stockage	582
II.4.1	Présentation de l'algorithme à utiliser dans le cas concave	582
II.4.2	Stabilité du programme de livraison et horizon de planification	585

CHAPITRE IX

LIGNES DE FABRICATION OU D'ASSEMBLAGE

I	LIGNES DÉDIÉES À LA FABRICATION DE PRODUITS HOMOGENES	591
I.1	Conception d'une ligne de production ou d'assemblage de produits homogènes	592
I.1.1	La problématique de l'équilibrage d'une ligne de fabrication ou d'assemblage	592
I.1.2	Formalisation du problème par la programmation mathématique	594
I.1.3	Les procédures heuristiques de résolution du problème d'équilibrage de chaîne	596
I.1.31	Les algorithmes déterministes	596
I.1.32	Les algorithmes stochastiques	599
I.2	Ordonnancement sur ligne de production ou d'assemblage de produits homogènes	599
I.3	Incidence des aléas sur le fonctionnement de la ligne	600
I.3.1	Incidence de l'arrêt d'un poste de travail sur le fonctionnement de la ligne	600
I.3.2	Incidence de la prise en compte immédiate des problèmes de qualité sur une ligne de production	602
I.3.21	Génération de décyclages lors des retouches en dérivation de la ligne de production	603

I.3.22	L'approche analytique des conséquences du décyclage	605
I.3.221	Détermination de la distribution de probabilité du décyclage	605
I.3.222	Incidence du décyclage sur les indicateurs de suivi de l'ordonnancement	608
I.3.223	Incidence du décyclage sur les stocks de sécurité des modules à assembler	609
II	LIGNES DÉDIÉES À LA FABRICATION DE PRODUITS HÉTÉROGÈNES	611
II.1	Conception d'une ligne de production ou d'assemblage de produits hétérogènes	611
II.2	Ordonnancement sur ligne de production ou d'assemblage de produits hétérogènes	614
II.3	Organisation de la réactivité aux aléas de production	619

CHAPITRE X

FONDEMENTS DE LA PRISE DE DÉCISION EN GESTION DES STOCKS

I	LE STOCK ET SES FONCTIONS	622
I.1	Les fonctions du stock	622
I.1.1	Non-coïncidence dans le temps et dans l'espace de la production et de la consommation	622
I.1.2	Incertitude	623
I.2	Définition du système-stock	625
I.2.1	Domaines d'application de la théorie des stocks	625
I.2.11	Stocks de biens physiques	625
I.2.12	Stock et potentiel de prestations de service à un moment donné	625
I.2.2	Analyse du système-stock	626
I.2.21	Le stock	626
I.2.22	Système d'information	628
I.2.23	Système de décision	628
I.2.24	Les flux d'entrée	629
I.2.25	Les flux de sortie	630
I.2.251	Modélisation de la demande	630
I.2.252	Demande interne ou externe	632
I.2.253	Cas des demandes non satisfaites	632
II	LES POLITIQUES DE GESTION DE STOCK	633
II.1	Typologie des politiques de gestion des stocks	633
II.1.1	Les principales politiques de gestion de stock	633
II.1.11	Les fondements de la typologie retenue	633

II.1.111	Réponses à la question «Quand?»	633
II.1.111a	Point de commande: s	633
II.1.111b	Gestion calendaire: T	634
II.1.111c	Gestion calendaire conditionnelle: T, s	634
II.1.112	Réponses à la question «Combien?»	634
II.1.112a	Quantité fixe de commande: q	634
II.1.112b	Niveau de reapprovisionnement: S	634
II.1.112c	Quantité commandée variable en fonction du stock détenu: R_i, q_i	635
II.1.12	Typologie retenue	635
II.1.2	Choix d'une politique de gestion de stock	635
II.1.21	La méthode ABC	636
II.1.22	Applications de la méthode ABC	637
II.1.23	Politique calendaire ou politique «q, s»	637
II.2	Les fondements méthodologiques de la modélisation des politiques de gestion de stock	638
II.2.1	La démarche générale des modèles économiques de gestion	638
II.2.11	Les bases de la description physique des modèles économiques de gestion	640
II.2.111	Les variables de commande	640
II.2.112	Les paramètres physiques	640
II.2.113	Les variables d'état	641
II.2.12	Bases de la description en valeur des modèles économiques de gestion	642
II.2.121	Principes de valorisation des variables d'état décrivant la gestion du système productif	643
II.2.122	Valorisation de variables d'état décrivant la défaillance du système productif	644
II.2.122a	Cas des demandes perdues	645
II.2.122b	Cas de possibilité de rattrapage de la défaillance	645
II.2.13	Utilisation des modèles économiques de gestion	647
II.2.131	Cohérence interne du raisonnement	647
II.2.132	Le réalisme des modèles	650
II.2.133	Du bon usage du modèle économique de gestion	651
II.2.2	La modélisation en gestion de stocks	652
II.2.21	Les variables d'états retenues	652
II.2.22	La fonction économique retenue dans les modèles de stocks présentés	653
II.2.23	Les coûts-standard utilisés	655
II.2.231	Le coût de possession	655
II.2.231a	Coût de détention	655
II.2.231b	Coût de stockage	659
II.2.232	Les coûts de rupture	660
II.2.232a	Cas d'une demande externe (stock de distribution)	660
II.2.232b	Cas d'une demande interne (stock de fabrication)	662
II.2.233	Les coûts de commande	663

CHAPITRE XI

POLITIQUE DE GESTION CALENDRAIRE DES STOCKS «T, S»

I	LES MODÈLES DE BASE DES POLITIQUES DE GESTION CALENDRAIRE DES STOCKS	666
I.1	Gestion calendaire des articles non stockables	667
I.1.1	Détermination du stock initial S dans le cas d'une loi de demande discrète	667
I.1.11	Exemple introductif: le problème du pâtissier	667
I.1.12	Digression mathématique	668
I.1.121	Calcul analytique de	668
I.1.122	Relation entre $I_r(S)$ et $I_p(S)$	670
I.1.123	Calcul de $I_r(S)$	671
I.1.13	Détermination de la solution optimale	671
I.1.2	Détermination du stock initial S dans le cas d'une loi de demande continue	672
I.1.21	Exemple introductif: le problème du marchand de journaux	672
I.1.22	Digression mathématique	673
I.1.221	Calcul de la dérivée de $I_r(S)$ par rapport à S	673
I.1.222	Relation entre $I_p(S)$ et $I_r(S)$	674
I.1.223	Calcul de $I_r(S)$	674
I.1.23	Détermination de la solution optimale	676
I.1.3	Les conséquences économiques de la solution optimale	677
I.1.31	Indicateurs physiques	677
I.1.311	La rupture moyenne de stock $I_r(S)$	677
I.1.312	La demande moyenne satisfaite	678
I.1.313	Pourcentage moyen de demande non satisfaites	679
I.1.314	Le stock moyen possédé $I_p(S)$	680
I.1.315	Probabilité de rupture $\alpha(S)$	680
I.1.315a	Non coïncidence stricte entre la probabilité de rupture requise et la probabilité de rupture effective	680
I.1.315b	Recherche du coût de rupture implicite	681
I.1.315c	Probabilité de rupture et exercice annuel	681
I.1.315d	Probabilité de rupture et stock de sécurité	682
I.1.315e	Liaison existant entre $\alpha(S)$, $\beta(S)$, S et c_r	683
I.1.32	Indicateurs en valeur	683
I.1.321	Dépense moyenne d'acquisition	683
I.1.322	Indicateur de coût moyen $C(S)$	684
I.1.323	Marge nette moyenne $B(S)$	685
I.1.323a	Première démonstration	685
I.1.323b	Seconde démonstration	686
I.1.33	Analyse synthétique des conséquences de la politique optimal d'approvisionnement 688	
I.1.4	Remarques	688
I.1.41	Interprétation marginaliste du résultat trouvé	688
I.1.42	Généralité du modèle de base présenté	689
I.1.421	Exemple introductif	691
I.1.422	Analyse du problème	691
I.1.422a	Première formulation du problème	691

I.1.422b	Seconde formulation du problème	692
I.1.423	Solution numérique du problème introductif	694
I.1.43	Point mort en univers aléatoire et demandes non satisfaites perdues	695
I.1.431	Exemple introductif: le cas du restaurant universitaire d'Alphaville	696
I.1.432	Solutions analytiques et numériques du problème posé	697
I.1.433	Quelques extensions possibles	701
I.1.433a	Lien entre les approches probabilistes avec et sans demandes non satisfaites perdues	701
I.1.433b	Introduction de l'hypothèse d'une demande aléatoire non stationnaire	703
I.1.433c	Quelques implications stratégiques du point mort en univers aléatoire avec demandes non satisfaites perdues	704
I.2	Gestion calendaire des stocks d'articles stockables à délai d'obtention nul	708
I.2.1	Les données du problème	708
I.2.11	Exemple introductif: le problème du remplacement des ampoules d'éclairage	708
I.2.12	Hypothèses de calcul du stock moyen possédé	709
I.2.121	Cas d'une demande inférieure au niveau de reemplètement S – pas de rupture de stock	709
I.2.122	Cas d'une demande supérieure au niveau de reemplètement S (rupture de stock)	710
I.2.122a	Première hypothèse de calcul: l'interpolation linéaire	710
I.2.122b	Seconde hypothèse de calcul: la rupture de stock se produit en fin de période	711
I.2.2	Étude de la solution optimale exacte	712
I.2.21	Cas du coût de rupture indépendant du temps	713
I.2.211	Solution analytique	713
I.2.212	Résolution numérique du problème posé	714
I.2.22	Cas du coût de rupture proportionnel au temps	714
I.2.3	Étude de la solution optimale approchée	717
I.2.31	Détermination analytique de la solution optimale	717
I.2.32	Résolution numérique du problème posé	719
II	QUELQUES EXTENSIONS DES MODÈLES DE BASE	720
II.1	Introduction aux stocks à étages en gestion calendaire	721
II.1.1	Exemple introductif	722
II.1.2	Analyse du problème	723
II.1.21	Résultats analytiques	723
II.1.22	Généralisation	726
II.1.23	Application directe du raisonnement marginaliste	728
II.1.3	Solution numérique de l'exemple introductif	729
II.2	Gestion calendaire d'articles stockables à délai d'obtention non nul	729
II.2.1	Cas des demandes différées	730
II.2.11	Exemple introductif	730
II.2.12	Analyse du problème	731
II.2.121	Indépendance des demandes et condition d'optimalité	733
II.2.122	Indépendance des demandes et stock moyen possédé	735
II.2.123	Indépendance des demandes et probabilités de rupture après et avant livraison	737

II.2.124	Autres hypothèses de calcul possibles	737
II.2.13	Solution numérique de l'exemple introductif	738
II.2.2	Cas des demandes perdues	739
II.2.21	Demandes non satisfaites perdues : cas du délai d'obtention inférieur à la période de révision calendaire	741
II.2.211	Cas discret	742
II.2.212	Cas continu	745
II.2.22	Demandes non satisfaites perdues : cas du délai d'obtention compris entre une et deux fois la période de révision calendaire	749
II.3	Incidence de l'utilisation simultanée d'un même facteur rare pour plusieurs articles	753
II.3.1	Cas de délai d'obtention nul	754
II.3.11	Articles non stockables à délais d'obtention nuls	754
II.3.111	Exemple introductif	754
II.3.112	Formulation analytique du problème posé	755
II.3.113	Résolution numérique	756
II.3.12	Articles stockables à délai d'obtention nul	756
II.3.2	Gestion calendaire sous contrainte d'utilisation d'un facteur rare : cas du délai d'obtention non nul et des demandes non satisfaites différées	758
II.3.21	Exemple introductif	758
II.3.22	Analyse du problème	760
II.3.23	Résolution numérique du problème posé	762
III	ANNEXES DU CHAPITRE XI	765
III.1	Tables de relations entre S et $I_r(S)$ pour la loi Normale	765
III.1.1	Table A	765
III.1.2	Table B	766
III.1.3	Table C	767
III.1.4	Table D	769

CHAPITRE XII

POLITIQUE DE GESTION DES STOCKS DE TYPE «Q, S»

I	LA QUANTITÉ ÉCONOMIQUE DE COMMANDE EN UNIVERS CERTAIN	772
I.1	Présentation du modèle de base	772
I.1.1	Exemple introductif	772
I.1.2	Modélisation	773
I.1.3	Digression mathématique	774
I.1.4	Combien commander ? Formule de la quantité économique de commande	775
I.1.5	Adaptation de la formule de Wilson au cas d'une demande discrète	777

I.1.6	Impact du choix d'une quantité de commande non optimale sur le coût moyen annuel	778
I.1.7	Quand commander ? Détermination du point de commande	779
I.1.8	Analyse des conséquences de la politique optimale	781
I.2	Les améliorations du modèle en univers certain	783
I.2.1	Prix d'achat variable	783
I.2.11	Cas de l'augmentation tarifaire	784
I.2.111	Cas de la livraison et du paiement susceptibles d'être différés ($R_v = 0$)	784
I.2.112	Cas de la livraison et du paiement non susceptible d'être différés ($R_v \neq 0$)	786
I.2.12	Prix d'achat variable en fonction des quantités achetées	787
I.2.121	Rabais uniforme	788
I.2.122	Rabais progressif	791
I.2.13	Augmentation tarifaire dans le cas de rabais sur quantité	796
I.2.131	Augmentation tarifaire dans le cas de rabais uniforme	796
I.2.132	Augmentation tarifaire dans le cas de rabais progressif	797
I.2.2	Cas de l'approvisionnement continu	799
I.2.21	Le problème posé	800
I.2.22	Exemple numérique	800
I.2.23	Solution	800
I.2.3	Prise en compte de l'interdépendance avec d'autres articles	802
I.2.31	Utilisation commune et simultanée d'une même ressource rare	802
I.2.311	Implication de l'utilisation commune et simultanée d'une même ressource rare non financière «en régime de croisière»	803
I.2.311a	Le problème posé	803
I.2.311b	Exemple introductif	803
I.2.311c	Formulation mathématique du problème	806
I.2.311d	Solution numérique de l'exemple	809
I.2.311e	Interprétation économique de	811
I.2.312	Implication de l'existence d'une ressource rare financière (valeur limitée des stocks moyens détenus) sur la détermination de politique de «régime de croisière»	812
I.2.313	Implication de l'utilisation commune et simultanée d'une même ressource rare non financière et d'une même ressource rare non financière «en régime de croisière»	815
I.2.314	Prise en compte de contraintes dans la détermination de l'approvisionnement optimal lors d'une hausse tarifaire	816
I.2.314a	Prise en compte de la contrainte d'une ressource non financière en cas de hausse tarifaire	817
I.2.314b	Prise en compte de la contrainte d'une ressource financière en cas de hausse tarifaire	818
I.2.314c	Prise en compte simultanée d'une contrainte financière et d'une contrainte non financière en cas de hausse tarifaire	820
I.2.32	Utilisation commune et successive d'une même ressource rare	822
I.2.321	Le problème posé	822
I.2.322	Exemple introductif	822
I.2.323	Solution	824
I.2.324	Impact de la solution sur le planning d'atelier	826
I.2.33	Commandes groupées	826
I.2.331	Le problème posé	826
I.2.332	Application numérique	829

II	LA QUANTITÉ ÉCONOMIQUE DE COMMANDE EN UNIVERS ALÉATOIRE	829
II.1	La généralisation du modèle de base au cas aléatoire	829
II.1.1	Politique optimale «q, s» avec demande aléatoire et délai d'obtention certain	830
II.1.11	Exemple introductif	830
II.1.12	Détermination indépendante de s et de q	831
II.1.121	Principes suivis	831
II.1.122	Résolution d'un problème de quantité économique optimale	831
II.1.123	Détermination du stock de sécurité: résolution d'un problème de gestion calendaire	832
II.1.13	Détermination simultanée de s et q	834
II.1.131	Cas des demandes non satisfaites perdues	834
II.1.132	Cas des demandes non satisfaites différées	839
II.1.133	Cas des demandes non satisfaites partiellement différées et partiellement perdues	841
II.1.14	Indicateurs de qualité de service	842
II.1.141	Pourcentage de demandes non satisfaites, demande moyenne annuelle satisfaite	842
II.1.142	La notion de probabilité de rupture	844
II.1.143	L'intervalle moyen entre deux ruptures de stock	844
II.1.144	Indicateur de coût moyen annuel de gestion	845
II.1.145	Marge moyenne annuelle	845
II.1.146	Taux moyen de rotation du stock	846
II.1.147	Résumé des conséquences de la politique optimale	846
II.1.148	Politique de gestion basée sur la notion de niveau de service	846
II.1.15	Détermination d'une politique optimale (q, s) sous contrainte de niveau de service	849
II.1.16	Cas des points de commande multiples	853
II.1.161	Cas des demandes non satisfaites différées	853
II.1.162	Cas des demandes non satisfaites perdues	854
II.1.2	Politique optimale «q, s» avec demande aléatoire et délai d'obtention aléatoire	854
II.1.21	Exemple introductif	854
II.1.22	Probabilité de rupture et délai d'obtention aléatoire	856
II.1.221	La notion de distribution conditionnelle de la demande	856
II.1.222	Utilisation des théorèmes classiques de probabilité	856
II.1.223	Généralisation	857
II.1.23	Etude analytique de la loi de demande sur un délai aléatoire L	858
II.1.231	Exemple de simplification de la formulation analytique de la loi de	858
II.1.232	Moyenne et variance	859
II.1.24	Minimisation de l'indicateur du coût moyen annuel avec demande aléatoire et délai d'obtention aléatoire	859
II.1.241	Formulation analytique du problème posé	860
II.1.242	Recherche du point de commande correspondant à une probabilité de rupture imposée	861
II.1.243	Résolution numérique du problème posé	862
II.2	Les améliorations du modèle en univers aléatoire	863

II.2.1	Prise en compte de l'interdépendance entre articles	863
II.2.11	Utilisation commune et simultanée d'une même ressource rare non financière	863
II.2.111	Solution analytique	864
II.2.112	Calcul de la politique optimale	866
II.2.113	Exemple numérique	866
II.2.12	Utilisation commune et simultanée d'une ressource rare financière	867
II.2.13	Commandes groupées	868
II.2.131	Solution analytique	868
II.2.132	Calcul opérationnel de la politique optimale	869
II.2.133	Exemple numérique	870
II.2.2	Les rabais en univers aléatoire	871
II.2.21	Cas du rabais uniforme	872
II.2.211	Solution analytique	872
II.2.212	Application numérique	872
II.2.22	Cas des rabais progressifs	874
II.2.221	Cas des demandes non satisfaites perdues	875
II.2.221a	Solution analytique	875
II.2.221b	Calcul opérationnel de la politique optimale	875
II.2.222	Cas des demandes non satisfaites différées	875
II.2.222a	Solution analytique et algorithmique	875
II.2.222b	Application numérique	878
II.2.223	Cas mixte des demandes non satisfaites partiellement différées et partiellement perdues	878
II.2.23	Rabais momentané en univers aléatoire	881
II.2.231	Gestion indépendante des articles en l'absence de rabais sur quantité	881
II.2.232	Gestion indépendante des articles en présence de rabais sur quantité	884
II.2.232a	Augmentation tarifaire dans le cas de rabais uniforme	884
II.2.232b	Rabais momentané sur rabais progressif en univers aléatoire	885
II.2.233	Rabais momentané en univers aléatoire et gestion interdépendante des articles en raison d'une utilisation commune et simultanée de mêmes ressources rares	887

CHAPITRE XIII

LOGISTIQUE ET TRANSPORT

I	LA LOGISTIQUE	891
I.1	Définition du périmètre de la logistique	892
I.1.1	Définition de la logistique par l'AFNOR	893
I.1.2	Définition de la logistique par les organismes professionnels	895
I.2	La chaîne logistique	895
I.3	L'organisation physique du réseau de distribution	899
I.3.1	La sous-traitance de la distribution	900
I.3.2	Architecture du réseau de distribution	900
I.3.21	Entrepôt ou plate-forme	901
I.3.22	Localisation des entrepôts	902
I.3.23	Organisation physique des entrepôts ou plates-formes	903

II	LA DÉFINITION DE GAMMES DE TRANSPORT	904
II.1	Détermination des tournées	905
II.1.1	Le problème «original» du voyageur de commerce	906
II.1.11	Formulations possibles de ce problème	906
II.1.12	Exemple d'application	910
II.1.2	Le problème des tournées multiples à partir d'une même ville, avec introduction de contraintes de capacité et de fenêtres de temps	911
II.1.21	Création de tournées multiples à partir d'une même ville	912
II.1.22	Introduction de contraintes de capacité	914
II.1.23	Introduction des fenêtres de temps	916
II.1.3	Le problème des tournées multiples filaires	918
II.1.31	Formulation	918
II.1.32	Exemple numérique	920
II.2	Affectation de prestations de transport à des véhicules	921
II.2.1	Modélisation du problème posé	921
II.2.2	Exemple d'application	923

CHAPITRE XIV

SYSTÈMES D'INFORMATION ET GESTION DE LA CHAÎNE LOGISTIQUE

Index
thématique

I	LES SYSTÈMES D'INFORMATION DE GESTION	925
I.1	La multiplicité des systèmes d'information	926
I.2	L'irréductible hétérogénéité des systèmes d'information	927
I.3	Quelques tendances lourdes	929
I.3.1	Une extension des périmètres spatiaux et temporels des systèmes d'information	929
I.3.2	Des systèmes en perpétuelle transformation	931
I.4	Les systèmes d'information retenus	932
II	LA BASE DE DONNÉES DE LA PRODUCTION	932
II.1	Le modèle «Entité - Relation»	933
II.2	Présentation du modèle statique de système d'information en gestion de production	936
II.2.1	Le système productif	937
II.2.11	Machines (R1)	937
II.2.12	Pool de machine (R2)	939
II.2.13	Temps variables de réglage (R3)	939

II.2.14	Outillage (R4)	939
II.2.15	Famille d'outils (R5)	940
II.2.16	Opérateur (R6)	940
II.2.17	Qualification (R7)	941
II.2.18	Qualification des opérateurs (R8)	941
II.2.19	Ensemble de qualifications (R9)	941
II.2.110	Définition d'un ensemble de qualifications (R10)	942
II.2.2	Les flux de production potentiels	942
II.2.21	Références (R11)	942
II.2.22	Magasins (R12)	942
II.2.23	Point de stock (R13)	942
II.2.3	Les processus productifs	943
II.2.31	Gamme (R14)	944
II.2.32	Opération (R15)	945
II.2.33	Séquençement (R16)	945
II.2.34	Nomenclature (R17)	946
II.2.35	Les caractéristiques techniques d'une opération (R18 et R19)	946
II.2.4	La gestion des en-cours	947
II.2.41	Commandes (R20)	947
II.2.42	Clients (R21)	947
II.2.43	Ligne de commande (R22)	948
II.2.44	Lot d'une référence (R23)	948
II.2.45	Caractéristiques du lot (R24)	948
II.3	Présentation du modèle dynamique de système d'information en gestion de production	949
II.3.1	Système d'information et décisions opérationnelles de production	950
II.3.11	Les ressources productives	952
II.3.12	La production potentielle	953
II.3.13	Les flux de production	953
II.3.14	Fusion des modèles statiques et dynamiques	954
II.3.2	Système d'information et décisions tactiques de production	955
II.3.3	Implantation	956
III	LES ERP / ERM	957
III.1	La méthodologie des ERP	959
III.1.1	Les caractéristiques techniques d'un ERP	959
III.1.11	L'organisation logicielle d'un ERP	959
III.1.12	L'environnement informatique d'un ERP	960
III.1.2	Le réseau de processus d'un ERP	961
III.1.21	Les fondements	961
III.1.22	La base de processus et son usage	961
III.1.221	L'organisation logique de la base de processus	961
III.1.222	L'utilisation de la base de processus	962

III.1.3	Les problèmes méthodologiques posés	963
III.1.31	Problèmes liés à la fusion des sous-schémas de données découlant du mécano de processus retenu	963
III.1.32	Problèmes liés à la liaison événement-processus	967
III.2	Mise en œuvre des ERP	968
III.2.1	Les avantages et inconvénients d'un ERP	968
III.2.2	Implantation d'un ERP	970
III.2.3	L'utilisation d'un ERP dans une approche de chaîne logistique	971
IV	GESTION DE LA QUALITÉ	971
IV.1	Les normes ISO 9000	972
IV.1.1	La norme ISO 9000 (décembre 2000)	973
IV.1.2	La norme ISO 9001 (décembre 2000)	977
IV.1.3	La norme ISO 9004 (version 2000)	979

CHAPITRE XV

TECHNIQUES DE PRÉVISION

Index
thématique

I	PRÉSENTATION DE LA PROBLÉMATIQUE PRÉVISIONNELLE DANS LES CHRONIQUES	981
I.1	Redressement préalable des chroniques	982
I.2	Typologie des chroniques	987
I.2.1	Composante tendancielle	987
I.2.2	Composantes cycliques	988
I.2.3	Composante aléatoire	989
I.2.31	Processus purement aléatoire	989
I.2.311	Intervalle de temps certain	992
I.2.312	Intervalle de temps aléatoire	992
I.2.32	Processus aléatoire dont les paramètres varient au cours du temps	993
I.2.33	Processus stationnaires	994
I.2.4	Combinaison des composantes d'une chronique	994
I.3	Détection de la saisonnalité	997
I.3.1	Le corrélogramme	999
I.3.11	Le coefficient d'autocorrélation	999
I.3.12	Interprétation du coefficient d'autocorrélation	1002
I.3.2	Tests d'hypothèse du caractère aléatoire des fluctuations d'une chronique	1004
I.4	Techniques de prévision	1005
I.4.1	Typologie des techniques de prévision	1005

I.4.2	Critères de choix d'une technique de prévision	1007
II	LES FILTRES LINÉAIRES.....	1007
II.1	La notion de filtre	1008
II.1.1	Définition	1008
II.1.2	Choix d'un filtre linéaire	1008
II.1.21	Éléments de détermination du choix d'un filtre	1008
II.1.22	Illustration de la démarche	1009
II.2	Les moyennes mobiles	1012
II.2.1	Les méthodes empiriques	1012
II.2.11	Les filtres empiriques orientés vers l'estimation de la composante tendancielle (moyennes mobiles centrées)	1012
II.2.111	Moyenne mobile centrée en l'absence de composante saisonnière	1013
II.2.112	Moyenne mobile centrée dans le cas de l'existence d'une composante saisonnière	1015
II.2.112a	Moyenne mobile centrée dans le cas de l'existence d'une composante saisonnière comportant un nombre impair de périodes	1015
II.2.112b	Moyenne mobile centrée dans le cas de l'existence d'une composante saisonnière comportant un nombre pair de périodes	1017
II.2.112c	Estimation de la composante saisonnière à partir de la moyenne mobile centrée	1018
II.2.112d	Choix entre le modèle multiplicatif et le modèle additif	1022
II.2.112e	Composante saisonnière et variation par palier de la composante tendancielle	1026
II.2.112f	Les méthodes de décomposition « automatique »	1026
II.2.12	Les filtres empiriques orientés vers l'estimation prévisionnelle de la composante tendancielle	1027
II.2.121	Moyenne mobile simple non centrée (cas de l'absence d'évolution tendancielle)	1028
II.2.122	Moyenne mobile double (cas d'une évolution tendancielle linéaire)	1029
II.2.123	Remarques	1032
II.2.123a	Interprétation de la pente a	1032
II.2.123b	Choix de la longueur du filtre	1034
II.2.123c	Explicitation du filtre linéaire utilisé avec la moyenne mobile double	1035
II.2.2	Méthode basée sur les moindres carrés	1035
II.2.21	Variance des filtres linéaires	1036
II.2.22	Application de la méthode des moindres carrés au cas du trend linéaire .	1036
II.2.221	Introduction de la régression locale à partir d'un exemple numérique	1037
II.2.222	La régression locale, utilisation implicite d'un filtre linéaire	1038
II.2.223	Supériorité du filtre linéaire optimal au sens des moindres carrés sur les filtres empiriques	1039
II.2.224	Généralisation de la démarche	1040
II.2.225	Jugement par intervalle de confiance	1042
II.2.23	Moyenne mobile à utiliser dans le cas d'évolution tendancielle non linéaire	1044
II.2.3	Prévisions globales obtenues par combinaison des prévisions effectuées sur les composantes tendancielle et saisonnière	1045
II.3	Les techniques de lissage exponentiel	1046
II.3.1	Lissage exponentiel simple (absence d'évolution tendancielle et de saisonnalité)	1046

II.3.2	Lissage exponentiel double (évolution tendancielle linéaire et absence de saisonnalité)	1050
II.3.3	Lissage exponentiel avec évolution tendancielle et saisonnalité (Modèle de Holt et Winters)	1056
II.3.31	Initialisation de l'accroissement moyen mensuel	1057
II.3.32	Initialisation de la valeur moyenne locale	1057
II.3.33	Initialisation des facteurs saisonniers	1057
II.3.34	Calculs récurrents	1059
II.4	Les filtres «différence»	1062
II.5	Remarques générales sur l'utilisation des filtres	1063
II.5.1	L'effet Slutsky-Yule	1065
II.5.2	Le jugement par intervalle de confiance	1066
II.5.21	Intervalle de confiance d'une prévision	1067
II.5.211	Calcul direct.	1067
II.5.212	Utilisation de la moyenne des écarts absolus	1068
II.5.22	Modification de comportement d'une chronique	1069
III	LA PRÉVISION À PARTIR DE L'HISTORIQUE COMPLET	1071
III.1	Les techniques de prévision basées sur les moindres carrés ...	1071
III.1.1	Estimation simultanée du trend et des facteurs saisonniers par la méthode des moindres carrés	1071
III.1.11	Estimation simultanée du trend et de la composante saisonnière par les moindres carrés sur table de Buys-Ballot	1073
III.1.12	Estimation simultanée du trend et de la composante saisonnière par la régression multiple	1076
III.1.13	Prévision	1081
III.1.2	Auto-régression multiple optimale	1082
III.2	Les approches de «Box et Jenkins»	1083
III.2.1	Traitement de chroniques non tendanciennes et non saisonnières	1084
III.2.11	Les modèles de référence	1084
III.2.111	Processus auto-régressif	1085
III.2.111a	Définition	1085
III.2.111b	Fonction d'autocorrélation	1086
III.2.111c	Fonction d'autocorrélation partielle	1088
III.2.112	Processus en moyenne mobile	1089
III.2.112a	Définition	1089
III.2.112b	Fonction d'autocorrélation.	1090
III.2.112c	Fonction d'autocorrélation partielle	1090
III.2.113	Les processus mixtes	1091
III.2.113a	Définition	1091
III.2.113b	Fonctions d'autocorrélation et d'autocorrélation partielle	1092
III.2.114	Résumé des principales caractéristiques des modèles stationnaires les plus usuels	1092
III.2.12	Prévision	1092
III.2.13	Exemple d'application	1096
III.2.2	Traitement de chroniques tendanciennes et saisonnières	1097

III.3	Une utilisation simultanée de la régression multiple et des approches type «Box et Jenkins»: le modèle ARMAX	1101
-------	--	------

CHAPITRE XVI

PROGRAMMATION LINÉAIRE

I	PRÉSENTATION DES BASES TECHNIQUES DE LA PROGRAMMATION LINÉAIRE	1105
I.1	Les fondements de la programmation linéaire	1106
I.1.1	Formulation du problème	1106
I.1.2	Solution analytique du problème	1106
I.2	Interprétation économique des résultats	1109
I.3	Introduction à l'analyse post-optimale	1111
I.3.1	Modification de coefficients de la fonction-objectif	1113
I.3.11	Modification d'un coefficient d'une variable hors base	1113
I.3.12	Modification d'un coefficient d'une variable de la base	1113
I.3.13	Modification de plusieurs coefficients de la fonction-objectif	1115
I.3.2	Modification du second membre d'une contrainte	1115
I.3.21	Cas d'une contrainte non saturée	1116
I.3.22	Cas de contrainte saturée	1117
I.4	Résolution d'un programme linéaire par l'algorithme du simplexe	1117
I.4.1	Problème de maximisation avec contraintes du type \leq	1118
I.4.2	Extensions de l'algorithme du simplexe	1122
I.4.3	Cas particuliers	1128
I.4.4	Exemple de résolution par Excel	1129
II	GÉNÉRALISATION.....	1132
II.1	Un nouveau contexte pour la programmation linéaire	1132
II.2	Le dépassement du modèle linéaire	1135
II.2.1	Analyse de la valeur prise par le premier membre d'une contrainte	1136
II.2.2	Prise en compte de contraintes logiques	1137
II.2.3	Introduction des fonctions-objectifs non linéaires	1141
II.2.31	Introduction des charges fixes	1142
II.2.32	Généralisation aux fonctions de coût (ou de recettes) linéaires par morceau	1142

CHAPITRE XVII

PRINCIPAUX ÉLÉMENTS DE MATHÉMATIQUES FINANCIÈRES

I	LES DIVERSES NOTIONS D'INTÉRÊT	1147
I.1	L'intérêt simple	1147
I.2	Intérêt composé	1148
I.2.1	Principes	1148
I.2.2	Les modalités pratiques de calcul d'une capitalisation	1150
I.2.3	Représentation graphique de problèmes de mathématiques financières ..	1151
I.2.4	Remarques	1151
I.2.41	Recherche de i (t, x_0 et x_t étant supposés connus)	1152
I.2.42	Recherche de t (i, x_0 et x_t étant supposés connus)	1153
I.3	Actualisation	1154
I.3.1	Principes	1154
I.3.2	Modalités pratiques de calcul d'une actualisation	1154
I.3.3	Actualisation et bilan actualisé	1155
II	LE TRAITEMENT DES ÉCHÉANCIERS	1156
II.1	Représentation graphique des échéanciers	1157
II.2	Les différents taux d'intérêt en cas de versements pluri-annuels ...	1159
II.3	CAPITALISATION D'UN ÉCHÉANCIER CONSTANT	1162
II.3.1	Capitalisation d'un échéancier constant de versements en fin de période (a_F)	1162
II.3.2	Capitalisation à la fin de la période n d'un échéancier constant de versements de début de période (a_D)	1165
II.3.3	Recherche du versement constant périodique a_F ou a_D équivalant à une somme future x_n	1167
II.3.31	Cas de versements de fin de période (a_F)	1167
II.3.32	Cas de versements de début de période (a_D)	1168
II.4	Actualisation d'un échéancier constant	1168
II.4.1	Actualisation d'un échéancier de versements constants en fin de période (a_F)	1168
II.4.2	Actualisation d'un échéancier de versements constants en début de période (a_D)	1171
II.4.3	Recherche du versement constant a d'un échéancier équivalent à une somme actuelle (x_0)	1173
II.4.31	Cas de versements a_F réalisés en fin de période	1173
II.4.311	Calcul des versements constants périodiques a_F (en fonction de n, i et x_0)	1173

II.4.312	Calcul du capital restant dû après un versement (<i>fin</i> de période) ainsi que du cumul des intérêts ou du capital remboursé au cours de versements successifs	1174
II.4.32	Cas de versements a_D réalisés en début de période	1177
II.4.321	Calcul des versements constants périodiques a_D (en fonction de n , i et x_0)	1177
II.4.322	Calcul du capital restant dû après un versement (<i>début</i> de période) ainsi que du cumul des intérêts ou du capital remboursé au cours de versements successifs	1178
II.5	Recherche du TRI (ou du taux actuariel) d'une opération	1179
II.5.1	Principe	1179
II.5.2	Le Taux effectif global (TEG) d'un emprunt	1180
II.5.21	Le calcul du TEG	1180
II.5.22	La comparaison des offres de prêt	1181
II.6	Choix d'une date différente de celle de <i>début</i> ou de <i>fin</i> de période	1183

BIBLIOGRAPHIE

INDEX THÉMATIQUE

INDEX DES AUTEURS

Chapitre I

INTRODUCTION

Dans une première [section I](#), nous précisons le champ de la gestion de production et des flux. On examinera à la [section II, page 74](#), quelques fondements de l'évaluation économique des prises de décisions dans ce domaine. Dans une dernière section, on introduira le plan de cet ouvrage ([section III, page 95](#)).

SECTION I LE CHAMP DE LA GESTION DE LA PRODUCTION ET DES FLUX

Après avoir introduit quelques définitions (§ I-1) pour préciser l'objet de cet ouvrage, on présentera une typologie de systèmes productifs (§ I-2, page 47) et une analyse des processus (§ I-3, page 67).

Table des
matières

I-1 Définitions

Avant de définir ce qu'est la gestion de production et des flux (§ I-1.2, page 44), il faut définir ce qu'est la production et comment elle s'intègre dans un enchaînement de processus (§ I-1.1).

Index
thématique

I-1.1 Production et chaîne logistique

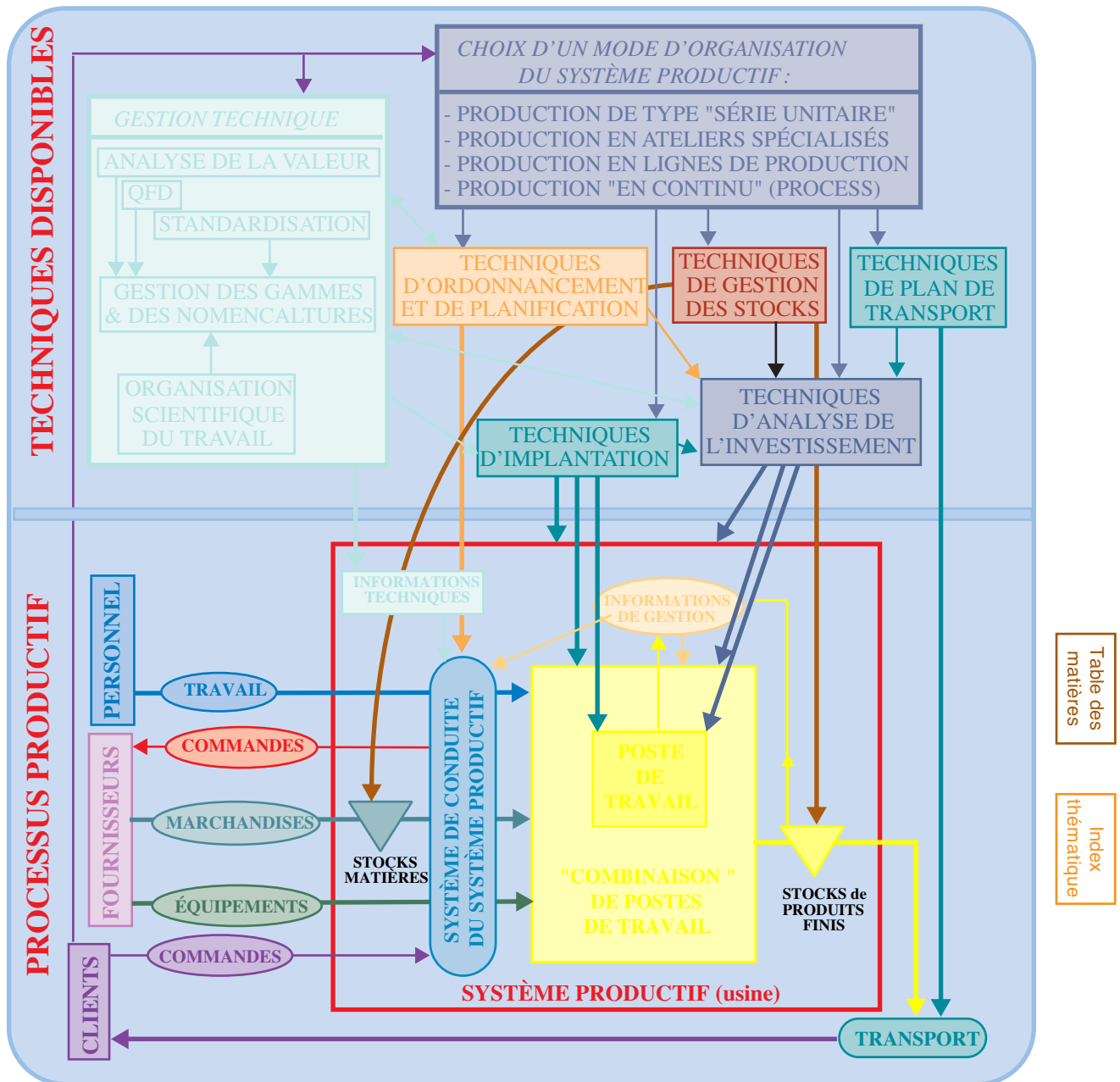
La **production** est une transformation de ressources appartenant à un système productif et conduisant à la création de biens *ou* de services. D'une manière générale, les ressources mobilisées dans le processus de production peuvent être de quatre types :

- des équipements (bâtiments, machines, outillage, etc.);
- des hommes (opérateurs intervenant soit directement dans le processus de transformation, soit indirectement pour en permettre le bon déroulement ou même l'existence, ce qui correspond à des activités dites de support);
- des matières (matières premières, composants, etc.);
- des informations techniques ou procédurales (gammes, nomenclatures, consignes, procédures, etc.) ou relatives à l'état et à l'utilisation du système productif (ce qui permet de programmer la production et de réagir aux perturbations observées).

La partie inférieure de la [figure 1, page 42](#), représente le processus de production de produits manufacturés. Ce schéma servira de support à la présentation d'un certain nombre de grands problèmes de production et d'approches méthodologiques auxquels la partie supérieure du schéma est consacrée.

FIGURE 1

Relations entre les processus disponibles et les techniques de gestion de production



La production d'un bien s'effectue par une succession d'opérations consommant des ressources et transformant les caractéristiques morphologiques de «matières» (au sens large du terme) ou leur localisation (manutention/transport).

La production d'un service s'effectue elle aussi par une succession d'opérations consommant ces ressources sans qu'il y ait nécessairement transformation de matières. La production de services peut consister en :

- une mise à disposition de produits à des clients par le biais d'opérateurs (vendeurs, guichetiers, coursiers, etc.) ou de machines (billetteries, distributeurs de nourriture ou de boisson, etc.);

- une mise à disposition d'informations simples (position de compte par Guichets Automatiques Bancaires, etc.) ou de résultats d'un traitement complexe (détermination de droits après analyse d'un dossier, etc.);
- une modification de l'état de certaines ressources (réparation ou maintenance pour les équipements, formation pour les hommes, changement de la localisation de produits ou de personnes, etc.).

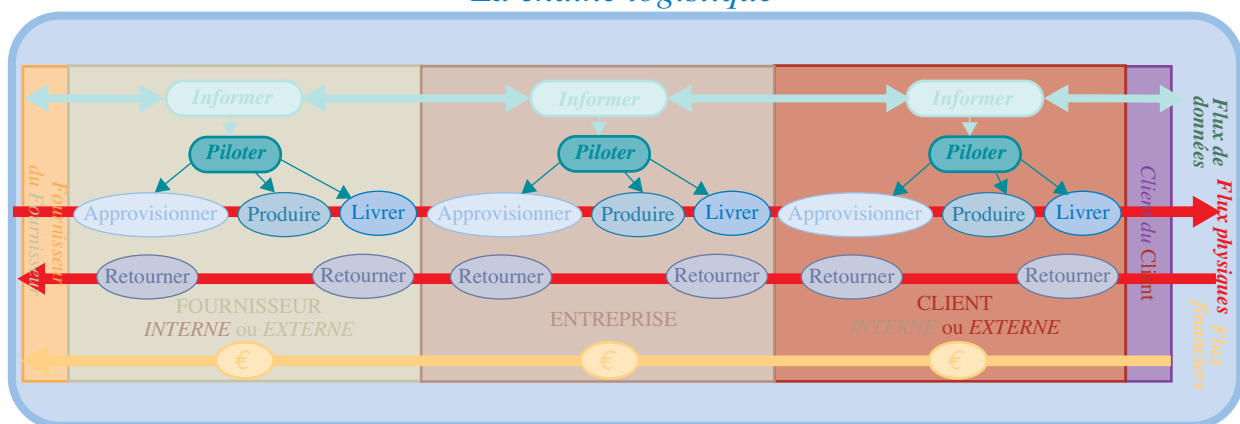
Tout comme la production de biens, la production de services est consommatrice de matières (énergie, supports divers d'informations, etc.), mais celles-ci ne font qu'exceptionnellement l'objet d'une « consommation directe » par le client (comme dans la restauration, par exemple). La plupart des activités de support de l'activité principale de l'entreprise (telles que la gestion de la paye ou de la comptabilité, le recouvrement de créances, l'informatique de gestion, l'entretien ou la maintenance...) peuvent être soit intégrées à l'entreprise, soit confiées à des tiers. Le client d'une même prestation de service pouvant être interne à l'entreprise ou externe, il s'ensuit que les problèmes posés par la production de ces prestations de service doivent être analysés en raison de leur existence intrinsèque et non en fonction du degré d'intégration retenu par l'entreprise, consommatrice de la prestation.

Le schéma de la **figure 1**, présente l'inconvénient de privilégier une vision locale de la définition des problèmes. Celui de la **figure 2** offre une autre lecture, celle de la **chaîne logistique** (*supply chain*). Dans cette approche¹, la satisfaction du consommateur est le résultat de la performance d'un enchaînement de processus, allant des fournisseurs aux clients, dépassant donc les frontières juridiques de l'entreprise. Cette **figure 2** illustre les enchaînements de flux physiques et informationnels et souligne l'interdépendance des processus et celle des décisions, en incitant donc à ne pas privilégier une vision locale des problèmes, mais à les définir dans une perspective globale. Cette définition passe par celle des leviers de commande et des jeux de contraintes que ces différents sous-systèmes partagent.

Table des matières

Index thématique

FIGURE 2
La chaîne logistique



1. sur laquelle nous reviendrons longuement au § I-2, page 895 du chapitre XIII.

I-1.2 Gestion de la production et des flux

I-1.2.1 L'approche retenue

La **gestion de production** a pour objet la recherche d'une organisation efficace de la production de biens et de services. En situant la production dans la perspective plus large de la chaîne logistique, la définition de cette organisation doit aussi impérativement prendre en compte la maîtrise des flux entrants (approvisionnements) et celle des flux sortants (distribution) pour assurer le niveau de satisfaction globalement attendu par les clients. L'interdépendance des problèmes conduit à porter autant d'attention à la définition des interfaces qui conditionnent les problèmes à résoudre qu'à la résolution de ces problèmes.

Cette gestion de la production et des flux s'appuie sur un ensemble d'outils d'analyse et de résolution des problèmes qui visent à limiter les ressources nécessaires à l'obtention d'une production dont les caractéristiques techniques et commerciales sont connues. La détermination de ces caractéristiques (définition du produit, des procédés de fabrication, de la demande à satisfaire) est très largement externe à la gestion de production qui n'intervient que pour en limiter, pour un horizon donné, le champ des possibilités. À ce niveau, ce sont les sciences de l'ingénieur, la gestion commerciale et la gestion stratégique qui interviennent. Relève nettement des sciences de l'ingénieur tout ce qui se rapporte à la définition technique du produit et des processus. Certaines approches comme l'analyse de la valeur, le QFD ou les techniques de standardisation sont à l'interface des sciences de l'ingénieur et des sciences de gestion ; elles seront abordées au **chapitre II, page 99**, de cet ouvrage.

La multiplicité des approches possibles en gestion de la production et des flux s'explique par la plus ou moins grande complexité des problèmes rencontrés et le point de vue retenu pour articuler ces problèmes entre eux dans un contexte donné. En effet, cette définition et structuration des problèmes sont non seulement peu évidentes, mais elles ne sont pas uniques et reposent sur un art difficile à maîtriser, fondé sur des connaissances scientifiques, de bonnes capacités d'analyse, de l'intuition et un certain sens politique. Dans cette approche systémique, la décision prise au niveau d'un sous-système ou d'un processus devient une contrainte pour un autre sous-système ou un autre processus dès lors qu'il n'est pas réaliste de chercher à résoudre globalement les problèmes décisionnels relevant de plusieurs sous-systèmes ou plusieurs processus. Une fois définis, bon nombre de ces problèmes trouvent des solutions s'appuyant sur des approches décrites dans cet ouvrage qui vise à faire comprendre l'intérêt, les conditions d'utilisation et les limites des principales instrumentations disponibles. Au final, les réponses trouvées se traduisent par un mécano d'outils, appelé à évoluer en fonction des modifications de l'environnement technique, économique et social des entreprises et des progrès réalisés en sciences de gestion et en génie industriel.

I-1.2.2 Typologies décisionnelles

Pour mieux situer les différents problèmes rencontrés en gestion de la production, il est utile de rappeler que l'on classe habituellement les décisions de gestion en trois catégories¹ : les décisions stratégiques, tactiques et opérationnelles.

- Les **décisions stratégiques** se traduisent par la formulation de la politique à long terme de l'entreprise (vision à plus de deux ans, en général), ce qui implique une définition volontariste et cohérente du portefeuille d'activités qu'elle entend avoir à terme et des ressources stables qu'elle entend mettre en œuvre pour parvenir à ses fins. Les ressources stables visées sont aussi bien les machines (d'où des opérations d'investissement, de radiation, de cession, de modification de la disponibilité par une modification de maintenance...) que les hommes (embauche, licenciement, préretraite, modification de qualification par des plans de formation...), les informations (procédures de gestion formalisées et bases de données techniques, c'est-à-dire les gammes, nomenclatures et schémas) détenues dans des systèmes d'information caractérisés par leur degré d'intégration et de latence¹ et les encours de matières, composants et produits semi-finis (dont le niveau joue sur la rapidité de la propagation des problèmes d'un centre de production à un autre, en fonction d'une polyvalence plus ou moins grande donnée des équipements et des hommes).
- Les **décisions tactiques** correspondent à un ensemble de décisions à moyen terme. Parmi les décisions tactiques concernant la gestion de la production, on trouve: la **planification de la production**, qui est une programmation prévisionnelle de la production, agrégée par famille de produits, pour un ensemble de périodes dont l'amplitude varie entre la semaine et le mois (selon les entreprises) et qui est établie sur un horizon variant généralement entre 6 et 18 mois; la préparation du **plan de transport** qui correspond à un ensemble de tournées-types de distribution ou d'approvisionnement qui seront utilisées dans les entreprises où ces problèmes sont relativement stables et ont une certaine incidence économique. Ces décisions s'inscrivent dans un cadre logique dessiné par les décisions stratégiques, mais l'horizon de planification est normalement trop court pour que les capacités de production puissent être modifiées sérieusement (à la suite d'une réorientation stratégique concomitante aux décisions tactiques considérées ici).
- Les **décisions opérationnelles** assurent la flexibilité quotidienne nécessaire pour faire face aux fluctuations prévues de la demande et des disponibilités de ressources (mode prévisionnel) et réagir aux aléas (mode correctif), dans le respect des décisions tactiques. Parmi les décisions opérationnelles concernant la gestion de la production, on trouve: la **gestion des stocks**, qui assure la mise à disposition des matières premières et des composants; l'**ordonnancement**, qui consiste en une programmation prévisionnelle détaillée des ressources mobilisées (opérateurs, équipements et outillages) dans l'exécution des opérations nécessaires à la production élémentaire de biens ou de prestations de service (pour un client final ou pour des besoins internes, s'il s'agit d'opérations de maintenance ou de manutention), sur un horizon ne dépassant pas quelques dizaines d'heures, dans le cadre d'un découpage temporel généralement de l'ordre de la minute. S'y ajoute, dans

1. *Note de la page précédente.* Cette typologie est dérivée de celle introduite par Anthony (1965, [18]), qui distingue la planification stratégique, le contrôle de gestion et le contrôle opérationnel; ces trois niveaux de programmation et de suivi correspondent à ceux utilisés ici.

1. C'est-à-dire le retard existant entre l'état du monde réel et sa transcription dans une base de données.

un certain nombre de systèmes productifs, mais avec une granularité temporelle et spatiale plus fine, tout ce qui concerne le **pilotage informatique en temps réel** d'ensembles productifs jouissant d'une certaine autonomie de conduite par rapport au reste du système productif (machines à commande numérique, ateliers flexibles, magasins automatiques, automates bancaires, billetterie automatique ferroviaire, etc.).

Ces trois classes de décisions ne diffèrent pas seulement par l'horizon qui les caractérise de prime abord. Deux éléments supplémentaires doivent être pris en compte : le niveau de compétence hiérarchique et celui d'agrégation de la décision. En effet, les décisions opérationnelles sont normalement prises par des agents de maîtrise ou des agents d'exécution, même si celles-ci ont été préparées par des cadres (constitution de tables, d'abaques ou de consignes diverses permettant de donner rapidement la réponse jugée appropriée à une situation donnée). Les décisions tactiques sont en général du ressort des cadres et les décisions stratégiques relèvent de la direction de l'entreprise (assistée, bien entendu, de ses principaux cadres). Par niveau d'agrégation de la décision, il faut entendre le niveau de détail des décisions prises quant aux productions à effectuer et aux moyens à mettre en œuvre. Le niveau d'agrégation sera d'autant plus grand que l'horizon de la décision est éloigné : ceci implique que, pour des décisions tactiques ou stratégiques, on travaillera, par exemple, par famille de produits et par centaines d'heures ou milliers d'heures de travail, tandis que, pour les décisions opérationnelles, on prendra des décisions portant sur des composants élémentaires d'un article et sur l'utilisation, dizaine de minutes par dizaine de minutes, des différents postes de travail.

Une seconde typologie est nécessaire pour compléter la description des décisions de gestion de production. H. Simon distingue (1960, [388], p. 5 et 6) les **décisions programmables**, des **décisions non programmables** : « une décision est dite programmable dans la mesure où elle est répétitive et routinière et où il existe une procédure précise pour la prendre en charge sans qu'il soit nécessaire de la considérer comme un cas nouveau chaque fois qu'elle est à prendre ; une décision est dite non programmable dans la mesure où elle est nouvelle, non structurée et importante ». Ce clivage est repris en des termes voisins au tout début des années 1970, par le courant des Systèmes Interactifs d'Aide à la Décision (SIAD) et, en particulier, Scott Morton qui préfère opposer les **décisions structurées** aux **décisions non structurées** parce que ces qualificatifs impliquent une dépendance moindre par rapport à un traitement informatique et ne se réfère qu'à la nature intrinsèque du processus de résolution du problème¹. Comme très souvent dans la réalité, les choses sont rarement aussi contrastées et une catégorie intermédiaire, celle des **décisions semi-structurées**, doit être introduite, et c'est cette classe de décisions que les promoteurs des SIAD veulent faciliter.

Ces deux typologies se combinent², ce qu'illustre le **tableau 1, page 47**, pour la seule production de biens (un tableau similaire pouvant être établi sans difficulté pour la production de services). La diversité des informations mobilisée n'est pas sans conséquence sur les systèmes d'information à créer ; nous reviendrons sur ce

1. Voir Keen & Scott Morton (1978, [258]), p. 86.

2. Voir Keen & Scott Morton (1978, [258]), p. 88 à 91.

point au [chapitre XIV](#), en particulier avec le [tableau 275 de la page 926](#) qui complète ce [tableau 1](#) en donnant des exemples de données mobilisées dans cette prise de décision¹.

TABLEAU 1
Exemple de décisions de production de produits manufacturés, caractérisées selon les deux typologies décisionnelles retenues

		Décision		
		structurée	semi structurée	non structurée
Décision	stratégique	Révision des tables de décision utilisées en gestion des approvisionnements	Réaménagement de l'implantation des équipements d'une usine (décision assistée par ordinateur)	Acquisition d'un système interactif d'aide à l'ordonnancement en ateliers spécialisés
	tactique	Révision d'un programme de production de planification glissante (de type MRP [†])	Gestion d'un projet de lancement de produit nouveau	Réponse à un appel d'offre pour une entreprise d'ingénierie électrique
	opérationnelle	Exécution d'une gamme sur une machine à commande numérique	Ordonnancement en ateliers spécialisés	Allocation de ressources de maintenance corrective

†. *Material Requirement Planning* ou, pour la MRP-II, *Manufacturing Resource Planning* (voir [chapitre VI](#), page 455).

Dans cet ouvrage, nous présenterons en détail ces différentes décisions, mais il est nécessaire, au préalable, de préciser la variété des systèmes productifs rencontrés et donc d'établir des grilles d'analyses car la nature et l'importance de ces décisions varient largement selon les cas de figure rencontrés.

I-2 Typologie des systèmes productifs

Il est utile, dans l'analyse des systèmes productifs, de faire simultanément appel à deux grilles d'analyse qui permettent de mieux saisir les problèmes de gestion se posant à telle ou telle entreprise, et les raisons pour lesquelles ceux rencontrés par deux entreprises semblables par leurs techniques ou leurs marchés sont différents. La première typologie est axée sur le fait qu'une production peut être réalisée soit à la suite d'une commande, soit pour alimenter un stock (§ I-2.1). La seconde typologie présentée est liée à un mode d'organisation de la production qui diffère selon la plus ou moins grande importance et variété des flux de produits traités par les systèmes productifs (§ I-2.2, page 50). On examinera enfin rapidement la spécificité des entreprises de réseau (§ I-2.3, page 62).

I-2.1 Production pour stock ou production à la commande

Nous examinerons successivement la définition que l'on peut donner à ces deux modes de production et les principales implications qui en découlent.

1. Voir également l'article de Giard (1993, [179]).

I-2.1.1 Définition des productions à la commande ou pour stock

Une **production** s'effectue **à la commande** lorsque tout ou partie de la fabrication (et/ou de l'assemblage) est déclenché par la commande ferme d'un client. On parle d'**assemblage à la commande** lorsque l'on utilise presque exclusivement des composants existants (fabriqués pour stock) pour exécuter un produit manufacturé en réponse à une commande précise d'un client. En général, on parle de **fabrication à la commande**¹ quand, en réponse à une commande précise, il faut effectuer un travail de conception pouvant ou non nécessiter la création de nouveaux composants.

Une **production pour stock** est déclenchée par l'anticipation d'une demande solvable s'exerçant sur un produit dont les caractéristiques sont définies par le fabricant. Cette distinction se retrouve également dans les services. C'est ainsi que, dans les centres de tri, le courrier non urgent est trié sur stock alors que le courrier urgent est trié immédiatement; la capacité doit être définie de façon à atteindre un niveau de service désiré «en moyenne» (par exemple, 99% du courrier urgent interdépartemental seront traités avant le départ des avions postaux). Il est facile de trouver des exemples similaires dans la plupart des productions de prestations de service, la discrimination se traduisant par des niveaux de service et de coût différents.

Pour envisager de produire pour stock, deux conditions nécessaires doivent être réunies:

- l'éventail des produits finis visés doit être restreint,
- la demande de chaque produit doit être suffisamment importante et prévisible.

En outre, pour justifier économiquement le choix d'une production pour stock, l'une des deux conditions suivantes doit être remplie:

- le **cycle de production** (intervalle de temps séparant la date de fin de fabrication du produit fini de la plus précoce des dates de début de fabrication des composants utilisés) est long par rapport au délai commercial admissible (délai séparant la prise de commande de la livraison),
- la saisonnalité de la demande est trop forte pour justifier le maintien de ressources en hommes et en machines qui seraient excédentaires une bonne partie de l'année.

On trouvera bien sûr des cas de figure où ces deux conditions seront simultanément remplies. Les techniques de gestion des stocks sont présentées en détail aux chapitres **X**, **XI** et **XII**. Le problème de la fabrication pour stock est lié à celui de la **standardisation** (analysé en détail [page 133](#)) qui peut viser le produit fini (cas implicitement retenu jusqu'ici), mais aussi les composants utilisés. Il est bien évident que des produits finis standardisés n'utiliseront que des composants standardisés.

1. La littérature anglo-saxonne parle encore de *engineer-to-order product* pour désigner un produit fabriqué à la commande et de *assembly-to-order product* pour désigner un produit assemblé à la commande; le vocable de *make-to-order product* regroupant les deux catégories. Elle utilise le terme de *stocked product* pour désigner un produit fabriqué pour stock. Cette distinction a son importance dans les approches de chaîne logistique (voir le § I-3, [page 899](#), du [chapitre XIII](#)).

On observe de plus en plus souvent le cas d'une production diversifiée utilisant des composants standardisés, dans une logique d'**assemblage à la commande**, sous deux formes.

- L'assemblage à la commande peut partir de composants standardisés fabriqués pour stock et les assembler à la commande pour *fabriquer une série* plus ou moins importante d'un produit « sur mesure ». Ce cas de figure se rencontre, par exemple, dans les « séries limitées » offertes par les constructeurs automobiles pour relancer la vente d'un modèle ou sous la pression de la grande distribution poussant les fabricants à une diversification du produit fini sur des bases techniques tout à fait mineures, afin de pouvoir « afficher » localement « les prix les plus bas » sur une référence qu'en définitive ils pourront, à la limite, être les seuls à distribuer. Cette situation se retrouve aussi dans le cas de produits finis fabriqués à la commande en petit nombre ou à l'unité, en suivant une logique de type « mécano » (c'est ainsi qu'une firme américaine spécialisée dans la fabrication d'engins de manutention est capable de répondre à n'importe quelle demande d'engins spécifiques à partir d'un catalogue de deux ou trois dizaines de milliers de références élémentaires standardisées et compatibles).
- L'assemblage à la commande peut aussi être lié à une logique commerciale visant à *offrir un produit « sur mesure »* au client. La différenciation des produits finis s'effectue à partir du choix d'options par le client, dans des ensembles de composants standardisés. La combinaison d'options différentes peut conduire à des centaines de milliers, voire à des millions, de variantes d'un même produit de base ; à titre d'exemple, certains modèles automobiles français correspondent actuellement à près de 200 000 « variantes » du modèle de base par le biais des options offertes¹ : moteur, toit ouvrant, ABS, autoradio, couleur de la carrosserie, sellerie, etc. Un effort de rationalisation a toutefois été opéré puisque ce nombre pouvait être presque dix fois plus grand dans les années soixante-dix. Les options offertes ne remettent pas en cause la logique technique du produit : par exemple, les différents moteurs que l'on peut monter dans un véhicule sont conçus pour utiliser les mêmes systèmes de fixation, de transmission et d'alimentation. L'importance des ventes autorise une fabrication en série des variantes d'une option car, si la combinatoire des choix offerts conduit à un très grand nombre de produits finis différents, le nombre de variantes de chaque option est faible et le flux de production « se partage » entre ces quelques variantes.

Une analyse détaillée de la diversité sera proposée à la [page 102](#). On reviendra de manière approfondie sur le problème de la standardisation, [page 133](#).

I-2.1.2 Principales conséquences de cette typologie

La problématique de la planification, traitée au [chapitre VI, page 455](#), se retrouve principalement dans le cas de production pour stock de produits finis ou de composants utilisés en assemblage à la commande ; la principale technique de

1. Par exemple, un véhicule personnalisable par le choix entre 5 moteurs, entre 10 couleurs, entre 55 combinaisons de niveaux d'équipement intérieurs, entre 4 postes de radio, avec la possibilité ou non d'airbag et de toit ouvrant conduit à : $5 \times 10 \times 55 \times 4 \times 2 \times 2 = 44\,000$ produits finis différents.

planification est celle de la MRP que l'on examinera en détail au [chapitre XV, page 981](#). Cette planification repose sur une prévision assez fine de la demande.

L'importance du stockage, dans le cas d'une production pour stock, dépend non seulement de la capacité « globale » de réponse du système productif (demande saisonnière et rapport du cycle de production au délai commercial), mais aussi de l'intérêt économique que l'on a de fabriquer des séries longues. Celui-ci dépend du coût de lancement et donc du temps de lancement. Jusqu'à une époque très récente, les bureaux des méthodes des entreprises européennes et nord-américaines ont implicitement travaillé dans une logique de production de masse standardisée, ne prêtant de réelle attention qu'au temps opératoire unitaire. Des temps de lancement importants ont pour effet non seulement de gonfler les stocks d'encours, mais aussi de diminuer sensiblement la flexibilité du système productif. Ces « rigidités » excessives ont été dénoncées par les gestionnaires japonais qui se sont inspirés d'une philosophie différente, celle du Juste-À-Temps, s'appuyant notamment sur des temps de lancement faible pour gérer certaines formes de production avec plus de flexibilité et moins de stocks d'encours (voir [chapitre VII, page 509](#)). En tout état de cause, un système productif travaillant à la commande aura normalement des exigences plus grandes de flexibilité que s'il travaille pour stock.

En matière d'approvisionnement, les problèmes de transport évoqués à la [figure 1, page 42](#), revêtent grande importance pour des composants permettant de personnaliser un produit dans le cadre d'un assemblage à la commande (en raison des exigences des clients en matière de délais). C'est également le cas pour les industries qui produisent pour stock à partir de matières premières disséminées et rapidement périssables (agroalimentaire, avec les tournées de ramassage de lait ou de légume, par exemple). La tension sur les flux fait que les problèmes de transports dans la distribution font l'objet d'une attention particulière. Ces problèmes de transports, liés à l'architecture des réseaux de distribution, seront abordés au [chapitre XIII, page 891](#).

I-2.2 Principaux modes d'organisation de la production

Quatre grands modes d'organisation de la production peuvent être observés. Cette classification, comme toute classification, comporte une part d'arbitraire, mais elle s'avère utile pour mieux cerner les problèmes rencontrés dans la définition des ressources requises et dans leur utilisation (ordonnancement, au sens large). Dans les grandes entreprises on peut trouver une juxtaposition de modes d'organisation différents, spécialisés dans la production de références différentes (produits finis ou semi-finis). La production de services n'exclut que le dernier mode d'organisation.

I-2.2.1 Organisation de type « série unitaire »

I-2.2.1.1 Définition

La **production de type « série unitaire »** est un cas limite que l'on rencontre rarement dans la pratique, puisqu'il se définit comme la mobilisation de toutes les ressources de l'entreprise pour la réalisation d'un projet de production, et ce sur une « assez longue période ». Les exemples classiquement donnés pour illustrer ce cas de figure concernent les travaux publics (construction d'un ouvrage d'art, par

exemple) ou la construction navale (construction d'un navire). Fort heureusement pour la «survie» de ce type d'entreprises, elles gèrent «en parallèle» quelques projets, souvent à des stades différents d'avancement. Nous retiendrons donc comme définition de la production de type «série unitaire», toute production mobilisant sur une période assez longue l'essentiel des ressources de l'entreprise pour réaliser un nombre très limité de projets de production.

La définition du produit dépend étroitement des spécifications du client et fait intervenir, en général, un bureau d'étude conséquent.

I-2.2.1.2 Ressources mobilisées

Le personnel requis est généralement qualifié ou hautement qualifié et on lui confie l'exécution de tâches de type non répétitives. Les équipements utilisés sont le plus souvent polyvalents. Dans ce type d'organisation, le problème des stocks est habituellement tout à fait secondaire, puisque le produit fini n'est normalement pas stockable et que les approvisionnements en matières premières et composants achetés à l'extérieur sont le plus souvent spécifiques à chaque contrat.

I-2.2.1.3 Ordonnancement

Dans ce type de structure, le problème majeur est celui d'un arbitrage entre la recherche d'un coût compétitif et celle du respect des délais. Une commande est honorée d'autant plus rapidement que l'entreprise est capable de mobiliser un ensemble conséquent de ressources en hommes et en matériel. Mais, le coût facturé de ces ressources dépend étroitement de leur taux d'utilisation.

Dans les deux cas, l'ordonnancement joue un rôle essentiel. En effet, la définition correcte d'une date de livraison suppose une bonne capacité à programmer les ressources à mobiliser et donc à se projeter dans l'avenir. La maîtrise des coûts, elle, passe non seulement par le respect de cette programmation, dans la mesure où un retard dans l'exécution d'une tâche s'accompagne souvent d'un chômage technique des ressources retenues pour exécuter la tâche suivante, mais encore par une bonne capacité à modifier rapidement cette programmation en cas de perturbation importante. L'ordonnancement de la série unitaire fait appel à des techniques qui sont présentées au [chapitre IV, page 259](#).

I-2.2.2 Organisation en ateliers spécialisés

I-2.2.2.1 Définition

Un système productif est organisé en **ateliers spécialisés** (voir [figure 3, page 52](#)), lorsque tous les équipements assurant une même fonction technique (par exemple, percer ou emboutir) sont réunis en un même lieu; l'itinéraire emprunté pour la fabrication de deux produits différents n'a aucune raison d'être identique; dans ce cas, la littérature spécialisée parle de *job shop*. L'icône en marge de la [figure 4, page 52](#), déclenche une animation simulant le fonctionnement de ce type de configuration; l'exemple retenu est une simplification de celui qui sera utilisé pour illustrer les techniques d'ordonnancement pour cette classe de problèmes (voir [§ III-1.1, page 418](#), du [chapitre V](#)).

Lorsque l'itinéraire est identique pour toutes les commandes utilisant un même groupe de machines, on parle alors de *flow shop*, sachant qu'une commande peut

FIGURE 3

Schéma de principe d'un système productif organisé en ateliers spécialisés

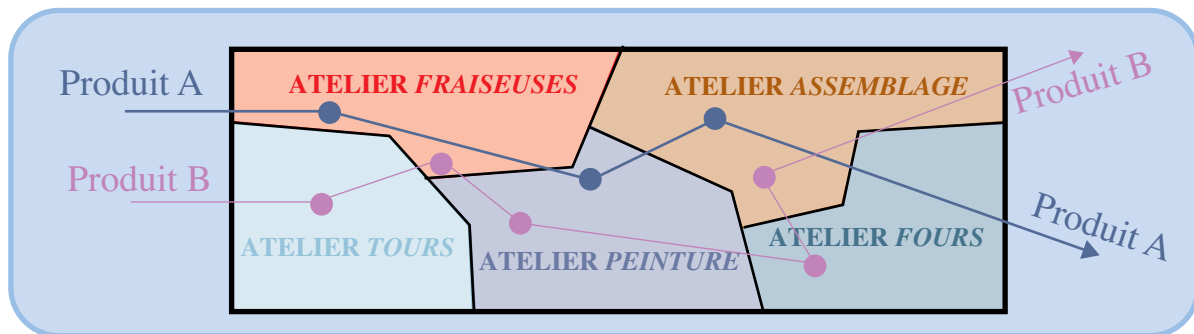


FIGURE 4

Simulation d'un système productif organisé en ateliers spécialisés

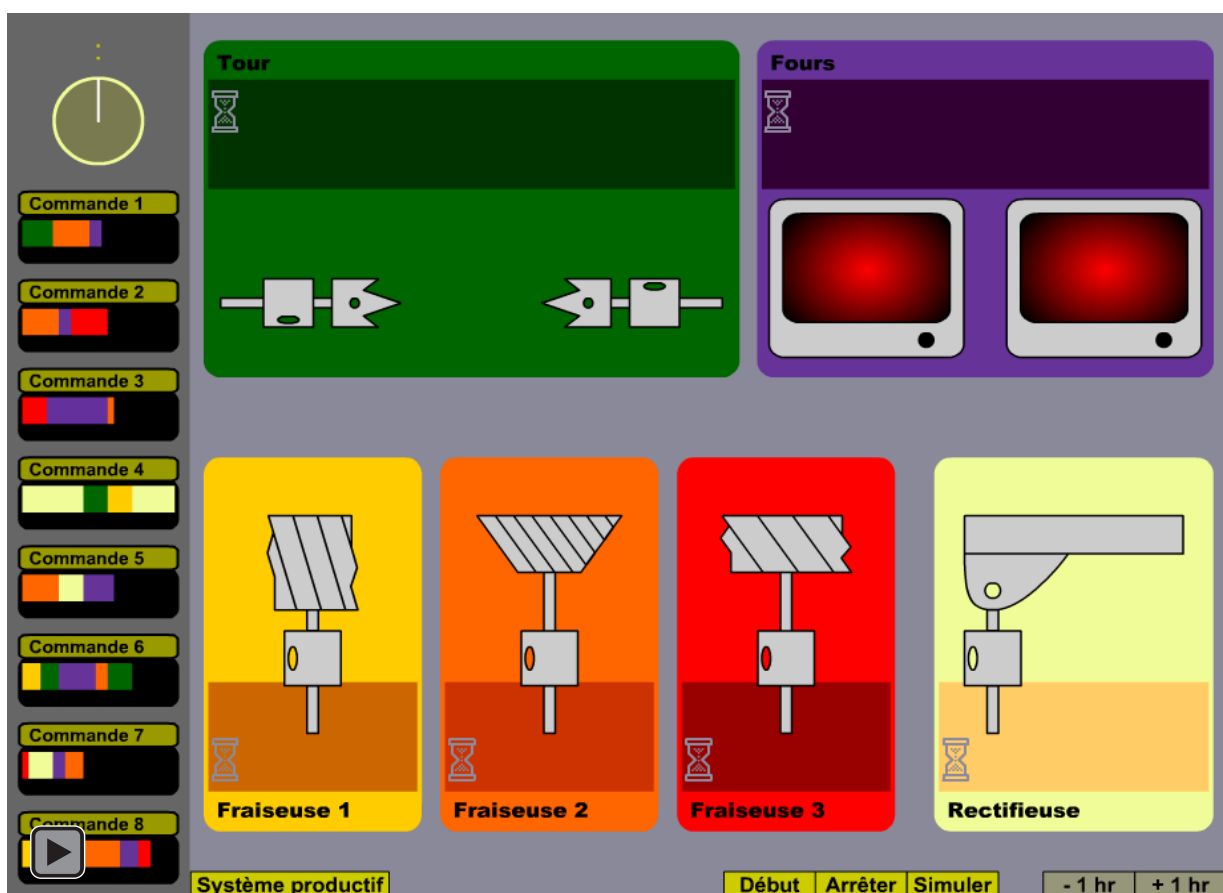


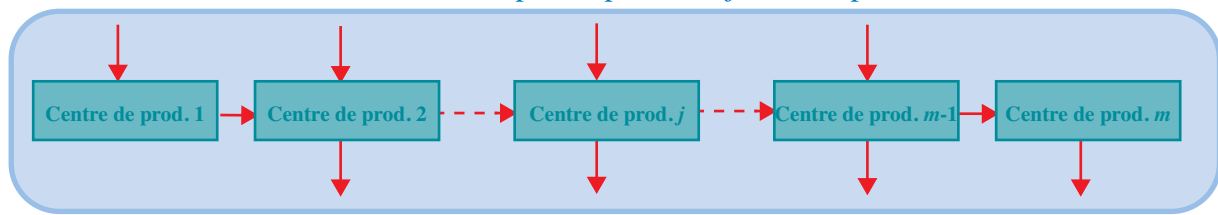
Table des
matières

Index
thématique

ne pas utiliser toutes les machines de ce groupe (voir figure 5) et que les temps opératoires peuvent varier fortement sur une même machine, ce qui distingue cette structure productive de la ligne de production ou d'assemblage (présentée au § I-2.2.3, page 53).

Ce mode d'organisation est généralement la conséquence d'une production relativement diversifiée de produits finis ou de composants, chacun d'eux faisant l'objet d'une production limitée. Il faut noter que cette structure organisationnelle est prépondérante dans les pays industrialisés si l'on raisonne par rapport au nombre d'entreprises (et non par rapport à la production). D'une manière générale, la production de prestations de services s'effectue avec ce type d'organisation.

FIGURE 5
Schéma de principe d'un flow shop



I-2.2.2.2 Ressources mobilisées

La main-d'œuvre utilisée est plutôt qualifiée et les équipements sont polyvalents. Le problème de la gestion des approvisionnements est important dans ce type d'organisation. Ce dernier conduit inéluctablement à des coûts de maintenance (automatisée ou non) relativement importants. Deux solutions sont alors possibles pour diminuer cette classe de coûts. La première passe par une recherche d'une meilleure localisation des centres de production les uns par rapport aux autres et repose sur l'utilisation de certaines méthodes d'agencement de l'espace. La seconde, connue sous le nom de technologie de groupe, vise à une spécialisation d'un ensemble de moyens, à la fabrication d'une famille de produits, conduisant de fait à une partition de l'usine en cellules organisées sur des principes se rapprochant de ceux des lignes de fabrication (voir § I-2.2.5.1, page 59).

I-2.2.2.3 Ordonnancement

La multiplicité des routes possibles entre les postes de travail que peuvent emprunter les différentes productions pose de redoutables problèmes d'ordonnancement. Ils conduisent à des files d'attente plus ou moins grandes et à une mauvaise utilisation des ressources disponibles en hommes et en machines. Cette «déperdition» est fonction de la qualité des informations disponibles (exactitude et exhaustivité des gammes, qualité de l'inventaire permanent, connaissance de l'avancement réel du travail et de l'occupation réelle des postes de travail...), des techniques d'ordonnancement utilisées ainsi que des moyens mis en œuvre pour traiter les informations (système manuel, système informatisé «fermé», système interactif d'aide à la décision...). Les approches utilisables pour résoudre cette classe de problèmes sont présentées au chapitre V, page 359.

I-2.2.3 Organisation en ligne de production ou d'assemblage

I-2.2.3.1 Définition

Un système productif est organisé en **ligne de production** (ou **chaîne de production**) lorsque les équipements sont agencés pour permettre à un flux de transiter systématiquement par la même séquence de postes de travail, afin que soit réalisé un ensemble d'opérations de fabrication ou d'assemblage (auquel cas, on parle plutôt de **ligne d'assemblage** ou de **chaîne d'assemblage**) conduisant à la création d'une gamme de produits manufacturés¹. Cette logique de processus de fabrication préside à l'implantation géographique des machines et à leur

1. Cette organisation du travail se retrouve dans la production de certains services «de masse», mais, en général, avec moins de postes en jeu. C'est le cas, par exemple, dans les départements de *back office* des banques (traitement des transformations de compte, incidents, etc.) et des assurances.

couplage par des moyens de manutention automatisés, il est normal de retrouver des postes de travail assurant la même fonction à des endroits différents, ce qu'exclut l'organisation en ateliers spécialisés. On trouve couramment de telles structures dans la production de masse (l'industrie automobile, par exemple) et plus particulièrement au niveau de l'assemblage final. La rigidité d'une telle structure fait que ce type d'organisation est à réserver à une production de masse d'objets manufacturés standardisés, éventuellement différenciés par le biais de modules et d'options (voir [chapitre II, § I-3.1, page 102](#)). De tels systèmes se caractérisent par une très bonne utilisation des ressources si la chaîne est équilibrée (voir ci-après) et un faible pourcentage de temps perdu en attente pour les produits en fabrication.

Initialement, les lignes de production étaient toutes configurées suivant une succession, en ligne droite, de postes de travail (on parle encore de **stations** de travail), un opérateur pouvant éventuellement intervenir sur plusieurs postes en séquence. Des lignes plus complexes ont vu ensuite le jour ([figure 6](#)), avec la possibilité de parallélisme sur une partie de la ligne et des structures en serpentín (appelée aussi **structure en U**) permettant à des opérateurs d'intervenir sur des postes de travail non contigus (on reviendra sur ce point à la [page 56](#)).

FIGURE 6
Exemples de ligne de production

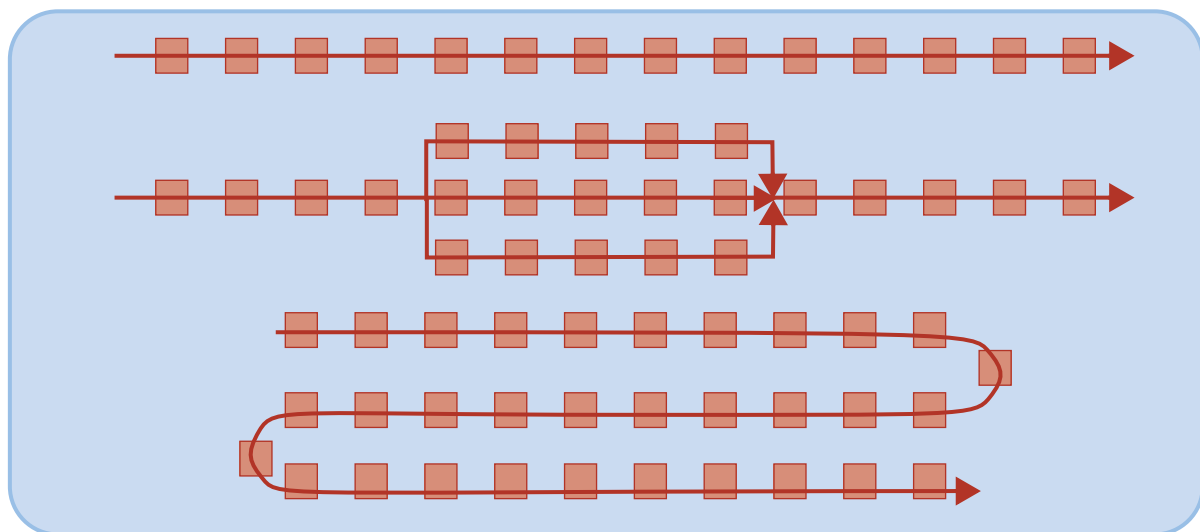


Table des
matières

Index
thématique

I-2.2.3.2 Ressources mobilisées

Dans ce type de structure, les équipements sont spécialisés pour diminuer au maximum les temps opératoires unitaires. L'inconvénient de cette spécialisation (qui peut aller jusqu'à l'usage de machines spécifiques à la chaîne) est que les équipements peuvent ne plus être utilisables lorsque la ligne de production doit être transformée pour se spécialiser sur un autre produit. Cet inconvénient peut être évité par l'appel aux machines à commande numérique qui sont susceptibles d'une nouvelle programmation.

Ce mode d'organisation repose sur une parfaite maîtrise des gammes opératoires et une très grande régularité de circulation du flux (s'appuyant souvent sur un convoyage automatisé). Le problème des stocks-tampons entre postes de travail est, de ce fait, assez mineur. Par contre, les problèmes de fiabilité et de mainte-

nance du matériel sont fondamentaux puisque l'arrêt d'une machine provoque l'arrêt de la chaîne.

Avec cette structure productive, la production horaire dépend du poste qui a la plus forte charge de travail, puisque c'est lui qui va cadencer la production: si le poste le plus chargé a 1 minute de travail, la ligne produira 60 unités à l'heure; si ce poste a 1,25 minute (= 75 secondes) de travail, la ligne produira $60/1,25 = 48$ unités à l'heure, etc. Les autres postes, ayant par hypothèse moins d'occupation, ne pourront travailler à pleine capacité, ce qui conduit à une perte de performance économique. Les concepteurs d'une ligne de production ou d'assemblage sont donc confrontés au problème d'**équilibre de la chaîne**, c'est-à-dire à celui d'une définition du travail à réaliser sur chaque poste de travail telle que le temps passé par le produit sur chaque poste soit aussi proche que possible d'un temps constant défini comme objectif (appelé **temps de cycle**), tout en respectant les contraintes techniques de fabrication du produit. Un mauvais équilibre conduit à une mauvaise utilisation des ressources mobilisées et compromet la rentabilité de la chaîne. Ce problème de l'équilibre a évolué depuis la fin des années soixante-dix en raison de la pression du marché qui implique une diversification accrue des produits et une stabilité moindre des quantités demandées.

- La diversification de la production s'obtient par une combinaison d'options qui implique une variété du temps opératoire de certains postes de travail, en fonction des options à monter. Par exemple, l'existence d'un toit ouvrant sur un véhicule automobile conduira à 100 secondes de travail sur un poste donné qui, dans le cas contraire, n'aura que 50 secondes de travail; si la chaîne est calibrée sur un cycle de 60 secondes, les $(100 - 60 =) 40$ secondes excédentaires de travail dues au toit ouvrant pourront être rattrapées par 4 véhicules sans toit ouvrant. Dans cet exemple, la chaîne ne peut accepter plus de 20% de véhicules à toit ouvrant et, en dessous de ce pourcentage, ce poste de travail est sous-utilisé. Dès lors, une chaîne est définie non seulement pour un certain volume de production (découlant du temps de cycle de base), mais aussi pour une certaine structure d'options. Une parade utilisée consiste à donner la possibilité soit de doubler ce poste, soit de le partager pour assurer un renfort occasionnel permettant de s'ajuster quotidiennement aux fluctuations de la structure de la demande.
- L'absorption des fluctuations de la demande en volume peut être obtenue de différentes façons complémentaires permettant d'atteindre une certaine flexibilité en volume, en gardant les avantages économiques de cette structure productive. Ces réponses stratégiques conditionnent, aujourd'hui, la survie des entreprises industrielles orientées vers la production de masse.
 - On peut tout d'abord faire varier le temps de travail quotidien sur une ligne, dans le cadre d'accords annuels de modulation du temps de travail. Avec deux équipes travaillant chacune entre six et huit heures et un temps de cycle d'une minute, la production quotidienne pourra varier entre 720 et 960 unités. Ces accords pourront inclure la possibilité de travailler certains samedis et même certains jours fériés (alors sur la base du volontariat, avec un paiement de ces heures à 200%).
 - Cette première solution peut ne pas empêcher d'avoir simultanément des lignes sur-capacitaires et des lignes sous-capacitaires (pour des gammes

de produits différents). Une parade consiste à concevoir des chaînes de fabrication ou d'assemblage permettant de traiter plusieurs familles de produits, en partant du principe que l'on reste dans une logique de variabilité du temps opératoire de certains postes. Cette solution, utilisée depuis peu par quelques constructeurs automobiles, nécessite une certaine homogénéité de conception des familles de produits, pour que des produits différents puissent passer sur la même ligne, ce qui implique d'avoir « remonté » le problème à la conception des produits.

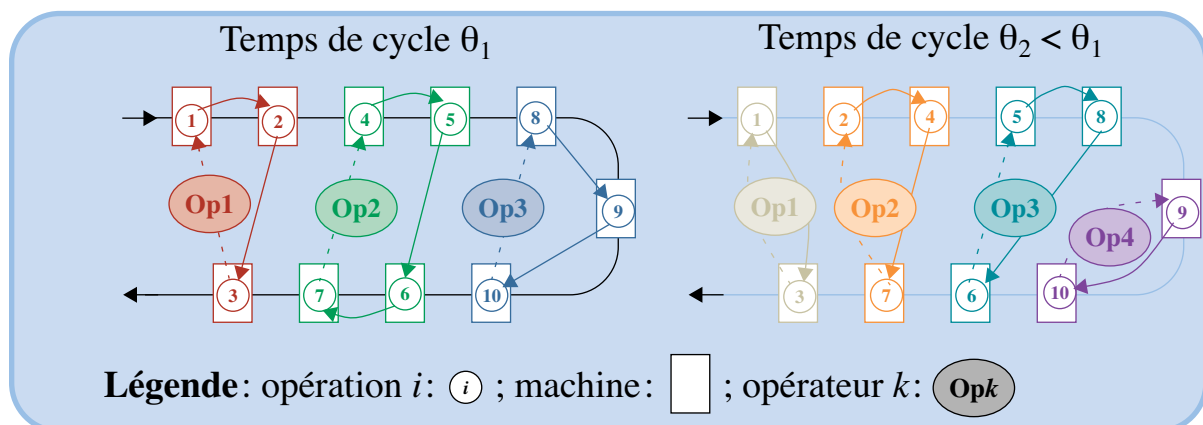
- Une solution additionnelle, utilisée par certaines entreprises, consiste à concevoir une organisation permettant de travailler avec quelques valeurs de temps de cycle et donc avec plusieurs niveaux de production horaire. Pour atteindre ce résultat, la ligne est en « serpentín » (on parle encore de structure en U), ce qui donne la possibilité à un même opérateur d'exécuter des opérations sur des postes qui ne sont pas tous en séquence. La **figure 7** illustre la démarche sur deux schémas qui ne diffèrent que par le temps de cycle retenu θ_i et donc le nombre d'opérateurs et l'organisation du travail. Le flux de production est matérialisé par un \supset sur lequel figurent dix machines (rectangles), chacune d'entre elles étant dédiée à une opération (cercle). Un opérateur (ovale) exécute de manière récurrente la même liste ordonnée d'opérations (par exemple, pour le temps de cycle θ_1 , l'opérateur 2 exécute successivement les opérations 4, 5, 6, 7, avant de revenir sur l'opération 4); chaque opérateur a la même charge de travail (le cumul des temps opératoires des opérations 1, 2 et 3 est approximativement le même que celui des opérations 4, 5, 6 et 7 ou celui des opérations 8, 9 et 10). Ces machines nécessitant des qualifications différentes, les opérateurs doivent avoir une certaine polyvalence. L'accroissement voulu de la production horaire (passage de θ_1 à θ_2) implique l'arrivée d'un nouvel opérateur et une répartition différente des opérations. Là encore, la charge de travail de chaque opérateur par objet transitant sur la chaîne est approximativement la même (mais plus faible que précédemment).

Table des matières

Index thématique

FIGURE 7

Variation du niveau de production induite par la variation du temps de cycle obtenue par modification des listes des opérations confiées aux opérateurs



L'animation qui vous est proposée (par clic sur l'icône en marge) repose sur les données reproduites à la **figure 8** (initialisation de la simulation), les temps opératoires incluant les transports entre postes. Le temps de cycle est de 60 secondes avec 3 opérateurs (\Rightarrow 60 unités produites par heure) ou

FIGURE 8

Données de l'animation illustrant la variation du niveau de production en fonction du nombre d'opérateurs

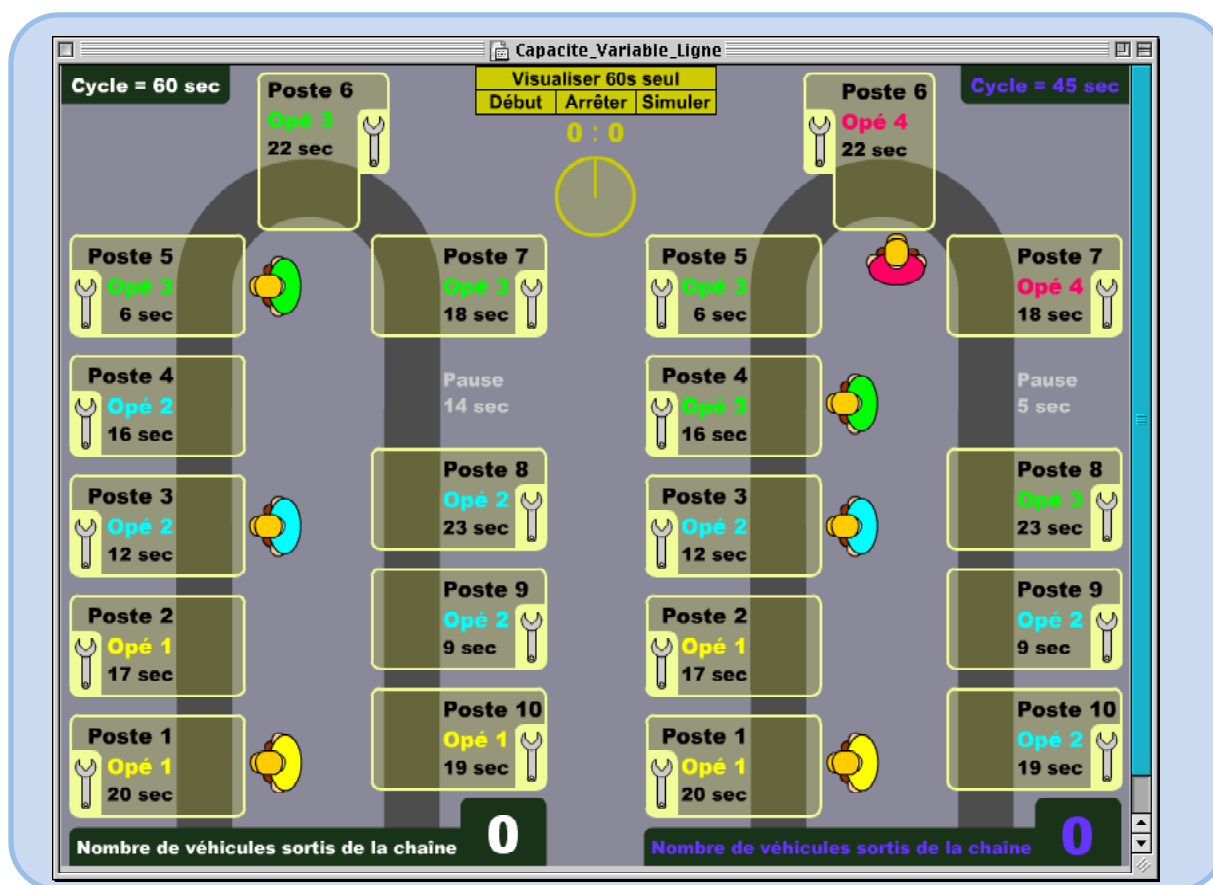


Table des matières

Index thématique

45 secondes avec 4 opérateurs (\Rightarrow 80 unités produites par heure). Vous pouvez visualiser l'animation de la chaîne ayant un temps de cycle de 60 secondes ou simultanément les deux chaînes, ce qui vous permet de vous rendre compte de la différence des rythmes d'arrivée (ou de départ) et donc des différences de production horaire. Plusieurs constatations peuvent être faites sur cet exemple.

- Tous les opérateurs n'ont pas une charge de travail correspondant au temps de cycle: seul l'opérateur bleu dans la configuration à 3 opérateurs et l'opérateur vert dans la configuration à 4 opérateurs ont une charge de travail correspondant au temps de cycle; ce sont ces opérateurs «critiques» qui rythment la chaîne. Les opérateurs sous-utilisés sont amenés à attendre à certains moments que le travail à exécuter soit disponible, pour une durée d'attente égale à la différence entre le temps de cycle et le cumul des temps opératoires des opérations qui leur sont confiées.
- Dans les deux exemples, le produit en cours de fabrication est obligé d'attendre à un moment qu'un opérateur «critique» se libère d'une opération non effectuée sur un poste consécutif de celui sur lequel il effectuait l'opération précédente¹. Ce temps d'attente du produit n'est pas le même dans les deux configurations, ce qui implique, pour une même quantité de travail à effectuer (162 secondes), un temps de séjour dans le système différent (176 secondes dans la configuration à 3 opéra-

teurs, contre 169 dans la configuration à 4 opérateurs); ceci a un impact sur les encours.

Les approches utilisables pour résoudre ces problèmes d'équilibrage de chaîne, mais aussi ceux d'ordonnancement, sont présentées au [chapitre IX, page 589](#).

I-2.2.3.3 Ordonnancement

Si la ligne de production ou d'assemblage est dédiée à un produit unique ne faisant l'objet d'aucune personnalisation par le biais d'une combinaison d'options, le problème de l'ordonnancement ne se pose pas. Dans le cas contraire, l'ordonnancement (appelé parfois engagement ou programme de production) doit respecter un jeu de contraintes: par exemple, quatre véhicules sans toit ouvrant doivent séparer deux véhicules avec toit ouvrant, au moins trois véhicules sans airbag doivent séparer deux véhicules avec airbag, etc. La détermination de l'ordonnancement de la production d'une journée peut faire appel à la programmation mathématique, mais, lorsque le problème n'est pas très contraint, l'usage d'heuristiques peut suffire. Ce qui vient compliquer ce problème de l'ordonnancement est la possibilité d'aléas importants sur certains postes (problème de qualité en peinture, par exemple) qui peut conduire à refaire une séquence d'opérations pour un produit donné, ce qui remet en cause l'ordonnancement initial et peut impliquer l'impossibilité du respect de certaines contraintes. Dans ce cas, il peut s'avérer judicieux de constituer en aval de certains postes un stock tampon permettant de restaurer l'ordonnancement initial ou d'établir un nouvel ordonnancement admissible.

Un dernier problème d'ordonnancement est celui posé par la cohérence et la fiabilité du système d'information qui doit faire converger au bon moment les approvisionnements de pièces nécessaires et les ordres de fabrication personnalisés par des options (si la voiture de monsieur Martin a les sièges commandés par monsieur Dupond, on a deux clients mécontents). Cela dit, pour pallier d'éventuelles défaillances du système d'information ou de celui des approvisionnements, un accroissement des encours peut être envisagé.

I-2.2.4 Les industries de process

Le dernier mode d'organisation, celui des **industries de process**, se retrouve dans les industries lourdes de transformation de matières premières (sidérurgie, pétrochimie, chimie lourde, certaines industries agro-alimentaires). Ce type d'organisation se caractérise par un flux important et régulier de matières premières arrivant dans le système productif pour y être transformé en une (ou plusieurs) matières premières «élaborées» (par exemple, transformation de minerais de fer en tôles ou de betteraves en sucre en poudre).

La régularité et l'importance de la demande font que l'on trouve là une situation assez voisine de celle «idéale» d'un régime de croisière stable, permettant l'identification de quelques problèmes stables, répétitifs et d'une complexité limitée,

1. Dans notre exemple, ce temps d'attente est égal à la différence entre le temps de cycle et le temps de travail de l'opérateur qui s'intercale dans le travail de l'opérateur critique. Cette remarque n'est valable qu'avec ce type de configuration où un opérateur est «complètement pris en sandwich» dans le travail effectué par l'opérateur critique. Dans une ligne classique où l'opérateur ne traite que des opérations consécutives, le cumul des temps d'attente des opérateurs est égal au cumul des temps d'attente du produit sur la ligne.

susceptibles donc d'être résolus par les outils de la recherche opérationnelle (notamment, ceux de la programmation linéaire). Ces outils seront présentés à différents endroits de cet ouvrage (plus particulièrement au [chapitre XVI, page 1105](#) et au [chapitre VIII, page 527](#)).

I-2.2.5 Remarques

I-2.2.5.1 La technologie de groupe

L'organisation de la production en ateliers spécialisés implique des problèmes de logistique importants, puisqu'il faut gérer efficacement les transports d'encours entre les ateliers. Les techniques de localisation optimale des ateliers permettent de minimiser ces coûts de logistique, mais pas de les éliminer. Ces dépenses croissent en tout état de cause avec la taille de l'usine et l'on est là en présence de véritables «déséconomies d'échelle». Le plus souvent, la taille d'une usine organisée en ateliers spécialisés s'explique par la diversité de sa production.

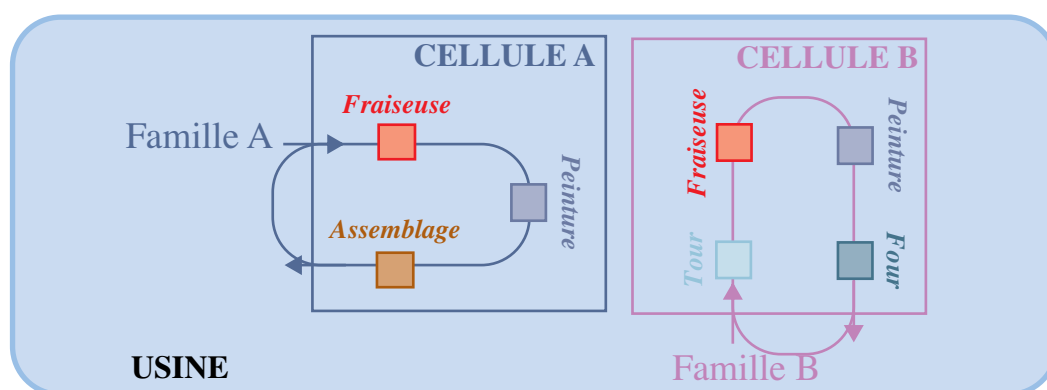
Une parade a été imaginée pour contrer ces déséconomies d'échelle. Elle est connue sous le nom de **technologie de groupe**. Les principes en sont simples : on scinde l'usine en un nombre limité de **cellules** correspondant à de véritables «sous-usines». Chaque cellule est spécialisée dans une famille de produits, c'est-à-dire un sous-ensemble de références à produire, exclusif des autres sous-ensembles alloués aux autres cellules. La réunion de ces familles donne la totalité des références que l'entreprise peut produire. Ces sous-ensembles sont définis sur une base technique (similitude des gammes de production, importance voisine des cellules). Cette définition et la détermination du nombre de cellules restent très empiriques même si certaines techniques d'analyse des données sont utilisables pour résoudre certains problèmes de complexité limitée. Cette organisation conduit nécessairement à avoir dans plusieurs cellules un même type de machines (tours, par exemple). Ce type d'organisation est illustré à la [figure 9](#) qui ne comporte que deux cellules et peut être comparé à la [figure 3, page 52](#), qui illustre un problème similaire dans une organisation en ateliers spécialisés.

Table des matières

Index thématique

FIGURE 9

Structure du système productif en cellules



L'implantation des machines suivant une structure en \cup a déjà été rencontrée à la [figure 7 de la page 56](#), dans le cadre d'une ligne de fabrication, avec une différence importante à souligner. Dans une cellule, contrairement à la ligne de fabrication, un produit ne passe pas nécessairement par tous les postes de travail, mais, en principe, il n'ira jamais «à contre courant». Les problèmes d'ordonnancement

correspondant à ce cas de figure (connu sous le nom de *flow shop*, dans la littérature spécialisée; voir page 362) sont plus simples à résoudre que ceux rencontrés en ateliers spécialisés et il existe, pour cette classe de problèmes, des algorithmes performants (voir chapitre V, § I-1.4, page 376).

Depuis quelques années, on trouve des organisations en **cellules virtuelles** correspondant à des agencements temporaires des ressources liés au portefeuille de commandes à exécuter, ce qui permet une plus grande flexibilité et une meilleure utilisation du système productif. En contrepartie le système d'information nécessaire est plus complexe.

I-2.2.5.2 Le choix économique entre ligne de production et ateliers spécialisés

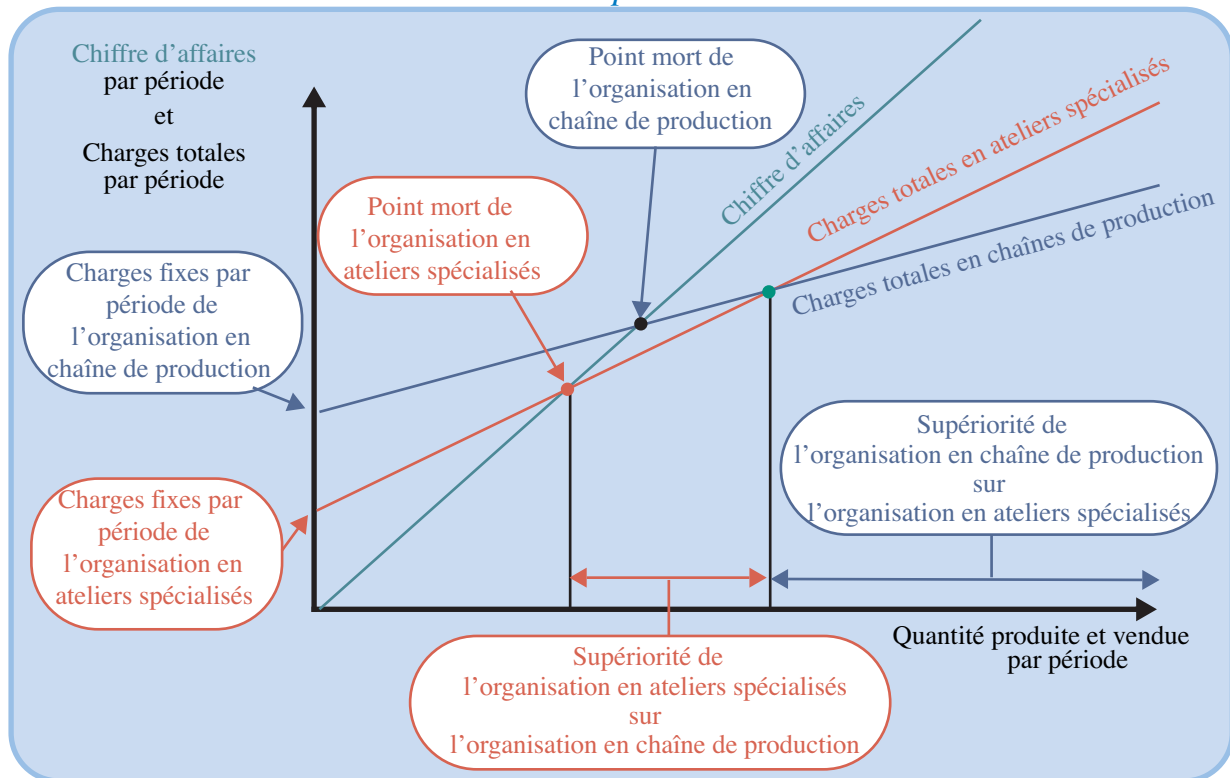
Bien souvent, la structure en ateliers spécialisés et celle en ligne de production sont techniquement équivalentes en ce qu'elles permettent l'une comme l'autre de fabriquer un produit manufacturé donné. Le choix entre ces deux structures résulte fondamentalement de considérations économiques (et non techniques). Examinons les données économiques du problème :

- Une chaîne de production coûte cher par l'importance des études préalables qu'elle nécessite et les équipements spécialisés qu'en général elle requiert. En contrepartie, le coût variable unitaire de production est faible (en comparaison de celui obtenu en utilisant une structure d'ateliers spécialisés). Techniquement, elle offre nécessairement des rigidités structurelles: la variété de produits que l'on peut passer sur une chaîne donnée est très réduite, et le volume de production que peut réaliser une chaîne n'est guère susceptible de modulation. En contrepartie, si la chaîne est équilibrée, le taux d'utilisation des ressources est très élevé (plus de 90%) et le temps «utile» de séjour des encours dans le système est important, c'est-à-dire que la part perdue en attentes diverses est faible.
- L'organisation en ateliers nécessite un investissement initial moindre et offre une grande flexibilité tant du point de vue de la définition du produit (standardisation moins poussée) que de celle de la modulation des capacités de production. En revanche, le coût variable unitaire est supérieur à celui d'une chaîne de production. Cela s'explique notamment par des temps opératoires unitaires souvent plus élevés, par une utilisation souvent médiocre des ressources (taux compris entre 50% et 80%) et des attentes importantes des encours.

Un **graphique généralisé du point mort** (voir figure 10, page 61) illustre bien les supériorités économiques respectives de ces deux modes d'organisation (l'ordonnée à l'origine représente le montant des coûts fixes de la période considérée: c'est-à-dire principalement les amortissements du matériel et des études préliminaires). Ce raisonnement est implicitement celui qu'il faut tenir dans le cas d'une entreprise mono produit. Sa généralisation à plusieurs produits suppose de passer par un produit standard jouant le rôle d'unité d'œuvre ou de raisonner dans un espace à n dimensions. Le raisonnement qui vient d'être tenu peut se généraliser pour inclure dans la comparaison une organisation du type technologie de groupe.

FIGURE 10

Fondement économique du choix entre ligne de production (ou d'assemblage) et ateliers spécialisés



I-2.2.5.3 Liaison entre le marché et l'organisation de la production

Tout système productif est défini pour satisfaire une certaine demande potentielle. Les caractéristiques suivantes peuvent être généralement observées quand on passe des systèmes les plus polyvalents (orientés vers une production unitaire) aux systèmes les plus spécialisés (organisation en ligne ou industrie de process) :

- en ce qui concerne les produits : leur variété et la facilité à lancer des produits nouveaux décroissent et les volumes fabriqués croissent ; en outre, la standardisation croît et l'avantage compétitif porte de plus en plus sur le prix ;
- en ce qui concerne les processus de production, la flexibilité décroît, l'utilisation du potentiel productif s'améliore, l'importance des temps de lancement tend à diminuer, la charge des différents centres de production tend à s'équilibrer, les flux sont de plus en plus définis par des considérations technologiques, les goulots d'étranglement dans la production sont de plus en plus stables et maîtrisés, les séries lancées en production sont importantes, l'importance de la programmation à moyen et long terme croît ;
- en ce qui concerne les matières et les composants utilisés, la connaissance des besoins qualitatifs et quantitatifs va en s'accroissant, l'importance du contrôle de l'approvisionnement (spécification, délai, prix...) augmente ; la stabilité des relations avec les fournisseurs s'accroît ;
- en ce qui concerne le travail utilisé : la part de la main-d'œuvre directe dans la valeur ajoutée décroît, l'importance de la préparation du travail (gamme, ordonnancement détaillé) et la spécialisation du travail croissent ;
- en ce qui concerne les équipements : leur spécialisation tend à croître et à être liée à des flux de produits.

Il est bien évident que ce qui précède peut être contredit par telle ou telle observation. Mais cette observation des «tendances générales» aide à comprendre pourquoi certains problèmes diffèrent d'une entreprise à une autre.

I-2.3 L'entreprise de réseau¹

I-2.3.1 Définition de l'entreprise de réseau et généralité du concept

Nicolas Curien² considère les entreprises de réseau sous deux angles. Celui de l'ingénieur se focalise sur l'«interconnexion spatiale d'équipements complémentaires, coopérant entre eux pour transporter des flux de matière, d'énergie ou d'information et pour les acheminer d'une origine vers une destination», tandis que le point de vue de l'économiste se centre sur l'intermédiation, la fonction de ces entreprises étant de «mettre en rapport des fournisseurs et des consommateurs de certains biens et services». La caractérisation des ressources productives retenue par la première conception permet de considérer sans ambiguïté que des entreprises comme EDF, la SNCF, La Poste, France Télécom ou la RATP entrent dans la catégorie des entreprises de réseau. La vision fonctionnelle est beaucoup moins discriminante car elle permet d'englober pratiquement toutes les entreprises du secteur de la distribution. On parlera ici d'entreprises de réseau «au sens strict» pour repérer les entreprises répondant à cette conception «ingénieuriale». Dans les moyennes et grandes entreprises, on retrouve toujours une ou plusieurs unités productives qui sont chargées de la logistique³ et qui répondent à la première définition de Nicolas Curien. Cette observation a deux conséquences importantes.

Tout d'abord, on peut s'attendre à ce que toute entreprise d'une certaine taille rencontre une partie des problèmes que connaissent les entreprises de réseau «au sens strict». De ce point de vue, la principale spécificité des entreprises de réseau «au sens strict» est que l'activité logistique y est exercée à *titre principal* et non accessoire. Lorsque plusieurs entités juridiquement distinctes se partagent les mêmes infrastructures (souvent en raison d'une interdiction de position monopolistique), la divergence d'intérêts entre les gestionnaires d'infrastructures et leurs utilisateurs transforme nécessairement les règles de gestion de chaque entité indépendante, par rapport à celles que l'on observerait en cas de fusion de tous les acteurs concernés.

Par ailleurs, tout système productif complexe peut s'analyser comme un réseau d'unités productives liées par des échanges de flux de produits ou de prestations de service. De ce point de vue, le *périmètre de l'entreprise* n'est pas le même selon que l'on adopte un point de vue juridique («propriété» des moyens productifs) ou un point de vue fonctionnel (ensemble d'unités productives concourant à une production donnée). En effet, la plupart des activités peuvent être sous-traitées partiellement ou en totalité, y compris les activités de support (gestion du personnel, gestion du système d'information, transport, etc.), auquel cas on parle de **Facilities Management** (faute de traduction reconnue). La coïncidence des

1. Ce paragraphe reprend en partie l'article de Giard (1994, [181]).

2. Curien et al. (1992, [114]).

3. Ce terme étant pris ici dans son acception initiale qui recouvre principalement les activités de manutention et de gestion des fluides (énergie, vapeur, eau, etc.) et, pour certains auteurs, les activités de maintenance.

périmètres juridique et technique est de plus en plus remise en cause pour deux raisons différentes :

- la complexité de certaines productions (par exemple un système d'armement ou la mise au point d'un nouveau lanceur spatial) est telle qu'aucune entreprise n'est en mesure d'assurer seule la maîtrise d'œuvre de l'opération pour aboutir, en temps utile et à un coût acceptable, à un résultat technique satisfaisant, compte tenu de l'état de la concurrence internationale;
- les impératifs croissants de réactivité et de compétitivité par les coûts et la qualité ne permettent plus aux entreprises la détention en leur sein de toutes les compétences requises.

Pour ces deux raisons, on assiste à une montée en puissance d'alliances plus ou moins stables conduisant à la création de *réseaux d'entreprises*¹ ou, ce que Gilles Paché et Claude Paraponaris appellent l'entreprise en réseau et qu'ils caractérisent comme étant «une structure flexible et adaptative mobilisant — et non plus possédant — un ensemble coordonné et stabilisé de compétences». Par rapport au cas des entreprises de réseau, l'interconnexion est plus organisationnelle que spatiale, ce qui pose de nouveaux problèmes de coordination et de contrôle consécutifs à une intégration partielle des gestions des partenaires (la logique relationnelle se substituant à la logique transactionnelle, pour reprendre une expression répandue). Une réponse à certains de ces nouveaux besoins est apportée, d'une part, par la gestion par projet qui s'est diffusée et transformée en quelques années² et, d'autre part, par les approches de chaîne logistique. D'autres problèmes délicats se posent notamment en matière de partage de systèmes d'information, pour lesquels des efforts sans précédent de normalisation sont entrepris non seulement dans le domaine des échanges commerciaux avec l'**EDI** (Echange de Données Informatisé³), qui concerne les bons de commande et la facturation, mais encore plus dans celui du partage des données techniques avec **CALS** (*Computer-aided Acquisition and Logistic Support*⁴).

Table des matières

Index thématique

I-2.3.2 Le particularisme des entreprises de réseau «au sens strict»

Les entreprises de réseaux «au sens strict» partagent un certain nombre de caractéristiques qui ont de fortes répercussions en matière de gestion de production. Ces caractéristiques sont présentes dans d'autres entreprises, mais pas simultanément ou de manière aussi poussée, ce qui confère une certaine spécificité à ce groupe d'entreprises.

I-2.3.2.1 Satisfaction de demandes très fortement cycliques et aléatoires

La demande à ces entreprises porte sur des prestations non stockables à satisfaire dans les plus brefs délais. Elle émane d'une multitude de clients et connaît de très fortes fluctuations cycliques (avec la superposition de cycles définis à l'intérieur de la journée, de la semaine et de l'année), auxquelles s'ajoutent des

1. Deux ouvrages marquent cette prise de conscience de cette «nouvelle réticularité»; il s'agit de *L'entreprise étendue* de Benchimol (1993, [44]) et de *L'entreprise en réseau* de Paché et Paraponaris (1993, [324]). L'impact de la technologie sur cette évolution est discuté dans Giard, *Besoins technologiques et réseaux* (2000, [188]).

2. On reviendra en détail sur ces transformations au chapitre V.

3. Voir Sandoval (1990, [371]); on reviendra sur ce point au chapitre XIV, page 931.

4. Voir Chevalier (1993, [93]); on reviendra sur ces approches à la page 931.

perturbations aléatoires dont l'importance est souvent plus grande encore. Pour lisser le profil temporel de la demande et permettre de limiter la surcapacité que sa satisfaction induit, l'arsenal tarifaire est utilisé de manière très importante :

- pour la SNCF, avec la modulation des suppléments demandés dans le transport des voyageurs « grande ligne » et la distinction entre le régime du train complet, le régime accéléré et le régime ordinaire, pour le trafic des marchandises ;
- pour La Poste, avec la distinction entre les lettres, écoplis et postimpact pour la correspondance, et entre colissimo et paquet ordinaire pour la messagerie ;
- pour EDF, avec la modulation de la tarification électrique suivant la puissance installée et la période de consommation (allant jusqu'au délestage pour certains contrats d'utilisateurs pouvant utiliser une source d'énergie complémentaire) ;
- pour France Télécom, avec la tarification modulée en fonction des heures de communication.

Cet usage d'une tarification temporelle visant à lisser la charge pour obtenir, à un coût acceptable, un niveau de satisfaction convenable de la clientèle, est nettement plus marqué dans ce type d'entreprises que dans les autres.

Lorsque le transport porte sur des biens (acheminement de marchandises ou de courrier), la modulation tarifaire joue sur le délai d'acheminement. À ce propos, il est intéressant de noter que la principale récrimination de la clientèle qui a choisi l'acheminement lent porte principalement sur la dispersion des durées d'acheminement et non sur leurs valeurs moyennes, ce qui a de fortes implications quant aux améliorations du système productif. Pour le transport des personnes, la demande peut être anticipée (politique de réservations obligatoires) et la capacité peut être ajustée (adjonction de voitures à un train de voyageurs, mise en circulation de trains facultatifs), mais de manière assez marginale ; la demande excédentaire est généralement différée (cas des trains à réservation obligatoire) ou, dans une certaine mesure, satisfaite dans des conditions dégradées (voyage debout). Lorsque ce transport utilise des infrastructures publiques (route, aéroports, ports), l'organisation du réseau et notamment la localisation des plateformes (transport de marchandise ; voir [page 901](#)) ou de *hubs* (transport de passagers ou de marchandises) est un problème stratégique majeur. Pour la distribution électrique, il n'y a pas d'autres moyens que d'ajuster en temps réel la capacité à la demande.

I-2.3.2.2 Importance de la standardisation des ressources physiques

La banalisation induite par une *standardisation des « contenants »* destinés au transport, qu'il s'agisse de caissettes de courrier ou de voitures de la SNCF, est un élément important de rationalisation de la production pour trois séries de raisons : limitation des flux « à vide » liés à la dissymétrie des flux (parcours haut-le-pied), simplification de la commande du système et, enfin, limitation de l'investissement requis pour un niveau de service donné. Si le contenant est « intermédiaire », comme c'est le cas des caissettes de courrier, la standardisation est essentielle pour permettre à la fois un chargement/déchargement rapide dans les structures d'accueil du véhicule de transport (camion, avion) ainsi qu'une occupation satisfaisante de l'espace disponible dans le véhicule.

La *standardisation des infrastructures spécifiques de transport* est tout aussi importante. Par exemple, l'existence de trois types d'alimentation électrique sur le réseau de la SNCF empêche la banalisation complète des locomotives électriques qui ne sont pas équipées pour les trois courants. Il est évident que l'interconnexion des réseaux hétérogènes est génératrice de problèmes : par exemple, la différence d'écartement des voies ferrées entre le réseau français et le réseau espagnol implique une rupture de charge ou l'usage d'un matériel roulant spécialisé. Cette définition des infrastructures spécifiques se complique par la nécessité d'adopter un point de vue systémique, car il y a une très forte interdépendance des caractéristiques de l'infrastructure et du matériel roulant. C'est ainsi que le profil des voies et la finesse du cantonnement conditionnent la vitesse des convois ou que la signalisation pourra ou non être embarquée selon le type d'équipement au sol (signalisation embarquée des TGV sur les lignes nouvelles). Pour France Télécom et pour EDF se posent des problèmes similaires de standardisation du « débit » des lignes pour limiter la variété des équipements qui assurent la liaison entre lignes et pour dissocier efficacement le transport de la distribution.

I-2.3.2.3 Importance de la coordination dans la programmation

Dans les systèmes productifs classiques, les problèmes de coordination des décisions du court terme (ordonnancement) ou du moyen terme (planification) sont importants, mais, en règle générale, une certaine régularité existe dans le sens de l'écoulement des flux (par exemple, le flux de production de moteurs d'une usine de moteurs automobiles ira toujours vers une usine d'assemblage et aucun flux n'ira en sens inverse). Dans les entreprises de réseau, aucune régularité de ce type n'existe, ce qui complique les problèmes de programmation de l'utilisation des ressources sur les différents horizons retenus.

Table des
matières

Pour une entreprise de réseau « au sens strict », le pilotage des flux doit tenir compte de la capacité des équipements utilisés, mais aussi, en cas d'infrastructure spécifique, de l'occupation instantanée de chaque point du réseau. Dans ce dernier cas, la multiplicité des itinéraires possibles oblige à une anticipation pour éviter la création de goulots d'étranglement ; la difficulté du problème tient à la multiplicité des centres de décisions à coordonner, au caractère hautement combinatoire des solutions possibles (gamme alternatives) et à la nécessité de prises de décision en temps réel. Face à cette situation et pour des raisons de sécurité, la SNCF assure la cohérence de ses décisions par des procédures formelles permettant de régler rapidement des problèmes ponctuels par la mise en œuvre de solutions dont les conséquences ont été soigneusement étudiées (mise en marche de trains facultatifs, par exemple). La sophistication de la commande en temps réel de l'acheminement téléphonique est plus grande et, compte tenu de la réactivité nécessaire, fait appel à des automates.

Index
thématique

Lorsque l'acheminement de marchandises ou de courrier implique des changements de moyens de transport, on est en présence de correspondances si les heures de départ des transports ne peuvent pas être retardées (elles peuvent être éventuellement anticipées en cas de saturation du véhicule utilisé). Dans ce cas, la détermination judicieuse d'un ensemble de correspondances et le respect des heures d'enlèvement sont des conditions essentielles de la rapidité d'acheminement. Cette logique de rendez-vous contraignants assure le découplage des

problèmes et constitue le mode principal de coordination des décisions dans le réseau.

I-2.3.2.4 Importance des degrés de liberté dans la localisation de certains traitements

Dans une entreprise classique, les unités de production sont difficilement interchangeable pour des raisons techniques (l'emboutissage ne peut se faire que dans un atelier de presse et le moulage de pièces métalliques que dans une fonderie). L'interchangeabilité est beaucoup plus grande dans les entreprises de réseau « au sens strict ».

L'ajustement de la capacité productive électrique utilisée pour faire face aux fluctuations de la demande est réalisé en faisant varier la production de multiples sites, y compris en faisant appel, dans certains cas, aux importations. Les degrés de liberté technique sont assez grands et ce sont des considérations économiques et de sécurité qui fondent la décision. Le problème rencontré dans l'acheminement des informations à France Télécom est voisin en ce sens que les itinéraires utilisables sont multiples et qu'il est possible en outre de scinder un ensemble de données en lots acheminés par des voies différentes avant que ceux-ci ne soient reconstitués sous leur forme originale avant la livraison au destinataire. Dans ces deux cas, le pilotage du système productif s'effectue en temps réel.

Les décisions à prendre sont plus stratégiques (et donc peu souvent révisables) en ce qui concerne l'organisation de l'acheminement de biens en provenance et à destination d'un très grand nombre de points, ce qui implique des opérations d'identification de la destination, de regroupement par lots ou d'éclatement de lots. C'est ainsi que, lorsqu'ils sont d'une certaine importance, les bureaux de poste collecteurs du courrier envoient à leur centre de tri de rattachement des lots de courrier déjà constitués, suivant des critères géographiques (destination), morphologiques (lettre ou paquet) ou tarifaires (rapidité d'acheminement), mais techniquement ces opérations de tri peuvent tout aussi bien être effectuées par le centre de tri destinataire. Cette première ségrégation, qui interdit tout mélange des flux dans les moyens d'acheminement au centre de tri (et augmente donc l'espace requis pour le transport), a pour avantage de lisser la charge de travail du centre de tri, mais, en contrepartie, fait appel à des moyens moins performants. Au centre de tri, le courrier qui n'est pas à destination de la « circonscription » du centre de tri est trié pour être envoyé aux centres de tri de rattachement des bureaux de poste destinataires; là encore, se pose la question du degré de ségrégation des flux à destination de chaque centre de tri. L'interdépendance décisionnelle est très grande et l'analyse globale du système est pratiquement impossible. On ne peut raisonnablement envisager que l'étude de scénarios contrastés où la solution retenue par un sous-système devient contrainte pour le reste du système, le problème étant alors d'assurer la cohérence des interfaces (définition des rendez-vous et des caractéristiques des flux échangés).

Dans ce contexte, la définition de la localisation de centres de tri pour La Poste, de gares de triage du régime ordinaire ou du régime accéléré pour la SNCF ou de plates-formes de traitement pour les grandes entreprises de messagerie est un problème stratégique indissociable des traitements qui y sont effectués et qui conditionnent la ségrégation des flux à transporter. L'organisation mise en place

pour utiliser les ressources productives conditionne de manière fondamentale la flexibilité d'un système devant faire face à des demandes fortement aléatoires, ainsi que sa performance économique.

I-3 Le processus au cœur de l'analyse de la production

La compétitivité de l'entreprise est le résultat d'une combinaison performante de technologies et de gestion; la cantonner à l'une de ces deux dimensions est caricatural et dangereux.

Les changements auxquels on assiste depuis plusieurs années sont relativement bien connus¹:

- un *durcissement* très net de la *concurrence*, qui se traduit par le raccourcissement important à la fois du cycle de vie des produits et de leurs durées de mises au point;
- des changements au niveau de la *clientèle* qui est devenue de plus en plus *exigeante et volatile*;
- des modifications intéressantes sur les *attributs de l'objet de l'échange*: ces attributs ont été pendant très longtemps des attributs exclusivement de *prix* et «vaguement» de *spécifications techniques*; ils se sont accrus de spécifications auxquelles les clients se montrent de plus en plus attachés, à savoir la *variété* de l'offre, la *qualité* des produits ou des prestations, l'adjonction de *prestations complémentaires* limitant le risque (service après-vente, échange ou remboursement, prise en compte de risques de vol ou de détérioration...) ou la gêne (livraison à domicile, véhicule de remplacement, prise en charge directe de formalités ou de certaines dépenses en cas de litige ou d'accident) traduisant une vision plus globale des besoins à satisfaire; enfin, on observe depuis peu une compétition relativement forte basée sur le *temps* de mise à disposition d'un produit ou d'un service; l'élasticité-temps (qui existe comme l'élasticité-prix) joue un rôle croissant, ce qui explique que la *date de disponibilité de l'objet* soit devenue un nouvel attribut expliquant certaines transformations des modes d'organisation et de la concurrence; cette **chrono-compétition**² joue à la fois sur la rapidité de mise sur le marché de produits nouveaux et sur celle de livraison de commandes de produits existants.

Le durcissement de la concurrence et la transformation des exigences de la clientèle, ont fait que pour toutes les entreprises, quel que soit le secteur auquel elles appartiennent, *le changement est devenu la norme*. Face à cette transformation de l'environnement concurrentiel, il faut rappeler que, jusqu'à une époque très récente, l'évolution observée des systèmes productifs en réponse à la transformation de l'environnement avait consisté en une *accentuation* de la *fragmentation des processus* et de la *spécialisation des acteurs* (lesquelles sont très marquées si l'on compare la situation de l'industrie de la fin du XIX^e siècle, à ce qu'elle est aujourd'hui). Ce mouvement, qui trouvait sa justification dans la recherche d'une réduction «locale» de la complexité, a induit des besoins croissants de coordina-

1. Plusieurs ouvrages soulignent cette transformation vers la fin des années quatre-vingt et au début des années suivantes, notamment celui de Cohendet & Lleréna (1989, [100]) et celui d'ECOSIP (1990, [134]).

2. Voir, par exemple, Stalk et Hout (1990, [392], traduction en 1993, [393]).

tion que l'on a tenté de satisfaire par l'appel à des techniques de gestion de plus en plus sophistiquées. Mais cette réponse organisationnelle s'est avérée de moins en moins efficace, au point de générer souvent maintenant de véritables déséconomies d'échelle. C'est sans doute pourquoi, depuis le début des années quatre-vingt, on assiste à un mouvement s'appuyant sur une réflexion *centrée sur le processus*, visant à l'appréhender, à l'améliorer, à le simplifier et à le défragmenter. Cette réhabilitation du physique se retrouve dans des courants aussi divers que :

- celui de la comptabilité par activité (Activity Based Costing et Activity Based Management), initialisé par le CAM-I et qui réhabilite l'analyse physique des processus pour renouveler la comptabilité de gestion et l'éclairage économique des décisions de gestion ;
- celui de la qualité¹ qui clame que «la qualité se construit à l'intérieur du processus» et, plus généralement, le courant du *kaizen* qui est centré sur l'amélioration continue et passe en fait par une réhabilitation du processus ; la version 2000 des normes ISO 9000 fait du processus² l'un de ses fondements méthodologiques (voir [chapitre XIV](#), page 974) ; le juste à temps (voir [chapitre VII](#)) procède également d'une vision processus ;
- celui de la *chrono-compétition*³ qui se caractérise par la recherche d'une lecture différente du processus ;
- celui de la *gestion de projet* dans les industries de masse qui s'appuie sur le cycle de vie d'un produit et force à une explicitation d'enchaînement de processus⁴ ;
- celui du *reengineering* qui se focalise sur une révision radicale des processus pour en diminuer de manière très sensible les coûts et justifie cette orientation en soulignant que ce ne sont pas les produits, mais les processus grâce auxquels ils sont créés qui font la réussite à long terme de l'entreprise ;
- celui de la chaîne logistique, introduit à la [page 43](#) et sur laquelle nous reviendrons longuement (au [§ I-2, page 895](#) du [chapitre XIII](#)) ; dans cette approche, la satisfaction du consommateur est le résultat de la performance d'un enchaînement de processus à considérer dans leur ensemble et non de façon individuelle,
- et celui des ERP (cf. [§ III, page 957](#), du [chapitre XIV](#)) ainsi que celui de l'urbanisation des systèmes d'information qui vise à mettre sous contrôle l'évolution du système d'information constitué de sous-systèmes hétérogènes devant coopérer⁵.

Dans ces diverses perspectives, il est d'abord nécessaire d'améliorer l'identification des processus ([§ I-3.1](#)) avant d'en opérer la transformation ([§ I-3.2, page 70](#)).

1. Pour une présentation générale, voir Collignon, «Qualité», in *Encyclopédie de gestion* (1997, [136]).

2. Ces normes définissent le processus comme «un ensemble d'activités corrélées ou interactives qui transforment des éléments d'entrée en des éléments de sortie».

3. Voir, par exemple, Stalk et Hout (1990, [392], traduction en 1993, [393]).

4. Voir Giard (1991, [173]), Giard (1995, [179]) et Giard & Midler (1997, [136]).

5. Voir, par exemple, Longépé (2001, [285]).

I-3.1 Identification des processus

Le principal frein à l'identification des processus réside dans le fait que, habituellement, l'analyse de la production de biens ou de services est conduite sur la base du regroupement de tâches fédérées par les services auxquels appartiennent les individus qui les exécutent. Cette vision «verticale», longtemps considérée comme suffisante, doit être complétée, voire remplacée, par une vision horizontale, celle du processus¹. Ceci implique que, dans les représentations que l'on a de l'entreprise, il faille compléter les représentations classiques de type organigramme des services, nomenclature arborescente des produits, description des gammes de production, etc., par des représentations cartographiques de flux ou de processus qui sont encore d'un usage limité.

Une **cartographie de flux** visualise, sur une représentation simplifiée d'un système productif existant (plan avec visualisation des principaux postes de production), le chemin qu'emprunte un flux de matières passant par différents postes de production pour y subir des opérations, avant de parvenir à son état final de produit fini ou intermédiaire. En cas de gammes alternatives possibles, il y aura une multiplicité de chemins dans cette cartographie. Enfin, il est fréquent de représenter sur un même schéma les flux associés aux principales productions du système productif analysé. Il faut souligner, d'une part, que cette représentation diffère de celle du **graphe d'une gamme opératoire** qui représente l'enchaînement d'opérations, par sa focalisation sur l'enchaînement des postes de production mobilisés et, d'autre part, son absence d'information détaillée sur les modes opératoires utilisés. On peut ajouter que ce qui vient d'être dit se transpose sans difficulté à la production de prestations de services.

Table des matières

Une **cartographie de processus** s'attache à la description d'une production d'un ensemble homogène de produits ou de prestations et peut revêtir différentes formes combinant les informations des cartographies de flux et de gammes, en y ajoutant le plus souvent celle sur les acteurs (ce point sera traité en détail au **chapitre III, § I-2.3, page 160**). Ces diverses représentations sont déjà utilisées par un certain nombre d'entreprises. Le problème n'est pas seulement que leurs potentialités n'ont pas été suffisamment exploitées. Il est aussi et surtout que les grilles de lecture de ces représentations doivent être «actualisées» :

Index thématique

- Les commanditaires de ces représentations étant généralement des responsables de service, il n'est pas étonnant qu'habituellement ces cartographies aient des *frontières* correspondant à des centres de responsabilité (services, entreprises, etc.). Cette vision locale doit être dépassée : les nouvelles représentations ne doivent pas s'attacher aux frontières et doivent faciliter une vision intégratrice «transfonctionnelle» plus forte qu'avant.
- Il faut s'attacher à *qualifier* les différentes *opérations* d'un processus (ce qui se traduit graphiquement par l'usage de symboles ou de couleurs associés aux opérations ou aux postes de production utilisés):
 - en s'interrogeant sur leur contribution directe à la *création de la valeur ajoutée* pour le client (pour ce dernier, les tâches de contrôle, de pointage,

1. Le fascicule FD X 50-176 de l'AFNOR (juin 2000) propose des lignes directrices pour aider à comprendre cette approche processus et propose des recommandations pour le déploiement de cette approche dans un organisme, dans le cadre des approches ISO 9000.

de transcriptions d'informations d'un système d'information à un autre système n'ont aucune valeur ajoutée); l'un des objectifs dans l'analyse des processus est justement de pointer un certain nombre de tâches sans valeur ajoutée afin de les *réduire*, voire les éliminer;

- en mesurant le rapport du *temps de travail* au temps de présence de l'objet ou du dossier dans le centre de ressources qui le traite; certaines observations conduiront nécessairement à la recherche d'une compression des temps d'attente excessifs en s'appuyant sur une transformation judicieuse du processus ou de l'organisation.
- Il faut s'attacher à *qualifier* les différents *processus* en évitant de les considérer comme présentant le même intérêt; en particulier, il importe d'isoler les processus sur lesquels l'entreprise fonde sa valeur ajoutée des processus de support (maintenance, etc.); cette lecture moins «plate» doit faciliter certains arbitrages et conduire, par exemple, à considérer que l'ordonnement des activités de support doit être subordonné à celui de la séquence principale créant la valeur ajoutée¹.

I-3.2 Transformation des processus

Les analyses que l'on vient de décrire constituent un préalable à la transformation des processus. Celle-ci constitue l'enjeu de deux courants de gestion apparus au cours de ces dernières années et qui, à première vue, semblent s'opposer. Mais cette opposition, accentuée par les «hérauts» des deux camps, est moins forte qu'il ne le paraît dans la mesure où tous deux ont pour objectif de faciliter l'évolution des processus. Le premier courant est celui du *kaizen* qui vise l'amélioration progressive et lente des processus (§ I-3.2.1). Le second prône une rupture plus radicale, c'est celui du *reengineering* (§ I-3.2.2, page 72).

I-3.2.1 Le *kaizen*

Le *kaizen*² se définit lui-même comme une sorte de «fourre-tout» dans lequel on met un ensemble de techniques qui ont pour objectif d'atteindre une amélioration continue des processus de production (Qualité Totale, Juste-A-Temps, etc.). Il s'oppose à l'approche «européenne et nord-américaine» qui s'appuie sur une évolution des performances réalisée presque exclusivement lors de nouveaux investissements. Pour les spécialistes du *kaizen*, l'identification et la résolution des problèmes doivent s'effectuer dans un cadre normalisé d'amélioration des normes: une fois l'investissement effectué et le nouveau processus défini, il faut tout d'abord s'assurer de son application correcte et contrer l'entropie naturelle, faute de quoi il y aura une dégradation progressive de la performance (c'est la *maintenance* du processus); puis, le processus étant appliqué correctement, il convient de le perfectionner, avec l'aide de tous (système de suggestions, cercles de qualité, etc.), pour définir une nouvelle norme qu'il faudra maintenir avant de chercher à nouveau à l'améliorer.

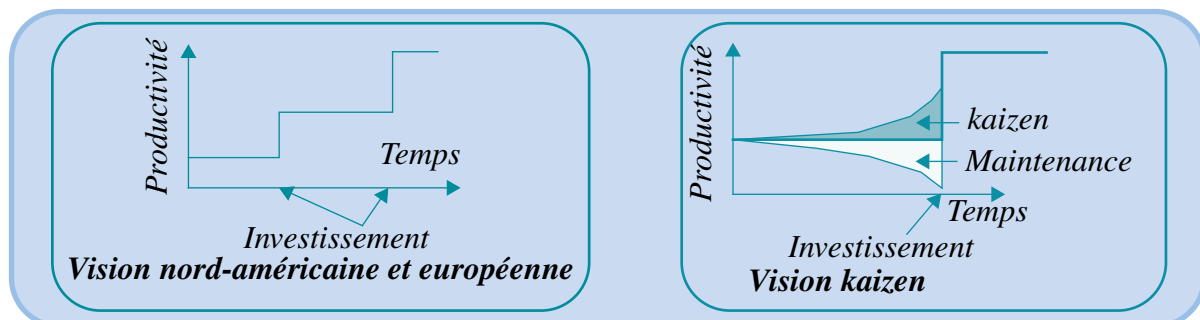
Dans cette perspective, l'amélioration des processus doit précéder celle des résultats financiers, qu'elle conditionne sur le long terme et l'attention des dirigeants ne doit pas se polariser trop fortement sur les résultats financiers. Il

1. Voir, par exemple, Stalk et Hout (1990, [392]), traduit en français (1993, [393]).

2. Imai (1992, [237]).

FIGURE 11

Différences entre la vision nord-américaine et européenne du progrès et celle du kaizen



convient donc d'utiliser, à côté de critères centrés sur les résultats financiers (critères R), des critères de performances physiques qui permettent d'éviter une myopie trop forte (critères P). Par ailleurs, une rupture de perspective intéressante, liée à la défragmentation et retenue dans le *kaizen*, consiste à considérer que, dans les enchaînements de processus partiels, le processus suivant est fondamentalement à traiter comme un « client ». Une dernière caractéristique du *kaizen* est l'accent fort mis sur l'homme qui conduit à privilégier les cartes de la responsabilisation et de l'élargissement des tâches. Il y a donc une certaine vision humaniste, qui peut prendre des aspects quelque peu machiavéliques si on pousse certaines techniques d'animation japonaises un peu trop loin, mais cette vision de l'homme est différente de celle que l'on rencontre dans l'entreprise classique et n'est pas reprise par le courant du *reengineering* qui se focalise plus sur la technique que sur l'homme.

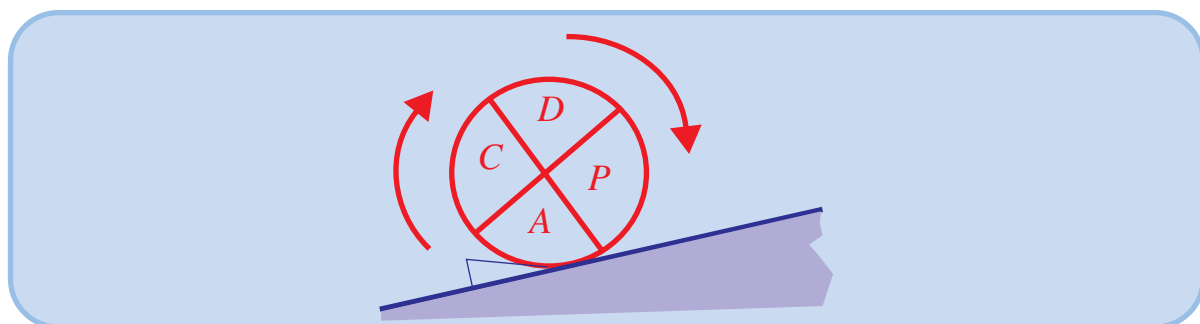
Table des matières

Index thématique

La philosophie du *kaizen* a été reprise de manière explicite dans les normes ISO 9000¹ et 9001² ([6], 2000), qui proposent des lignes directrices pour l'amélioration des performances dans le cadre de systèmes de management de la qualité. Ces normes font explicitement référence à la démarche d'amélioration continue, proposée initialement par Deming et popularisée sous le nom de roue de Deming (1982, [129]) qui suggère une démarche itérative fondée sur 4 étapes successives connues sous l'acronyme PDCA :

FIGURE 12

Roue de Deming (PDCA)



1. Voir page 974.

2. Pour plus de détails, voir page 977.

- Étape **Plan**: prévoir et organiser; la norme ISO 9001 précise «établir les objectifs et les processus nécessaires pour fournir des résultats correspondant aux exigences des clients et aux politiques de l'organisme»;
- Étape **Do**: exécuter (faire ce qui a été prévu); la norme ISO 9001 précise «mettre en œuvre les processus»;
- Étape **Check**: mesurer/vérifier, la norme ISO 9001 précise «surveiller et mesurer les processus et le produit par rapport aux politiques, objectifs et exigences du produit et rendre compte des résultats»;
- Étape **Act**: réagir pour améliorer, la norme ISO 9001 précise «entreprendre les actions pour améliorer en permanence les performances des processus».

I-3.2.2 Le reengineering

Le second courant¹, celui de la transformation radicale, est récent et se présente sous la forme du **reengineering**, mais il puise ses racines dans l'organisation scientifique du travail et de l'analyse de la valeur. Son *objectif est de défragmenter et de simplifier les processus*. L'hypothèse sous-jacente est que la réponse-type retenue depuis un siècle par les entreprises pour faire face à un accroissement de problèmes, induit par la complexification de leur environnement technico-économique, n'est plus pertinente. Cette réponse consistait en une simplification des problèmes par une décomposition en problèmes simples, combinée par un accroissement de la coordination; pour les «pères» du *reengineering*, les gains de productivité sur le travail opératoire direct ne compensent plus les déséconomies d'échelle induites par la complexité croissante des techniques de gestion utilisées pour assurer la coordination des activités productives. La défragmentation et la simplification des processus apparaissent alors comme des moyens efficaces de diminution du travail de coordination des activités productives. Depuis une demi-douzaine d'années, un certain nombre de transformations radicales ont été faites dans ce sens.

Les moyens mis en œuvre peuvent être classés sous trois rubriques.

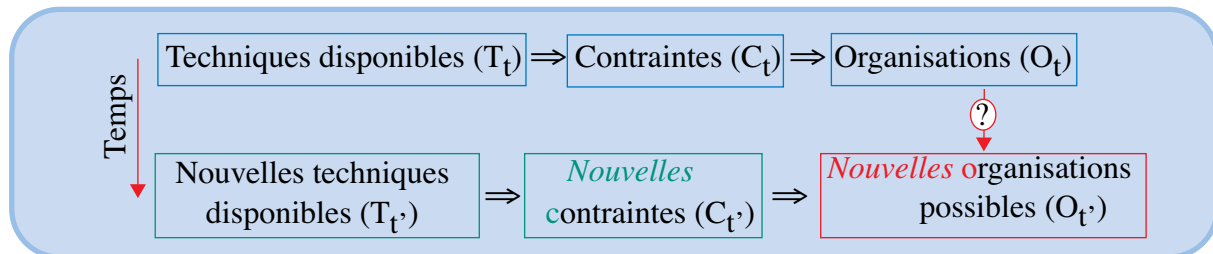
- L'application des techniques d'*analyse de valeur* (voir [chapitre II, § II-1.1, page 110](#)) à la conception (ou la re-conception) des produits manufacturés remonte à la fin des années quarante. Le *reengineering* s'est approprié la démarche pour l'appliquer à la transformation des processus. Alors qu'avant on privilégiait les questions «comment?» (comment faire plus vite, moins cher, de meilleure qualité?), on commence par des questions sur l'utilité des tâches retenues, en particulier dans la perspective d'une production de «valeur ajoutée» pour le client (questions «quoi?» et «pourquoi?»).
- Par cette démarche on tente de *casser les hypothèses implicites* sur lesquelles se fonde l'organisation. En effet, à tout moment, les techniques disponibles induisent un certain nombre de contraintes qui conditionnent assez largement l'organisation. L'évolution des techniques modifie les contraintes qui pèsent sur l'organisation, mais rien n'incite naturellement celle-ci à se transformer pour tenir compte du changement des contraintes. L'un des principes fort de ce *reengineering* est de rechercher, dans les techniques émergentes, celles qui modifient certaines contraintes fortes et donc fournissent des opportu-

1. Voir, par exemple, Hammer & Champy (1993, [215]); Davenport (1993, [120]).

nités de transformation, car rien ne vient naturellement pousser à ces transformations¹. La figure 13, résume la démarche implicite du *reengineering*.

FIGURE 13

Détection des opportunités de changement des organisations dans le reengineering



- Parmi les techniques émergentes, celles de l'information (au sens large) jouent un rôle central. La rapidité fabuleuse avec laquelle ces technologies de l'information évoluent et la difficulté à percevoir les implications de certaines percées technologiques posent un problème de méthode. La démarche déductive à laquelle nous sommes tous habitués n'est pas appropriée, elle bride la créativité. Le *reengineering* préconise l'adoption d'une *démarche inductive*: c'est prendre au sérieux et non en dérision les personnes qui disent avoir une solution et chercher à quels problèmes l'appliquer. Cette attitude est potentiellement fructueuse, d'autant plus que l'histoire a montré à quel point les créateurs (d'ordinateurs, de procédés de xérographie...) ont été systématiquement de mauvais prophètes de l'usage de leurs inventions (rappelons-nous que les inventeurs du premier ordinateur prévoyaient un parc d'une cinquantaine de machines, d'ici la fin du XX^e siècle).

Les *résultats* que l'on peut observer de l'application de cette démarche sont principalement au nombre de deux.

- La transformation des processus se traduit généralement par une double compression des structures :
 - une *compression verticale* correspondant à une diminution de la ligne hiérarchique, qui est principalement due à une transformation des rôles des différents acteurs; dans ce cadre, un certain nombre de personnes ne se contente plus d'exécuter des instructions données par leurs responsables, elles interviennent maintenant dans la prise de décision;
 - une *compression horizontale* qui résulte du passage du séquentiel au parallélisme des activités et s'appuie souvent sur le remplacement de plusieurs équipes par une équipe autonome d'acteurs tous indispensables à la fourniture d'une prestation complète et dotés d'une autonomie décisionnelle suffisante pour apporter une réponse satisfaisante aux problèmes posés;
- ces compressions de structures sont rendues possibles par une simplification des processus: au lieu de rechercher l'exhaustivité des gammes susceptibles de traiter tous les cas de figure, on préfère s'appuyer sur des versions multiples simples du même processus et confier à un même groupe de personnes les quelques gammes qui permettent de traiter 90% de la demande.

1. Parmi les multiples exemples cités par Hammer & Champy, on peut citer celui de l'arrivée des systèmes-experts, qui permet à des généralistes de faire une partie du travail d'un expert.

Une présentation des techniques d'analyse et d'amélioration des processus sera présentée au [chapitre III](#), § I-2.4, page 167.

SECTION II L'APPROCHE ÉCONOMIQUE DE LA GESTION DE LA PRODUCTION ET DES FLUX

L'approche économique de la gestion de la production et des flux implique la prise en compte d'un éclairage économique dans la prise de décision tenant compte des dépenses occasionnées et des avantages retirés (§ II-1). Elle nécessite également une mise sous contrôle des processus qui passe par des indicateurs en valeurs et par la mise en place de tableaux de bord (§ II-1, page 74).

II-1 L'éclairage économique de la prise de décision

Nous examinerons d'abord les instruments comptables et financiers actuellement disponibles et en montrerons la portée dans l'évaluation des décisions (§ II-1.1). Ensuite (§ II-1.2, page 80), nous établirons un certain nombre de principes généraux sur lesquels devraient se fonder les indicateurs économiques servant de guide à l'action.

II-1.1 Appel à l'instrumentation comptable

Une organisation ne peut espérer survivre qu'en contrôlant efficacement son activité «interne», ce qui n'est possible qu'en s'appuyant sur un «bon» système d'information interne comportant un volet de **comptabilité de gestion**¹. De nombreux ouvrages de qualité traitent de la comptabilité de gestion et du contrôle de gestion², auquel le lecteur peut se reporter. Il a semblé cependant indispensable de rappeler la terminologie en usage dans ce domaine et de mettre certains de ces concepts en relation directe avec l'utilisation qui en sera faite dans cet ouvrage.

Pour Alain Burlaud et Claude Simon (1981, [76]), «un **coût** est un calcul par lequel on regroupe des **charges** selon un critère jugé pertinent, ce qui suppose que l'on ait défini préalablement l'usage que l'on souhaite en faire»; ils poursuivent en notant que les modes de regroupement habituels sont le produit, l'activité ou le centre d'analyse et ils terminent en soulignant que «résultant d'un calcul interne, un coût est une opinion, non un fait». Cette vision se justifie dans l'utilisation des coûts que l'on fera dans cet ouvrage par le fait que certains coûts se calculent à partir d'hypothèses précises sur le fonctionnement d'un système productif³ et que l'on trouve également des coûts faisant implicitement référence à des utilisations alternatives de certaines ressources (c'est le cas notamment des coûts d'opportunité sur lesquels nous reviendrons).

1. Initialement, on parlait de comptabilité industrielle, puis de comptabilité analytique d'exploitation. Celui de comptabilité de gestion s'impose depuis une vingtaine d'années, même si les anciennes appellations (qui impliquent une vision plus restrictive) sont encore utilisées dans de nombreuses entreprises.

2. Voir Boisselier (2002, [58]), Bouquin (1997, [62]), Burlaud (2000, [78]), Lauzel & Teller (1997, [272]), Laverty & Demeestère (1990, [273]), Lorino (1991, [287]), Mévellec (1990, [298]) pour une présentation de cette approche et de ses limites.

3. On reviendra de manière détaillée sur ce point au § II-2.1.2, page 642, du [chapitre X](#).

L'utilisation d'outils dans un cadre différent de celui qui a conduit à leur élaboration a de fortes chances de conduire à des réponses inappropriées à des problèmes réels. Cette observation vise :

- le cas d'une transformation significative de l'entreprise et de son environnement ; le système d'information peut être alors correct, mais le contexte ayant changé, les techniques de contrôle en œuvre ne sont plus fondées ; cette remarque souligne le caractère contingent de la notion de coût et la nécessité implicite d'innover en matière de définition de coût, lorsque le contexte rend plus ou moins obsolètes certaines règles de calcul ou lorsque des besoins nouveaux se font jour ;
- le cas d'une distorsion du système d'information ; on est alors en présence d'effets pervers liés à la volonté d'acteurs de voir véhiculer dans le système d'information des données qu'ils jugent préférables parce qu'elles conduiront, pensent-ils, à une meilleure évaluation de leurs performances (nous reviendrons sur ce point au § II-1.2.1.3, page 82).

Les décisions prises en gestion de production s'appuient sur une modélisation ; la qualité des enseignements pratiques que l'on en tire dépend très largement de la pertinence des coûts utilisés. On doit donc mener de pair une réflexion sur les modèles et sur les coûts qu'ils utilisent. Trop souvent on assiste à un partage malsain du travail : aux comptables de fournir des coûts, sans savoir à quoi ils servent, et aux spécialistes de la production, des approvisionnements ou des transports de proposer des règles de décision s'appuyant sur ces coûts, sans que ces spécialistes connaissent leurs règles d'établissement. Le résultat peut être catastrophique en cas de divergence forte des hypothèses sous-jacentes au calcul des coûts et de celles utilisées pour décider¹.

Table des matières

Index thématique

Nous examinerons tout d'abord les approches orientées vers la détermination d'un coût de revient complet (§ II-1.1.1), avant d'aborder celles orientées vers l'utilisation du concept de coût variable (§ II-1.1.2, page 77) et celui des coûts préétablis (§ II-1.1.3, page 78).

II-1.1.1 L'approche du coût de revient complet

Historiquement, la notion de **coût direct**, composé de **charges directes**, c'est-à-dire de charges qui peuvent être affectées sans calcul intermédiaire au coût d'un produit, remonte aux années 1880 (Kaplan, 1984, [254]), à une époque où l'attention est alors focalisée sur le coût de main-d'œuvre et de matières et donc sur un coût variable direct (la notion de coût variable sera reprise au § II-1.1.2, page 77). Ce choix s'expliquait par l'utilisation d'une main-d'œuvre peu qualifiée, l'industrialisation ayant été rendue possible par une conversion d'une partie de la main-d'œuvre agricole. Les **charges indirectes** comprenaient alors essentiellement des charges fixes de production. Elles étaient d'un poids relatif plus faible et posaient moins de problèmes aux gestionnaires de l'époque. Dans ce contexte, les investissements étaient réalisés dès lors qu'ils abaissaient les coûts directs de fabrication (c'est la « grande époque » de l'organisation scientifique du travail) et que les ressources financières propres étaient suffisantes (large prépondérance de

1. On reviendra de manière détaillée sur ce point au § II-2.1.3.1, page 647, du chapitre X.

l'autofinancement, risque commercial assez faible dans un marché où l'offre dominait la demande).

Aujourd'hui, dans certains secteurs d'activité, le coût variable direct de nombreuses entreprises représente moins de 15 % du coût de revient complet. Cette transformation radicale de la structure des charges de l'entreprise s'explique :

- par la mise en œuvre de machines de plus en plus sophistiquées, chères, de performances accrues (rapidité d'exécution, polyvalence...), ne nécessitant pas toujours la présence d'un opérateur (qui peut conduire simultanément plusieurs machines), la combinaison de ces caractéristiques entraînant une substitution «homme-machine»; cette substitution diminue le poids relatif du travail dans les coûts et provoque le plus souvent un transfert de charges directes de travail vers des charges indirectes;
- par la polyvalence des machines qui accroît le nombre de gammes substituables, ce qui diminue les possibilités d'affectation «déterministe» de charges à des produits et peut rendre arbitraire le calcul de certains coûts directs¹;
- par l'utilisation de techniques de préparation du travail qui conduit à une importance croissante du service du planning et du bureau des méthodes (charges indirectes);
- par la complexité croissante des produits manufacturés qui nécessitent des équipements plus sophistiqués et un appel croissant au bureau des études.

Cette transformation de l'importance relative du coût direct a pour conséquence de diminuer le poids à accorder au contrôle de cette catégorie de charges.

Le passage du coût variable direct au coût direct, qualifié encore de **coût direct mixte** (Lauzel & Teller, 1986, [272]) implique une standardisation de coûts fixes directs (notamment de certains amortissements) qui n'est pas trop problématique lorsque l'on se trouve en présence de lignes de production spécialisées, mais est plus délicate en structure de type ateliers spécialisés.

La notion de coût direct est associée à celle de **marge**, différence entre un prix de vente et un coût partiel². C'est ainsi que l'on définira une **marge sur coût direct opérationnel**, à partir du coût direct variable, et une **marge sur coût direct mixte**, à partir du coût direct mixte. Le cumul de telles marges sera considéré comme devant contribuer à l'absorption des charges fixes non prises encore en compte et à la «production» d'un profit. Ces notions de coût direct et de marge seront utilisées dans l'évaluation économique de décisions d'ordonnancement (§ III-2.5.1.2, page 443, du chapitre V).

La logique du **coût de revient complet** est suffisamment connue pour qu'il soit inutile de la présenter. Le principal reproche qui est fait à cette technique est le caractère parfois très arbitraire des clés de répartition des charges indirectes, reproche qui est d'autant plus grave que, nous l'avons dit, le poids relatif des charges indirectes ne fait que croître et que ce sont elles qui sont le plus souvent la base de ces clés de répartition. L'utilisation de la main-d'œuvre directe comme

1. Le coût d'un produit dépend alors du choix de la gamme, lequel est conditionné par la charge de l'atelier. L'imputation de coût de lancement d'un produit est arbitraire lorsqu'il varie avec l'ordonnancement retenu.

2. On reviendra sur ce point au § III-2.5.12a, page 443, du chapitre V.

unité d'œuvre pour imputer les charges indirectes est de plus en plus critiquée pour les entreprises à forte intensité capitalistique.

II-1.1.2 Le coût fixe et le coût variable

La distinction entre **coût fixe** et **coût variable** (cette variabilité ayant pour référence le volume d'activité et n'étant pas nécessairement proportionnelle) remonte au XIX^e siècle, mais son utilisation en gestion est plus récente. La notion de charge fixe s'apprécie à la fois en référence à une période au cours de laquelle une production doit être réalisée et à une plage d'activité :

- La référence implicite au découpage temporel retenu s'explique par le fait que plus la période de production considérée est grande, plus il est facile d'adapter le niveau des ressources (principalement hommes et machines) à celui juste requis par le volume de production désiré pour cette période de production. Toute décision s'inscrit dans un cadre temporel précis dans lequel certaines charges sont fixes et d'autres variables. Cette remarque a son importance, comme nous le verrons lorsqu'il s'agira d'évaluer certaines décisions portant sur le court terme, comme celle d'ordonnancement¹.
- La référence implicite à une plage d'activité s'explique par le fait que les charges fixes varient de manière discontinue². Un « palier » de charges fixes permet donc une production susceptible de varier dans une certaine plage de volume d'activité, du reste pas toujours aisé de déterminer avec précision.

Par ailleurs, les comptables français préfèrent les termes de **charges opérationnelles** et de **charges de structure** à ceux de coûts variables et fixes retenues par les économistes. Pour mieux marquer le lien qui existe entre ces deux notions, Lauzel et Teller (1986, [272]) proposent les définitions suivantes : « Les charges de structure sont celles que l'entreprise engage pour disposer d'une certaine capacité ou puissance, en fonction des objectifs définis par sa politique générale et conformément à une stratégie impliquant des actions coordonnées à moyen et long terme... Les charges opérationnelles sont celles qui dépendent étroitement du degré d'utilisation, de l'intensité et du rendement de l'emploi des capacités et des moyens disponibles durant une période courte liée au cycle normal d'exploitation ».

Le raisonnement bien connu du **point mort** (utilisé en page 61) remonte aux années 1903-1904 (Kaplan, 1984, [255]) et constitue un premier modèle permettant d'analyser l'incidence de la séparation des charges fixes et variables sur la rentabilité de l'entreprise. C'est dans les années cinquante que l'utilisation systématique de cette distinction, sous la forme de la **méthode des coûts variables** ou **direct costing**, s'est répandue.

La notion de marge introduite dans l'approche des coûts directs s'adapte sans difficulté à l'approche du coût variable : dans une logique de point mort généralisé, le cumul des marges sur coûts variables des différents produits contribue à la couverture des charges fixes et à la constitution d'un excédent d'exploitation. Le **direct costing** est alors utilisé sous deux formes. La première, qualifiée de **direct costing simple**, utilise le coût variable (direct ou indirect). La seconde, qualifiée de **direct costing évolué**, retranche à la marge sur coût variable du **direct costing**

1. Voir l'implication de ce principe au § III-2.5.12b, page 444, du chapitre V.

2. L'application de ce principe se retrouvera à la page 660 et au § II-2.3.1, page 1142, du chapitre XVI.

simple, les frais fixes directs, pour aboutir à une **marge semi-brute**, appelée encore **contribution propre**. Cet indicateur est particulièrement utile pour apprécier l'intérêt relatif du maintien ou de l'abandon de certaines productions.

Le fait d'envisager une non-constance du coût variable conduit à utiliser la notion de **coût marginal** qui remonte au XIX^e siècle. L'utilisation pratique de ce concept n'est pas toujours aisée, dans la mesure où une unité marginale que l'on envisage de produire peut nécessiter des équipements supplémentaires et donc impliquer une forte discontinuité dans la variation du coût marginal. L'intérêt pratique de ce concept est une prise de décision sur le très court terme : une commande couvrant un peu plus que le coût marginal peut être intéressante dans la mesure où elle contribue à la couverture de charges fixes et où le fait de ne pas saisir cette opportunité se traduit par une sous-activité. Ce raisonnement est à utiliser avec précaution car l'entreprise ne pourra survivre que si, tôt ou tard, ses charges de structure sont couvertes par le cumul des contributions secrétées. L'utilisation du coût marginal pour la tarification a fait l'objet de nombreux travaux qui reposent sur la notion d'adaptabilité « continue » de l'offre ou sur un raisonnement en espérance mathématique (solution du classique paradoxe du voyageur de Calais).

D'autres implications du concept de charge fixe ont été analysées par J.M. Clark en 1923, [95], notamment avec l'introduction de la notion de **charge différentielle** ou **charge incrémentale**, qui associe à la mise en œuvre d'une décision la variation de charge qui en découle. Historiquement, ce concept a présenté un intérêt tout particulier dans l'analyse des décisions relatives à l'investissement (dans l'établissement de bilans différentiels) ou de désinvestissement, ce dernier cas ayant conduit à la notion de **charge érudable**. La notion de coût différentiel pose cependant un problème, dans la mesure où les enseignements ainsi dégagés sont fortement contingents, puisqu'ils dépendent de la solution de référence choisie. Cette conception est utilisée par le bilan différentiel qui sera étudié au § II-2.2.1, page 177 du chapitre III.

Une autre difficulté, parfois rencontrée, réside dans la pertinence des nomenclatures comptables (de comptabilité analytique d'exploitation) qui peuvent se prêter difficilement à ce type d'exercice si le niveau de détail requis dans l'analyse des conséquences de la décision n'est pas compatible avec la nomenclature disponible.

II-1.1.3 Le coût préétabli et le coût réel

Le Plan Comptable Général 1982¹ (PCG) indique que les **coûts préétablis** sont « calculés antérieurement aux faits qui les engendrent ; ce sont des coûts de référence qui serviront le moment venu de normes, d'objectifs ou de simples prévisions ; selon leurs types et selon l'optique de leur calcul, ils sont désignés par coûts standards, devis, coûts prévisionnels ». Par ailleurs, le PCG précise qu'« un coût préétabli avec précision par une analyse à la fois technique et économique est dit **coût standard** ».

Un coût sera dit **coût réel** ou **coût historique**, s'il est calculé postérieurement aux faits qui l'ont engendré. Les coûts standards sont utilisés en contrôle budgétaire.

1. Contrairement à la comptabilité générale, la mise en place d'une comptabilité de gestion n'est pas obligatoire. Ceci explique que le Plan Comptable Général 1999 n'a pas repris les dispositions du PCG 1982 dans ce domaine.

taire dans le cadre de budgets prévisionnels s'appuyant sur des prévisions volontaires et réalistes d'activités et allouées à des centres d'analyse. La notion de coût préétabli a été mise au point dans une optique de prévision et de comparaison ultérieure d'un écart avec le réalisé, fondant ainsi la logique du contrôle budgétaire.

Classiquement, plusieurs conceptions de standard sont envisagées (Burlaud & Simon, 1981, [76]). La première s'appuie sur une hypothèse d'utilisation parfaite des ressources, auquel cas le standard est un objectif idéal qui ne sera jamais atteint, mais vers lequel il convient de tendre. Le caractère irréaliste de tels standards a cependant des effets fortement démobilisateurs et conduit pratiquement à l'utilisation d'autres référentiels qui ne sont pas forcément toujours explicites. C'est la raison pour laquelle on conçoit généralement le standard comme une norme qui ne fait que refléter implicitement les conséquences d'un fonctionnement jugées d'un niveau satisfaisant, ce référentiel étant rarement explicité et difficilement remis en cause.

En l'état actuel des choses, la comptabilité de gestion est orientée vers la mesure du coût d'un produit ou vers la recherche des causes expliquant globalement pourquoi ce que l'on a prévu n'a pas été réalisé au niveau d'un centre d'analyse. Elle fournit un instrument irremplaçable d'analyse globale du fonctionnement d'une organisation sur la base d'un ensemble de normes. L'utilisation de coûts-standards est cependant envisageable pour prendre des décisions impliquant la modification de certaines ressources ou de leurs usages, à condition de prendre des précautions méthodologiques (certaines seront évoquées au § II-2.1.2, page 642, du chapitre X). On est alors dans le cadre de décisions répétitives de type programmable, s'appuyant sur des solutions analytiques ou des simulations n'impliquant pas de remises en cause du niveau de certaines ressources.

Table des matières

Mais pour beaucoup de décisions étudiées dans cet ouvrage, c'est plus sur la base d'une analyse différentielle qu'il faudra procéder. Cette inadéquation s'explique largement par les deux observations suivantes :

Index thématique

- Tout d'abord, les décisions à prendre concernent de plus en plus non pas un produit, mais plusieurs produits simultanément, soit directement, soit indirectement du fait de l'impact de la décision prise sur celles qui restent à prendre (interdépendance des décisions).
- Ensuite, on peut associer à bon nombre de décisions non seulement des coûts, mais aussi des « avantages » spécifiques qu'il importe de prendre en compte pour ne pas fausser les comparaisons dans la préparation de ces décisions. C'est ainsi, par exemple, qu'une même production sur une période donnée peut s'effectuer avec des coûts différents, liés à des ordonnancements différents pouvant mobiliser des ressources différentes (heures supplémentaires, par exemple); inversement, un même coût de production peut conduire à des productions différentes (associées à des ordonnancements différents). Une évaluation des décisions alternatives d'ordonnement que l'on envisage de prendre ne peut donc s'appuyer sur la seule notion de coût et doit tenir compte des autres conséquences associées à la décision à prendre (production « sortie »). Ce problème d'évaluation d'avantages se retrouve dans des décisions de type tactique ou stratégique portant notamment sur la qualité ou la flexibilité. Cela dit, le problème n'est pas tant dans l'utilisation d'informations appropriées que sur leur obtention: des études conséquentes, pouvant

s'appuyer sur des simulations, doivent être alors menées sur la base d'hypothèses de travail clairement définies qui impliquent un engagement personnel «risqué» des cadres chargés de ce travail.

Ajoutons enfin qu'une évaluation globale ne sera possible que si l'on passe par des indicateurs en valeur, dont les règles d'élaboration autorisent leur sommation (ce qui nous conduira à quelques propositions dans le § II-1.2, pour que cette propriété d'additivité soit respectée).

II-1.2 Critères d'élaboration d'indicateurs économiques

Trois catégories de principes généraux nous semblent devoir sous-tendre la définition des indicateurs économiques élaborés pour évaluer les décisions économiques dans une optique «différentielle»: le principe de contrôlabilité, le principe de non-universalité et le principe d'agrégativité. Ce § II-1.2 ne sera lu avec profit qu'à condition d'avoir une connaissance minimale des problématiques traitées dans cet ouvrage.

II-1.2.1 Principe de contrôlabilité

Le principe de contrôlabilité est ancien en contrôle de gestion. Une charge est dite contrôlable par un «acteur de l'entreprise» si celui-ci a le pouvoir d'en modifier l'importance par les décisions qu'il est habilité à prendre et qui influent sur les «phénomènes physiques» à l'origine de cette charge. Il est alors séduisant d'évaluer les performances des décideurs sur la base des résultats obtenus et des charges contrôlables (§ II-1.2.1.2, page 81), mais il convient de ne pas oublier (§ II-1.2.1.3, page 82) les effets pervers que tout système d'évaluation induit et de mettre en place les procédures qui en limitent les possibilités mettant alors «sous contrôle» le système d'évaluation. Il n'est sans doute pas inutile, pour commencer, de s'interroger sur la structuration implicitement retenue ici des décisions faisant l'objet du contrôle (§ II-1.2.1.1).

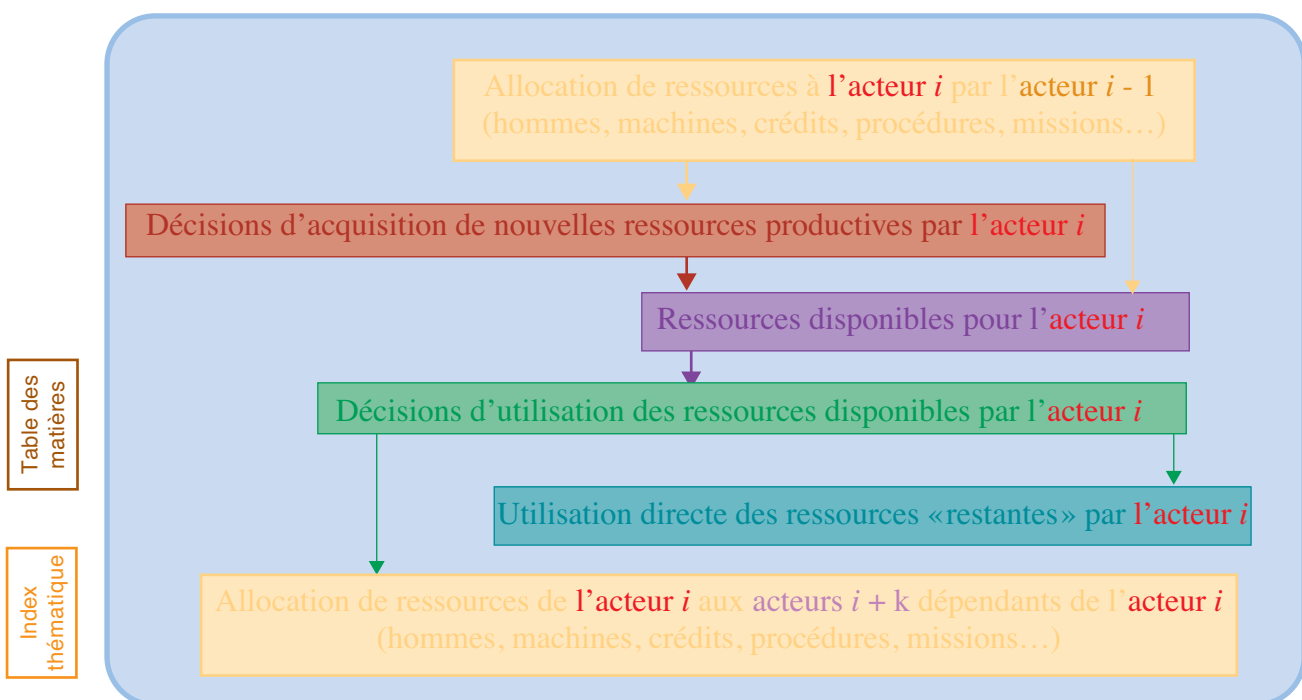
II-1.2.1.1 Structuration des décisions contrôlées

Dans une entreprise bien gérée, chaque poste de travail, de l'agent d'exécution au cadre de direction, fait l'objet d'une définition de fonctions associées au poste et d'une attribution de moyens (équipements, informations, hommes). Cette définition peut être explicite ou découler des fonctions effectivement remplies (ce fonctionnement étant considéré comme satisfaisant par la hiérarchie). Cet acteur dispose d'un ensemble des ressources (hommes, machines, budget, informations) qu'il peut utiliser dans le cadre général des missions qui lui sont dévolues. Certaines ressources allouées peuvent être communes à plusieurs acteurs mais on considérera alors que des procédures de résolution de conflits ont été prévues en cas de réquisition simultanée par plusieurs acteurs.

Ces considérations impliquent également une vision claire des relations qui lient les décisions. Le plus souvent, celles-ci sont prises dans un cadre organisationnel précis qui établit des règles simples et limite la complexité qu'engendre l'interdépendance dans la prise de décision. La pratique décisionnelle, de loin la plus répandue, semble celle de prises de décisions hiérarchisées. Si l'on considère une décision de gestion comme une allocation de ressources (hommes, machines, informations), dans le cadre des missions imparties au décideur, la hiérarchie des

décisions s'effectuera par le biais d'allocation de ressources, d'acquisition de ressources nouvelles et de définition de missions. Le schéma de principe de la **figure 14** illustre le processus de décision hiérarchique, les ressources visées comprenant les hommes, les machines et les informations au sens large (informations techniques, informations de gestion, procédures, délégations de crédits, missions imparties...). Les décisions d'acquisition de ressources productives correspondent en fait à une transformation de certaines ressources productives (ligne de crédit ouverte donnant la possibilité de mobiliser de nouvelles ressources comme les heures supplémentaires, la sous-traitance, les nouvelles machines..., dans le cadre des missions imparties à l'acteur i).

FIGURE 14
Périmètre de responsabilité des acteurs d'un système productif



II-1.2.1.2 Contrôlabilité et évaluation des acteurs

Un indicateur économique d'évaluation doit refléter les conséquences majeures de l'action à juger et d'elle seule. Si les centres d'analyse sont également des centres de responsabilité, il est souhaitable de ne rattacher à ce centre que les seules charges sur lesquelles le responsable du centre peut agir. Ce principe de contrôlabilité conduit à mettre en place un système d'information pertinent avec ce découpage et à privilégier des notions de marges et de coûts différentiels associés aux décisions d'utilisation des ressources confiées à l'acteur considéré, ce qui implique l'observabilité (existence de « capteurs ») de ces informations.

Cette notion de contrôle a une incidence à la fois sur l'espace des ressources, l'espace des produits et le découpage temporel. En effet, les décisions prises portent sur l'utilisation de ressources pour fabriquer des produits (ou assurer des prestations de service) et se situent nécessairement dans un cadre temporel précis de mise en œuvre de la décision lequel est souvent différent de celui de l'observation de ses conséquences. Illustrons par un exemple l'incidence de cette notion de contrôle sur l'espace des ressources et le temps.

Le responsable du service de maintenance d'une usine comportant deux ateliers peut prendre une décision D impliquant l'affectation aux ateliers de cinq des huit spécialistes dont il dispose; les chefs d'atelier pourront, en cas de besoin, faire appel à l'équipe «banalisée» des trois spécialistes restants. Chaque chef d'atelier gère les ressources dont il dispose en maintenance, sous contraintes (explicitées ou non) de procédures définies en accord avec le responsable de l'usine et qui font partie de la décision D . Le chef d'atelier 1 prendra un ensemble de décisions conditionnelles que nous noterons d_1/D , pour reprendre une convention classique en probabilité. De même, l'ensemble des décisions du chef d'atelier 2 relatives à la maintenance seront notées d_2/D . La décision D comporte une allocation de moyens et une définition de missions qui ont une certaine pérennité et s'inscrivent dans un certain cadre temporel. Les décisions d_i/D sont de même nature, mais elles sont contraintes par D et se situent normalement dans un cadre temporel plus court.

L'existence de ressources banalisées est susceptible de créer des conflits entre ateliers et, de ce fait, des interactions entre décisions d_1/D et d_2/D , sauf si des procédures appropriées ont été définies. De telles procédures font partie des ressources de type informationnel que gère le responsable de la maintenance dans l'usine et sont donc parties intégrantes de la décision D . De mauvaises procédures auraient pour effet de rendre interactives les décisions d_1/D et de d_2/D et de générer des dysfonctionnements dont la responsabilité incomberait au responsable de la maintenance de l'usine.

Cette vision hiérarchique de la décision a une conséquence sur l'évaluation économique de ces décisions. Dans notre exemple, le jugement des d_i/D à effet sur le court terme, s'effectuera sur une base rétrospective et ne prendra en compte que la seule marge de manœuvre dont dispose le responsable d'atelier i , ce qui exclut les charges de personnel de maintenance (tant qu'il s'agit du personnel permanent utilisé en heures normales). Le jugement de la décision D est plus complexe, d'une part parce que la fréquence de cette prise de décision est relativement très faible par rapport à celle des d_i/D et, d'autre part, parce qu'elle nécessite de prendre en compte ses implications sur les décisions qu'elle conditionne hiérarchiquement. Dans notre exemple, le responsable de la maintenance de l'usine peut s'interroger sur l'intérêt de passer d'une maintenance préventive à une maintenance conditionnelle ou sur l'opportunité de recruter du personnel ou d'affecter différemment le personnel dont il dispose. Ces décisions joueront sur la disponibilité du système productif par le biais de l'utilisation faite par les ateliers de ces allocations de ressources dans le cadre des missions qui leur sont assignées. Il faudra alors faire des hypothèses sur le fonctionnement du système et donc sur l'utilisation des ressources par les décideurs «locaux», ce qui sera d'autant plus difficile (même avec les outils de simulation) que l'on s'écarte de la situation actuelle. Il sera plus facile de procéder à une évaluation sur une base prospective et normative de D , ce qui ne retire rien à l'intérêt d'une évaluation rétrospective (nous reviendrons sur ce point).

On peut ajouter que la décision D peut comporter des incidences mesurables localement, mais qu'il convient de porter au débit ou au crédit de la décision D et non des décisions d_i/D . C'est ainsi que la décision de remplacement systématique d'électrodes sur des robots de soudure, à chaque changement d'équipes (maintenance préventive décidée par D), a un coût affectable aux machines concernées, mais sur lequel le chef d'atelier n'a aucun contrôle; dans ces conditions, il est préférable d'imputer cette charge à la décision D et non au fonctionnement de la machine, comme les usages «classiques» de comptabilité analytique inciteraient à le faire.

II-1.2.1.3 La contrôlabilité du système d'évaluation

Tout système d'information est directement ou indirectement utilisé comme un système d'évaluation et donc de jugement des acteurs. Il est dans la nature des choses que les acteurs cherchent à utiliser les lacunes ou imperfections du système d'information pour obtenir une évaluation conforme aux effets qui découleront de cette évaluation (ou qu'ils imaginent devoir découler de cette évaluation). En effet, le problème posé n'est pas ponctuel car il y a un apprentissage permanent des acteurs qui s'adaptent à l'évolution des systèmes et tirent profit de leurs imperfections. La recherche de ces effets pervers doit être permanente pour améliorer le système d'information et le rendre compatible avec les objectifs de gestion. Dans cette perspective, on peut dire qu'il doit y avoir contrôlabilité du système d'évaluation. Cela suppose d'avoir déjà des idées des risques de «déviance», ce qui facilite la définition d'une batterie d'indicateurs de surveillance du système d'évaluation.

Notons, enfin, le fait que des contraintes légales et fiscales pèsent sur certaines parties du système d'information de l'entreprise et servent à une évaluation des relations qu'elle entretient avec son environnement (au sens large). Il est souvent nécessaire de déconnecter l'information à finalité légale de celle à finalité managériale. En effet, les premières peuvent conduire à des décisions inefficaces.

II-1.2.2 Principe de non-universalité

On peut ensuite énoncer le principe de non-universalité des indicateurs, qui repose sur trois observations :

- Un indicateur d'évaluation économique peut être insuffisant pour décrire à lui seul l'environnement d'une décision soumise à évaluation : valoriser pour agréger est commode, mais réducteur d'une réalité complexe comportant de nombreux éléments qualitatifs ; la précision des grandeurs comptables manipulées peut être illusoire au regard des intentions profondes qui président à certaines de leurs utilisations. Le plus souvent, il faudra compléter l'information d'un indicateur d'évaluation par une batterie d'indicateurs « physiques » et/ou « croiser » cette information par d'autres indicateurs.
- Un indicateur est élaboré dans un but précis, ce qui peut conduire à autant d'indicateurs (ou de batteries d'indicateurs) que d'actions à évaluer, mais ceux-ci doivent être « articulés » dans une logique reflétant correctement l'interdépendance des décisions et de leurs conséquences, ce qui nous conduira à énoncer des règles d'agrégativité (§ II-1.2.3).
- Un indicateur est contingent dans la mesure où sa pertinence, c'est-à-dire l'efficacité des jugements qu'il permet de porter, dépend du maintien du réalisme des hypothèses du modèle implicite qui est à l'origine de la justification de l'indicateur.

Table des
matières

Index
thématique

II-1.2.3 Principe d'agrégativité

On peut enfin énoncer des règles auxquelles doivent obéir les indicateurs en valeur si l'on veut aboutir à un système cohérent d'évaluation de décisions interdépendantes. Il s'agit du principe d'agrégativité des indicateurs d'évaluation économique. Ce principe implique que l'on travaille sur des données brutes en valeur et jamais sur des ratios. Il s'applique dans les trois dimensions caractérisant tout couple « système productif - production » : l'espace du système de production (§ II-1.2.3.1), l'espace des produits (§ II-1.2.3.2, page 85) et le temps (§ II-1.2.4, page 90).

La mise en œuvre de ces principes doit permettre non seulement d'éclairer une prise de décision à un niveau quelconque, mais encore de retrouver après une agrégation appropriée sur les trois dimensions le résultat d'exploitation de l'année. Cette dernière remarque est importante car elle conditionne grandement l'acceptabilité d'une telle approche par les gestionnaires à « vision prédominante comptable ».

II-1.2.3.1 Agrégativité dans l'espace du système productif

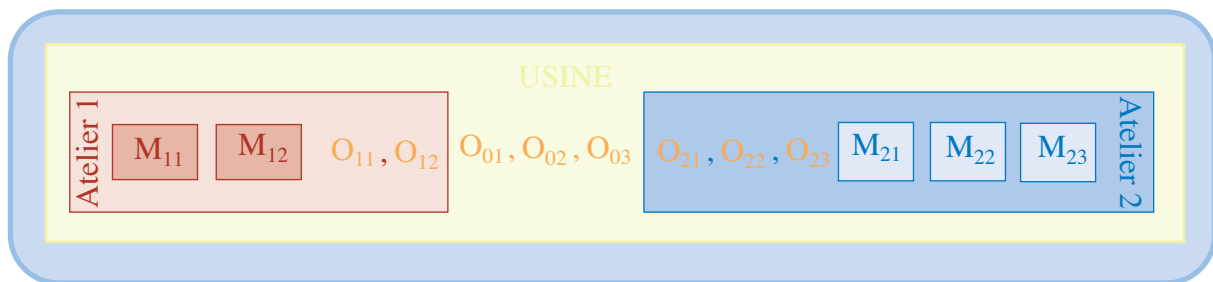
Les indicateurs économiques retenus doivent jouir de la propriété d'agrégativité dans l'espace du système productif (machines, groupe de machines, ateliers, usines) ; en effet, les décisions à « évaluer » sont toujours prises à un certain niveau

spatial même si souvent leurs conséquences pratiques sont observables à des niveaux spatiaux «inférieurs» (par exemple, les règles d'approvisionnement sont «préparées par des cadres pour une usine et mises en œuvre par des agents d'exécution opérant au niveau d'un atelier ou d'un magasin»). Il en résulte que la «dimension spatiale» d'une décision devra toujours être explicitée.

Reprenons, pour illustrer notre propos, l'exemple de la maintenance. Chaque atelier spécialisé comporte :

- des machines (que l'on désignera par une lettre M suivie de l'indice d'atelier et de celui du numéro d'ordre de la machine dans l'atelier, ce numéro d'ordre n'impliquant aucune restriction sur les processus),
- des opérateurs dépendant hiérarchiquement du chef d'atelier et chargés exclusivement de la maintenance (que l'on désignera par la lettre O, avec le même système d'indexation). Par ailleurs, l'usine est également dotée d'une équipe complémentaire de maintenance, sans affectation géographique précise, mobilisée à la demande des chefs d'ateliers (on notera, par l'indice zéro, l'appartenance de cette ressource commune à l'usine).

FIGURE 15
Exemple de la maintenance



La décision de maintenance du système productif se caractérise donc, entre autres, par une allocation de ressources dont une partie est banalisée (niveau usine) et une partie, spécialisée (niveau atelier). Toutes choses égales par ailleurs, le coût en main-d'œuvre de la maintenance du système productif, noté $C(0)$, sera la somme du coût de la maintenance de l'usine $C(0_0)$ et du coût de la maintenance des ateliers $C(0_1) + C(0_2)$.

D'une manière générale, considérons une ressource R , disponible sur un espace i que l'on notera R_i . Une allocation de cette ressource R_i peut être faite à des espaces j , sous-ensembles de l'espace i et formant une partition de ce dernier; ces ressources affectées spatialement seront notées R_{ij} . Fréquemment, certaines ressources ne sont pas allouées spatialement, auquel cas, elles seront repérées par l'indice $j = 0$ (cette banalisation spatiale s'accompagnant de procédures précises de mobilisation, comme cela a été dit au § II-1.2.1, page 80).

L'application du principe d'agrégativité fait que l'indicateur de coût $C(R_i)$ associé à l'utilisation de l'ensemble de ces ressources R_i doit être tel que :

$$C(R_i) = C(R_{i0}) + \sum_j C(R_{ij})$$

Deux remarques doivent alors être faites :

- Tout d'abord, certaines charges peuvent ne pas être directement affectables à un sous-ensemble j (différent de zéro), auquel cas elles seront imputées en charge commune ($j=0$), ce qui est assez logique si l'on considère comme commun tout ce qui n'a pas été affecté spatialement. Ce cas de figure peut se produire, compte tenu de la précision des nomenclatures de ressources retenue et de celle des «capteurs» disponibles (problème similaire à celui rencontré dans la définition du coût direct, pour un point de vue privilégiant le produit et non la ressource).

- De même, l'évaluation de certains avantages peut n'avoir de sens qu'à un certain niveau d'agrégation et sera donc portée au crédit de l'ensemble i sous la rubrique « avantage commun ». C'est ainsi que le niveau de disponibilité du système productif, consécutif à une politique de maintenance conduisant à une spécialisation des opérateurs du type de celle décrite ci-dessus, ne peut que s'évaluer globalement et non au niveau de l'atelier spécialisé, du fait de la banalisation de certains opérateurs; cette évaluation globale ne signifie pas pour autant que l'on passe par un indicateur synthétique unique; on peut avoir un indicateur de disponibilité par machine (qui dépendra à la fois d'une maintenance « locale » et de la maintenance « commune »).
- Il convient de mixer le point de vue spatial et le point de vue de contrôle. C'est ainsi que sera à la charge de la décision D l'utilisation des ressources de personnel de maintenance utilisé en heures normales et que pourra être portée à la charge des ateliers l'utilisation de ce personnel en heures supplémentaires, notamment s'il y a interférence entre des décisions d'ordonnancement et de maintenance.

II-1.2.3.2 Agrégativité dans le temps

Au paragraphe précédent, nous avons introduit une ressource R_{ij} disponible dans une zone i , l'indice j permettant de repérer sans ambiguïté cette ressource dans cet espace, et nous lui avons associé un coût $C(R_{ij})$. Le temps était absent de cette formalisation et il convient de combler cette lacune. A priori le problème est simple dans la mesure où la décision d'acquisition d'une ressource quelconque (ou du maintien de sa mise à disposition) conduit à des décaissements identifiables et datés. On pourrait donc être amené à penser que la dimension temporelle ne se traite pas différemment de la dimension spatiale. Les choses sont plus complexes : les décisions sont datées dans le temps et le problème de l'évaluation économique concerne fondamentalement des décisions d'acquisition et d'utilisation de ressources. Or il est plus difficile de postuler une indépendance dans le temps qu'une indépendance dans l'espace, dans la mesure où toute décision est plus ou moins conditionnée par les décisions antérieurement prises. Il s'ensuit que l'agrégation dans le temps suppose que soient prises certaines précautions méthodologiques. On examinera, dans un premier temps, la logique de l'agrégation dans le temps (§ II-1.2.32a), puis quelques problèmes concrets que celle-ci nous semble poser (§ II-1.2.32b, page 87).

Table des matières

Index thématique

II-1.2.32a) La logique de l'agrégation dans le temps

Les comptables ont été très tôt confrontés au problème de la détermination du résultat d'un exercice, ce qui les a conduit à adopter une position de principe sur les deux points suivants :

- choix d'une convention stable en cas de non-coïncidence de la date d'engagement d'une dépense et de celle de son paiement; en France est retenu le principe d'une comptabilité d'engagements; l'application stricte de ce principe pose le problème du décalage possible entre des données prévisionnelles à base juridique et les flux de trésorerie qui seront effectivement constatés (contentieux, solvabilité de clients, fluctuation de change...), ce qui conduit à corriger certaines données par des provisions;
- prise en compte de la dépréciation de certaines immobilisations au cours de l'exercice, on en vient alors à la notion d'amortissement qui s'analyse comme une consommation d'un équipement.

La mise en œuvre de ces principes conduit à une indépendance des exercices et autorise alors une additivité des résultats d'exercices consécutifs, laquelle est limitée en pratique par l'inflation et l'absence d'actualisation.

Au niveau de l'évaluation économique des décisions, il n'est pas étonnant de retrouver des problèmes similaires puisqu'il n'y a que rarement simultanéité entre la date de prise d'une décision et celle de ses conséquences économiques. Pour analyser ce problème, introduisons une décision (ou un ensemble de décisions) D_t prise par un acteur au cours de la période t et produisant des effets entre t et $t + T_t$. Par rapport à la solution de référence en vigueur au moment de la prise de décision (laquelle consiste éventuellement à ne rien faire), celle-ci conduit à des échéanciers de charges incrémentales et d'avantages, la définition de ces derniers étant loin d'être évidente. Pour expliciter la démarche proposée, notons :

- θ et t , indices θ de la période (la décision étant prise au cours d'une période t et ses effets analysés au cours de périodes ultérieures θ);
- $R_{\theta t}$, l'ensemble des ressources mises à la disposition du décideur au cours de cette période θ dans le cadre de la solution de référence (il est possible d'affiner l'analyse par l'identification de la zone de rattachement de chaque ressource mobilisable avec utilisation possible du repérage spatial des ressources conduisant alors à utiliser la logique d'agrégation dans l'espace décrite au § II-1.2.3.1, page 83);
- $R'_{\theta t}$, mobilisation de cet ensemble de ressources au cours de la période par rapport à ce qu'elle aurait été dans l'hypothèse où, à la date t , la décision D_t n'avait pas été prise;
- $C(R_{\theta t} - R'_{\theta t})$ la charge incrémentale résultant de la variation de mobilisation de cet ensemble de ressources au cours de la période θ ;
- $C(D_t)$, la charge incrémentale totale résultant de la variation de mobilisation de cet ensemble de ressources sur cet horizon T_t ;
- $A(R_{\theta t} - R'_{\theta t})$ la variation des avantages résultant de cette décision au cours de la période θ , que l'on supposera exprimée par un indicateur en valeur;
- $A(D_t)$, la variation totale des avantages résultant de la variation de mobilisation de ressources sur cet horizon T_t .

On peut écrire: $C(D_t) = \sum_{\theta=t}^{t+T_t} C(R_{\theta t} - R'_{\theta t})$ et $A(D_t) = \sum_{\theta=t}^{t+T_t} A(R_{\theta t} - R'_{\theta t})$ et

comparer l'intérêt de décisions alternatives D_{it} à prendre en t , dès lors que les horizons T_{it} associés à ces décisions alternatives sont identiques (dans le cas contraire, des problèmes de comparabilité se posent, ce cas de figure étant classique en choix des investissements).

Un problème peut se poser lorsqu'une même charge est associée à une variation de mobilisation de ressources sur plusieurs périodes successives (cas d'une sous-traitance ponctuelle, par exemple). Dans la mesure où l'horizon T_t utilisé « couvre » bien ces différentes périodes, il n'est pas très gênant que $C(R_{\theta t} - R'_{\theta t})$, pour l'une des périodes θ comprises entre t et $t + T_t$, comporte une charge associée logiquement à plusieurs périodes. Par contre, si pour une raison quelconque, on est amené à travailler sur un horizon plus court que T_t , des problèmes peuvent

se poser et conduire à une répartition conventionnelle de cette charge sur les différentes périodes

Il est clair que si une nouvelle décision D_{t+k} (ou un ensemble de décisions) est prise à une date $t + k$ (sans prise de décision entre t et $t + k$), la nouvelle situation de référence inclut les conséquences de la décision antérieurement prise en t . C'est la combinaison de la notion de charge incrémentale et de modification dans le temps de la situation de référence qui assure l'agrégativité dans le temps et permet d'évaluer de manière plus synthétique le décideur sur la base d'un ensemble D_k de décisions qu'il aura été amené à prendre, car on peut alors écrire pour évaluer les

$$\text{décisions prises entre } t \text{ et } t + K: C(\{D_k\}) = \sum_{k=t}^{t+K} C(D_k).$$

La vision hiérarchique des décisions que nous avons retenue fait qu'il n'y a pas de risque de double compte lorsque l'on agrège les indicateurs de charge associés à l'ensemble des décisions prises par l'ensemble des individus. L'agrégativité des avantages est similaire si la notion de différentialité a été correctement appliquée.

La limite «classique» de cette agrégation dans le temps tient à l'addition de valeurs disponibles à des dates différentes, ce qui n'est pas grave si l'on reste sur un horizon assez court (disons, pour fixer les idées, ne dépassant guère un an). Dans le cas contraire, il faut envisager de faire appel aux techniques d'actualisation.

Table des
matières

II-1.2.32b) Problèmes concrets posés par l'application du principe

L'application du principe d'agrégation dans le temps pose trois problèmes pratiques.

Index
thématique

- *Évaluation ex ante, évaluation ex post*

La démarche proposée n'est pas sans poser quelques problèmes pratiques au niveau de l'évaluation des avantages associés aux prises de décision. Reprenons le cas de la maintenance. Le responsable de la maintenance pour l'usine dispose d'un ensemble de ressources pour mener à bien sa mission, parmi lesquelles une équipe de sept personnes. Supposons qu'il obtienne l'embauche d'une huitième personne. Cette décision ne peut que se fonder sur une analyse rapprochant le coût résultant de cette décision, des «améliorations» du niveau de service du système productif consécutif à un accroissement et à un redéploiement de moyens.

L'approche proposée permet de trancher entre plusieurs décisions (ou ensembles de décisions alternatives) entre lesquelles le décideur désire choisir; il s'agit alors d'une évaluation ex ante. Est-ce à dire pour autant que le décideur devra être jugé sur la base du dossier qui fonde sa décision? Ce choix serait difficilement justifiable, dans la mesure où les données prévisionnelles utilisées pour prendre la décision reposent sur des hypothèses plus ou moins fortes que la réalité se chargera de démentir, sans compter que, pour emporter la décision, ce responsable aura pu retenir quelques hypothèses «délibérément très optimistes» et qu'il serait fâcheux, pour l'entreprise, d'encourager ce type de déviation. La logique voudrait donc que l'évaluation économique de cette décision se fasse ex post et non ex ante. Concrètement,

cette évaluation doit s'effectuer sur une période correspondant à l'horizon associé à la décision, ce qui pose un double problème.

- Il est difficile d'isoler concrètement l'impact de cette décision de celui des décisions prises ultérieurement par le même acteur.
- Cette décision conditionne des décisions prises par d'autres personnes (chefs d'atelier en l'occurrence); il n'est alors pas toujours possible, dans l'observation nécessairement globale que l'on peut faire, de déterminer la part respective imputable à chaque décision.

L'évaluation ex ante peut être appliquée pour toutes les décisions; dans cette hypothèse, les cas d'application de l'agrégation semblent limités (cas de décision à prendre, certaines décisions antérieures n'ayant pas encore produit tous leurs effets) et l'intérêt principal de l'agrégativité est de forcer à une certaine cohérence des décisions. Dans cet ordre d'idées, il convient de noter que certaines classes de décisions sont prises périodiquement, avec un horizon décisionnel supérieur à la périodicité de prise de décisions (cas que l'on rencontre notamment en ordonnancement et en planification). Dans ces conditions, les décisions proposées comme devant prendre effet au-delà de la période de révision ne seront jamais effectives (puisqu'elles seront reconsidérées lors de la prochaine prise «globale» de décision) et n'ont pour objet que d'éviter un comportement décisionnel que l'on pourrait qualifier de myope (c'est ainsi que pourront être prises, en planification, des décisions de constitution de stocks pour faire face à une demande saisonnière).

L'évaluation ex post est donc sans doute assez facile à réaliser pour des décisions opérationnelles et beaucoup moins pour des décisions tactiques ou stratégiques.

- ***Le risque inhérent à la logique incrémentale***

L'utilisation d'une logique de charges incrémentales pose nécessairement le problème de la définition de la solution de référence à retenir. Il peut être tentant d'imaginer de comparer les alternatives entre lesquelles le décideur devra choisir, à une solution de référence «idéale» vers laquelle il conviendrait à terme de tendre. D'un point de vue méthodologique, cette méthode est le plus souvent irréaliste, dans la mesure où elle suppose un travail préalable important de définition de cet idéal de référence, avec ce que cela suppose de temps d'investigation, de créativité et de mobilisation de moyens de calcul. Plus grave encore, peut-être, est le caractère implicitement normatif de cette démarche. Il est, en effet, impossible de définir une telle situation de référence d'un ensemble productif quelconque sans prendre parti sur les caractéristiques et les permanences des flux qui y transitent, mais aussi sur la qualité des procédures de gestion à mettre en jeu. La variété des hypothèses de travail possibles rend largement arbitraire cette solution de référence et lui confère des attributs normatifs avec les risques que cela comporte et que l'on a évoqués dans la critique précédemment faite des coûts standards.

Dans ces conditions, il nous semble plus sain de retenir comme solution de référence la solution actuellement en vigueur et de calculer le différentiel des charges et avantages des différentes solutions alternatives par rapport à cette solution actuellement en vigueur. Cela dit, il ne faut pas oublier que cette technique d'analyse peut conduire à perdre de vue qu'une activité soumise à

évaluation peut être intrinsèquement inintéressante sans pour autant pouvoir être remise en cause par une analyse différentielle qui peut conclure à l'intérêt du maintien de cette activité si elle se poursuit dans des conditions moins défavorables. Par ailleurs, le rejet d'une solution de référence idéale n'implique pas que cette idée ne présente pas d'intérêt car l'action créative puise souvent son inspiration par référence à une situation «idéale» avec tous les risques inhérents à l'appel à des mythes.

Il faut noter enfin qu'une évaluation s'appuyant systématiquement sur une logique différentielle conduit à une amélioration par rapport à une solution de référence que cette approche n'incite peut-être pas à remettre en cause radicalement. C'est ainsi, pour reprendre l'exemple de la maintenance, que le responsable se posera peut-être plus facilement le problème d'une réaffectation de ses moyens entre les ateliers que celui d'une compression des effectifs tout en les dotant d'équipements plus performants pour préserver ou améliorer la qualité «globale» de la maintenance (on peut du reste trouver à l'origine de cette distorsion dans l'analyse du «souhaitable pour l'entreprise», des «effets pervers» du type «pouvoir-rémunération-considération»).

- *Évaluation simultanée de plusieurs décisions sur une période*

Dans une logique «incrémentale» respectant le principe de contrôlabilité, le décideur sera rendu responsable de l'acquisition de nouvelles ressources (ou du maintien de ressources existantes, comme les ressources humaines) et, à ce titre-là, doit voir le coût de ces ressources associé à sa décision. Par contre, les ressources qui lui ont été allouées et sur lesquelles sa responsabilité n'est qu'une responsabilité d'utilisation (et non d'acquisition), doivent être considérées comme d'un coût nul pour ce décideur. Une évaluation d'avantages doit compléter celle des charges.

Cela dit, «l'affichage» d'un coût nul pour les ressources allouées est générateur d'effets pervers (ce qu'ont parfaitement compris les promoteurs de la technique de définition de budget, en contrôle budgétaire, connue sous le nom de «budget base zéro»). Il semble qu'il est nécessaire de ne pas trop parcelliser l'information et que des indicateurs globaux présentent un intérêt pratique certain. C'est la raison pour laquelle, lors de l'évaluation ex ante de décisions, on peut utiliser la notion de charges fixes de période pour valoriser les ressources allouées au décideur par l'instance supérieure (technique connue sous le nom d'**abonnement de charges fixes**). Ces charges de période seront à revoir si l'on se place à un moment donné dans une logique d'agrégation dans le temps. Si l'évaluation de charges de personnel ne pose guère de problème, il n'en sera pas de même en ce qui concerne les amortissements pour lesquels une évaluation économique (et non comptable) serait préférable, comme on le verra à la [page 126](#).

Notons enfin que l'un des problèmes classiques rencontrés en matière d'évaluation des avantages liés à une décision que l'on analyse est celui du niveau d'observation. Doit-on, par exemple, tenir compte du gain d'un demi-opérateur lorsque l'on évalue une alternative d'investissement. La logique économique exige de prendre en compte les flux effectivement décaissés (vision globale) et, dans ces conditions, le temps gagné (vision locale) ne

saurait être pris en compte si l'économie n'est que virtuelle. La non utilisation du mi-temps gagné par une autre activité conduit à ne pas considérer cet avantage. Il est, cependant, essentiel de prendre en compte cet avantage potentiel car les décideurs sont souvent amenés à prendre plusieurs décisions qui se confortent les unes, les autres, et rendent réel ce qui, individuellement, ne pouvait être que potentiel. Cette analyse de la synergie des décisions est classique en choix des investissements. On verra comment mettre œuvre ce principe au § II-2.1.1, page 174, du chapitre III.

II-1.2.4 Agrégativité dans l'espace des produits

Les indicateurs économiques retenus doivent jouir de la propriété d'agrégativité dans l'ensemble des produits; ce principe vise non seulement les regroupements en type de références, famille de références (selon les logiques de hiérarchisation des prises de décisions utilisées notamment en planification), mais encore tout regroupement pertinent de références (en particulier un produit et ses divers composants).

L'intérêt d'une telle règle réside, certes, dans la possibilité d'imputer sans ambiguïté certaines charges à un ensemble donné de références (charge affectable pour l'ensemble considéré), mais aussi et surtout de calculer des valorisations de productions permettant de calculer des marges « globales » et donc la contribution de l'ensemble de références considérées, à la couverture de charges fixes indirectes (par rapport à cet ensemble).

II-2 Mise en place de tableaux de bord

Un tableau de bord de gestion¹ est une liste d'indicateurs destinés à étayer un jugement sur le fonctionnement d'un centre de responsabilité (voir, par exemple, ECOSIP, 1990, [134] ou Sulzer, 1985, [397]). Les approches de type *kaizen* mettent l'accent sur la distinction entre indicateurs de type R, qui tournent autour de la rentabilité financière immédiate, et ceux de type P, qui tournent autour de l'amélioration des processus qui conditionne la rentabilité du long terme. Au niveau de centres de responsabilité élémentaires, ce sont plutôt des indicateurs de type P que l'on trouvera dans les tableaux de bord, parce que le pilotage s'effectue davantage sur des bases physiques. La batterie d'indicateurs qui peuvent être mis en place est vaste. Dans les entreprises d'une certaine importance, les contrôleurs de gestion ont mis en place des tableaux de bord, depuis plusieurs décennies. La conception de ces tableaux de bord est souvent empirique, sans être pour autant dénuée d'efficacité. Pour améliorer les tableaux de bord existants ou en créer de nouveaux, il est possible de s'appuyer sur la réflexion d'ensemble proposée par le modèle SCOR (voir le § I-2, page 895, du chapitre XIII) sur les indicateurs de performance de la chaîne logistique. Dans tous les cas de figure, il est utile d'aborder cette problématique avec le recul une méthodologique qui s'impose pour éviter de demander à cette approche ce qu'elle ne peut fournir ou pour éviter de tirer des enseignements fallacieux de la lecture de tels tableaux de bord.

On examinera les principaux problèmes qui se posent dans la définition d'un indicateur, à savoir: son positionnement par rapport aux décisions qu'il est censé

1. Ce paragraphe reprend quelques éléments de l'article de Giard, Bonmarchand et Boitout (1995, [191]).

éclairer (§ II-2.1), l'incidence des décisions sur sa valeur (§ II-2.2, page 91), sa plus-value informationnelle par rapport aux autres indicateurs (§ II-2.3, page 92), l'incidence du temps sur sa valeur (§ II-2.4, page 93), l'interprétation que l'on peut en faire (§ II-2.5, page 93) et, enfin, les problèmes de cohérence spatiale et temporelle des différents tableaux de bord (§ II-2.6, page 94). Certaines réponses aux questions posées ne peuvent être rationnellement trouvées qu'en adoptant une démarche de simulation des processus que l'on désire contrôler. En effet, la simulation permet de reproduire le fonctionnement d'un système en régime de croisière¹ et de générer des variables d'état correspondant aux indicateurs utilisés dans un tableau de bord.

II-2.1 Positionnement temporel de l'indicateur par rapport à la décision

La vocation d'un indicateur est d'apporter un éclairage décisionnel aux principaux acteurs d'un centre de responsabilité. De ce point de vue, les indicateurs n'ont pas tous le même positionnement temporel par rapport à la décision. On peut, en effet, distinguer deux types d'indicateurs :

- les *indicateurs à vocation ex ante* sont destinés à aider la prise de décision à venir (exemple : indicateur de charge prévisionnelle globale ou par catégorie de ressources) ; ce type d'indicateurs se retrouve presque exclusivement dans le tableau de bord de pilotage (gestion opérationnelle du court terme) ;
- les *indicateurs à vocation ex post* sont destinés à évaluer la qualité des décisions passées ; cela étant, ce type d'indicateur est intéressant à utiliser dans la préparation de décisions, principalement dans le cadre de simulations destinées :
 - soit à aider à la prise de *décisions opérationnelles* assistée par un SIAD (système interactif d'aide à la décision) ; un tel usage est intéressant dès lors que la décision à prendre est complexe et implique la prise en compte de plusieurs points de vue (cas de l'ordonnancement, par exemple) ;
 - soit de tester la validité de stratégies alternatives de commande du système productif dans les analyses de *conception* ; il n'est plus possible en effet de se contenter d'une vision grossière en univers certain dans ce type d'analyse, dans la mesure où il devient essentiel de s'assurer de la flexibilité du système imaginé et de la robustesse de ses modalités de fonctionnement en présence d'aléas sur la demande ou la disponibilité de ressources ; ces propriétés ne peuvent s'apprécier que par le biais d'études simulatoires, en complément d'études préliminaires calibrant en première approche le système productif visé².

Table des matières

Index thématique

II-2.2 Relations causales entre indicateurs et décisions

L'éclairage apporté par un indicateur ne peut être qualifié d'éclairage décisionnel que dans la mesure où l'on est capable d'établir des *relations causales* entre les indicateurs utilisés et les leviers de commande dont disposent les acteurs qui pilotent le système sous contrôle, faisant l'objet d'un tableau de bord. Dans le

1. Si les caractéristiques du système ou de son environnement sont modifiées, il convient de recommencer l'étude avec le nouveau régime de croisière.

2. Une illustration de cette démarche peut être trouvée dans [190], [191], [196] et [199].

cas contraire, le décideur reste singulièrement seul et doit opérer son apprentissage comme les rats de laboratoire en fonction des stimuli auxquels ils sont soumis.

L'établissement de telles relations causales est loin d'être évident et l'intuition n'est pas toujours bonne conseillère. Dans certains cas, le système sous contrôle peut faire facilement l'objet d'une simulation. La modélisation sous-jacente implique une vision analytique de la complexité causale¹. La variation des indicateurs trouve son origine non seulement dans les décisions de pilotage, mais aussi dans les aléas qui affectent nécessairement la demande, la disponibilité des ressources et les temps opératoires (on reviendra sur ce point au § II-2.4).

II-2.3 Plus-value informationnelle d'un indicateur

L'intérêt d'un indicateur se juge aussi au regard de celui d'autres indicateurs possibles. Se pose alors le problème de la plus-value informationnelle d'un indicateur ou, ce qui revient au même, celui de la pertinence de la composition du «portefeuille d'indicateurs». Il est évident que l'importance du nombre d'indicateurs retenu dépend, entre autres :

- de la liste des différents points de vue à éclairer (satisfaction du client, utilisation rationnelle des ressources, etc.),
- du type d'usage ex ante ou ex post que l'on souhaite en faire,
- de la capacité qu'ils offrent à orienter l'action (cf. § II-2.2).

Cela étant, une fois déterminé un groupe d'indicateurs susceptibles d'être candidats et dotés des mêmes caractéristiques (par rapport aux caractéristiques listées ci-dessus), se pose la question de la possible redondance des indicateurs de ce groupe. Ce problème est important :

- parce qu'un trop grand nombre d'indicateurs nuit à la compréhension de ce qui se passe, les arbres cachant la forêt;
- parce qu'une «sur-représentation» d'un point de vue peut avoir des effets pervers (par exemple, si 90 % des indicateurs d'un tableau de bord reflètent un point de vue commercial et 10 % celui de la gestion de production, il y a de fortes chances pour que le comportement des acteurs privilégie de manière trop systématique le point de vue commercial).

La redondance se produit dans un groupe d'indicateurs, lorsque l'on est à peu près assuré d'observer une co-variation de ces indicateurs. La détection de ce phénomène est souvent malaisée dans la réalité², pour des raisons diverses (absence de mémorisation, faible périodicité de calcul d'indicateur, évolution du contexte, rotation du personnel).

1. Cet avantage se restreint lorsqu'il n'est pas possible d'isoler clairement les principaux facteurs qui sont à l'origine des valeurs prises par l'indicateur. Il est alors possible dans ce cas d'envisager une approche statistique de la liaison entre la variable expliquée (indicateur) et les principales variables explicatives retenues (variables de commande), par le biais de technique comme la régression linéaire multiple.

2. Il n'en est plus de même lorsqu'on utilise une approche simulateur car il est possible d'utiliser les outils statistiques disponibles pour mettre en évidence d'éventuelles co-variations entre indicateurs. Une fois détectée cette co-variation, se pose alors le problème éventuel de l'élimination de certains indicateurs qui ne relève pas de la statistique, mais d'un jugement fondé sur la facilité d'interprétation (compréhension par les acteurs, orientation décisionnelle...).

II-2.4 L'incidence du temps dans la définition des indicateurs

Un indicateur peut être calculé à partir de données caractérisant l'état du système à une date donnée ou faire intervenir des flux définis sur une période. Dans le dernier cas, il est évident que le découpage retenu a une incidence et que l'interprétation que l'on peut faire de l'indicateur en dépend. Mais il peut en être de même lorsque l'indicateur étudié ne fait intervenir que des observations instantanées. C'est nécessairement le cas lorsqu'une donnée (un «reste à traiter», par exemple) est tributaire d'un ensemble de décisions prises sur la période. Il est donc difficile de s'affranchir d'une réflexion sur l'incidence du temps, sur la définition de l'indicateur. Deux catégories de problèmes se posent.

- Le découpage temporel joue un rôle¹ évident dans la variabilité des valeurs que l'on peut observer pour un indicateur. Ceci n'est pas sans incidence sur ses règles d'interprétation et nous reviendrons sur ce point au § II-2.5. L'éclairage apporté n'est que l'un des éléments du choix final du découpage temporel car celui-ci est lié à une multitude de considérations, parmi lesquelles intervient l'interprétation des indicateurs.
- Il faut aussi s'interroger sur le rôle que joue le découpage temporel dans le lien qu'entretiennent des indicateurs définis sur des périodes différentes (habituellement obtenues par agrégation), à partir de mêmes règles de calcul ou de règles de calcul différentes. En particulier, on peut se demander :
 - si la nature de certains indicateurs définis sur des horizons différents (indicateurs ex post de pilotage et indicateur de gestion) est ou non altérée dans ce processus d'agrégation (perte de signification, transformation de l'interprétation...);
 - quels liens analytiques ou statistiques (d'où prédictibilité) peuvent exister entre des indicateurs définis sur des horizons différents et à partir de règles de construction différentes.

Table des matières

Index thématique

II-2.5 Interprétation de l'indicateur et de ses variations

Un indicateur ne présente d'intérêt que s'il est interprétable par ceux à qui il est destiné. On ne se posera pas ici la question de la pertinence de la liste des destinataires d'un indicateur, bien que cette question soit loin d'être anodine, des effets pervers pouvant être engendrés par une «mauvaise diffusion» de l'indicateur. On supposera ici que l'indicateur a au moins un destinataire. Pour apprécier la pertinence de cet indicateur, il est utile de distinguer deux types d'indicateurs. Un indicateur peut être :

- *explicitement normatif*, si l'on est en présence d'une cible que l'on cherche à atteindre (comme un taux de commandes en retard, dans une production à la commande); dans ce cas, l'analyse de l'écart par rapport à la norme implique un jugement sur l'atteinte d'objectifs; il faut alors souligner que rien ne garantit a priori que cet objectif soit réaliste et que si tel n'est pas le cas, de nombreux effets pervers (démobilisation...) peuvent être observés;
- *implicitement normatif*, si l'on est en présence d'un jugement à opérer alors que la base de comparaison est floue (valeur habituelle...).

1. Seule la simulation permet une étude «objective» de l'impact du découpage temporel.

En définitive, dans les deux cas, se pose le problème de l'établissement d'une *norme réaliste* en fonction des caractéristiques du système (ressources disponibles, règles habituelles de fonctionnement) et des sollicitations auxquelles il est soumis (aléas de la demande, des temps opératoires...). Si cette information n'est pas disponible, aucun jugement objectif de performance n'est possible.

Lorsque l'environnement est suffisamment stable et la rotation des acteurs faible, un apprentissage par essai - erreur peut s'effectuer. Dans le cas contraire, il n'est guère possible qu'en faisant appel à une simulation du processus étudié et en interprétant les résultats à la lumière des enseignements du contrôle statistique de fabrication. En effet, la simulation d'un système productif sur une longue période permet d'obtenir l'historique d'un indicateur, sous des conditions parfaitement contrôlées qui en facilite l'interprétation. On peut alors tirer de cette analyse la norme qu'il semble raisonnable de retenir en régime normal. Celle-ci se caractérise par un intervalle dans lequel on considère qu'il est normal que l'indicateur étudié fluctue. Cette information permet une meilleure interprétation des variations observables et permet d'éviter affolements intempestifs et congratulations abusives. Idéalement, la détermination de cet intervalle implique l'explicitation du risque de première espèce (lié à la décision prise à tort d'une perte de contrôle du système) et de celui de seconde espèce (lié à la décision prise à tort du maintien sous contrôle du système). Si le premier risque est assez facile à apprécier, il n'en est pas de même du second qui suppose la détermination, non seulement du seuil au-delà duquel le fonctionnement doit être considéré comme inacceptable, mais aussi l'éventuelle déformation de la forme de la distribution de probabilité.

La contrôlabilité de la simulation permet d'analyser comment se «dégrade» l'indicateur étudié lorsque système est soumis à des perturbations anormales (pannes...), ce qui permet d'établir des grilles de lecture des variations de l'indicateur. Elle permet également de pouvoir prendre en compte, dans l'établissement des grilles de lecture, l'existence de mouvements cycliques de la demande (qui doivent générer des mouvements cycliques de la norme et des bornes de l'intervalle de confiance).

II-2.6 Cohérence spatiale et temporelle des tableaux de bord

L'un des problèmes récurrents posé dans la construction des tableaux de bord est celui de la cohérence des tableaux de bord dans le temps et dans l'espace.

Le problème de la *cohérence temporelle* se pose dès lors que les acteurs d'un même centre de décision utilisent des tableaux de bord établis sur des horizons et des fréquences différents (par exemple, tableau de bord de pilotage établi quotidiennement et tableau de gestion établi mensuellement). Que les acteurs concernés soient ou non les mêmes, l'utilisation de tels indicateurs pose deux types de problèmes.

- Tout d'abord, les indicateurs utilisés entretiennent souvent des relations non triviales, même si la formule utilisée est la même. Par exemple, prenons le cas d'un indicateur calculé comme le quotient de deux flux (x et y) mesurés sur une même période et affectés d'un certain aléa (demande satisfaite sur demande exprimée, par exemple). Un tel indicateur calculé quotidiennement (I_q) n'est pas comparable directement avec le même indicateur calculé hebdomadairement (I_h) non seulement parce que sa variabilité relative est

plus faible, mais aussi et surtout parce qu'il n'existe pas de relation claire liant l'indicateur hebdomadaire $I_h = x_h / y_h = (\sum_q x_q) / (\sum_q y_q)$ aux indicateurs

quotidiens $I_q = x_q / y_q$ définis pour les jours de cette même période hebdomadaire. En effet, même en se cantonnant à des combinaisons linéaires, le nombre de relations numériques $I_h = \sum_q \alpha_q I_q$ permettant de calculer I_h à partir des I_q est infini et seule une définition de moyenne harmonique ($\alpha_q = y_q / (\sum_i y_i)$) est susceptible d'une interprétation facile.

- Le second type de problème est lié au fait que les tableaux de bord sont largement conçus pour induire des comportements et que rien ne garantit a priori la cohérence des comportements des acteurs utilisant les indicateurs de tableaux de bord différents.

Une réflexion sur les pistes de résolution du premier de ces deux problèmes peut être abordée en s'appuyant sur la simulation et l'appel aux techniques statistiques.

Les problèmes de *cohérence spatiale* sont de deux types.

- L'élaboration d'un indicateur synthétique, établi pour un ensemble de centres de décision sur la base de règles identiques à celles utilisées pour calculer l'indicateur de performance locale établi pour chacun d'entre eux, pose des problèmes tout à fait similaires à ceux qui viennent d'être évoqués dans l'agrégation temporelle, si ces centres sont indépendants¹, et plus complexes dans le cas contraire.
- Dans la mesure où les indicateurs d'un tableau de bord induisent des comportements, ces indicateurs interviennent dans les mécanismes de coordination entre centres de décision interdépendants. Il est bien évident que la cohérence de ce pilotage n'est pas garantie.

Si les centres de décision sont relativement indépendants, l'usage de la simulation peut être envisagé dans le premier des deux cas. Il ne faut pas se cacher que les difficultés deviennent extrêmes lorsque les centres de décisions sont interdépendants, fondamentalement en raison de la très grande difficulté à modéliser correctement cette interdépendance (notamment au niveau comportemental).

SECTION III PLAN DE L'OUVRAGE

L'architecture retenue résulte d'un compromis dans la définition d'un fil directeur.

III-1 Définition d'un fil directeur

La recherche d'un plan est le résultat d'un compromis qui est rarement complètement satisfaisant. Ici, plusieurs lignes directrices sont possibles.

La première, longtemps utilisée dans notre domaine, consiste à suivre la hiérarchie décisionnelle partant des décisions stratégiques pour aller vers les décisions tactiques, puis opérationnelles. La justification de ce fil directeur tient au fait que

1. Une discussion de ces problèmes d'indépendance peut être trouvée dans Fray et Giard, in ECOSIP (1990, [134]).

les décisions stratégiques contraignent les décisions tactiques qui, à leur tour, contraignent les décisions opérationnelles. Cet angle d'attaque n'est pas entièrement satisfaisant dans la mesure où il repose, à chacun des niveaux, sur un découpage cartésien des problèmes laissant peu de place à la vision « processus » de la chaîne logistique, laquelle prend sa pleine dimension au niveau opérationnel.

Théoriquement cette vision « processus » s'accommode assez bien de la notion de zoom. Elle permet assez facilement l'agrégation de processus, mais plus difficilement leurs désagrégations en processus plus élémentaires. Or cette logique descendante s'inscrit naturellement dans l'optique de la hiérarchie décisionnelle des niveaux stratégiques, tactiques et opérationnels. Autrement dit, l'angle d'attaque du processus ne permet pas de bonne prise en compte de cette hiérarchie décisionnelle.

Un autre fil conducteur est celui du cycle de vie d'un produit (ou d'une gamme de produits), allant de sa conception à son retrait du marché. Cet angle d'attaque a le mérite de bien faire comprendre l'interdépendance temporelle des décisions. A contrario, il ne permet pas de comprendre les jeux de concurrence et de complémentarité qu'entretient, au cours du temps, ce produit avec les autres, ainsi que les problèmes de cohérence entre portefeuille de produits et portefeuille de ressources permanentes.

On a noté que les problématiques rencontrées diffèrent selon le type de système productif auquel on s'intéresse. S'appuyer sur la typologie du § I-2.2, page 50, permet également un angle d'attaque intéressant, mais de très nombreux problèmes sont communs à ces différents types de systèmes productifs.

D'autres angles d'attaque sont envisageables, mais, en définitive, il semble très difficile de concilier dans une même approche unitaire tous ces fils conducteurs. L'architecture retenue pour cet ouvrage est un compromis entre ces différents points de vue.

III-2 L'architecture retenue

On commencera par l'étude de décisions stratégiques. La production ayant pour finalité de délivrer des biens et des services qui seront acquis par des clients, il est normal de commencer par s'interroger sur le portefeuille de produits que l'on cherche à vendre, sachant que l'on examinera le problème surtout sous l'angle de la production (chapitre II, page 99). Cette décision a des conséquences importantes sur les ressources permanentes dont l'organisation doit disposer; l'adaptation de ces ressources passe par des décisions d'investissement que l'on examinera au chapitre III, page 143. Ce chapitre sera complété ultérieurement sur certains aspects spécifiques qui ne relèvent pas à proprement parler d'un choix d'investissement, mais d'études d'alternatives pour lesquelles des approches spécifiques doivent être mises en œuvre. C'est ainsi que le chapitre IX traitera des problèmes de conception de lignes de production ainsi que de problèmes non stratégiques, en particulier, celui de l'ordonnancement. De même, le chapitre XIII, page 891, abordera l'organisation de la logistique et des transports, décision stratégique, mais s'attachera aussi à des problèmes tactiques de confection de plans de transport qui seront mis en œuvre au jour le jour et nécessiteront parfois des adaptations (décisions opérationnelles).

On développera ensuite la gestion de projet ([chapitre IV, page 259](#)) qui correspond à un mode de gestion comportant des aspects stratégiques, dans la mesure où une introduction significative des projets a des incidences organisationnelles majeures qui font que ce type d'orientation relève d'une décision stratégique. Le projet est aussi un mode de coordination d'activités qui lui confère des aspects de décisions tactiques dans la préparation d'un ordonnancement et de ses modalités de contrôle et des aspects de décisions opérationnelles dans le suivi de l'ordonnancement et de son adaptation.

On restera ensuite dans une problématique d'ordonnancement au [chapitre V, page 359](#), qui traitera de l'ordonnancement en ateliers spécialisés, structure encore prépondérante dans les organisations. Comme on l'a dit précédemment, les problèmes spécifiques de l'ordonnancement sur ligne de production seront traités au [chapitre IX](#). D'une certaine façon, l'organisation du Juste-À-Temps résout de manière très efficace des problèmes d'ordonnancement essentiellement dans un contexte d'ateliers spécialisés, mais le Juste-À-Temps, dont les conditions d'utilisation sont précises, ne peut se réduire à sa dimension d'ordonnancement: il a une dimension stratégique importante, ce qui fait qu'un chapitre complet lui est consacré ([chapitre VII, page 509](#)).

La partie de la production qui ne peut relever du Juste-À-Temps est amenée à prendre antérieurement des décisions de planification qui relèvent de décisions tactiques. De nos jours, cette planification passe par l'usage des techniques de MRP qui seront vues au [chapitre VI, page 455](#). Cette présentation sera complétée au [chapitre VIII, page 527](#), par celle de quelques approches peu répandues, mais qui correspondent à des pistes de résolution possibles ou à des formulations plus générales des problèmes posés.

Table des matières

La gestion des stocks et des approvisionnements, pour la partie qui ne relève pas de la MRP, s'appuie sur des approches de modélisation spécifiques. Le [chapitre X, page 621](#), vise à faire comprendre les fondements de cette démarche pour en montrer l'intérêt et les conditions d'application. Chacun des deux chapitres suivants ([chapitres XI, page 665](#), et [XII, page 771](#)) présente une politique différente de gestion des approvisionnements.

Index thématique

Le [chapitre XIII, page 891](#), aborde la logistique et les transports, comme cela a déjà été dit. Le chapitre suivant ([chapitre XIV, page 925](#)) est consacré au système d'information qui sous-tend l'ensemble des décisions qui viennent d'être évoquées. Le spectre de ce chapitre est large puisqu'il aborde à la fois les systèmes très formalisés s'appuyant sur des bases de données et des progiciels intégrés et les systèmes moins formalisés qui ne s'appuient pas, le plus souvent, sur des supports informatisés. Ces derniers sont d'une importance croissante dans le cadre de la gestion de la qualité et du mouvement de la certification. L'analyse de la gestion de la qualité sera rattachée à ce chapitre, même s'il ne s'agit pas uniquement, loin s'en faut, d'un problème d'information.

Le [chapitre XV, page 981](#), traite des problèmes d'analyse de chroniques et de prévision. C'est un prérequis dans la prise de nombreuses décisions relatives à la production et aux approvisionnements.

Les deux derniers chapitres sont consacrés à des outils utilisés dans les chapitres précédents. Le [chapitre XVI, page 1105](#), traite de la programmation linéaire

que les progrès récents rendent de plus en plus attractive. Le [chapitre XVII, page 1147](#), introduit les mathématiques financières, qui permettent un traitement correct du temps dans certaines prises de décisions, notamment les décisions stratégiques.

Table des
matières

Index
thématique

Chapitre II

LA DÉTERMINATION DU PORTEFEUILLE DE PRODUITS

Les décisions stratégiques sont relatives au positionnement désiré par l'entreprise à long terme, c'est-à-dire à la définition cohérente en composition et volume de son portefeuille de produits et de services qu'elle désire **mettre** sur le marché, et du portefeuille de ressources permanentes physiques, humaines et informationnelles qu'elle entend mobiliser pour réaliser cette offre. La cohérence entre les fins et les moyens est essentielle et le réalisme impose une vision claire et réaliste des grandes décisions à prendre dans les années à venir pour atteindre ces objectifs du long terme (horizon à cinq - dix ans). Ce chapitre est consacré à quelques-uns des principaux problèmes et enjeux relatifs à la définition de produits nouveaux et de leurs impacts sur le système productif, en se plaçant dans le cas de la production de produits fabriqués en grande série ou à la commande, tandis que le **chapitre III** traite des décisions relatives à la conception et la transformation du système productif. Les décisions de renouvellement du portefeuille de produits et de services et celles de transformation du système productif sont intimement liées et cette présentation en deux temps tient à l'ampleur des problèmes posés.

Table des matières

Index thématique

La cohérence du portefeuille de produits et leurs relations avec le marché ont fait l'objet de nombreuses méthodologies d'analyse (matrice du *Boston Consulting Group*, matrice Arthur D. Little, matrice Mc Kinsey¹, etc.) qui ne seront pas abordées ici parce qu'elles relèvent de l'analyse stratégique et non de la gestion de production. Pour des raisons similaires, on n'examinera pas le problème de l'abandon de produits (souvent lié à l'introduction de produits nouveaux). On se focalisera ici sur les problèmes posés par l'introduction d'un produit nouveau en examinant successivement la définition de ces produits (**section I**), leur processus de conception (**section II, page 109**) et les problèmes posés par la standardisation des produits et composants (**section III, page 133**).

SECTION I LA RECHERCHE DE PRODUITS NOUVEAUX

L'environnement technico-économique de l'entreprise évoluant de plus en plus vite, la direction de l'entreprise doit veiller à ce que son portefeuille de produits ou de services ne soit pas frappé d'obsolescence technique ou commerciale. L'introduction de nouveaux produits et l'abandon de certaines activités doivent donc être périodiquement envisagés. L'introduction de nouveaux produits est une

1. Pour une présentation de ces approches, voir Helfer, Kalika & Orsoni (1996, [228]), chap. III.

affaire concernant à la fois la fonction production et la fonction commerciale, conçue comme allant de la vente jusqu'au service après vente (SAV) préoccupa-tion prise de plus en plus souvent en compte dès la conception. Entre « faire ce que l'on peut vendre » et « vendre ce que l'on sait faire », un compromis doit être trouvé, acceptable pour les deux parties, faute de quoi l'entreprise est inéluctablement condamnée à la faillite à plus ou moins brève échéance. Après avoir rapidement brossé le processus d'introduction de produits nouveaux (§ I-1), nous définirons ce qu'est un produit nouveau (§ I-2, page 101) et analyserons la variété des produits (§ I-3, page 102). Nous présenterons enfin une approche d'analyse des besoins permettant d'améliorer la pertinence du cahier des charges d'un produit nouveau (§ I-4, page 107).

I-1 Le processus d'introduction de produits nouveaux

De l'idée au produit vendu, plusieurs étapes doivent être franchies et constituent autant de filtres qui, en définitive, ne laisseront voir le jour qu'à moins de 5 % des idées (certaines enquêtes, dans certains secteurs, avancent même des chiffres nettement plus faibles). Ces étapes sont « classiquement » les suivantes :

- La première étape est celle de la génération d'idées de produits; elle est plus ou moins spontanée (appel possible à des techniques de créativité, réponses à des demandes formulées, étude de brevets et licences...) et implique une participation plus ou moins forte et régulière des principaux responsables de l'entreprise.
- On procède ensuite à une sélection sur la base d'une évaluation commerciale du marché potentiel (prix, quantités, longévité commerciale...) et d'une étude rapide de faisabilité technique (adaptation des différentes ressources à cette nouvelle production, modification éventuelle du « métier » de l'entreprise, etc.) et financière (estimation grossière des flux de trésorerie associés au lancement).
- Vient ensuite la définition préliminaire du produit dans laquelle un arbitrage doit être opéré entre son coût (on reviendra sur sa détermination au § II-2.1, page 118) et l'ampleur de ses spécifications techniques et le niveau de qualité à respecter. La préoccupation de standardisation (qui va souvent de pair avec une conception modulaire des produits) est, à ce stade, fondamentale car, après, il est bien souvent trop tard.
- On arrive alors à la possibilité de construire un prototype qui sera testé pour en vérifier les performances techniques et/ou commerciales.
- Il en résulte une définition finale du produit, s'accompagnant, lorsque cela s'impose, du lancement d'une présérie pour vérifier la pertinence des gammes de fabrication et d'assemblage ainsi que des diverses procédures organisationnelles.

Un produit n'est jamais figé. Tout au long de son existence, il s'adapte et se perfectionne. Des réponses techniques sont apportées pour pallier les défaillances constatées et des modifications sont souvent rendues nécessaires pour « rajeunir » commercialement le produit (quelquefois, par l'introduction d'options proposées qui assurent un meilleur ciblage commercial). On modifie donc les gammes et les nomenclatures par le biais d'ordres de modification (classiquement désignés par le sigle OM) qui vont souvent à l'encontre d'objectifs de standardisation et peuvent

compliquer la gestion de la production lorsque le cycle de fabrication est grand (plusieurs gammes et nomenclatures pouvant alors coexister pour un même produit).

Dans les pages qui suivent, les principales techniques d'analyse mobilisables dans ce processus de renouvellement du portefeuille de produits seront abordées, étant entendu que celles qui concernent la transformation du système productif seront traitées dans le chapitre suivant. La frontière entre ce qui relève des sciences de l'ingénieur et des sciences de gestion est imprécise. Le point de vue retenu ici est celui d'une présentation des principales techniques permettant un éclairage économique des décisions de conception de produits nouveaux.

I-2 La définition de produits nouveaux

Utilisée en gestion depuis un demi-siècle, la transposition des approches de Darwin à l'évolution de l'offre de produits et de services conduit à considérer la création et la disparition des produits sous l'angle d'un processus de sélection naturelle lié à une adéquation à un environnement sans cesse plus exigeant. Cette approche a donné naissance, en marketing, au concept de cycle de vie d'un produit¹, le produit considéré étant caractérisé par un ensemble d'attributs et pouvant être fabriqué par des entreprises différentes.

Un produit nouveau se différencie des produits existants par un ou plusieurs attributs.

- Lorsque de nouveaux procédés de production permettent une forte diminution des prix de vente de produits existants, on peut considérer que l'importance de la modification de l'attribut prix est telle que, pour une partie importante des consommateurs, on est en présence de produits nouveaux. C'est le cas du processus de diffusion d'une innovation technique (par exemple, utilisation des écrans à matrice active mis au point pour les micro-ordinateurs, dans le renouvellement de l'offre des téléviseurs), mais c'est aussi le cas de la mise au point de techniques de conception permettant de concilier prix bas et très grande variété de produits (voir § I-3.1, page 102). En se plaçant dans le contexte des entreprises orientées vers la production de produits manufacturés, il est intéressant d'examiner le degré d'innovation des projets de développement en fonction du degré d'innovation du produit et des procédés, à partir du [tableau 2 de la page 102](#) proposé par Wheelright et Clark (1992, [441]). Ce croisement met en évidence, dans un environnement s'appuyant sur les plates-formes « produits » (définies en [page 103](#)), trois graduations dans le degré de nouveauté de tels projets, qui influent sur l'avantage concurrentiel et les ressources humaines, matérielles et informationnelles à mobiliser.
- Lorsqu'on se situe dans la perspective allant de l'achat d'un produit à son usage jusqu'à sa mise au rebut, les attributs pris en compte peuvent être immatériels (informations préalables, services associés aux produits, extension de garantie, amélioration du service après-vente, etc.) et être orientés vers une limitation des risques et gênes encourus (point déjà abordé [page 67](#)). Cela étant, une amélioration de ces attributs profite très souvent à plusieurs

1. Voir [page 117](#).

TABLEAU 2

Types primaires de projets de développement d'après Wheelwright et Clark [441])

Recherche et développements avancés		Étendue des changements du produit			
		Nouveau concept produit	Nouvelle génération d'un concept produit	Addition dans la famille de produits	Dérivés et améliorations
Étendue du changement des procédés	Nouveau concept de procédé	Ruptures radicales			
	Procédé de nouvelle génération				
	Amélioration limitée	Améliorations, produits dérivés			
	Changement incrémental				

familles de produits et ne constitue un avantage durable, toutes choses égales par ailleurs, que dans la mesure où la concurrence ne s'aligne pas rapidement (on reviendra sur ce point à la [page 108](#)).

- La majorité des produits nouveaux se différencie des précédents par leurs attributs physiques et par les services qui leur sont associés.

C'est à ce dernier cas que nous nous intéressons plus particulièrement ici. Il convient de distinguer à ce niveau ce qui relève d'une nouveauté obtenue par un accroissement de la diversité d'une famille de produits (§ I-3), de ce qui relève de la recherche d'attributs nouveaux qui passe par une analyse des besoins (§ I-4, [page 107](#)).

I-3 Analyse de la variété des produits

On examinera dans un premier temps les formes que revêt la variété des produits (§ I-3.1) avant d'examiner les coûts que celle-ci engendre (§ I-3.2, [page 105](#)) et que des efforts de rationalisation et de standardisation permettent de maîtriser (voir [section III, page 133](#)).

I-3.1 Les formes de la variété

La perception globale de produits finis par le consommateur ou le client potentiel est conditionnée par de très nombreux facteurs dont beaucoup dépendent du *mix* retenu en marketing; elle ne relève donc pas de notre préoccupation. La variété des besoins exprimés et l'élévation du niveau de vie ont progressivement conduit les entreprises à s'orienter vers une production sur mesure.

Trois types de production sur mesure doivent être distingués (voir Anderson & Pine, 1997, [16]). Certaines caractéristiques d'un produit peuvent être *personnalisées par le client* pour une parfaite adéquation à ses goûts ou besoins. C'est ainsi que le détenteur d'une chaîne stéréo peut régler certaines caractéristiques de son tuner pour que le son de sa chaîne corresponde à ses préférences, que le conducteur de certains modèles automobiles peut régler à sa guise la hauteur et l'incli-

raison de son volant ou que l'utilisateur d'un micro-ordinateur peut paramétrer, à sa guise, son environnement de travail. D'autres produits sont *auto-adaptables*, c'est-à-dire qu'ils s'ajustent automatiquement au contexte de l'usage qui en est fait pour assurer au mieux la fonction qui est leur raison d'être. Cette catégorie de produits peut être illustrée par les rasoirs électriques à têtes flottantes ou par les machines à laver utilisant la logique floue pour décider du meilleur cycle de lavage. Enfin, certains produits sont *personnalisés par le constructeur* (et, dans certains cas, par le vendeur). Plusieurs solutions, non exclusives pour définir cette personnalisation, sont possibles.

- La première solution, la plus ancienne, est celle de l'usage de composants totalement interchangeables, ne différant que sur certaines caractéristiques d'aspect (par exemple, rétroviseurs ou coques de rasoirs électriques ne différant que par leurs couleurs ou sièges de véhicules automobiles ne différant que par le tissu de la housse les recouvrant). La variété est alors obtenue par une combinaison de composants pris dans des ensembles disjoints de composants interchangeables. Le composant visé peut être lui-même un assemblage de composants élémentaires assurant une ou plusieurs fonctions et l'on parle alors de **module**.
- La seconde solution, largement utilisée dans l'industrie automobile, est celle de l'usage d'une *combinaison appropriée de modules*, chaque module étant choisi dans un ensemble limité de modules interchangeables¹. Cette solution implique non seulement un processus productif standardisé (pour minimiser les réglages et changements d'outillage) et une substituabilité totale des modules d'une même famille au montage, mais aussi, pour limiter les «risques système» de dysfonctionnement, la conception de supports de montage standardisés, assurés d'une pérennité suffisante et robustes, c'est-à-dire acceptant un large spectre de contraintes (électriques, mécaniques, etc.); cet ensemble coordonné de ressources définies pour générer facilement et économiquement de la variété de produits est appelé **plate-forme** de produits². Une variété supplémentaire peut être obtenue par l'adjonction de composants *optionnels*³; jusqu'à une époque récente, l'importance relative de la diversité par composants optionnels était du reste nettement plus forte que celle obtenue par combinaison de modules. L'impact de cette variété sur

1. L'intérêt économique de cette approche modulaire est perçu dans les années soixante (voir Tarondeau, 1999, [408]) et continue de susciter un intérêt chez les gestionnaires (Baldwin & Clark, 1997 [31], 2000 [32]). Dans cette approche, la conception d'un système complexe (produit ou processus) s'appuie principalement sur un mécano de sous-systèmes élémentaires conçus indépendamment puis assemblés pour satisfaire un besoin précis. La standardisation peut être appliquée dans la définition d'un ensemble de modules physiquement interchangeables et assurant une même fonction, mais les concepts de modularité et de standardisation ne doivent donc pas être confondus. Cela étant, une approche modulaire efficiente repose sur une standardisation optimisée de chaque famille de modules interchangeables d'un point de vue fonctionnel, cette optimisation pouvant s'appuyer sur l'approche proposée en [section III, page 133](#).
2. La conception de telles plates-formes de produits est liée à la politique de modularité définie dans une approche systémique (voir Meyer & Lehner, 1997, [299]). Elle oblige donc à un dépassement de la vision traditionnelle des projets de développement de produits, puisqu'elle implique une vision dynamique du portefeuille de produits offerts. Dans de nombreux secteurs industriels, une partie substantielle des produits nouveaux est dérivée de plates-formes «produits» existantes. Une stratégie de plates-formes de produits cohérente et planifiée permet de réduire le nombre de pièces et composants, de réduire les coûts de développement des produits dérivés ainsi que les investissements nécessaires en matière de procédés de fabrication. Par ailleurs, cette approche peut permettre une production sur une ligne «banalisée» permettant la production et/ou l'assemblage de gammes de produits différents, ce qui permet de mieux pouvoir faire face à des variations de la répartition de la demande globale entre les gammes.

l'intérêt économique des lignes de production et d'assemblage (analyse introduite en [page 60](#)) sera abordé au [chapitre IX, page 589](#). L'usage de cette conception modulaire dans une production organisée pour permettre un assemblage à la commande est souvent nécessaire pour respecter des délais courts de mise à disposition aux clients et constitue l'une des formes de la différenciation retardée (voir définition [page 105](#)). On peut ajouter que ce problème sera repris dans l'analyse de la conception des nomenclatures en fonction des attentes du marché qui sera faite au § II-2 du [chapitre VI](#) et plus particulièrement avec la [figure 141 de la page 464](#).

- L'usage de *composants ajustables de manière réversible* conduit à une personnalisation immédiate et peu coûteuse d'un composant donné par différents moyens (commutateur, logiciel...) pour activer un ensemble de fonctionnalités prises dans un ensemble possible, cette décision pouvant être réversible. Cette technique est souvent retenue dans la conception de composants électroniques ou électriques.
- L'usage de *composants ajustables de manière irréversible* correspond à une adaptation immédiate et peu coûteuse d'un composant aux besoins soit par un traitement physique de découpe, soit par un traitement chimique, irréversible dans les deux cas. On trouve de tels produits dans la confection, la lunetterie, la fabrication de vélos sur mesure ou celle de portes et fenêtres de rénovation. La différenciation retardée procède souvent de cette logique.

Les moyens d'obtenir la variété des produits offerts sont donc nombreux et permettent d'éviter un appel à un sur mesure systématique et coûteux. Pour en faire l'analyse économique (sur laquelle on reviendra en détail à la [section III, page 133](#)), il importe de tenir compte de deux points de vue.

- Un composant n'a pas, a priori, pour vocation de n'être utilisé que par un seul produit fini, en raison de synergies de conception, fabrication et distribution. Ce problème de rationalisation de la conception des produits d'une entreprise doit donc se traiter au niveau de l'ensemble des familles de produits technologiquement proches et non au niveau de chaque produit élémentaire, sachant que l'analyse des nomenclatures industrielles de produits complexes montre qu'un même composant élémentaire se retrouve normalement dans de nombreux produits agrégés différents¹. Le problème de rationalisation de la conception des produits traite de la *satisfaction d'un ensemble de besoins fonctionnels élémentaires par une gamme de composants physiquement interchangeables, chaque composant se positionnant sur un spectre limité de chacun des besoins fonctionnels retenus*. Cette approche de la standardisation en fait l'une des composantes de la flexibilité de l'entreprise, complémentaire de celle qui porte sur les ressources (équipements, personnels, procédures).

3. *Note de la page précédente*. Ce type de variété génère des coûts supplémentaires lorsque le produit est assemblé sur une ligne, du fait de la variabilité de travail que le montage de composants optionnels induit sur certains postes, ce qui pose des problèmes particuliers d'équilibrage de chaîne et d'ordonnancement (voir Danjou, Giard & Le Roy, 2000, [117]). Il peut être économiquement plus intéressant d'offrir systématiquement une option beaucoup demandée et si la demande porte sur quelques options alternatives, il est alors possible de se raccrocher à la démarche de standardisation présentée en [section III, page 133](#). Inversement, on peut s'interroger sur l'intérêt économique d'options peu demandées.

1. Les spécialistes parlent de *commonality*, traduit par communalité (voir Tarondeau, 1998, [405], partie II, et Fouque, 1997, [156]).

- Cette variété de composants utilisés dans un produit manufacturé doit être perceptible par le client et présenter une valeur ajoutée pour lui. Anderson ([16], 1997) distingue la *variété externe*, visible par le client, de la *variété interne* qui ne l'est pas. Les exemples de variété externe sans valeur ajoutée sont nombreux. Par exemple, en 1993, Nissan décidant de rationaliser ses approvisionnements ne dénombrerait pas moins de 300 cendriers équipant l'ensemble de ses véhicules automobiles (cité dans [16], p. 95). La variété interne est souvent excessive et ses méfaits sous-estimés. La multiplicité des références en visserie dans un produit manufacturé est un exemple classique de ce type de variété. Cette variété interne est non seulement sans valeur ajoutée pour le client, mais elle est aussi génératrice de coûts additionnels (en raison de problèmes logistiques supplémentaires, d'une diversification accrue d'outillage, etc.). Un des objectifs de la production de masse de produits sur mesure est de réduire la variété interne jusqu'au point où les produits puissent être réalisés de manière flexible sans supporter les coûts et délais des changements de séries.

Terminons cette présentation par quelques mots sur le principe de **différenciation retardée**¹. Les moyens évoqués ci-dessus d'obtention d'un sur-mesure par le biais de produits personnalisés par le client, de produits auto-adaptables et de produits personnalisés par le fabricant par l'un des trois modes de personnalisation mentionnés sont des applications du principe de différenciation retardée qui vise à personnaliser le produit le plus tard possible, de préférence au niveau de l'assemblage final ou postérieurement à la production². S'agissant de répondre à une demande aussi variée que possible par une production utilisant le moins de références possible, la personnalisation par le fabricant implique une structure de nomenclature de type assemblage à la commande qui sera illustrée à la **figure 141 de la page 464** et discutée dans le **§ II-2, page 463** du **chapitre VI** consacré aux techniques de planification de type MRP. Certains auteurs ont une définition plus large du concept de différenciation retardée en incluant tout ce qui concourt à une différenciation perceptuelle des produits par le biais du *mix* retenu en marketing. On reviendra sur certaines conséquences de cette différenciation retardée aux pages **464** et **620**.

Table des matières

Index thématique

I-3.2 Les coûts de la variété

La variété externe peut être source de valeur, lorsqu'elle se traduit par des avantages appréciés par le marché, mais elle est aussi une source de coûts additionnels. La variété externe sans valeur ajoutée pour le client et la variété interne ne génèrent que des coûts. La détermination de ces coûts relève de la comptabilité de gestion et l'approche de la comptabilité par activité en favorise l'analyse dans sa recherche d'inducteurs de coûts qui se définissent comme des facteurs dont l'occurrence est à l'origine du coût.

1. Une discussion plus approfondie de ce concept peut être trouvée dans l'article de Tarondeau, «Produit» publié dans l'*Encyclopédie de gestion* (1997, [136]).

2. Cette différenciation retardée peut même être «partagée» par plusieurs entreprises. C'est ainsi que le site de SEVELNORD fabrique, à Valenciennes, la «base» d'un monospace décliné sous les marques Citroën Évasion, Peugeot 806, Fiat Ulysse et Lancia Zeta et celle d'un véhicule utilitaire décliné sous les marques Citroën Jumper, Peugeot Boxer et Fiat Ducato. La personnalisation de ces véhicules est conforme à l'identité des marques.

Classiquement, plusieurs inducteurs sont identifiés comme étant à l'origine de coûts récurrents de production¹. Pour Anderson (1997, [16]), le principal inducteur de coût de la variété des produits est la taille des lots. À la taille du lot sont liés des facteurs qui sont source de coûts antagonistes à la base des modèles de gestion des stocks (voir [chapitre X](#)): importance des stocks (valeur immobilisée, espace occupé, obsolescence...), changement de réglages (main-d'œuvre utilisée en réglage, pertes matière...). Tout accroissement de la variété des composants utilisés conduit mécaniquement à une multiplication des lots à lancer en production que ne peuvent contrer les efforts de rationalisation des gammes de fabrication visant à diminuer les temps et coûts de lancement (en particulier les techniques SMED abordées au [chapitre VII, page 511](#)).

La standardisation² peut porter sur les différents éléments mentionnés afin de réduire les coûts de variété:

- standardisation des pièces et composants, programmes de réduction du nombre de pièces et de composants en ne retenant que certaines pièces «préférées» (on reviendra longuement sur ce point à la [section III, page 133](#));
- standardisation des outillages: réduction du nombre d'outillages nécessaires pour l'assemblage, l'alignement, le calibrage, les tests, les réparations... les changements d'outillages se trouvent réduits lors des changements de lots; dans le même esprit, la standardisation des bancs d'essai peut permettre des économies et des gains de temps substantiels;
- standardisation des caractéristiques techniques pour une famille de produits permettant d'utiliser des outillages standards sans coût d'installation d'un nouveau lot;
- standardisation des matières premières;
- standardisation des procédés de fabrication: celle-ci repose essentiellement sur l'ingénierie concourante spécifiant de manière simultanée les caractéristiques du produit et des processus de fabrication.

La comptabilité de gestion peut jouer un rôle important dans la conception de nouveaux produits si elle est utilisée pour éclairer le choix entre plusieurs solutions, mais ce rôle n'est bénéfique que si la représentation sous-jacente des processus de la comptabilité de gestion ne s'écarte pas trop de celle qui sera mise en œuvre dans le cadre de nouvelles productions. Dans de nombreux cas, une reconstruction des coûts s'appuyant sur une nouvelle modélisation physique des processus doit être entreprise. Cela étant, la relation entre de très nombreuses décisions de conception de produit et de processus de conception et les inducteurs de coûts habituellement retenus est souvent difficile à établir³.

1. Plusieurs inducteurs sont classiquement identifiés: le volume, le lot, le nombre de références, le nombre de niveaux de nomenclature. Pour une présentation synthétique de la comptabilité par activité, le lecteur peut se reporter à l'article de P. Mévellec dans [137], p. 395 - 405. Pour un approfondissement, voir Lorino (1991, [287]), Mévellec (1990, [298]), Bouquin (1997, [62]).

2. Voir Anderson (1997, [16]) et (Giard, 1999, [187]).

3. Pour approfondir, voir Gautier et Giard (2000, [167]).

I-4 L'analyse des besoins

L'analyse des besoins des consommateurs et de leur détection a fait l'objet de nombreuses approches méthodologiques. On ne présentera ici que celle proposée par Kano, dans le cadre d'une approche qualité en 1984 et fréquemment utilisée par les praticiens du QFD (voir Revelle, Moran et Cox, 1997, [360], chapitre IV et annexe D). Le modèle de Kano retient trois types d'attributs de qualité qu'il positionne dans un graphique permettant de les positionner sur deux axes. L'axe vertical est celui de la satisfaction des utilisateurs d'un produit et va de «ravi» à «dégoûté». L'axe horizontal décrit le niveau de qualité obtenu et va de «totalement absent» à «totalement réalisé».

Les trois types d'attributs de qualité retenus sont les suivants¹ :

- Les *attributs de qualité explicite* sont ceux qui font l'objet de demandes exprimées par les consommateurs et font du reste l'objet d'enquêtes et d'études. Le confort, la rapidité ou la bruyance d'un véhicule automobile rentrent dans cette catégorie. En matière de services, la rapidité des formalités à la restitution d'un véhicule loué ou d'une chambre d'hôtel est un attribut de qualité explicite. Le moyen technique utilisé pour atteindre la satisfaction du client importe peu. Ce qu'il convient d'isoler dans l'analyse, c'est le besoin fonctionnel à satisfaire. L'existence de tels attributs de qualité permet de rester dans le marché. Certains de ces attributs font l'objet de normes (AFNOR ou CEN, barème d'étoiles pour classer les hôtels, etc.) qui constituent des garanties de qualité pour le consommateur (voir le § IV-1.1, page 973 du chapitre XIV).
- Les *attributs de qualité implicite* sont ceux auxquels on ne pense plus, tellement il va de soi qu'ils doivent être présents dans le produit ou la prestation de service acheté. Il est évident qu'un appareil ménager que l'on acquiert ne doit pas poser de problème de sécurité et doit posséder un minimum de longévité; de même, on s'attend à ce que la baignoire de la chambre d'un hôtel classé deux étoiles ou plus soit normalement propre et accompagnée de linge de toilette décent. Le consommateur est alors insensible à la présence de tels attributs qui sont «naturels», mais toute défaillance dans ce domaine se traduit par un fort niveau de mécontentement. Ces attributs de qualité conditionnent la présence sur le marché (sans être forcément suffisants pour y rester).
- Les *attributs de qualité inexprimés* sont ceux que le client ne s'attend pas à trouver et qu'il trouve attractifs lorsqu'il les rencontre dans le produit ou la prestation de service qu'il achète (réaction du type «je ne savais pas que j'en avais besoin avant de l'avoir essayé»). L'absence de tels attributs ne peut être pénalisante, mais leur présence suscite un fort niveau de satisfaction. Le jeu de la concurrence fait que ces attributs se «diffusent» et qu'ils deviennent assez rapidement des attributs de qualité explicite. Par exemple, pendant longtemps, le prêt d'un véhicule «de courtoisie» par un garage effectuant une réparation immobilisant un véhicule constituait un attribut de qualité inexprimé parce que tel n'était pas l'usage de la profession. De même, la

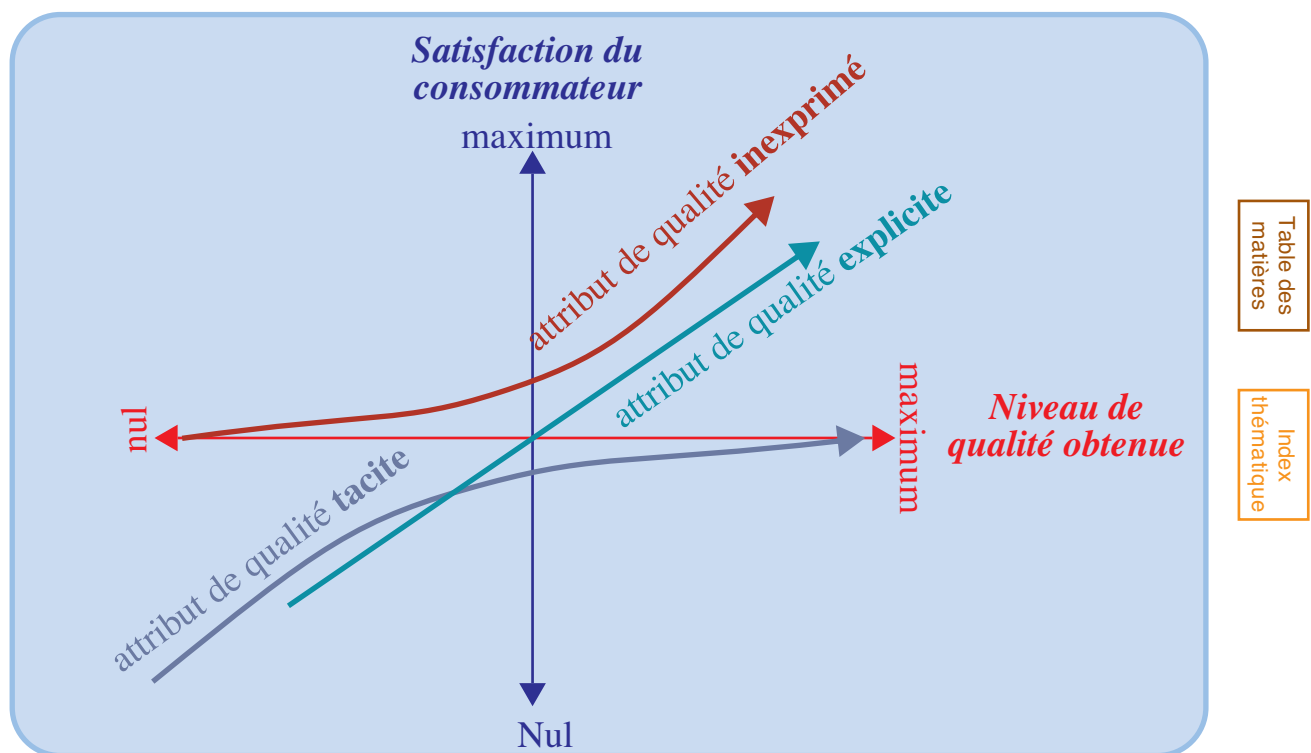
1. Dans le modèle de Kano, on parle respectivement de *normal quality* (ou *Performance Quality, PQ*), *expected quality* (ou *Basic Quality, BQ*) et de *exciting quality* (ou *Excitement Quality, EQ*).

création d'enceintes miniaturisées de bonne qualité ou l'arrivée sur le marché de micro-ordinateurs portables très puissants, légers et autonomes étaient porteurs de tels attributs. Ces attributs sont ceux qui permettent de prendre une position dominante sur le marché.

Ces exemples illustrent une dynamique de la définition des attributs de qualité des produits et services: un attribut de qualité inexprimé deviendra tôt ou tard un attribut de qualité explicite si le client le trouve attractif et que sous la pression de la concurrence il se diffuse. Cette même concurrence conduit généralement à ce que des attributs de qualité explicite se transforment progressivement en attribut de qualité implicite. Cette évolution au cours du temps s'accompagne d'une différenciation dans l'espace: en France, la climatisation d'un véhicule de location est encore, en 2003, un attribut de qualité inexprimé, alors que c'est un attribut de qualité implicite aux États-Unis.

FIGURE 16

Évolution au cours du temps des trois types d'attributs de qualité d'un produit ou d'un service



Cette grille d'analyse donne des pistes de recherches d'idées d'amélioration d'un produit ou d'une prestation de service (Revelle, Moran & Cox, 1997, [360]) en recherchant :

- les sources de frustration, anxiété, craintes, confusion dans l'utilisation du produit ou de la prestation de service ;
- les causes de pertes de temps ou de consommation excessive de temps dans l'utilisation du produit ou de la prestation de service ;
- les causes de mauvaise utilisation du produit ou de la prestation de service ;
- les utilisations «dévoyées» ou inattendues d'un produit ou de la prestation de service ;

- les situations dangereuses ou potentiellement dangereuses d'utilisation du produit ou de la prestation de service;
- les transformations du produit réalisées par le client postérieurement à son achat.

De nombreuses techniques sont utilisables pour exploiter ces pistes d'amélioration d'un produit ou d'une prestation de service: observation directe de clients en cours d'utilisation, analyse des réclamations de clients et enquêtes de satisfaction, observation directe de clients au cours du processus d'achat, échanges avec un groupe de clients « homogènes » lors de manifestations commerciales, échanges avec des clients dans le cadre de groupes de travail ciblés (*focus group*) ou d'interviews personnelles, observation du comportement de clients dans le cadre d'un environnement contrôlé, veille concurrentielle au niveau national et international.

SECTION II LA CONDUITE DES ACTIVITÉS DE CONCEPTION

La conduite des activités de conception est à la fois une affaire de technique et une affaire de gestion, aucun des deux aspects ne pouvant raisonnablement être ignoré¹. La complexité des problèmes rencontrés a conduit à la mise au point de nombreuses démarches plus complémentaires que concurrentes car chacune aborde ces problèmes avec un angle d'attaque qui ne permet pas de prendre tout en compte. Les instrumentations disponibles comportent toutes un éclairage économique des décisions à prendre. On commencera par celles qui ont été créées par les ingénieurs et qui sont marquées par une prédominance de la vision physique du produit et des processus (§ II-1) sur l'économique, sans délaisser pour autant ce point de vue, avant d'aborder celles qui sont plus marquées par l'objectif premier d'une évaluation économique des décisions (§ II-2, page 118).

Table des
matières

Index
thématique

II-1 Les instrumentations du développement de produits nouveaux

On examinera successivement trois approches utilisées par les ingénieurs dans les processus de conception de produits nouveaux, l'analyse de la valeur (§ II-1.1), le QFD (§ II-1.2, page 111) et le DFM (§ II-1.3, page 115). Chacune de ces approches facilite l'analyse de certains problèmes rencontrés dans la définition judicieuse de produits nouveaux, mais aucune, à elle seule, ne peut suffire à éclairer la complexité des décisions à prendre en matière de conception et de développement d'un produit. Les instrumentations économiques du § II-2, page 118 et celles qui seront présentées au chapitre suivant doivent être également mobilisées. Toutes ces instrumentations ne sont pas mobilisables avec le même intérêt selon l'état d'avancement du projet et leur apport peut varier de manière sensible selon le projet de développement.

On évoquera enfin la généralisation du pilotage des projets de développement par la gestion de projet (§ II-1.4, page 117), ce qui relève un peu plus des préoccupations classiques des gestionnaires.

1. La norme ISO 9001 (voir chapitre XIV, § IV-1.2, page 977) définit un certain nombre d'exigences quant aux processus de conception et de prise en compte des clients.

II-1.1 L'analyse de la valeur (AV)

L'**analyse de la valeur** remonte à la fin des années 1940 (travaux de L. D. Miles à la General Electric). Elle fait l'objet des normes X 50-150 à X 50-153 de l'AFNOR (Association Française de Normalisation) qui définit l'analyse de la valeur «comme une méthode de compétitivité, organisée et créative, visant la satisfaction du besoin de l'utilisateur par une démarche spécifique de conception, à la fois fonctionnelle, économique et pluridisciplinaire». C'est donc une démarche empirique orientée vers la recherche d'un bon compromis entre les fonctions assurées par un produit et qui déterminent sa valeur d'usage, et son coût. L'analyse de la valeur a d'abord été utilisée pour améliorer la conception d'objets manufacturés existants, relativement simples, mais produits en très grande quantité. Le champ d'application de l'analyse de la valeur a progressivement été étendu à la conception de produits nouveaux de plus en plus sophistiqués.

L'approche retenue pour améliorer la conception de produits existants est simple dans ses fondements, mais pas toujours évidente à mettre en œuvre. Elle consiste à croiser la *vision organique* d'un objet manufacturé («l'objet considéré se compose des pièces suivantes: ...») avec une *vision fonctionnelle* de cet objet («l'objet considéré remplit les fonctions suivantes: ...»), puis à vérifier comment chaque organe contribue à la satisfaction des fonctions et si les spécifications fonctionnelles retenues répondent bien aux attentes de l'utilisateur. Dans un tableau du type du **tableau 3**, on croise les informations obtenues, en ventilant le coût c_j de chaque organe j selon les fonctions i auxquelles il contribue (d'où le coût c_{ij} qui est nul si l'organe j ne contribue pas à la fonction i), ce qui permet de calculer le coût c_i associé à la fonction i ¹. On recherche ensuite si les fonctions sont bien spécifiées par rapport aux attentes des utilisateurs («il est inutile d'en faire plus que nécessaire») et si ces fonctions peuvent être satisfaites autrement, par modification de la conception du produit, à un coût moindre.

TABLEAU 3
Tableau d'analyse de la valeur

		Organe					Coût de la fonction
		1	...	j	...	m	
Fonctions	1	c_{11}	$c_{1...}$	c_{1j}	$c_{1...}$	c_{1m}	$c_{1.}$
	...	$c_{...1}$...	$c_{...j}$...	$c_{...m}$	$c_{...}$
	i	c_{i1}	$c_{i...}$	c_{ij}	$c_{i...}$	c_{im}	$c_{i.}$
	...	$c_{...1}$...	$c_{...j}$...	$c_{...m}$	$c_{...}$
	n	c_{n1}	$c_{n...}$	c_{nj}	$c_{n...}$	c_{nm}	$c_{n.}$
Coût de l'organe		$c_{.1}$	$c_{...}$	$c_{.j}$	$c_{...}$	$c_{.m}$	Coût $c_{..}$ du produit

Les **fonctions** sont décrites par des noms ou des verbes et généralement structurées de manière arborescente (niveau de détail plus ou moins grand). On distingue trois catégories de fonctions, les deux premières sont recensées dans le cahier des charges fonctionnel, tandis que la dernière est liée aux solutions techniques privilégiées.

1. On utilise ici la notation classique retenue des tableaux de contingence en statistique.

- Les **fonctions de services** sont celles pour lesquelles le produit est effectivement créé. On les décompose parfois en fonctions principales, qui traduisent le besoin pour lequel le produit est réalisé, et en fonctions secondaires, qui découlent de l'utilisation que l'on peut faire du produit dans certains contextes. L'estimation de l'importance relative de chaque fonction de service et de l'intérêt des niveaux de spécifications retenues pour chacune d'entre elles relève d'une expertise délicate, mais nécessaire pour réaliser de bons compromis dans la phase de révision du produit.
- Les **fonctions de contraintes** sont celles que doit satisfaire le produit en raison de règlements ou normes.
- les **fonctions techniques** sont nécessaires pour pouvoir assurer l'ensemble des fonctions de services et de contraintes.

Lorsque cette approche est utilisée pour aider à concevoir un produit nouveau, on part d'une analyse fonctionnelle du produit. Celle-ci débouche sur la rédaction du **cahier des charges fonctionnel** qui exprime les fonctions de service que doit remplir le produit pour répondre aux besoins de l'utilisateur et respecter les contraintes liées à l'utilisation du produit. Le coût de ces fonctions sera estimé dans l'analyse de chaque scénario, ce qui permet d'orienter les solutions techniques ou de réviser à la baisse certaines spécifications qui conduisent à des suppléments de coût sans rapport avec ce que le consommateur est prêt à payer pour le supplément d'avantage obtenu. Les différentes solutions envisageables font l'objet d'une évaluation à partir de critères techniques (fiabilité, maintenance, interchangeabilité, délais d'introduction...) et de critères économiques (coût d'études, coût des outillages et investissements de production spécifiques, coût de production unitaire...), l'objectif final étant la rentabilité du produit¹.

Table des matières

Index thématique

Pour terminer cette brève présentation, on peut noter que cette méthodologie est lourde à utiliser, ce qui fait que son utilisation doit être en rapport avec les enjeux économiques; elle est beaucoup plus détaillée que celle du QFD (§ II-1.2) et son périmètre, dans le cycle de vie du produit, est restreint, ce qui en limite la portée. Par ailleurs, en se focalisant sur un produit unique, l'analyse de la valeur est nécessairement peu adaptée d'une part, aux approches modulaires et aux plateformes de produits, puisque la conception modulaire (Tarondeau, 1999, [408], p. 34) conduit souvent à doter un module de surcapacités fonctionnelles pour optimiser le nombre de cas d'emploi du module, et, d'autre part, aux efforts de standardisation (voir [section III, page 133](#)).

II-1.2 Le Quality Function Deployment (QFD)

Progressivement théorisé au Japon par Yoji Akao à partir de 1966, le *Quality Function Deployment*² s'est progressivement diffusé et est devenu, sous des formes variées, la principale méthodologie globale de maîtrise et de mise en cohérence des processus de conception et de fabrication, dans une optique de satisfaction des besoins du consommateur. Le QFD fournit une aide à la décision structurée et graduelle pour traduire la «voix du consommateur» (sous forme d'attributs critiques) en cibles de conception (sous forme de spécifications) et

1. Des exemples plus ou moins complets d'application de l'analyse de la valeur peuvent être trouvés dans différents ouvrages spécialisés. Un exemple détaillé et complet peut être trouvé dans l'article de Meyer, «Analyse de la valeur», in *Encyclopédie du management* (1992, [138]), tome II, p. 1042 à 1054.

points clés de maîtrise associés aux caractéristiques du produit ou de vérification associés aux procédés de fabrication. Il ne s'agit donc pas d'un simple outil de gestion de la qualité, mais d'une démarche structurée de coopération entre services fonctionnels, orientée vers la satisfaction des besoins clairement identifiés et non vers le respect de spécifications sans liens forts avec les attentes et les perceptions des consommateurs. Le maintien de ce cap est important car les causes d'abandon techniques et économiques sont nombreuses et peuvent conduire, au final, à un ensemble de spécifications éloigné de l'ensemble cohérent initialement décidé. Il est souhaitable d'utiliser le QFD dans un projet de produit nouveau faisant appel à la concourance (voir [chapitre IV, § I-3.2, page 270](#)), mais il peut l'être aussi dans le cadre d'une démarche séquentielle si le management de projet retenu dans l'entreprise n'est pas assez avancé.

Le QFD s'appuie sur un ensemble de matrices (voir [figure 17, page 114](#)) pour organiser l'information et faciliter la réflexion collective. Il utilise la démarche popularisée par l'analyse de la valeur pour formaliser une expertise en permettant de relier, dans une matrice, les éléments d'un premier ensemble cohérent \mathcal{E}_1 d'éléments aux éléments d'un second ensemble cohérent \mathcal{E}_2 d'éléments. Elle généralise cette démarche, d'une part, par une utilisation en cascade de matrices permettant de passer des éléments de \mathcal{E}_1 à ceux de \mathcal{E}_2 , de ceux de \mathcal{E}_2 à ceux de \mathcal{E}_3 , de ceux de \mathcal{E}_3 à ceux de \mathcal{E}_4 , ..., et, d'autre part, par la richesse de son contenu¹. Chaque ensemble d'éléments correspond à une vision du problème exprimé dans le langage de l'un des métiers de l'entreprise. Par exemple, \mathcal{E}_1 correspond à des attributs du produit, \mathcal{E}_2 correspond à des spécifications fonctionnelles, \mathcal{E}_3 correspond à des spécifications de composants ou d'organes. Ces matrices constituent donc des outils de dialogue entre spécialistes de culture différente et facilitent la cohérence des décisions prises.

La première matrice, outil central de la méthodologie du QFD, est la **matrice de la qualité**, connue également sous le nom de **maison de la qualité**.

- La première étape consiste à partir des besoins considérés comme devant être satisfaits pour répondre aux attentes d'un marché (voir [§ I-4, page 107](#)), à mettre en lignes de cette matrice, les *attributs critiques pour le client* du nouveau produit (c'est la «voix du consommateur»). Ces attributs, fournis par les équipes du marketing, sont décrits habituellement dans le langage du consommateur (pour un magnétoscope, on aura des attributs tels que «facile à programmer», «à rembobinage rapide», «à encombrement limité»...). Ces attributs sont soit individuels et généralement regroupés par famille, soit collectifs (coût, forme, fiabilité...). Chaque attribut est pondéré en fonction

2. Pour plus de détails sur cette approche, le lecteur peut consulter 1) l'ouvrage de Revelle, Moran et Cox (1998, [360]) qui compte, en annexe E, un historique complet de la démarche; 2) l'ouvrage d'Akao (1988, [11], traduit en 1993, [10], qui illustre la démarche par des exemples); 3) le site <http://www.qfdi.org>. Pour Akao, «on peut définir le QFD comme la voix du client dans l'entreprise, conduisant les exigences du client en «caractéristiques qualité», développant un produit par le déploiement méthodique des relations entre les exigences et les caractéristiques, depuis chaque élément constitutif des fonctions Dualité requises, jusqu'à chaque élément du produit et du procédé». La qualité globale du produit résultera de ce réseau de relations.

1. On retiendra une approche de la méthode par quatre matrices (diffusée par l'*American Supplier Institute*, connue sous le nom d'ASI dont le site est <http://amsup.com>), mais des approches plus détaillées et moins structurées, comportant une quarantaine de matrices (celles proposées par le GOAL/QPC), sont utilisées sous forme de mécano ad hoc pour résoudre un problème ponctuel (par exemple, trouver des opportunités d'améliorations de composants clés, cibler un coût de production, identifier des modes de défaillance inacceptables).

de son importance pour le consommateur¹, ce qui facilitera les arbitrages. D'une manière générale, les lignes de la matrice décrivent le «quoi?». Pour évaluer l'avantage compétitif, dans chacune des lignes, à droite de la matrice «attributs critiques - paramètres techniques», on fournit le positionnement actuel (échelle allant de 1 à 5) de la perception qu'a le consommateur de l'attribut critique considéré du produit le plus proche du nouveau produit, fabriqué par l'entreprise, ainsi que celui des deux meilleurs produits concurrents.

- La deuxième étape consiste à établir les principaux *paramètres techniques de conception* qui induisent la performance du système et à les positionner en colonne de la matrice. Ces paramètres décrivent une pièce ou le produit dans des termes mesurables (plage de temps de rembobinage pour le magnétoscope, par exemple) et doivent être directement reliés aux attributs critiques pour le consommateur. D'une manière générale, les lignes de la matrice décrivent le «comment?». Dans chacune des colonnes, en dessous de la matrice «attributs critiques - paramètres techniques», on fournit des indications précises :

- sur la valeur (de préférence à une plage de valeurs²) considérée comme répondant aux attentes du client (par exemple 80 secondes pour rembobiner une bobine d'une durée d'enregistrement de 240 minutes),
- sur le positionnement actuel du produit le plus proche du nouveau produit, fabriqué par l'entreprise, ainsi que celui des deux meilleurs produits concurrents, le niveau de difficulté estimé pour atteindre cette spécification technique (échelle allant de 1 à 5),
- le pourcentage du coût total que l'on accepte d'attribuer à ce paramètre technique,
- l'importance relative (%) de ce paramètre technique.

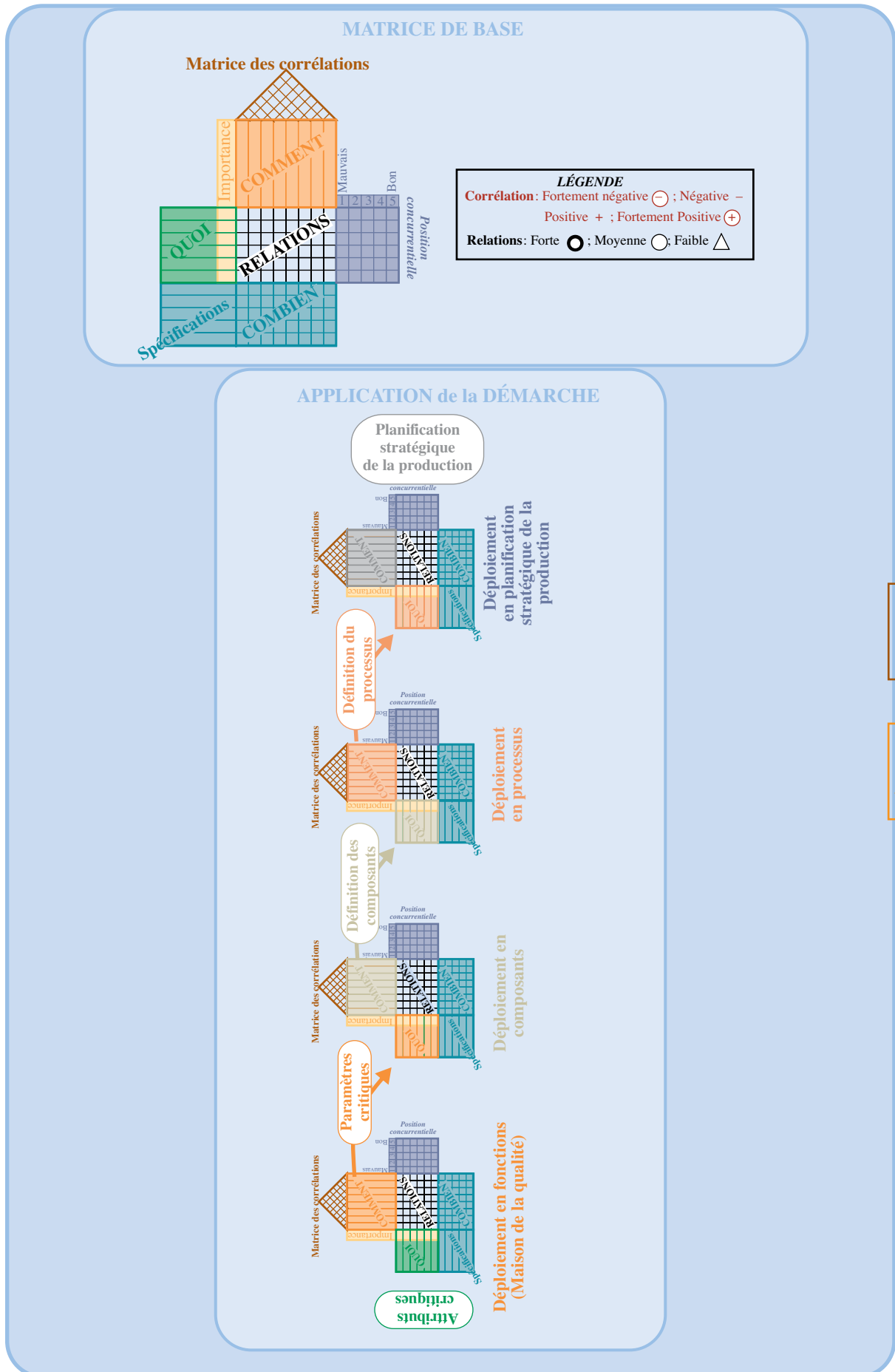
Ces paramètres techniques sont rarement indépendants. Leurs corrélations sont décrites de manière très sommaire dans une matrice triangulaire formant le «toit de la maison». On y décrit généralement ces corrélations par des symboles permettant d'identifier des corrélations faibles ou fortes et positives ou négatives. Par exemple, si le volume du magnétoscope est l'un des paramètres techniques retenus, on aura vraisemblablement une corrélation faiblement négative entre ce paramètre et celui de la durée de rembobinage, la rapidité étant généralement liée à la puissance du moteur, elle-même liée à sa taille.

- La troisième étape dans la création de cette matrice consiste à faire remplir les différentes intersections de la matrice par l'équipe d'experts réunis. Chaque cellule représente le lien potentiel entre un paramètre de conception et un attribut critique. Ce lien est spécifié par la relation entre l'attribut et le paramètre et la force du lien qui est généralement définie par un symbole

1. Bien souvent c'est l'importance perçue par les ingénieurs qui prédomine, ce qui peut conduire à des spécifications sans réelle valeur ajoutée pour le client, notamment par le biais de contraintes nettement excessives par rapport aux besoins des clients (ce que l'on qualifie parfois de **sur-qualité**).

2. Cette restriction est levée lorsque l'on travaille dans une perspective de création d'une plate-forme de produits (cf. [page 103](#)), auquel cas, on cherche à satisfaire de manière cohérente un ensemble de besoins clairement identifiés; la démarche est alors plus délicate d'application dans ce cas.

FIGURE 17
Les matrices du QFD dans la démarche ASI



associé à une échelle allant de 1 à 5 sauf si les connaissances de l'équipe permettent d'assigner des valeurs spécifiques à la relation.

Cette matrice permet à une équipe de converger vers un ensemble de paramètres techniques cohérents et répondant à un ensemble de besoins à satisfaire. Bien évidemment, tout est dans l'art d'utiliser cette approche car un niveau de détail trop fort (plus d'une centaine) se traduit par une matrice ingérable. Une solution consiste à exploiter cette approche sur des sous-ensembles relativement indépendants, au risque d'introduire un biais dans la réflexion.

Le plus souvent, les entreprises se contentent d'utiliser cette maison de la qualité et reviennent à des démarches traditionnelles pour les autres étapes du développement du produit. Mais le QFD permet de poursuivre la démarche d'explicitation et d'arbitrage dans ces autres étapes, ce qui conduit à trois autres matrices, dans la démarche simplifiée préconisée par l'ASI (voir figure 17).

- Une fois définis les paramètres techniques, on peut chercher à définir les caractéristiques des composants dans une seconde matrice dans laquelle les paramètres techniques retenus dans la première matrice deviennent des entrées («quoi?») de la seconde matrice qui aura pour objet de définir comme sorties les spécifications des composants à retenir («comment?»).
- La matrice de planification des processus établit les liens entre les caractéristiques des composants et les caractéristiques des processus-clés.
- La matrice de planification stratégique de la production fait le lien entre les processus clés de production et les exigences de la production en termes de paramètres à mettre sous contrôle pour garantir que les opérations productives conduiront bien à un produit répondant aux attentes du client.

Table des matières

II-1.3 Le Design For Manufacturing (DFM)

Index thématique

Le *Design For Manufacturing*¹ est un ensemble de méthodes visant à prendre en compte des paramètres de production plus tôt dans les décisions de conception. De ce fait, c'est l'une des instrumentations mobilisables par l'ingénierie concurrente et le QFD. Certaines de ces méthodes sont connues depuis très longtemps par les spécialistes des Bureaux d'Études et des Méthodes, d'autres (voir Redford et Chal, 1994, [357]) sont plus récentes et sont liées aux transformations des méthodes de production (extension de lignes d'assemblage ou des cellules de fabrication, par exemple).

Les méthodologies du DFM poursuivent deux objectifs partiellement complémentaires (voir Ulrich et *al.*, 1993, [424]):

- réduire le nombre et le coût des composants (évaluation de la nécessité d'une pièce, mais aussi préférence donnée à la production d'une pièce complexe remplaçant plusieurs pièces simples);
- et réduire le coût de l'assemblage (principes d'orientation et d'insertion des différentes pièces pour faciliter les opérations d'assemblage).

Les solutions de conception doivent tenir compte des contraintes et capacités du processus de production. Des **règles de conception** expriment des limites dans

1. On parle encore de DFMA, pour *Design For Manufacturing and Assembly*, le DFA (*Design For Assembly*) qui remonte aux années soixante-dix, étant considéré comme l'ancêtre de l'approche systématique du DFM et se trouvant en pratique inclus dans celui-ci. Pour une présentation générale, voir Whitney (1988, [442]).

lesquelles opèrent les processus de production. Ces limites peuvent porter, par exemple, sur la taille maximale des pièces, les tolérances admissibles, les volumes de production, les types de matières ou les autres caractéristiques définissant des paramètres de conception critiques. Ces règles de conception permettent d'établir une enveloppe dans laquelle le processus de production est capable d'atteindre les exigences de conception. Par ailleurs, les exigences de flexibilité et de réactivité peuvent se traduire par la prise en compte de points de vue qui assurent une bonne capacité du couple « système productif - portefeuille de produits » à s'adapter à des changements rapides de la demande¹.

Le plus souvent, on inclut dans ces règles de conception un certain nombre de principes mis en évidence depuis longtemps dans l'industrie :

- Il est préférable de concevoir des pièces symétriques pour limiter les problèmes d'orientation en cours d'assemblage. Pour être en mesure de couvrir des besoins différents, le composant devra être « enrichi » (de trous supplémentaires, par exemple), ce qui implique des coûts additionnels qui doivent être largement compensés par les économies engendrées par la simplification des nomenclatures et la facilité du montage. Si cette symétrie n'est pas possible, il vaut mieux concevoir des pièces fortement asymétriques pour faciliter l'orientation lors de l'assemblage (en particulier pour permettre un bon positionnement immédiat lorsque le poste de travail est approvisionné automatiquement en pièces). Dans le même esprit, il est déconseillé de concevoir un nouveau composant doté de caractéristiques physiques trop proches de celle d'un composant existant pour éviter tout risque de confusion².
- Il faut standardiser et limiter au maximum les composants, les matières premières, les outillages (au sens large), les procédés d'assemblage de pièces et les processus. Il s'ensuit qu'il est souhaitable de réutiliser des composants existants plutôt que d'en créer de nouveaux spécifiques légèrement différents. Par ailleurs, il est le plus souvent préférable d'utiliser des composants que l'on peut trouver auprès de plusieurs fournisseurs.
- Il est préférable d'éliminer les opérations d'ajustements de composants lors de l'assemblage car ils sont souvent à l'origine de problèmes de qualité.
- Les produits complexes doivent être conçus de telle sorte qu'ils permettent l'accès à leurs composants tant pour le montage que pour la réparation. Il est souhaitable de concevoir des composants pouvant être remplacés, si nécessaire, indépendamment d'autres composants. Enfin, il est préférable de retenir des solutions n'exigeant pas, lors de l'assemblage de composants, le respect de tolérances trop fortes.

Pour terminer, on peut indiquer que les méthodologies du DFM doivent être utilisées avec discernement parce qu'elles peuvent conduire, d'une part à des délais de conception prohibitifs dans un contexte concurrentiel où le raccourcissement du délai de mise au point d'un produit est un enjeu majeur et, d'autre part, à

1. Dans l'industrie automobile, par exemple, une certaine conception des gammes de véhicules peut permettre de concevoir des chaînes de fabrication et d'assemblage dédiées à plusieurs gammes, permettant un ajustement immédiat en cas de transfert de la demande d'une gamme sur une autre. Voir sur ce point le [chapitre IX](#).

2. Les Japonais utilisent le terme de *poka-yoke* qui signifie « à l'épreuve des imbéciles », pour désigner les différentes techniques qui limitent les erreurs des opérateurs.

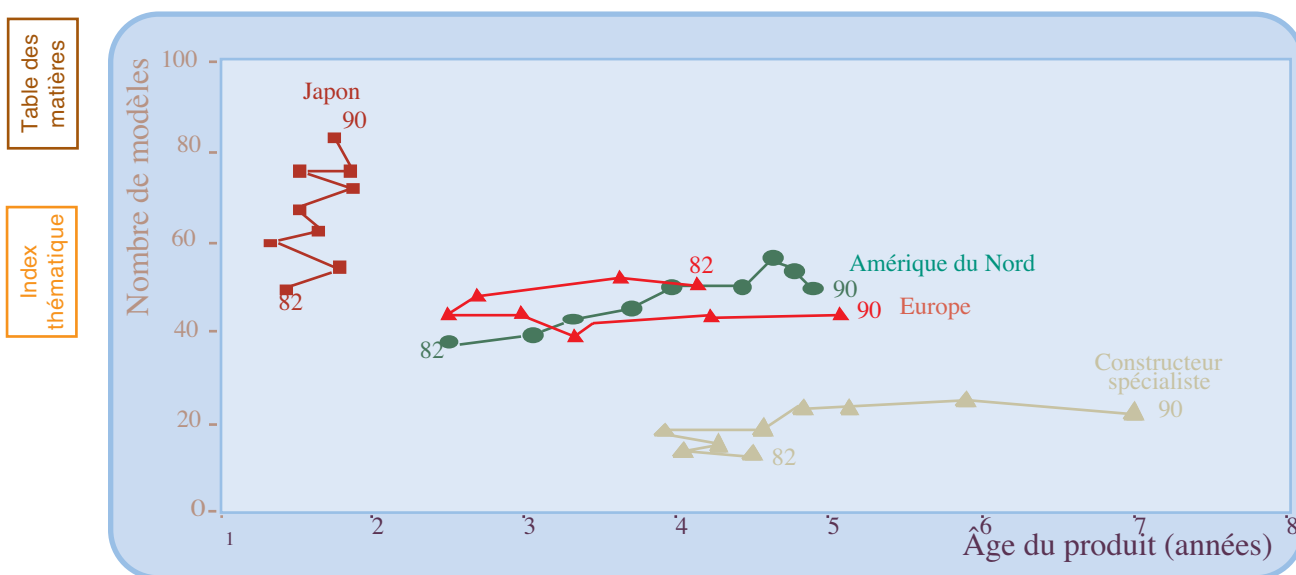
une focalisation excessive sur des charges directes dont le poids relatif a considérablement diminué.

II-1.4 Le pilotage des projets de développement par la gestion de projet

L'exacerbation de la concurrence est sans doute le facteur principal à l'origine de la diffusion de la gestion de projet dans le développement de produits nouveaux. Pour comprendre cela, on peut se reporter aux travaux de Womack, Jones et Roos (1991, [450]) qui ont analysé l'évolution des stratégies des constructeurs américains, européens et japonais en matière de diversification et de renouvellement des modèles d'automobile dans les années 1980. La spécificité des constructeurs japonais, qui augmentent la variété de leur catalogue tout en renouvelant régulièrement les modèles, apparaît clairement dans la [figure 18, page 117](#). De nombreuses études ont montré que les stratégies permettant de concilier un portefeuille important de produits avec un âge relativement bas de ces produits conduisaient à un avantage concurrentiel décisif. C'est dans ce contexte que le raccourcissement des délais de développement des produits nouveaux est devenu un enjeu majeur.

FIGURE 18

Diversité / âge du catalogue des produits (Womack, Jones & Roos, [450])



L'une des raisons essentielles de l'impact du raccourcissement des délais de développement des produits nouveaux tient au grignotage progressif des parts de marché qu'induisent les retards dans le lancement de produits venant remplacer des produits en fin de cycle de vie. Dans cette approche du **cycle de vie** par le marketing¹, on distingue quatre phases: introduction, pénétration, maturité et déclin que l'on visualise sur une courbe d'évolution des ventes sur une même

1. Cette conception du cycle de vie a été introduite par Levitt en marketing (1965, [278]). Une discussion approfondie de ce concept en marketing peut être trouvée dans l'article de Fenneteau, «cycle de vie du produit», publié dans l'*Encyclopédie de gestion* (1997, [136]). Une acception différente est donnée à ce concept de cycle de vie lorsqu'il est utilisé dans l'analyse économique de produits nouveaux dans le cadre de leur gestion par projet (voir § II-2.1, page 118, et chapitre IV, § I-2.1.2, page 263).

courte période de base. La concurrence fait que, le plus souvent, la date de retrait du nouveau produit est à peu près indépendante de celle de son introduction. Dès lors, deux cas de figure peuvent se rencontrer et sont illustrés par les figures 19, page 119, adaptées de Smith et Reinertsen (1998, [390], p. 34), qui représentent des comparaisons d'évolution du chiffre d'affaires instantané (ou de la marge sur coût variable) dans trois cas. Dans le **cas A**, le retard ne fait que décaler les phases d'introduction et de pénétration sans rien modifier aux phases suivantes; la différence entre les aires en **vert** et **beige** correspond à la perte totale induite par le retard. Cette **perte (hachurée en vert)** peut être approximée par le losange en **rouge**, ce qui montre que celle-ci est à peu près proportionnelle au retard et au niveau atteint en phase de maturité. Le **cas B** est plus défavorable: le retard a permis à des concurrents d'occuper le marché et ils ne peuvent en être délogés, ce qui se traduit par une baisse sensible du niveau atteint en phase de maturité. Le **cas C** de la figure 19 est plus favorable car il correspond à un retard permettant d'obtenir un avantage compétitif se traduisant par un recul de la date de retrait et, éventuellement, mais pas nécessairement, par un accroissement du niveau atteint en phase de maturité. Dans ce cas, il faut calculer le solde entre les **gains** et les **pertes** visualisés sur le graphe.

Pour maîtriser les délais, ainsi que les coûts et les spécifications techniques, les techniques de gestion de projet sont maintenant largement utilisées dans le pilotage des projets de développement de produits nouveaux. Ces approches seront présentées en détail au **chapitre IV** et plus particulièrement au § I-2.1.2, page 263, en ce qui concerne les projets de développement de produits nouveaux et les organisations mises en place (en particulier l'ingénierie concurrente qui sera présentée au § I-3.2, page 270). Cela étant, le pilotage des projets de développement de produits nouveaux s'appuie sur bien d'autres outils, notamment ceux qui viennent d'être présentés (AV, QFD, DFM) ainsi que d'autres qui seront introduits au **chapitre III** (simulation de processus, analyse de sensibilité).

II-2 L'éclairage économique des décisions de conception

L'analyse économique d'un produit nouveau ne peut se borner au suivi des dépenses de conception et d'industrialisation puisque la rentabilité du lancement envisagé implique de prendre en compte des ventes. Il est préférable de ne pas borner arbitrairement l'horizon de l'analyse et de prendre en compte toutes les conséquences de cette introduction du produit nouveau, ce qui conduit à raisonner sur le cycle de vie du produit (§ II-2.1). Deux approches sont alors disponibles pour fournir un éclairage économique des décisions de conception portant sur des biens destinés à être fabriqués de manière répétitive: une approche en termes de coût objectif (§ II-2.3) et une approche en termes de flux (§ II-2.2, page 121), qui présente l'avantage d'une plus grande rigueur quant à l'explicitation des hypothèses de travail.

II-2.1 La vision du coût sur le cycle de vie

L'analyse économique d'un projet de développement d'un produit nouveau a conduit à utiliser le concept de cycle de vie d'un produit dans un sens différent car l'approche ne vise plus un ensemble de produits relativement substituables, fabriqués par plusieurs industriels, mais un produit unique fabriqué par un industriel unique. Dans cette perspective, le **cycle de vie** d'un produit se définit comme

FIGURE 19

Pertes et gains de recettes liés à une introduction tardive sur le marché

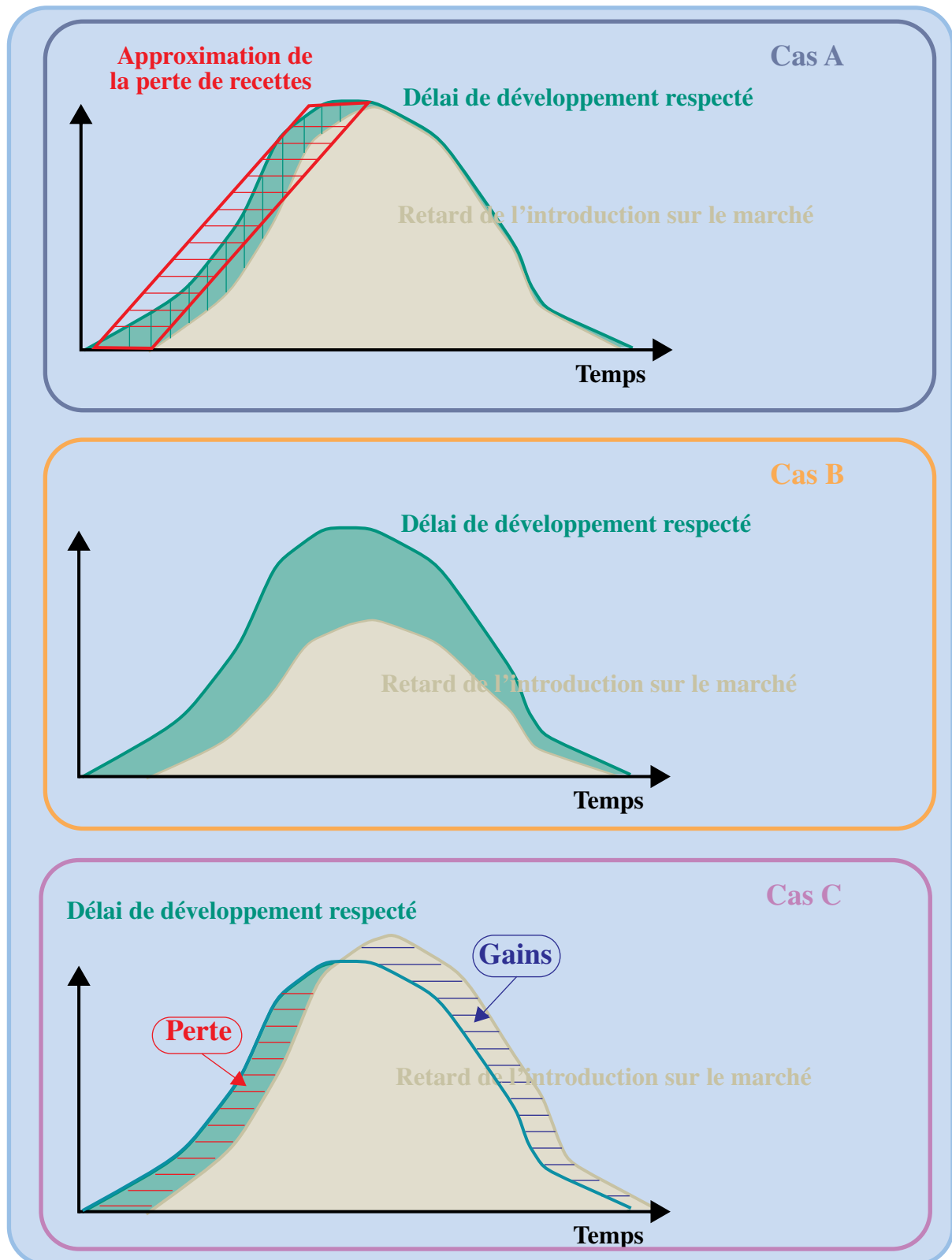


Table des matières

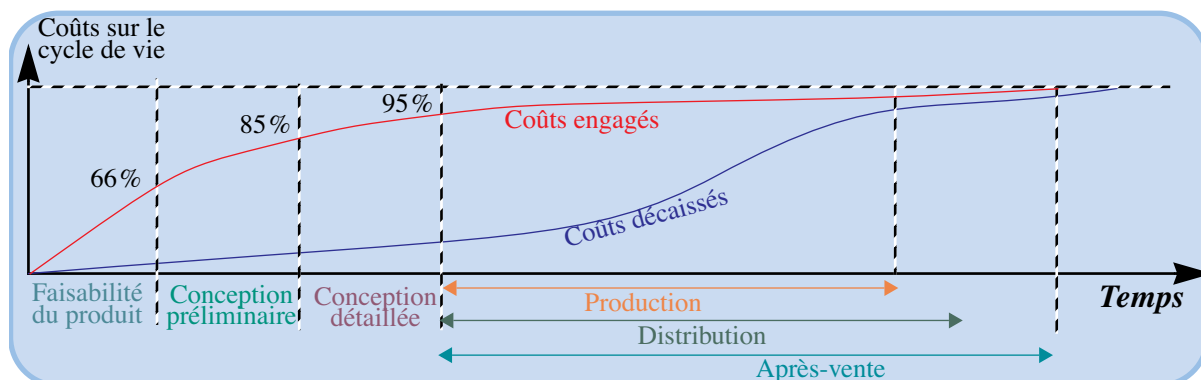
Index thématique

l'intervalle de temps qui sépare le début de la conception d'un produit, de l'arrêt de sa fabrication (un support logistique devant être assuré encore pendant un certain temps pour des raisons commerciales et légales), et par tous les événements et décisions qui affectent ce produit durant cette période. Cette mise en perspective est illustrée par la [figure 20](#)¹ (adaptée de celle de Berliner et Brimson,

1988, [47]) qui distingue la courbe des coûts engagés sur le cycle de vie de la

FIGURE 20

Courbe des coûts sur le cycle de vie (adapté de Berliner et Brimson, 1988, [47])



courbe des coûts constatés et montre que des décisions prises très tôt ont des conséquences importantes sur des coûts récurrents qui sont, de fait, engagés par ces décisions, même si leur décaissement est étalé dans le temps (le coût total des coûts engagés étant égal au coût total des coûts décaissés, ce coût total étant parfois appelé **coût global de possession**, ramené ou non à l'unité produite). C'est ainsi que le choix d'une technologie pour un produit devant être produit pendant cinq ans en un certain volume peut conduire implicitement à l'acquisition d'équipements nouveaux (investissements à réaliser ultérieurement, mais décidés à ce stade) et à l'utilisation d'une équipe d'opérateurs pendant les cinq ans de production (dépenses d'exploitation récurrentes décidées également à ce stade).

Le contrôle de gestion « traditionnel » met sous tension les coûts décaissés récurrents et ne s'intéresse pas à la maîtrise des coûts engagés qui, pour l'essentiel sont déterminés avant la production en régime de croisière. Les analyses d'écart du contrôle de gestion traditionnel se font sur la base d'un référentiel qui, implicitement, s'appuie sur une courbe de coûts décaissés reprenant, avec un attachement temporel différent, les éléments de construction de la courbe de coûts engagés auxquels le contrôle de gestion traditionnel ne s'intéresse pas, ce qui revient à dire que le référentiel utilisé n'est pas sous contrôle.

La nécessité de maîtriser les coûts engagés lors des projets de conception des produits nouveaux s'est traduite par la mise au point d'instrumentations complémentaires utilisées dans le pilotage économique de cette catégorie de projets, pour éclairer chaque décision conduisant à de nouveaux engagements de coûts. Cette maîtrise de la construction progressive des coûts engagés, dont le cumul est le coût total sur le cycle de vie du projet, est maintenant considérée comme un enjeu majeur même si le choix des acteurs chargés de cette mission reste encore souvent ambigu. Cette introduction de l'économie dans la conception se traduit par la recherche de l'obtention d'un ensemble de spécifications pour une certaine production prévisionnelle sans dépasser un coût total prédéterminé. On parle alors de **conception à coût objectif**, ce terme recouvrant plusieurs approches et périmètres possibles.

En ce qui concerne le périmètre, on peut retenir le point de vue de l'industriel, qui est celui implicitement retenu dans la [figure 20](#), ou celui de l'utilisateur qui ajoute au coût d'acquisition d'un bien, les charges liées à l'usage de ce bien (principalement charges directes d'utilisation et de maintenance). Cette seconde perspective est incontournable lorsque le client adopte une approche rationnelle dans son acte d'achat, comme c'est le cas, par exemple, dans l'industrie aéronautique. L'évaluation ex-ante des coûts sur le cycle de vie du produit fait l'objet de deux traductions analytiques différentes : une traduction sous forme de flux ou une traduction sous forme de coûts, ce que l'on va examiner maintenant.

Ajoutons enfin que, dans de nombreuses entreprises (en particulier celles qui travaillent avec la Défense), la prise en charge initiale de la cohérence des décisions et de leurs impacts sur tout le cycle de vie du produit relève du **Soutien Logistique Intégré (SLI)**, connu aussi sous l'appellation anglo-saxonne **Integrated Logistic Support**¹ ou **ILS**). La définition retenue par l'OTAN est la suivante. Le SLI est «le processus de gestion doublé du processus technique par lequel les considérations touchant aux possibilités de soutien et au soutien logistique de système et d'équipements sont intégrées dès les premières phases et tout au long du cycle de vie d'un projet, et par lequel tous les éléments de soutien logistique sont planifiés, acquis, mis à l'essai et fournis en temps voulu avec un bon rapport coût-efficacité».

II-2.2 Les approches en termes de flux de trésorerie

L'approche en termes de flux de trésorerie générés par le projet est classique en matière de choix des investissements et conduit à établir le bilan économique, sur la base d'un échéancier traduisant l'impact différentiel de l'adoption d'un projet par rapport à celui d'une solution de référence (qui peut être le maintien d'un statu quo) et permettant le calcul d'indicateurs financiers synthétiques. Les principes de cette démarche seront présentés en détail au [§ II-2, page 174](#) du [chapitre III](#), mais ce qu'il importe de souligner ici est que cette approche s'appuie sur des hypothèses explicites de quantités datées consommées et produites sur le cycle de vie du produit, de volumes physiques de production et de consommation de ressources datées. L'une des difficultés de cette approche réside dans la prise en compte de tous les aléas futurs et l'estimation des risques économiques encourus². La valorisation de ces conséquences physiques suppose la définition du niveau d'observation à retenir pour l'évaluation économique³ qui peut être celui du projet de conception du produit nouveau (ou d'une plate-forme nouvelle⁴) ou celui de l'entreprise.

- Au niveau de l'entreprise, les modifications effectives de flux de trésorerie sont prises en compte. Cependant, en matière d'évaluation de coûts ou prix unitaires de certaines ressources, des conventions peuvent être utilisées, comme par exemple le recours à un coût standard, dont la définition peut différer selon le point de vue retenu ou dans une perspective de responsabilisation et de motivation.

1. Pour en savoir plus sur cette approche, voir Jones (1995, [251]) et OTAN (1997, [322]).

2. Des méthodes permettant de résoudre certaines de ces difficultés seront présentées au [chapitre III, § II-3, page 185](#).

3. Pour une discussion approfondie de ce point, se reporter au [chapitre III, § II-2.1.1, page 174](#).

4. Voir définition en [page 103](#).

- Au niveau d'un centre de décision (dans le cas de la conception et du développement du produit nouveau, au niveau du projet ou de la plate-forme), il peut être souhaitable d'adopter une logique d'évaluation largement conventionnelle où il s'agit d'évaluer les variations de flux de charge relatifs à cette seule entité. Cette évaluation conventionnelle de certains flux de trésorerie porte non seulement sur les coûts, mais aussi sur les quantités, lorsque l'on se place dans une perspective de relations clients-fournisseurs de ressources entre le projet, la plate-forme et l'entreprise. En effet, une modification des ressources affectées au projet ne se traduit pas nécessairement par une modification équivalente et immédiate pour l'entreprise. Les différences entre l'évaluation des flux au niveau de l'entreprise et celle au niveau du projet portent en fait, sur les quantités des ressources non stockables¹; en ce qui concerne les ressources stockables (matières et composants, par exemple), il ne peut y avoir de divergence d'évaluation entre le niveau du projet et celui de l'entreprise.

II-2.3 Les approches en termes du coût-objectif

Cooper et Slagmulder (1997, [107], p. 72) définissent le *target costing*² comme «une approche structurée pour déterminer le coût sur le cycle de vie auquel un produit donné, comportant des fonctionnalités et un niveau de qualité spécifiés, doit être fabriqué pour générer un niveau de profitabilité défini sur son cycle de vie lorsqu'il est vendu à un certain prix de vente anticipé». Cependant cette définition traduit mal les résultats d'une étude de Tanaka (1989, [401]), portant sur 209 entreprises industrielles japonaises, qui précise que le coût-cible est, en réalité, un coût de production et devient le standard dès le début des opérations récurrentes. Il est évident que le calcul d'un coût, en matière d'évaluation économique des décisions de conception et développement, n'est pertinent qu'en rapport aux volumes de vente du produit nouveau. Ces méthodes reposent sur l'évaluation ex-ante d'un coût moyen du produit nouveau. Les difficultés méthodologiques liées à ce type d'approche sont nettement plus importantes que celles rencontrées dans l'approche par les flux (§ II-2.2). Quatre points méritent d'être soulignés.

- Se posent tout d'abord les problèmes de définition des différentes **conventions** permettant de calculer le coût moyen (volumes prévisionnels, règles d'amortissement des dépenses non récurrentes...).
- En second lieu, se pose la question du **contenu** de coût objectif ou cible, c'est-à-dire des éléments de charges qui sont pris en compte. Monden (1995, [306]), s'appuyant sur les pratiques de *target costing* dans l'industrie automobile au Japon, distingue au sein du coût-cible les coûts faisant l'objet du *target costing* de ceux qui ne sont pas objet de la méthodologie. Cette distinction est résumée dans le [tableau 4](#)

Selon Tanaka et *al.* (1993, [401]), la non-prise en compte de la plupart des charges indirectes dans l'objectif de réduction des coûts a deux origines :

1. Voir définition au [chapitre VIII, page 529](#). On peut noter qu'en l'absence d'évaluation conventionnelle et en se plaçant uniquement au niveau projet, l'évaluation pourrait conduire à certaines incohérences. Ces incohérences sont levées au niveau de l'entreprise lorsque les écarts de quantité de ressources non stockables induits par les différents centres de décision de l'entreprise (ou projets) se compensent, c'est-à-dire lorsque la synergie entre les différents projets est suffisamment forte.

2. Ce § II-2.3 est adapté de l'article de Gautier et Giard (2000, [167]), plus détaillé sur certains points.

TABLEAU 4
Contenu du coût-cible (Monden, [306], 1995)

Coûts faisant l'objet du <i>target costing</i>	
Coûts variables	- Charges de matières premières - Charges de transport de pièces et composants - Coût d'achat de pièces - Coût variable de production
Coûts fixes directs	- Amortissement des équipements et outillages spécifiques - Coûts de développement des prototypes - Autres coûts de développement: heures d'ingénierie...
Coûts ne faisant pas l'objet du <i>target costing</i>	
Coûts directs de ventes	- Leur montant est déterminé sur la base des charges encourues pour les modèles actuels
Coûts fixes indirects de production (hors amortissements spécifiques)	- Reflètent les conditions de production globales et non spécifiques au produit
Autres coûts fixes indirects (administration, commercialisation...)	

- ces charges sont influencées par un grand nombre de produits et donc l'impact d'un seul produit n'apparaît pas significatif;
 - les méthodes de rattachement des charges indirectes au produit des industriels japonais ont un caractère plus conventionnel qu'économique rendant leur analyse, au cours des phases de conception et de développement, peu pertinente.
- La troisième difficulté est liée à la **temporalité** qui est occultée dans les méthodologies de *target costing* puisque le coût-cible est un coût calculé à un instant donné (par exemple un coût de production lors du démarrage réel de la production en série du produit nouveau). En conséquence, les analyses d'évolution à moyen, long terme de ce coût ne sont pas retenues par les méthodologies du *target costing*.
- Enfin, le modèle du *target costing* postule que la **part de marché** est uniquement déterminée par le prix. Certains modèles retiennent une causalité entre prix de vente et volume moins simpliste que celle retenue par la méthodologie du *target costing* avec pour objectif de faire le lien entre les attributs spécifiques du produit et le comportement du client sur un plan économique. En matière d'aviation civile, par exemple, un modèle économique classique au niveau du comportement du client est celui du *Direct Operating Cost* (Westphal et Scholz, 1997, [440]) qui analyse, sur la base de quelques inducteurs, le coût d'utilisation d'un nouvel avion pour une compagnie aérienne. Ce n'est donc pas tant le prix d'un nouvel avion qui conditionne la part de marché et, in fine, les volumes de vente, que les spécifications commerciales et le coût d'utilisation pour la compagnie aérienne. On passe d'une logique de coût global pour le producteur à une logique de coût global pour l'utilisateur.

II-2.4 Problèmes méthodologiques posés par l'évaluation d'un projet de conception et développement d'un produit nouveau sur son cycle de vie¹

L'évaluation ex-ante des décisions de conception et de développement d'un produit nouveau dans le secteur industriel, notamment dans une perspective de développement simultané du produit nouveau et des processus productifs, pose un certain nombre de problèmes méthodologiques sur le plan de la cohérence temporelle des décisions (§ II-2.4.1) et en raison du caractère ex ante de l'évaluation économique (§ II-2.4.2, page 129).

II-2.4.1 Problèmes de cohérence temporelle des décisions

La démarche de conception d'un produit nouveau s'appuie sur une démarche de spécification progressive d'un produit et de son processus de fabrication se traduisant par la création d'un échancier de flux de dépenses et de recettes qui va de l'adaptation du système productif, préalablement à la fabrication de la première unité, jusqu'à la fabrication des dernières pièces détachées vendues au titre du service après-vente, postérieurement à la vente de la dernière unité produite.

Il est évident tout d'abord que les spécifications finales du produit, de son prix de vente conditionneront le réalisme des hypothèses relatives à l'échancier en volume des produits vendus. Cet aspect du problème doit être considéré comme en dehors du champ d'étude, mais doit être à l'origine d'études de sensibilité pour tester la robustesse «économique» de certaines solutions techniques relatives au produit ou au processus (voir chapitre III, § II-3, page 185).

Plusieurs problèmes méthodologiques se posent lors de la valorisation des échanciers de consommation de ressources, qu'il s'agisse de celles mobilisées par les bureaux d'études et de méthodes (§ II-2.4.1.1), des investissements nouveaux (§ II-2.4.1.2, page 125) et des composants existants utilisés (§ II-2.4.1.3, page 127).

II-2.4.1.1 Le coût de conception du produit et de son processus de fabrication

Les dépenses liées à l'adaptation du système productif commencent par les dépenses réalisées par les bureaux d'études et des méthodes dans le cadre du projet de conception du produit et de son processus. Économiquement, il s'agit d'un investissement immatériel conditionnant la possibilité de lancement en production de nouvelles références au même titre que la disponibilité des équipements requis pour cette production. Cet investissement immatériel est pris en compte dans l'analyse économique du projet de production de produits finis nouveaux. Si le produit étudié est un composant nouveau qui sera utilisé par de nombreux produits finis, se pose alors le problème d'un éventuel amortissement économique de cet investissement immatériel, ce que l'on examinera au § II-2.4.1.3, page 127.

1. Ce § II-2.4 est adapté de l'article de Gautier et Giard (2000, [167]).

II-2.4.1.2 Le coût des équipements utilisés

Il convient de distinguer le cas de l'acquisition d'équipements nouveaux de celui d'une utilisation d'équipements préexistants, mais, d'un point de vue méthodologique, ces deux problèmes sont liés comme on va le voir.

Examinons d'abord le cas d'équipements nouveaux ayant pour vocation d'être utilisé *exclusivement* par le produit nouveau.

- S'ils s'avèrent physiquement non réutilisables à la fin de l'horizon de fabrication retenu, en raison de leur usure, d'une inévitable obsolescence technique ou économique ou d'une dépendance trop forte aux spécifications de production du produit nouveau, leurs valeurs résiduelles sont nulles et la totalité de l'investissement est à porter au débit du projet. Si certaines de ces durées sont inférieures à cet horizon de fabrication, on devra procéder au renouvellement des équipements concernés et la question est alors de savoir s'il s'agit ou non d'un renouvellement à l'identique¹.
- Les équipements, qu'ils soient d'origine ou non, dès lors qu'ils sont physiquement réutilisables à la fin de l'horizon de fabrication retenu, posent le problème de la détermination de leurs valeurs de récupération². Deux points de vue peuvent alors être défendus.
 - On peut d'abord considérer que le projet doit supporter seul ces investissements au nom d'un principe de prudence, auquel cas, ces valeurs résiduelles sont nulles. Un autre point de vue conduit au même résultat : celui consistant à considérer comme faisant partie du « *slack* » de l'entreprise, les actifs réutilisables considérés comme « économiquement amortis » dans la production qui a suscité leur introduction dans l'entreprise.
 - Un équipement réutilisable peut conduire au contraire à vouloir porter au crédit du projet une valeur résiduelle dont les règles de calcul sont largement conventionnelles. S'il s'agit d'un équipement pour lequel existe un marché de l'occasion, on peut envisager de calculer une évaluation prévisionnelle, pessimiste ou optimiste, d'autant plus difficile à établir que le marché de l'occasion est étroit. Si ce marché est trop étroit ou inexistant, la valeur résiduelle devrait être considérée comme nulle sauf si l'on a des chances raisonnables de pouvoir les réutiliser pour produire ensuite d'autres références, ce qui pose implicitement le problème – sur lequel on reviendra – du « rachat conventionnel » d'équipements anciens par une nouvelle génération de produits à fabriquer.

Examinons maintenant le cas de l'acquisition d'équipements qui sont partagés par plusieurs références dont une partie seulement correspond aux références nouvelles étudiées.

- La production des références anciennes peut parfaitement s'inscrire dans l'horizon de fabrication utilisé par le scénario qui avait conduit à décider la fabrication de ces références. Dans ce cas, l'acquisition de ces équipements était prévue et justifiée économiquement par la fabrication des « anciennes » références. La cohérence temporelle des évaluations conduit soit à considérer

1. Voir, sur ce point, le [chapitre III](#), § IV-2.1, page 235.

2. Voir, sur ce point, le [chapitre III](#), § III-2.2, page 211.

comme gratuite la disponibilité résiduelle d'équipements intégralement « payés » par les anciennes références, soit à imputer à la nouvelle production la partie du coût des équipements explicitement non prise en compte par les anciennes références lors de l'achat de ces équipements¹.

- Ce partage peut aussi s'inscrire dans le cadre d'une poursuite de la fabrication des « anciennes » références au-delà de l'horizon de fabrication initialement retenu. Dans ce cas, il doit y avoir partage du coût de l'équipement entre références nouvelles et anciennes. Plusieurs techniques sont envisageables, celle qui s'appuie sur l'amortissement économique (présentée ci-après) semblant la plus rationnelle.

Le cas de l'utilisation d'équipements disponibles par les références nouvelles est implicitement étudié dans les deux cas qui viennent d'être présentés.

En définitive, le calcul du coût des équipements utilisés pour fabriquer de nouvelles références implique une traçabilité décisionnelle peu évidente à réaliser. Une solution à ce problème peut cependant être imaginée dans les entreprises qui basent économiquement l'acceptation de leurs projets sur l'obtention d'une rentabilité supérieure à un seuil minimal. L'utilisation de ce seuil comme taux d'actualisation de référence² revient à accepter les projets ayant une valeur actuelle nette positive d'échéancier de flux de trésorerie associé au projet. Dans ces conditions, comme on va le voir, il est mathématiquement équivalent de prendre en compte soit l'échéancier d'investissements lié à l'acquisition d'un équipement soit l'amortissement économique de cet équipement, en s'appuyant sur une durée de vie physique raisonnable (déconnectée de considérations fiscales) et sur le taux d'actualisation de référence.

Cette notion d'**amortissement économique** a été introduite pour la première fois de manière cohérente par Marcel Boiteux dans les années cinquante pour EDF, sous le nom de charges d'immobilisation. Une synthèse de ses travaux sur ce thème peut être trouvée dans Boiteux, 1964, [59], chap. X; un panorama intéressant de ce courant peut également être trouvé dans Lévy-Lambert & Dupuy, 1973, [280], chap. IV. L'échéancier d'amortissements économiques A_t défini sur n périodes et associé à un investissement ponctuel I , pour un taux d'actualisation

α défini pour le découpage temporel utilisé est tel que $I = \sum_{t=1}^n \frac{A_t}{(1+\alpha)^t}$. Cette

approche revient implicitement à déterminer la valeur résiduelle V_t de l'équipement à une date t après prise en compte de l'amortissement économique³ de cette période: cette valeur résiduelle n'est autre que la valeur actualisée, à la date t et au

taux α , des amortissements restant à venir⁴ $\left(V_t = \sum_{\tau=t+1}^n \frac{A_\tau}{(1+\alpha)^\tau} \right)$. Dans ces

travaux, l'amortissement économique est principalement présenté comme la conséquence de l'utilisation d'un taux d'actualisation permettant de réaliser

1. Cette option implique, à l'achat de l'équipement, le transfert sur l'entreprise, du risque de non financement de la partie du coût non justifiée par les anciennes références. La détermination de règle de partage du coût d'acquisition entre les références anciennes et les références à venir peut être traitée suivant les principes décrits dans la note du bas de la page 127.

2. Voir, sur ce point le chapitre III, § III-1.2.2.2, page 206.

l'équilibre entre une offre de capitaux et une demande de capitaux, interne à l'entreprise et tenant compte des opportunités du marché¹. Mais, ici, l'amortissement économique est vu avant tout comme un outil de cohérence temporelle des décisions (ce qui implique, notamment, une certaine stabilité du taux d'actualisation de référence utilisé).

Toute analyse économique du projet de lancement d'un produit nouveau dans laquelle on prend en compte l'utilisation d'équipements nouveaux ou existants par le biais de leurs amortissements économiques ou d'une partie de ces amortissements économiques est cohérente quant au bien-fondé de l'acquisition de ces équipements si ces amortissements économiques sont effectivement supportés en totalité par les différentes productions. L'usage d'un tel amortissement économique dans les prix de cession internes présente en outre l'avantage de la cohérence interne comme on le verra à la page 128.

II-2.4.1.3 Le coût des composants utilisés

Les coûts des composants acquis à l'extérieur ne posent a priori pas de problème puisqu'ils sont déterminés contractuellement. Des problèmes peuvent cependant surgir lorsque le fournisseur est une société détenue partiellement ou en totalité par l'entreprise concernée car les prix de vente peuvent se rapprocher de prix de cession et être minorés ou majorés en fonction de critères liés à une stratégie de groupe. Le développement des pratiques de co-développement ne modifie pas la transparence des coûts dans l'évaluation économique. En effet, les coûts de développement de l'entreprise co-traitante peuvent être partiellement pris en charge par le budget de développement du produit nouveau et le reste être répercuté sur le prix de vente, tandis que la participation du donneur d'ordre au développement du produit nouveau est prise en compte dans le coût du projet de développement.

Table des
matières

Index
thématique

3. *Note de la page précédente.* Plusieurs échéanciers d'amortissement économiques sont imaginables, ce qui a un fort impact sur la définition de la valeur résiduelle à la fin d'une période :

- On peut décider de retenir un amortissement constant en application de la relation 505 de la page 1173 (d'où

$$A = I \frac{\alpha}{1 - (1 + \alpha)^{-n}}, \text{ ce qui est assez logique dans le cas d'une stabilité d'utilisation du bien considéré.}$$

- On peut imaginer de faire décroître progressivement cet amortissement pour tenir compte d'hypothèses d'obsolescence technique (tout dépend alors de ces hypothèses).
- On peut enfin vouloir tenir compte explicitement des variations prévisionnelles de la production p_t , tout en

voulant définir un coût unitaire économique constant a ($A_t = a p_t \Rightarrow a = I / \left\{ \sum_{t=1}^n p_t (1 + \alpha)^{-t} \right\}$). Cette approche permet

facilement de prendre en compte la production simultanée de références différentes par cet équipement, combinant des échéanciers de production très hétérogènes. Il convient alors d'exprimer les productions p_{it} des différentes références i produites au cours de la durée de vie de cet équipement avec une unité d'œuvre cohérente

$$\text{avec ce coût unitaire constant } a: A_t = a \sum_i p_{it} \Rightarrow a = I / \left\{ \sum_{t=1}^n \frac{\sum_i p_{it}}{(1 + \alpha)^t} \right\}.$$

- Il est possible également d'inclure dans cet échéancier les dépenses de maintenance préventive destinées à garantir une qualité constante de prestations offertes par l'équipement (auquel cas, il faudra imaginer un système de comptabilité de gestion évitant de prendre en compte deux fois ce type de charge). En cas d'inflation sensible et de durée de vie longue, il convient de réfléchir sur les avantages et les inconvénients d'une solution utilisant un taux d'actualisation non déflaté et d'une solution utilisant un taux d'actualisation déflaté, avec une modification des amortissements économiques par un facteur correctif de prise en compte de l'inflation.

4. *Note de la page précédente.* Cette propriété sera évoquée à nouveau dans le chapitre XVII, page 1175.

La détermination du coût des composants fabriqués en interne pose quelques problèmes méthodologiques dont certains sont bien connus (en particulier, déversement des charges indirectes). On s'intéressera plus particulièrement ici au problème de l'amortissement. Dans le calcul des coûts de revient, l'usage d'une quote-part de l'amortissement fiscal des équipements utilisés équivaut à admettre que le produit nouveau bénéficie d'une subvention indirecte liée à l'usage d'équipements existants. En effet, avec cette convention de calcul, cette consommation de capital, contrairement à celle des équipements nouveaux, n'a pas à être justifiée économiquement par une rentabilité minimale du capital investi. Si, au lieu de l'amortissement fiscal, on utilise l'amortissement économique, la cohérence décisionnelle est restaurée.

Un dernier problème posé est celui de la cohérence des projets « produits finis » et des projets « organes », généralement conçus dans une optique de modularité et de standardisation (voir [section III, page 133](#)). Les projets « organes » correspondent à la conception de modules complexes (organes mécaniques, cartes électroniques...) qui ont pour vocation d'être utilisés par plusieurs gammes de produits dont certaines ne sont encore qu'à l'état de projet. Ces projets n'ont pas de rentabilité intrinsèque puisque la production qui en résulte ne fait que marginalement l'objet de ventes (au titre de pièces détachées). La pratique du bilan différentiel¹ conduit à décider de fabriquer en interne certains composants plutôt que de les acheter à l'extérieur, mais, à notre connaissance, une fois cette décision prise, le système de prix de cession interne n'en tire pas de conséquences quant à une quelconque rentabilité minimale des capitaux investis.

L'usage de l'amortissement économique des équipements utilisés (ou d'une quote-part en cas d'utilisation partagée) apporte une solution élégante et facile à mettre en œuvre au problème de la cohérence temporelle des décisions, à condition d'y ajouter un amortissement complémentaire correspondant aux investissements immatériels. En effet, l'amortissement économique est calculé sur la base de l'investissement et non du différentiel d'investissement, ce qui permet d'en assurer la rentabilité minimale désirée (par le biais du taux d'actualisation). Par ailleurs, en y ajoutant un amortissement des investissements immatériels, on est cohérent avec l'évaluation économique initiale du dossier d'investissement du projet « organe », dont la spécificité garantit habituellement la pérennité². Si le projet de nouveau produit fini conduit, pour le taux d'actualisation de référence de l'entreprise, à une valeur actuelle nette positive, cela implique une rentabilité du projet des nouveaux investissements matériels et immatériels au moins égale au

1. *Note de la page précédente*. M. Boiteux écrit (1964, [59]) : « tout se passe entre le service financier de l'entreprise et le service d'exploitation comme si le premier louait au second des installations qu'il exploite », ce qui confère au taux d'actualisation un rôle d'affectation du capital similaire à celui du ROI (*Return On Investment*) dans les organisations divisionnelles. Il ajoute, à propos de la valeur résiduelle calculée suivant la méthode rappelée ici, que « la référence au marché permettra chaque année de prendre des décisions d'achat et de revente qui s'imposent ».

1. Voir [chapitre III, § II-2.2.1, page 177](#).

2. L'existence, sur le marché, de produits substituables comparativement moins chers peut conduire à abandonner la production de l'organe considéré. Cet abandon n'est pas judicieux si l'usage d'un coût n'incluant ni la rémunération du capital investi pour les équipements, ni un amortissement des investissements immatériels, conduit à la décision inverse. En effet, dans ce cas la différence entre ce dernier coût et celui d'acquisition du produit substituable reste dans l'entreprise et permet de ne pas tout perdre dans le processus de récupération des sommes investies. La technique de calcul retenue pour ce coût (niveau de prise en compte des charges indirectes...) peut amplifier ce problème.

taux d'actualisation et une participation de ce projet à la rentabilité des projets organes implicitement mobilisés dans cette affaire.

II-2.4.2 Problèmes liés au caractère ex-ante de l'évaluation économique

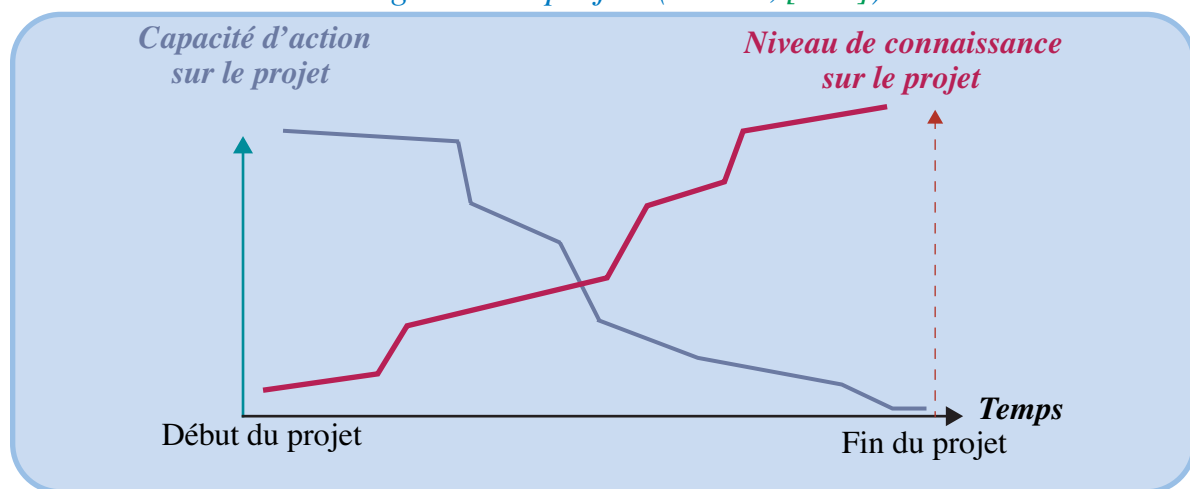
II-2.4.2.1 Impact de l'incertitude sur la construction de l'échéancier des coûts engagés

La figure 20, page 120, de la courbe des coûts engagés sur le cycle de vie relève plutôt d'une évaluation ex-post des décisions de conception. En effet, dans les phases initiales du cycle de vie du produit (correspondant aux décisions prises avant le démarrage effectif des opérations récurrentes de production), la courbe n'est pas connue avec certitude. Cette constatation conduit à plusieurs conséquences.

- Tout d'abord, il convient de s'interroger sur les éléments de la courbe qui peuvent être effectivement gérés en fonction des phases d'avancement du projet. En effet, l'instrumentation et le pilotage d'un projet de conception sont influencés par la temporalité du projet. L'objectif du projet est de construire progressivement une réalité à venir. Cette temporalité est marquée par le découpage d'un projet en phases distinctes et se traduit par «la convergence du projet» (Midler, 1993, [301]) représentée par les deux courbes sur le graphique suivant.

FIGURE 21

Convergence des projets (Midler, [301])



Cette temporalité pose la question du niveau de granularité de l'estimation des coûts engagés sur le cycle de vie du produit. Ce niveau de granularité apparaît de manière explicite dans les niveaux progressifs de définition du produit et dans le recours à des méthodes d'estimation des coûts de plus en plus «précises». Dans le même temps, l'évaluation ex-ante des coûts ne présente un réel intérêt que dans la mesure où le cumul des coûts engagés laisse des marges de manœuvre. Dans les phases les plus avancées du projet de conception et développement, l'évaluation économique peut avoir pour rôle d'aider au choix des solutions techniques sur la base d'un éclairage économique ou de tester la robustesse d'une solution technique par rapport à tous les scénarios d'hypothèses envisagées. Sur un plan instrumental, la simulation en univers certain (de type *what if*) permet d'éclairer l'impact économique de choix techniques alternatifs¹.

- En second lieu, la prévision des coûts engagés sur le cycle de vie n'ayant pas un caractère certain, il existe, à un instant donné, un ensemble de courbes de coûts à engager. Cet ensemble de courbes conduit à deux conséquences en matière d'évaluation ex-ante des décisions de conception.
 - Tout d'abord, cet ensemble de courbes résulte de l'existence de degrés de liberté en matière de choix de conception du produit et des processus correspondants, dans les phases amont du projet; le rôle de l'évaluation est alors d'analyser la variabilité induite par ces degrés de liberté. Cette variabilité se matérialise par le choix de scénarios alternatifs et, sur un plan opérationnel, les techniques de simulation en avenir certain permettent d'explicitier les hypothèses ou de valider un scénario.
 - Ensuite, l'ensemble de courbes résulte du caractère aléatoire des coûts engagés. L'objectif du pilotage est alors de définir les courbes enveloppes (la limite basse et la limite haute) de cet ensemble de courbes. À cet égard, la détermination de ces courbes enveloppes suppose de rapprocher le pilotage économique du projet des méthodes de gestion des risques d'un projet¹.

Cette évolution des coûts engagés de manière irréversible à la date θ et des extrapolations au-delà de cette date cumulé des coûts déjà engagés est décrite dans la [figure 22](#). À partir de cette date, on peut déterminer deux courbes enveloppes de l'évolution du cumul des coûts engagés entre la date courante θ et la date T de fin du cycle de vie du produit: une courbe optimiste CE_{min_θ}

et une courbe pessimiste CE_{max_θ} . La différence $CE_{max_\theta} - CE_{min_\theta}$ représente à la fois des marges de manœuvre sur le projet de conception et l'existence de risques ayant un impact économique. Ce travail de projection est effectué tout au long du développement du projet de conception du produit et du processus. Dès lors, on peut déterminer l'évolution de l'estimation des bornes CE_{min_t} et CE_{max_t} du cumul des coûts engagés. Cette fourchette converge nécessairement vers le constat qui sera fait en fin de cycle de vie et, à la date T , on retrouve la courbe des coûts engagés de la [figure 20](#).

On peut ajouter quelques remarques sur les conséquences du caractère aléatoire des éléments de coûts estimés. Lorsque plusieurs causes (estimation des quantités vendues, phénomènes de diversité...) pouvant avoir un impact sur les différents coûts sont corrélées, il n'est plus possible d'obtenir un coût global par addition de coûts individuels et la détermination des courbes enveloppe repose sur des outils de simulation aléatoire, avec prise en compte des corrélations entre variables².

II-2.4.2.2 L'appel à un double niveau de modélisation

L'évaluation d'un coût sur le cycle de vie repose sur la distinction entre les coûts récurrents et ceux qui ne le sont pas, ce qu'illustre la [figure 23](#) qui reprend sous une forme légèrement différente la [figure 20 de la page 120](#).

1. Voir [chapitre III](#), § II-3, page 185.

1. Sur ce point, voir Giard (1991, [173]) et Courtot (1997, [111]).

2. Ces approches seront étudiées en détail au [chapitre III](#), § II-3.3, page 190.

FIGURE 22

Évolution des évaluations de bornes de coûts engagés au cours du cycle de vie du produit

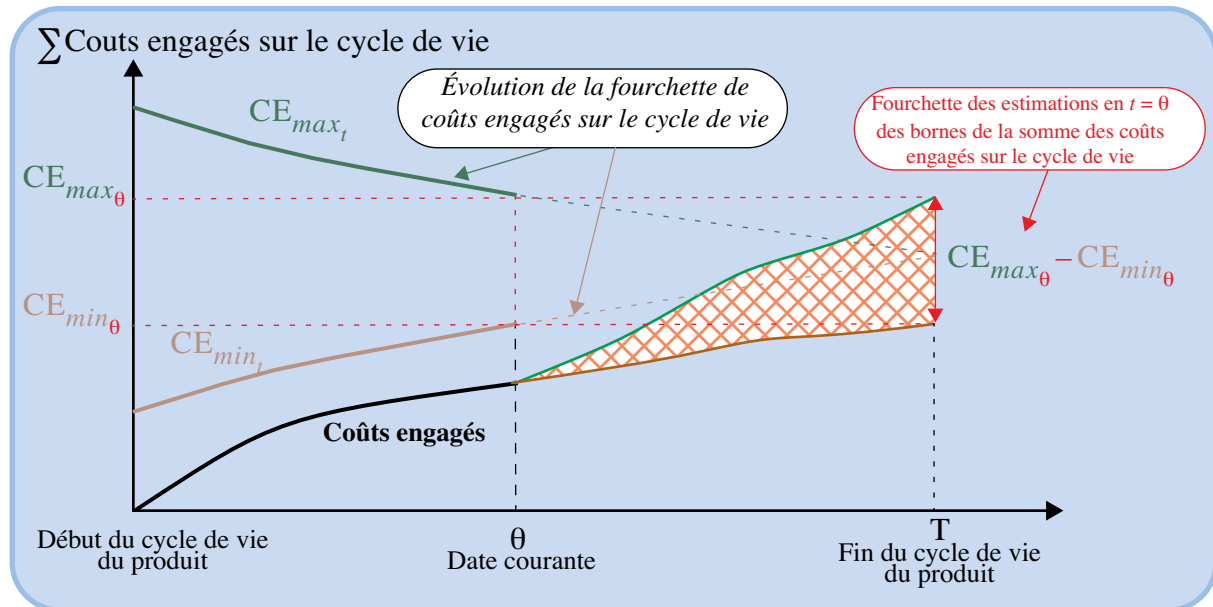
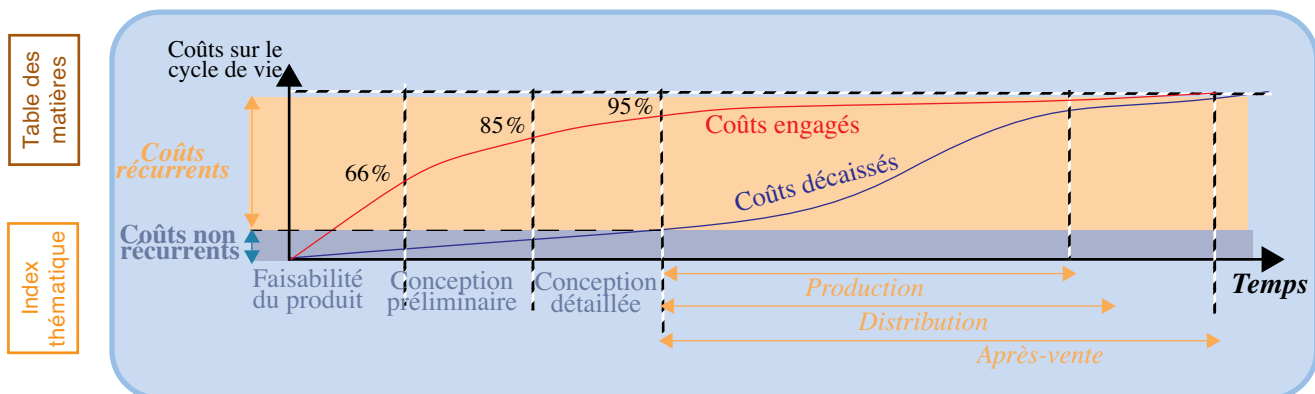


FIGURE 23

Décomposition des coûts sur le cycle de vie et courbes de coûts

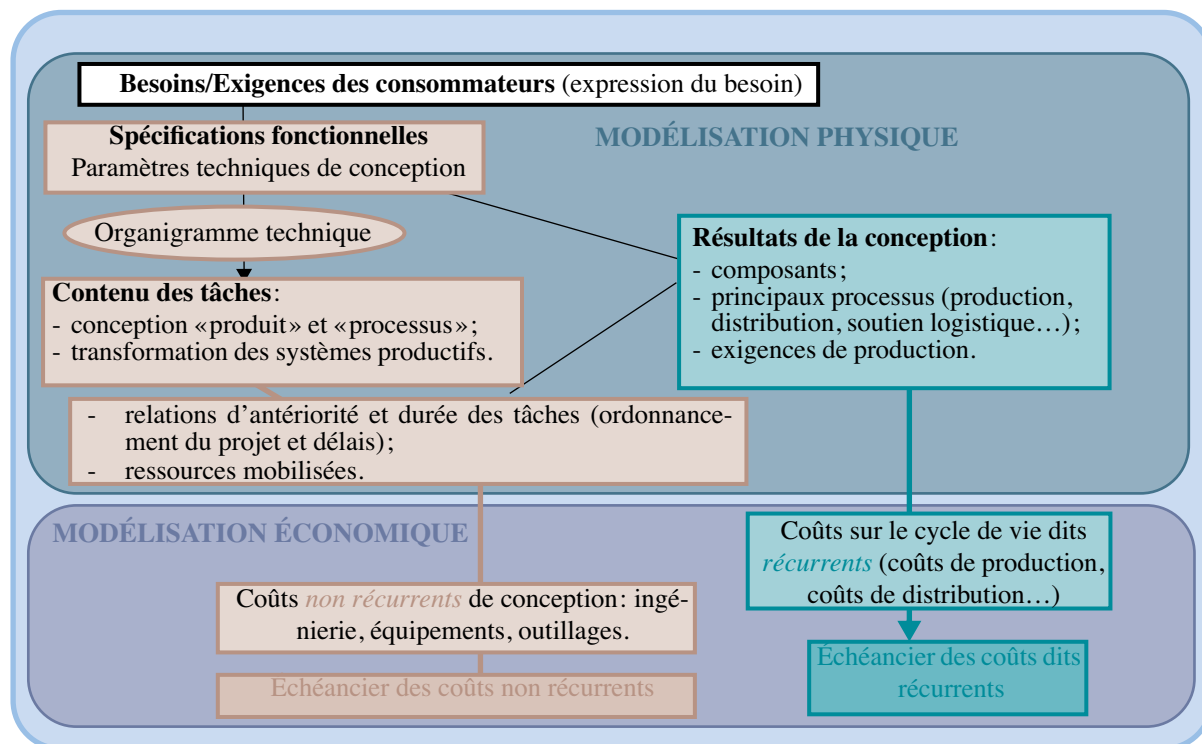


L'évaluation des coûts non récurrents de conception repose sur la valorisation des consommations de ressources par les différentes tâches. La détermination des coûts dits récurrents pose des problèmes de cohérence dans la mesure où, comme on le verra au [chapitre X, § II-2.1, page 638](#), leur évaluation repose sur deux niveaux de modélisation, l'un physique, l'autre économique.

La [figure 24 de la page 132](#) illustre l'application de ce mécanisme en combinant les deux niveaux de modélisation avec le caractère récurrent ou non des charges générées par le produit nouveau.

- Au niveau de la *description physique*, on est confronté au problème de l'imprécision de la description physique d'un produit en phase de conception. Cette imprécision décroît progressivement avec l'avancement du projet conformément au processus décrit à la [figure 21 de la page 129](#). Elle se traduit par le fait que le contenu de certaines tâches du projet de développement est conditionné par la réalisation de tâches-ancêtres non encore exécutées. Par exemple, la conception d'une gamme est conditionnée par la

FIGURE 24
Principe de décomposition des coûts sur le cycle de vie



définition physique précise du produit et les choix techniques faits en amont conditionnent des charges non récurrentes (investissement...) et les charges récurrentes (matières et main-d'œuvre) par le biais des gammes qu'ils induisent.

- Le processus de *valorisation* s'appuie sur un système de coûts unitaires qui repose implicitement sur une certaine représentation du système productif et des processus que le produit nouveau risque de perturber (on reviendra sur ce point au [chapitre X, § II-2.1.3, page 647](#)¹). Par exemple, le développement d'un produit nouveau peut être l'occasion de remettre en cause des décisions en matière de processus d'industrialisation et de fabrication, notamment dans le cadre du développement de l'ingénierie concurrente. De même, les choix d'industrialisation peuvent avoir des impacts en matière de processus de production pour d'autres produits existants dans l'entreprise. Il convient alors de s'assurer d'une compatibilité minimale des deux représentations physiques. Ajoutons que les décisions de conception retenues sur la base des coûts récurrents qu'elles induisent doivent être cohérentes avec les décisions stratégiques retenues au niveau de la firme ou du produit.

En raison de ces problèmes de cohérence dans le suivi et la réprévision des coûts récurrents engagés par les décisions de conception et de développement, il importe de qualifier la valorisation en précisant, d'une part, le degré d'irréversibilité technique qui le sous-tend et, d'autre part, la nature de la valorisation (sources d'informations, méthodes de calcul, hypothèses de travail).

1. Voir également Giard & Pellegrin (1992, [198]).

SECTION III ANALYSE ÉCONOMIQUE DE LA STANDARDISATION DES PRINCIPAUX ORGANES DANS LES INDUSTRIES DE PRODUCTION DE MASSE

À l'époque où l'artisanat prévalait, le principal effort de standardisation était un effort d'étalonnage. Il portait sur l'établissement de mesures (monétaire, de poids, de longueur, etc.) permettant d'établir les échanges de biens et de prestations sur des bases comparables et de fonder progressivement les sciences de la matière. Il faut attendre la révolution industrielle, rendue possible par l'évolution des connaissances, pour que l'usage de processus standardisés autorise la fabrication de produits substituables, permettant l'élaboration de produits finis de complexité croissante réalisés à partir de constituants identiques fabriqués sur des machines, elles aussi, de plus en plus sophistiquées. Cette standardisation des produits est compatible avec une production systématique de composants «sur mesure» souvent utilisés à cette époque par un seul produit fini.

Depuis près d'un siècle, un même composant est le plus souvent utilisé par plusieurs produits finis. L'analyse technique des références de la nomenclature de production et d'approvisionnement fait généralement apparaître une part importante de composants de caractéristiques identiques ou voisines. Les raisons de cette prolifération, source de coûts additionnels (introduits au § I-3.2, page 105), sont multiples et bien connues: incompréhension de l'impact de la prolifération des références en production et en après-vente, syndrome du P2I (Pas Inventé Ici), décisions arbitraires en conception, argument fallacieux du «juste poids, etc.», défaillance du système d'information conduisant à rendre plus rapide la création d'une nouvelle référence que la recherche d'une référence existante. Ces causes de proliférations doivent être perçues et progressivement éliminées, pour les composants substituables. Pour ceux qui sont partiellement substituables parce que susceptibles de couvrir les mêmes besoins, une analyse technico-économique s'impose. On fera alors appel aux techniques de **standardisation** que l'on définira ici comme la *rationalisation de la conception d'une gamme de produits homogènes partiellement interchangeables, destinée à couvrir un ensemble de besoins*. On peut souligner que cette classe de problèmes, dans les grandes industries de production de masse n'est pas réellement prise en compte dans les services fonctionnels (bureaux d'études et méthodes) et pas du tout dans les organisations de type «projet».

Avant de poursuivre, il est important de souligner que ces efforts de standardisation doivent s'accompagner d'efforts de rationalisation en matière d'équipements (diversité en juste relation avec la variété requise en production), d'outillages (limitation des changements de réglage nécessaires, maintenance facilitée) et des procédés de fabrication (pour éviter de multiplier inutilement les filières technologiques à maîtriser). Ces efforts de rationalisation sont guidés par différentes démarches, parmi lesquelles on peut citer le QFD (§ II-1.2, page 111), le DFM (§ II-1.3, page 115), le *kaizen* (chapitre I, § I-3.2.1, page 70) et le SMED (chapitre VII, page 511).

On commencera par discuter des origines de la standardisation (§ III-1) avant de proposer une analyse économique de cette standardisation et des pistes d'optimisation de ce problème (§ III-2, page 134).

III-1 Les origines de la standardisation

Des efforts de standardisation sont entrepris dans tous les pays industrialisés dans la première moitié du XIXe siècle. En France, il semblerait que la modélisation de cette rationalisation remonte au milieu du siècle dernier avec les travaux de Renard sur les cordages de la marine de guerre française: la sophistication croissante des navires, dont les gréements sont définis sur mesure, et l'expansion coloniale conduisent à une prolifération rapidement ingérable des stocks de cordages. L'idée suivie est relativement simple. Dans le problème posé, la caractéristique essentielle d'un cordage est la traction maximale Y qu'un cordage de diamètre X peut subir avant rupture. Un test sur des cordages de diamètres différents permet d'établir la [figure 25](#). Il suffit ensuite de découper l'axe des ordonnées en un certain nombre de plages disjointes et d'associer, à toute demande caractérisée par une traction y_k , le diamètre associé à la borne supérieure de la plage de valeurs qui contient y_k (soit, dans l'exemple de la [figure 25](#), pour une spécification de traction limite avant rupture comprise entre y_1 et y_2 , un cordage de diamètre x_2).

FIGURE 25

Analyse de la traction limite avant rupture des cordages par Renard

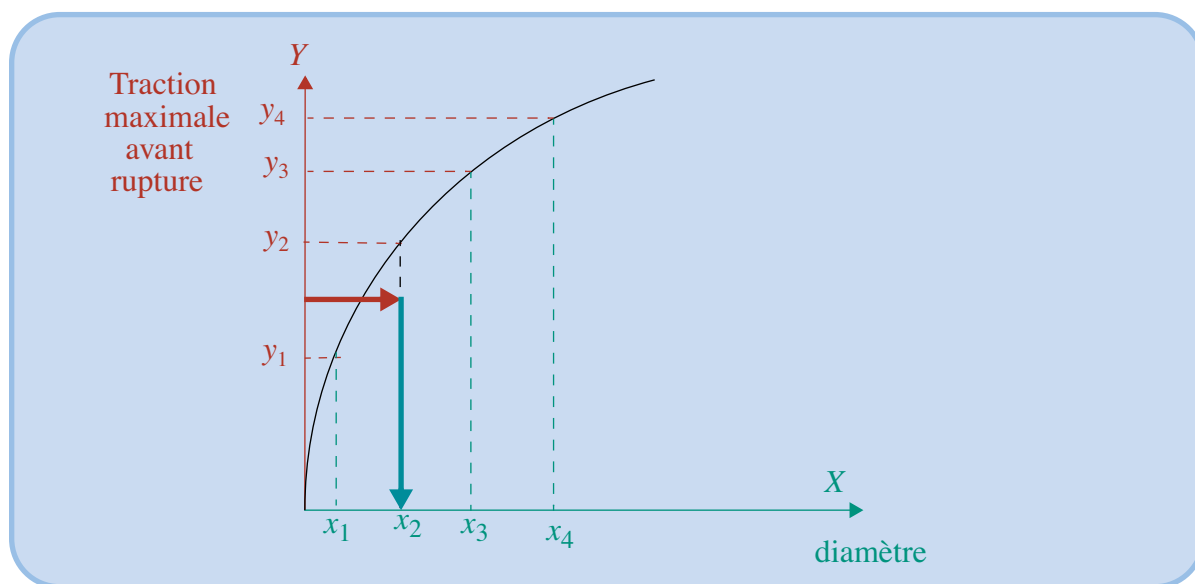


Table des matières

Index thématique

Cette approche du problème permet de limiter astucieusement le nombre de références à produire et à gérer, mais le problème qui reste à résoudre est celui de la définition du nombre de plages de valeurs et de leurs définitions. Pour ce faire, des travaux empiriques ont proposé des solutions (et ont donné naissance, en particulier aux «séries Renard» encore utilisées dans l'industrie). Avant de proposer une modélisation économique de ce problème dans une optique de généralisation multicritère, il n'est pas inutile de replacer cette problématique dans celle plus large de la diversité et de son coût, dans un contexte économique qui tente de plus en plus de séduire le client par une production à la commande de bien et de service «sur mesure».

III-2 Vers une optimisation de la standardisation

Après avoir présenté (§ III-2.1) une modélisation générale du problème posé par la programmation linéaire, on examinera (§ III-2.2, [page 140](#)) quelques problèmes méthodologiques posés par cette rationalisation économique, que l'on

fasse ou non appel à la démarche d'optimisation proposée¹. Cette partie du chapitre étant plus difficile d'accès est repérée en marge par une trame foncée.

III-2.1 Présentation du modèle de base

Pour des produits simples et peu onéreux (la visserie, par exemple, ou les cendriers de l'exemple de Nissan cité à la page 105), une analyse sophistiquée ne s'impose généralement pas dans la mesure où la réduction du nombre de composants assurant une fonction s'impose d'elle-même tant au niveau de la simplification des nomenclatures que de celle des processus productifs et des approvisionnements.

Dans les autres cas, l'approche de Renard est utilisée pour rationaliser la gamme de produits relativement simples, généralement caractérisés par un critère quantitatif unique. Des analyses de Pareto sur la distribution des besoins selon ce critère quantitatif (voir, par exemple, Anderson & Pine, [16], chapitre V) fondent des approches empiriques permettant de définir une gamme de produits, mais la démarche se fonde sur l'intuition et prend difficilement en compte le point de vue économique. En outre, la complexité des produits fait que l'analyse technique peut difficilement être de type monocritère. Une formulation généralisée de ce problème par la programmation linéaire en nombres entiers apporte des éléments de réponse pertinents à ces préoccupations² que l'approche éprouvée des modèles permet facilement de mettre en œuvre (voir chapitre XVI, page 1134).

La recherche d'une optimisation de la standardisation suppose d'une part que des besoins fonctionnels soient correctement évalués et traduits en spécifications techniques, ce que facilite l'approche QFD (*Quality Function Deployment*, voir § II-1.2, page 111), et qu'une réflexion cohérente et pertinente soit conduite sur l'ensemble des solutions que l'on considère comme judicieuses. La détermination du portefeuille de solutions à examiner repose sur une réflexion n'éliminant a priori aucun des modes de personnalisation présentés ci-dessus. L'existant (fabrication interne ou approvisionnement) doit faire partie des alternatives étudiées. Normalement, le résultat de l'optimisation de cette standardisation est non seulement une baisse des coûts de production, mais aussi un accroissement de la flexibilité de l'entreprise qui peut réagir plus rapidement et facilement à des transformations conjoncturelles et structurelles de la demande (voir chapitre III, § I-1.5, page 147).

On présentera le modèle en illustrant le raisonnement par un exemple de moteurs. D'un point de vue technique, on est en présence de n variantes possibles d'un produit³, que ces variantes soient effectivement produites ou seulement à l'étude (les produits nouveaux envisagés devant tenir compte des contraintes du système productif existant ou en cours de transformation⁴). Les critères retenus pour définir une variante seront relatifs à des caractéristiques techniques plus ou

1. Cette partie est adaptée de deux communications de Giard (2000, [186] et [187]).

2. Formellement, le problème traité ici combine une transposition d'un modèle d'assignation de clients à des centres de production (chapitre VIII, § I-2.2.2, page 552) et la prise en compte de fonctions de coûts non linéaires avec charges fixes variant par palier (chapitre XVI, § II-2.3.1, page 1142), à ceci près que la production totale d'une référence est ici la somme de productions demandées par différents segments.

3. Chez Renault, par exemple, l'usine de Cléon fabrique plus de 400 variantes possibles de moteurs.

4. Cette catégorie de préoccupation étant prise en compte dans la littérature du DFA (Design For Assembly); voir sur ce point Nof, Wilhelm & Warnecke (1997, [318], chap. III) et Redford & Chal (1994, [357]).

moins bien perçues par la demande (puissance, pollution, consommation d'essence...), qu'une analyse de type QFD (§ II-1.2, page 111) aide à spécifier, et des caractéristiques sans intérêt pour le client, mais essentielle dans la gestion des interfaces (poids, encombrement, mode de fixation du moteur sur le châssis...). Cette analyse technique est conduite sur un tableau du type du **tableau 5**, avec une caractérisation précisant le positionnement de chaque moteur au regard des caractéristiques retenues. Dans ce contexte, une caractéristique peut se traduire soit par un ensemble de valeurs numériques (puissance d'un moteur, par exemple), soit par un attribut qualitatif (conformité à une norme de pollution, par exemple). On repérera par l'indice j ces différentes variantes.

TABLEAU 5
Caractéristiques techniques des moteurs étudiés

Moteurs étudiés	Caractéristiques			
	1	2	...	p
1				
2				
j				
n				

Par ailleurs, on suppose que l'analyse de la demande a permis d'identifier m segments, repérés par un indice i et caractérisés par une demande d_i , elle aussi distinguée par un ensemble de caractéristiques permettant une comparaison avec celles retenues pour l'offre. En partant d'une situation existante, on doit normalement avoir $n \leq m$, c'est-à-dire que la variété de l'offre commerciale est inférieure ou égale à la variété de la demande. Pour chacun des critères précédemment identifiés, on définit alors (cf. **tableau 6**), selon le type de caractéristiques, une plage de valeurs admissibles (puissance minimale, par exemple) ou une liste d'occurrences acceptables si la caractéristique est qualitative (comme un mode de fixation, par exemple). L'une des difficultés que l'on rencontre alors est celle de la détermination du «juste besoin» correspondant à satisfaire, ce que facilitent des approches de type QFD.

TABLEAU 6
Caractéristiques techniques des moteurs demandés

Moteurs demandés	Caractéristiques				Demande
	1	2	...	p	
1					d_1
2					d_2
i					d_i
m					d_m

La confrontation des tableaux 5 et 6 permet d'établir le **tableau 7** dans lequel les coefficients a_{ij} ne peuvent prendre que la valeur 1, si la demande du segment i peut

être satisfaite par le moteur j , ou 0, dans le cas contraire (l'illustration numérique étant parfaitement arbitraire). La réponse à cette question relève d'un dire d'expert et peut, le cas échéant, amener à une révision de certaines caractéristiques de la demande, ce qui n'a rien d'aberrant compte tenu du caractère relativement arbitraire de certaines spécifications.¹

TABLEAU 7
Possibilités de satisfaction de la demande par l'offre (matrice des coefficients a_{ij})

Segments du marché	Variantes de moteurs étudiés						
	1	2	3	...	j	...	n
1	1	0	0	...	0	...	0
2	1	1	0	...	0	...	0
3	1	0	1	...	0	...	0
...
i	0	1	1	...	1	...	0
...
m	0	0	1	...	1	...	1

Il semble réaliste d'imposer que la totalité d'un segment de demande soit satisfaite par une même variante. En conséquence, on définit la variable binaire x_{ij} qui prendra la valeur 1 si la demande du segment i est satisfaite en totalité par un moteur j et 0, dans le cas contraire. Cette information est le résultat d'une consultation d'experts et peut conduire à certaines révisions de spécifications jugées inutilement contraignantes. Il est inutile de créer une variable x_{ij} si le paramètre a_{ij} correspondant est nul². Par ailleurs, si on décide que cette demande peut être couverte par plusieurs variantes, alors la variable x_{ij} peut prendre n'importe quelle valeur comprise entre 0 et 1. Pour forcer la demande du segment i à être satisfaite, on est amené à poser la contrainte de la **relation 1** (qui conduit, dans le cas de variables binaires, à n'avoir qu'une valeur non nulle).

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = 1, \text{ pour } i = 1, \dots, m \text{ (satisfaction de la demande)} \quad \text{relation 1}$$

Dans ces conditions, la production y_j de la référence j est alors la somme des productions réalisées pour chaque segment (demande d_i), cette production pouvant être nulle. Cette contrainte est définie par la **relation 2**:

$$y_j = \sum_{i=1}^m d_i \cdot x_{ij}, \text{ pour } j = 1, \dots, n \text{ (production de la référence } j) \quad \text{relation 2}$$

1. Le client n'étant pas unique, on est en présence de distributions de probabilités de spécifications requises, qu'un « porte-parole » du client dans l'entreprise transforme en une valeur unique.

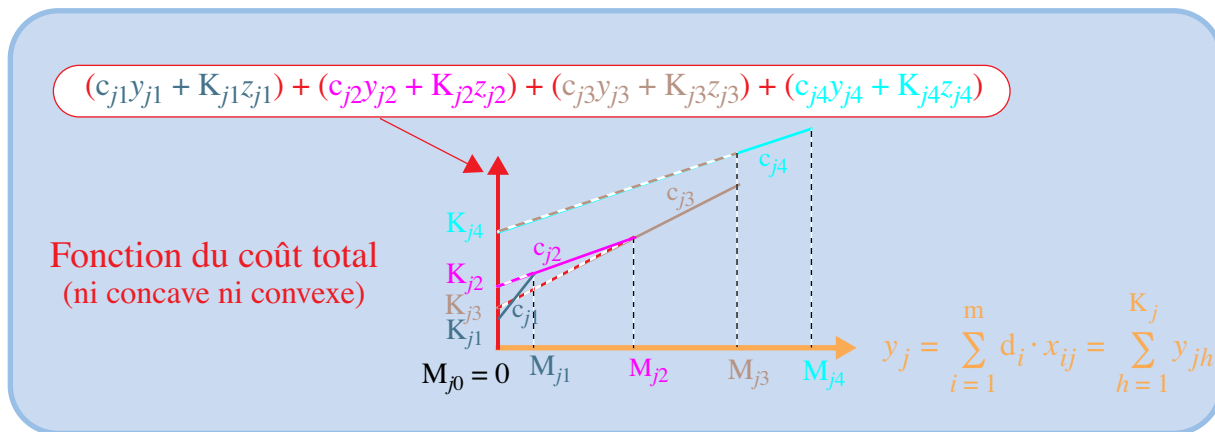
2. Cette particularité, facile à prendre en compte dans la description du problème par un modèleur (voir, chapitre XVI, § II-1, page 1132), permet de limiter de manière importante la taille du problème. Cette convention rend inutile de mettre la **relation 1** sous la forme $\sum_{j=1}^n a_{ij} x_{ij} = 1$.

Table des matières

Index thématique

Pour établir le coût annuel de cette production, il est nécessaire d'introduire des hypothèses explicites sur la forme de la fonction de coût d'une référence. Dans un premier temps, on supposera que les fonctions de coût sont indépendantes. Cette hypothèse restrictive sera levée ultérieurement. On supposera également que l'on est en présence d'une variation de charges fixes annuelles par palier et que, sur chaque palier, le coût variable unitaire peut varier, mais en restant constant sur des plages de valeurs disjointes; ces hypothèses très générales conduisent à une fonction de coût du type de celle décrite dans la figure 26.

FIGURE 26
Fonction de coût de production



On notera que cette fonction de coût total n'est ni concave (ce qui implique que le coût moyen de production ne croisse jamais lorsque x croît) ni convexe (ce qui implique que le coût moyen de production ne décroisse jamais lorsque y_j croît) et que, dans l'exemple retenu, elle permet de prendre en compte des phénomènes de déséconomies d'échelle se produisant à la limite de la saturation. La prise en compte de cette fonction de coût non linéaire dans la fonction-objectif d'un programme linéaire s'effectue sans difficulté, en introduisant autant de productions fictives y_{jk} qu'il y a de plages K_j de valeurs (comprises entre $M_{j, k-1}$ et $M_{j, k}$, la borne supérieure appartenant seule à l'intervalle, avec $M_{j0} = 0$) sur lesquelles le coût variable c_{jk} est constant et qui sont toutes nulles, sauf celle qui inclut la production y_j dans sa plage de valeurs et qui est, bien entendu, égale à cette production ($y_j = y_{jh}$). En nous appuyant sur l'exemple décrit dans la figure 26, la fonction-objectif devient, pour la partie relative au coût de production de y_j :

$$\text{Min } z, \text{ avec } z = (c_{j1}y_{j1} + K_{j1}z_{j1}) + (c_{j2}y_{j2} + K_{j2}z_{j2}) + (c_{j3}y_{j3} + K_{j3}z_{j3}) + (c_{j4}y_{j4} + K_{j4}z_{j4}) + \dots \quad \text{relation 3}$$

avec la série suivante de contraintes, s'ajoutant à celles des relations 1 et 2: la première contrainte¹ permet d'activer au plus l'une des charges fixes de coût ($K_{jk}z_{jk}$), celle pour laquelle $z_k = 1$, étant entendu que si l'on ne produit pas cette référence, tous les z_{jk} sont nuls; les contraintes suivantes forcent à 0 les productions y_{jk} des tranches non retenues, puisque, lorsque $z_{jk} = 0$, les deux bornes sont nulles forçant la production correspondante x_k à être nulle et réciproquement²:

1. Les variables étant non négatives, la première contrainte double se réduit en réalité à $x_1 \leq M_{11}y_1$; la formulation retenue a pour seul avantage de permettre la généralisation du raisonnement.

- $z_{j1} + z_{j2} + z_{j3} + z_{j4} \leq 1$
- $0 \leq y_{j1} < M_{j1}z_{j1}$ qui entraîne que $y_j = y_{j1}$ et $y_{j2} = y_{j3} = y_{j4} = 0$ si $z_{j1} = 1$ et $z_{j2} = z_{j3} = z_{j4} = 0$;
- $M_{j1}z_{j2} \leq y_{j2} < M_{j2}z_{j2}$ qui entraîne que $y_j = y_{j2}$ et $y_{j1} = y_{j3} = y_{j4} = 0$ si $z_{j2} = 1$ et $z_{j1} = z_{j3} = z_{j4} = 0$;
- $M_{j2}z_{j3} \leq y_{j3} < M_{j3}z_{j3}$ qui entraîne que $y_j = y_{j3}$ et $y_{j1} = y_{j2} = y_{j4} = 0$ si $z_{j3} = 1$ et $z_{j1} = z_{j2} = z_{j4} = 0$;
- $M_{j3}z_{j4} \leq y_{j4} < M_{j4}z_{j4}$ qui entraîne que $y_j = y_{j4}$ et $y_{j1} = y_{j2} = y_{j3} = 0$ si $z_{j4} = 1$ et $z_{j1} = z_{j2} = z_{j3} = 0$.

La généralisation du raisonnement pour l'ensemble des variantes conduit à la fonction-objectif de la **relation 4** et aux contraintes décrites par les relations 1 à 6 :

$$\text{Min } z, \text{ avec } z = \sum_{j=1}^n \left[\sum_{k=1}^{K_j} (c_k y_{jk} + K_{jk} z_{jk}) \right] \tag{relation 4}$$

$$\sum_{k=1}^{K_j} z_{jk} \leq 1, \text{ pour } j = 1 \dots n \tag{relation 5}$$

$$M_{j(k-1)} z_{jk} \leq y_{jk} < M_{jk} z_{jk}, \text{ pour } k = 1 \dots K_j \text{ et } j = 1 \dots n, \text{ avec } M_{j0} = 0 \tag{relation 6}$$

Cette formulation doit être adaptée pour prendre en compte des effets de synergie positifs ou négatifs liés à la production simultanée de deux ou plusieurs moteurs sur un site de production. Pour ce faire, on dispose de moyens de modélisation pertinents et faciles à mettre en œuvre¹. Examinons quelques cas de figure.

- Supposons que le fait de fabriquer plus de κ variantes se traduise par une augmentation Γ^+ des charges fixes annuelles, il suffit alors de créer la variable binaire γ^+ , d'ajouter à la fonction-objectif le terme $\gamma^+ \Gamma^+$ et d'ajouter aux contraintes la **relation 7** pour forcer γ^+ à prendre la valeur 1 si au moins κ variantes sont mises en production (la fonction-objectif ayant pour effet de tendre à rendre nul γ^+).

$$\sum_{j=1}^n \left[\sum_{k=1}^{K_j} z_{jk} \right] < \kappa + n\gamma^+ \tag{relation 7}$$

Cette relation s'adapte sans difficulté à un sous-ensemble de moteurs ou à plusieurs sous-ensembles de moteurs. Dans ce dernier cas, les sous-ensembles peuvent être disjoints, ce que l'on rencontrera en cas d'utilisation d'ensembles de moyens spécialisés techniquement dans la production d'ensembles différents de moteurs. On peut aussi retrouver le même ensemble de moteurs dans plusieurs contraintes de ce type pour obtenir une

2. Si la fonction de coût est concave (fonction de coût total non décroissante), alors la «partie droite» des doubles inéquations est inutile.

1. Voir le **chapitre VIII** et le **chapitre XVI**, § II-2, page 1135.

variation supplémentaire des charges fixes par palier en fonction non pas des quantités totales produites, mais du nombre de références produites.

- Supposons, au contraire, que le fait de fabriquer plus de κ variantes se traduise par une diminution Γ^- des charges fixes annuelles, il suffit alors de créer la variable binaire γ^- , de retrancher à la fonction-objectif le terme $\gamma^- \Gamma^-$ et d'ajouter aux contraintes la **relation 8** pour forcer γ^- à ne prendre la valeur 1 que si au moins κ variantes sont mises en production (la fonction-objectif ayant pour effet de tendre à rendre γ^- égal à 1).

$$\sum_{j=1}^n \left[\sum_{k=1}^{K_j} z_{jk} \right] > \kappa \gamma^- \quad \text{relation 8}$$

Là encore, cette approche s'adapte sans difficulté à un sous-ensemble de variantes ou à plusieurs sous-ensembles de variantes. En outre, rien n'empêche d'avoir simultanément des effets de synergie positifs ou négatifs sur des ensembles de variantes différents ou non, en généralisation des remarques faites précédemment.

- On peut supposer enfin que certaines charges fixes varient par palier en fonction des quantités produites sur un ensemble de références, indépendamment de la possibilité offerte pour chaque référence d'inclure dans sa fonction de coûts une propre variation de charges fixes par palier. Dans ce cas, le sous-ensemble Ω de moteurs étant concerné par ces variations de charges fixes, il suffit d'adapter la formulation comme suit:
 - créer la variable ω correspondant à la production totale de ce sous-ensemble Ω de moteurs, ce qui conduit à la **relation 9**:

$$\omega = \sum_{j \subseteq \Omega} y_j = \sum_{j \subseteq \Omega} \sum_{i=1}^m d_i \cdot x_{ij} \quad \text{relation 9}$$

- d'ajouter à la fonction-objectif l'incidence de variation de charges fixes $K_{\omega k}$, en suivant la même démarche que celle utilisée pour une référence

$$\sum_{k=1}^{K_{\omega}} K_{\omega k} z_{\omega k}$$

- d'adapter ensuite les relations 2, 5 et 6, ce qui conduit aux relations 10 à 12:

$$\omega \leq \sum_{k=1}^{K_{\omega}} \omega_k \quad \text{relation 10}$$

$$\sum_{k=1}^{K_{\omega}} z_{\omega k} \leq 1 \quad \text{relation 11}$$

$$M_{\omega k-1} z_{\omega k} \leq \omega_k < M_{\omega k} z_{\omega k}, \text{ pour } k = 1 \dots K_{\omega}, \text{ avec } M_{\omega 0} = 0 \quad \text{relation 12}$$

III-2.2 Utilisation de cette approche optimisatrice

La pertinence de cette modélisation reste tout autant tributaire de l'usage qui en est fait pour décrire des scénarios alternatifs que des coûts utilisés dans la fonction économique.

Sur le premier point, il est évident que l'on travaille avec un niveau de détail trop grossier pour pouvoir prétendre représenter correctement les processus effectivement utilisés, la demande effective qui s'adresse au système productif, avec ses fluctuations saisonnières et aléatoires, ou la robustesse du système productif aux aléas. Cette critique peut être formulée pour la plupart des éclairages apportés à la prise de décisions stratégiques : ce qui importe, c'est la pertinence de l'ordre de grandeur des données en volume ou en valeur obtenu. Ceci nous ramène aux problèmes de valorisation.

Les principaux problèmes méthodologiques rencontrés dans l'utilisation de cette approche optimisatrice tournent autour du temps ou, plus exactement, de la prise en compte correcte de l'interdépendance temporelle des décisions à travers le système de coûts utilisé en comptabilité de gestion.

Dans le cas, peu fréquent, où les alternatives étudiées concernent une production nouvelle à partir d'équipements nouveaux, il est facilement envisageable d'utiliser une version dynamique du modèle proposé, étant entendu que la décision de satisfaire un segment de demande par un moteur donné est prise pour l'ensemble des périodes¹ ; d'autres hypothèses sont utilisables, mais semblent plus difficiles à justifier. La séparation entre charges fixes et charges variables permet d'isoler les investissements effectués au démarrage (et donc d'éviter le problème de la détermination de l'amortissement), des charges fixes directes (personnel en particulier) qui peuvent varier par palier en fonction des quantités produites et des charges variables directes (matières, etc.). Ces informations utilisées dans la fonction économique étant datées², il faut envisager de faire appel à l'actualisation pour pondérer correctement des flux financiers sécrétés à des périodes différentes. Dans l'application de cette approche on retrouve les problèmes classiquement posés dans la comparaison d'alternatives d'investissement et, en particulier, celui de la détermination du taux d'actualisation de référence et celui posé par la comparaison de solutions ayant des durées de vie différentes.

Plusieurs problèmes méthodologiques se posent lorsque le problème concerne un ensemble existant de références faisant l'objet d'un approvisionnement externe ou d'une production interne dans un système productif susceptible de n'être modifié qu'à la marge.

- Certains composants-clés, d'une certaine complexité, sont conçus pour être utilisés par de nombreux produits finis dont certains n'existent pas encore ; dans l'industrie automobile, on parle de projets « organes ». Le prix de cession de tels composants pose de redoutables problèmes méthodologiques³. Une décision de standardisation qui remet sensiblement en cause les hypothèses économiques qui ont présidé au lancement de tels composants doit s'appuyer sur une fonction de coût qui garantit la cohérence

1. Ce qui se traduit par le maintien en l'état de la [relation 1](#) et l'adaptation suivante de la [relation 2](#) qui devient :

$$y_{jt} = \sum_{i=1}^m d_{it} \cdot x_{ij}, \text{ les relations 4 à 6 étant modifiées par l'adjonction de l'indice de période, la relation 4 devant en}$$

outre intégrer des coefficients d'actualisation.

2. Ce qui permet, avec un découpage temporel approprié, de prendre en compte d'éventuels effets d'apprentissage sur les coûts récurrents, avec des valeurs que l'on peut raisonnablement considérer comme stables sur chaque plage de temps.

3. Pour une présentation plus complète des problèmes liés au pilotage économique de produits sur leurs cycles de vie, voir Gautier et Giard (2000, [167]).

des décisions au cours du temps et entre décisions stratégiques et tactiques (voir § II-2.4.1, page 124).

- Dans cet ordre d'idées et plus généralement, la décision d'arrêt de la production d'une référence (ou d'un groupe de références) peut conduire à supporter un coût de « désengagement ». Cet impact peut facilement être pris en compte par la fonction-objectif¹.
- Les coûts standards existants ne sont pertinents que sur une certaine plage de quantités produites ou approvisionnées : avant toute application de la méthode, il convient de pousser des investigations pour reconstituer la fonction de coûts et, dans le cas d'approvisionnement, de procéder à une consultation préalable des fournisseurs, sur la base de scénarios volumétriques pouvant s'écarter sensiblement de la solution actuelle.
- Le problème de standardisation peut se poser dans le cadre d'une nomenclature à étages. Les décisions prises à un niveau détaillé reposent alors sur des hypothèses de demande directes et de demandes provenant, selon des mécanismes de type MRP, d'autres références faisant elles-mêmes l'objet d'une optimisation de standardisation. Une analyse indépendante de ces différents problèmes conduit à faire dépendre le problème de la standardisation de composants élémentaires d'hypothétiques demandes de composants agrégés et à faire dépendre le problème de la standardisation de composants agrégés, d'hypothétiques coûts de composants élémentaires. Une convergence vers un ensemble de solutions cohérentes peut être assurée empiriquement au prix d'un certain nombre d'itérations, mais on peut aussi préférer adapter ce modèle pour tenir compte de nomenclatures liant les références², ce qui peut conduire à un modèle de trop grande dimension.
- La création de composants nouveaux induit des coûts de gestion liés à l'accroissement de la diversité qui sont difficiles à évaluer. Dans les calculs économiques faits en phase de conception, certaines entreprises comme Intel ou Renault appliquent des taux de charge différents aux composants nouveaux et aux composants existants réutilisés. Cette incitation à réduire la diversité est judicieuse, mais doit être utilisée avec circonspection dans une remise à plat effectuée dans le cadre de l'approche proposée ici.

1. *Note de la page précédente.* En utilisant les notations de la [relation 5 de la page 139](#), pour une charge Φ , il suffit

d'ajouter dans la fonction-objectif le terme $\left\{1 - \sum_{k=1}^{K_j} z_{jk}\right\} \Phi$. Sachant que $\sum_{k=1}^{K_j} z_{jk} = 1$ si la référence j est produite, la charge Φ ne sera pas supportée dans ce seul cas. La généralisation à un ensemble Ψ de ψ références est immédiate $\{1-t\}\Phi$, avec $\sum_{j \in \Psi} \sum_{k=1}^{K_j} z_{jk} - \psi < t$.

2. Il suffit de remplacer la [relation 2 de la page 137](#) ($y_j = \sum_{i=1}^m d_i \cdot x_{ij}$) qui définit la production y_j , comme égale à la somme des demandes d_i qui lui sont affectées par les variables binaires x_{ij} , par la relation suivante :

$y_j = \sum_{i=1}^m d_i \cdot x_{ij} + \sum_{h=1}^m a_{hj} \cdot y_h \cdot x_{hj}$, où la référence h est liée à la référence j par le fait que sa production de 1 unité de la référence h requiert a_{hj} unité de la référence j . (cette référence h étant, à son tour, liée à des demandes finales par la [relation 2](#)).

Chapitre III

ANALYSE ET CHOIX DE PROJETS D'INVESTISSEMENT

On a indiqué que les décisions stratégiques sont relatives au positionnement désiré par l'entreprise à long terme, c'est-à-dire à la définition cohérente en composition et volume de son portefeuille de produits et de services qu'elle désire mettre sur le marché et du portefeuille de ressources permanentes physiques, humaines et informationnelles qu'elle entend mobiliser pour réaliser cette offre. Le [chapitre II](#) est dédié aux décisions liées au choix du portefeuille de produits, celui-ci traite de l'adaptation du portefeuille de ressources à travers des projets d'investissement¹. Les décisions stratégiques relatives au portefeuille de produits et la définition des ressources permanentes ne sont, pas indépendantes.

Après avoir présenté rapidement ([section I](#)) les décisions stratégiques de production et les outils permettant de comprendre le fonctionnement d'un système productif, nous examinerons les problèmes qui se posent lors de l'analyse économique d'un projet d'investissement ([section II, page 170](#)) puis nous discuterons ([section III, page 199](#)) le problème de la sélection de projets d'investissement rentrant dans un programme d'investissement établi sous contrainte budgétaire. Enfin, nous examinerons ([section IV, page 228](#)) certains problèmes technico-économiques se posant à l'occasion de la définition d'un projet ou d'un programme d'investissement.

Table des
matières

Index
thématique

SECTION I PRÉSENTATION DES DÉCISIONS STRATÉGIQUES ET DES TECHNIQUES DE MODÉLISATION DU FONCTIONNEMENT D'UN SYSTÈME PRODUCTIF

On examinera d'abord sur quoi portent les décisions stratégiques de l'entreprise relatives à ses ressources permanentes (§ I-1). Pour prendre les bonnes décisions modifiant la conception du système productif, il est indispensable d'appréhender correctement le fonctionnement du système productif à adapter. Pour ce faire, un certain nombre de techniques de modélisation sont disponibles et seront présentées au § I-2, page 147.

1. Rappelons que les démarches d'amélioration continue transforment progressivement les caractéristiques d'un système productif (voir la présentation du *kaizen* faite au § I-3.2.1, page 70, du [chapitre I](#)) et jouent un rôle important dans l'amélioration de la performance de l'entreprise. Cela étant, l'investissement constitue souvent la seule possibilité d'adaptation d'un système productif à des transformations importante, de l'environnement technico-économique, ce que ne contestent nullement d'ailleurs les tenants du *kaizen*.

I-1 Décisions stratégiques relatives aux ressources permanentes

Seules les grandes sociétés créent *ex nihilo* de nouveaux systèmes productifs d'une certaine taille. D'une manière générale, on assiste à une adaptation progressive des systèmes existants et à l'évolution des missions qui leur sont assignées. L'acquisition (ou la radiation) d'une ressource permanente de l'entreprise doit s'effectuer en accord avec une vision stratégique cohérente dans laquelle toutes les fonctions de l'entreprise sont impliquées¹. Cette transformation du système productif s'effectue à l'occasion d'une modification du portefeuille d'activités ou dans le cadre d'une recherche d'amélioration de certains processus.

Les ressources mobilisées n'appartiennent pas toutes à l'entreprise. Dans de nombreuses entreprises, comme celles de l'automobile, la valeur ajoutée en provenance de l'extérieur dépasse 70%. Une première décision porte donc sur ce que l'on décide de fabriquer en interne et ce que l'on externalise sous forme de sous-traitance et d'approvisionnement (§ I-1.1). La production interne fait appel à des équipements (§ I-1.2), du personnel (§ I-1.3, page 145) et des informations (§ I-1.4, page 146). On évoquera enfin (§ I-1.5, page 147) le problème de la flexibilité du système productif, telle qu'elle résulte de la combinaison des ressources mobilisées.

I-1.1 Sous-traitance et approvisionnement

En règle générale, une entreprise ne fabrique pas l'intégralité des produits qu'elle consomme. Outre les matières premières, elle achète ou sous-traite tout ou partie des composants qu'elle utilise. Dans le premier cas – achat – les spécifications de produits disponibles sur le marché² répondent aux besoins et aucun avantage stratégique (indépendance, qualité, coût, etc.) n'est trouvé à une production interne. Dans le second cas – sous-traitance – l'entreprise définit les spécifications de composants qu'elle fait exécuter par des fournisseurs qui travaillent alors à la commande. Cette **sous-traitance** peut être **de capacité**, l'entreprise estimant peu rentable d'acquérir un complément de ressources en machines et/ou en hommes qui ne serait souvent que partiellement utilisé. Cette **sous-traitance** peut être également **de spécialité**, l'entreprise estimant ne pas disposer des compétences techniques et/ou de l'outillage spécialisé nécessaire à l'exécution d'un certain travail. Cette frontière entre l'interne et l'externe au système productif n'est pas intangible et l'une des décisions stratégiques peut justement en être le déplacement. L'évolution vers la mise en réseau d'entreprises est une tendance lourde qui s'explique par de nombreux facteurs (voir **chapitre I**, § I-2.3, page 62).

Une fois décidé ce qui est à la charge du système productif, il faut le dimensionner et le structurer, en cas de création *ex nihilo*, ou en modifier les caractéristiques, en cas d'adaptation d'un système existant. Une série de décisions cohérentes doivent alors être prises quant à l'importance et la nature des ressources permanentes du système. Ces ressources correspondent aux hommes,

1. Ce qui n'implique pas pour autant la cohérence du système productif dans la mesure où ses modifications successives faites pour répondre à des transformations de l'environnement se traduisent par adaptations partielles parfois surcapacitaires, qui permettent une réponse satisfaisante mais pas nécessairement cohérente avec le reste du système productif (en particulier en ce qui concerne les capacités installées et les possibilités de réactivité).

2. On parle encore de **produits sur étagère** (ou *commercial of the shelf*, COTS)

aux machines et aux informations. Les décisions qui les concernent sont largement interdépendantes.

I-1.2 Équipements

Il faut d'abord se poser la question de savoir si l'on a intérêt à travailler sur une grosse unité de production ou sur plusieurs petites, pouvant éventuellement coexister en un même lieu. L'accroissement de la taille diminue certains coûts directs, mais en contrepartie, ce qui est moins bien perçu, il augmente de nombreux coûts indirects souvent occultés dans les analyses à prédominance technique qui sont habituellement faites sur ce problème (coûts de logistique liés à l'accroissement induit des transports, coûts de coordination liés à l'augmentation de la complexité décisionnelle, etc.) et peut engendrer une dilution des responsabilités.

Chaque unité de production s'organisera¹ en ateliers spécialisés, en lignes de production ou en cellules. L'adaptation à l'évolution du marché explique la mutation de nombreux systèmes de production. Historiquement, de nombreux systèmes sont passés d'une organisation de type «ateliers spécialisés» (voire de type «série unitaire») à une organisation en ligne de production, sous la pression de l'approche «cycle de vie du produit». Assez souvent, un produit nouveau est, au départ, fabriqué à la demande et en petites quantités par un système productif non spécialisé, puis on passe progressivement, en fonction de l'accueil du marché, à une production de produits standardisés, bon marché et en grande quantité, dans des lignes de production. L'évolution observée en micro-informatique illustre bien ce type d'évolution.

Table des
matières

Index
thématique

Les composantes du choix des machines se posent en termes de coûts et de performances techniques, mais aussi de polyvalence, de capacité globale installée (sur-dimensionnement voulu pour faire face aux aléas ou à une croissance prévue) et de capacité unitaire, lorsque plusieurs unités sont nécessaires. Ce dernier point implique de choisir entre plusieurs petites machines ou quelques grosses et fait intervenir des considérations de productivité, de flexibilité et de disponibilité. C'est à ce niveau que sont effectués des choix technologiques importants qui conditionnent les gammes et nomenclatures et concernent le degré de sophistication des machines et d'automatisation de tout ou partie du système productif. Il convient, à ce stade, de ne jamais perdre de vue que d'autres ressources productives sont en jeu. La réponse au problème posé doit être cohérente. La fuite en avant sur le plan technologique peut s'avérer catastrophique sur le plan économique, si elle n'est pas pensée globalement.

Un certain nombre de techniques sont disponibles pour aider à la configuration de nouveaux systèmes productifs.

I-1.3 Personnel

Le personnel de production doit lui aussi être défini avec soin, en cohérence avec le parc des machines disponibles et l'organisation de la production (définition socio-technique des postes de travail). Un arbitrage doit être effectué sur le degré de spécialisation ou de polyvalence des ouvriers sur des opérations de production

1. Voir la présentation générale de ces formes d'organisation au [chapitre I](#), § I-2.2, page 50 et § I-2.2.5.1, page 59.

et de maintenance et sur l'importance et la qualification de l'encadrement technique. L'organisation taylorienne tend à privilégier la spécialisation des compétences et des tâches avec un encadrement numériquement faible; sa contrepartie évidente est une certaine rigidité structurelle du système productif qui s'adapte alors plus lentement aux aléas et aux modifications de la demande à satisfaire. Les organisations s'inspirant des principes du *kaizen*¹ ou du *reengineering*² privilégient, au contraire, la polyvalence et l'initiative. Il convient également d'intégrer dans cette réflexion stratégique les possibilités d'ajustement de la capacité aux fluctuations de la charge (possibilité de fluctuation des horaires de présence, appel aux heures supplémentaires ou au travail intérimaire).

I-1.4 Informations

La dernière ressource permanente est constituée des informations, qu'elles soient techniques, procédurales ou factuelles.

- Les informations techniques correspondent principalement aux gammes et aux nomenclatures. De nombreuses entreprises travaillent encore de manière quasi artisanale dans ce domaine et ne formalisent qu'une faible partie de leur savoir-faire technique, ce qui pose d'évidents problèmes d'ordonnement. La polyvalence accrue de certaines machines augmente de manière considérable la possibilité de travailler sur des gammes alternatives qui ne seront pas toujours explicitées (en fonction d'un arbitrage entre le coût de création d'informations qui ne seront peut-être jamais utilisées et celui d'une création «à chaud» pour régler un problème ponctuel).
- Les informations procédurales correspondent à l'ensemble des procédures (informatisées ou non) utilisées dans le choix et l'affectation des hommes et des équipements. Ces procédures sont mises en œuvre aussi bien pour des décisions opérationnelles (ordonnement, gestion des stocks) que pour des décisions tactiques (planification) ou stratégiques (choix des investissements). Il faut souligner que la définition et l'amélioration de ces procédures relèvent de la stratégie contrairement à leur application. La définition des procédures mises en œuvre dans le cadre de la qualité totale relève également de cette catégorie d'informations³.
- Les informations factuelles correspondent, ici, à la description du système productif et à l'utilisation qui en est faite (suivi de production). Le niveau de détail souhaité et la définition des moyens à mettre en œuvre pour obtenir ce résultat relèvent d'une décision stratégique. Il est clair qu'une certaine cohérence lie les informations factuelles, procédurales et techniques.

L'un des choix stratégiques importants est le degré d'intégration de ces catégories d'information, et l'informatique joue un rôle important dans ce domaine. On pourra, dans cette optique, s'orienter vers des systèmes de conception / fabrication assistées par ordinateur (CFAO) et vers les ERP / ERM⁴.

1. Voir le § I, page 41, § I-3.2.1, page 70.

2. Voir le § I, page 41, § I-3.2.2, page 72.

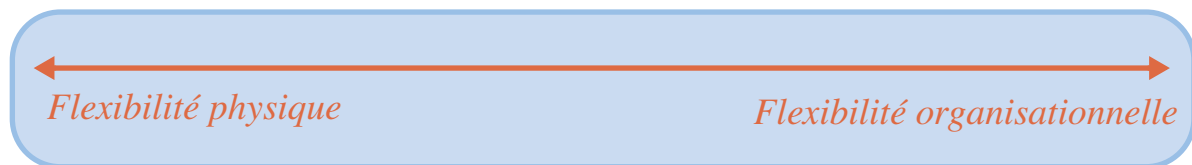
3. Voir le chapitre XIV, page 971.

4. Voir le chapitre XIV, page 957.

I-1.5 Flexibilité physique et flexibilité organisationnelle

C'est au niveau stratégique que se définit la **flexibilité** d'un système productif, c'est-à-dire sa capacité à s'adapter à des modifications plus ou moins rapides de la demande externe (y compris l'introduction de produits nouveaux) et aux divers aléas, inévitables en production. Il importe de bien voir que cette **flexibilité** peut être obtenue de manière **physique** par l'utilisation de ressources polyvalentes (machines à commande numérique à reprogrammation rapide, opérateurs hautement qualifiés et polyvalents...) et une certaine conception des produits (modularité¹...), mais aussi de manière **organisationnelle** par le biais d'une amélioration des diverses procédures qui définissent les règles d'utilisation des ressources. La flexibilité d'une entreprise résulte donc d'une combinaison de flexibilité physique et de flexibilité organisationnelle (figure 27).

FIGURE 27
Flexibilité globale



L'acquisition d'un accroissement de flexibilité résulte d'un compromis entre des investissements physiques et des investissements d'amélioration du système d'information – en particulier par la mise en cohérence et l'intégration de systèmes incohérents et indépendants² – et/ou des procédures utilisées, en particulier avec l'usage de systèmes interactifs d'aide à la décision (SIAD). Ce compromis résulte des performances et des coûts relatifs de ces deux formes de flexibilité. L'évolution technologique déplace, au cours du temps, la zone de « bon » compromis entre la flexibilité organisationnelle et la flexibilité physique, souvent préférée par les ingénieurs qui en maîtrisent mieux la logique. On peut ajouter que les études d'investissements modifiant sensiblement un système productif s'accompagnent de plus en plus de simulations permettant de tester la performance des nouvelles procédures qu'il est alors souvent nécessaire d'introduire, notamment du point de vue de la flexibilité globale de la nouvelle configuration productive³.

Table des
matières

Index
thématique

I-2 La modélisation du fonctionnement d'un système productif

L'accumulation et la transmission du savoir se fondent sur des représentations abstraites de la réalité et sur des outils de manipulation de cette représentation. La **modélisation** procède de cette démarche: dominer le hasard de l'expérience en établissant un système de relations entre un nombre restreint d'entités censées représenter le réel. De très nombreuses représentations sont possibles. Elles correspondent à une certaine grille de lecture du réel, ne prétendant pas épuiser sa complexité.

1. Voir [chapitre II, page 103](#) et sq. On reviendra sur cet aspect de la flexibilité à la [page 589](#) du [chapitre IX](#), où l'on évoquera la nécessité de remonter à la conception des produits pour que différentes familles de produits puissent être produites ou assemblées sur des lignes non spécialisées dans une gamme de produits.

2. Voir le [chapitre XIV, page 957](#), qui traite des ERP / ERM.

3. On reviendra en détail sur ce point au [§ I-2.1, page 148](#).

Deux familles d'outils sont mobilisables pour étayer l'instruction de dossier d'investissement d'une certaine ampleur: les outils de la simulation (§ I-2.1) et ceux de cartographie des flux et des processus (§ I-2.3, page 160). La vision apportée doit être complétée par une vision systémique du système productif comportant une dimension socio-organisationnelle car l'investissement déplace les frontières, les pouvoirs et les rôles (§ I-2.2, page 155). On évoquera enfin comment ces outils d'analyse peuvent être utilisés pour améliorer les processus (§ I-2.4, page 167).

I-2.1 Les outils de simulation de processus

En gestion, la **simulation** s'appuie sur une certaine représentation du fonctionnement d'un système productif pour en imiter le comportement et la réaction lorsqu'il est soumis à certaines sollicitations (demande, perturbations...) et en évaluer des principales caractéristiques de fonctionnement dans le contexte étudié, afin d'en tirer des conséquences opérationnelles (adaptations éventuelles des ressources en équipements, opérateurs et procédures, contrôle des entrées dans le système...). Après avoir examiné rapidement les principes sur lesquels s'appuient les logiciels de simulation (§ I-2.1.1), on illustrera leur usage par un exemple (§ I-2.1.2, page 152).

I-2.1.1 Les principes de fonctionnement des logiciels de simulation de processus

Dans la simulation, un **système à événements discrets** est un système dont on considère que l'état change seulement au moment où se produit un événement, qui peut être d'occurrence aléatoire¹. L'événement peut être endogène (comme le début ou la fin d'une opération, l'occurrence d'une panne...) ou exogène (comme l'arrivée d'un client ou d'un objet dans le système, l'arrivée d'une date...). Dans cette approche, ce qui se passe entre deux événements consécutifs (par exemple entre le début et la fin d'une opération) n'est pas pris en considération². La simulation de tels systèmes s'appuie donc sur une incrémentation variable du temps qui s'étend de la date d'un événement à celle de l'événement suivant. L'occurrence d'un événement déclenche une action³ (début d'une opération, mobilisation d'une ressource, envoi d'un article dans un stock...).

De nos jours, les simulateurs utilisent une interface graphique sophistiquée permettant facilement de décrire les ressources d'un système productif, les produits faisant l'objet d'opérations de production et leurs gammes. L'interface graphique élimine la nécessité d'un apprentissage préalable d'un langage de

1. Cette approche est l'une des quatre possibles adoptées en simulation (Banks (1998, [35]), mais c'est la plus répandue en simulation de processus productif. L'approche décrite au § III-1.2.2, page 424 du chapitre V relève de la méthode dite des «trois phases».

2. L'approche alternative est celle de la simulation en continu (qui peut conduire à la possibilité de situations hybrides). Dans cette approche, des équations permettent de décrire à chaque instant l'état de chaque composant du système étudié. Cette approche, surtout utilisée dans les sciences de l'ingénieur, présente l'inconvénient en gestion de n'être adaptée qu'à une représentation le plus souvent trop macroscopique de la réalité pour pouvoir apporter un éclairage à la plupart des problèmes décisionnels. Elle a connu dans les années soixante un certain développement avec les travaux de Forrester (1961, [154]) et a connu quelques prolongements en gestion (voir, en particulier Thiel, 1998, [417]). Une rapide présentation de ces approches alternatives peut être trouvée dans l'ouvrage de Banks (1998, [35]).

3. Voir également, le chapitre XIV, page 959, sur cette approche de programmation événementielle.

programmation qui n'est nécessaire¹ que dans la description d'actions sophistiquées liées à certains événements. La simulation demandée provoque la «projection d'un film» décrivant le fonctionnement dynamique du système (flux de production, circulation de ressources mobiles) ce qui lui confère un fort pouvoir descriptif du comportement d'un système productif piloté par certaines règles et soumis à une certaine demande. Examinons les concepts mobilisés par les principaux simulateurs commerciaux.

Dans un modèle de simulation, l'**article** (ou l'entité, la transaction ou l'objet, selon la terminologie utilisée) correspond à ce qui est traité dans un processus. Il s'agit :

- soit d'un objet physique (pièce, dossier...) ou immatériel (document électronique, communication téléphonique...) et dans ce cas il y a transformation progressive de certaines caractéristiques de l'objet au cours du processus (caractéristiques morphologiques ou de localisation pour l'objet physique, valeurs d'attributs pour l'objet immatériel);
- soit d'une personne consommatrice d'une prestation de service effectuée dans un centre de production de service (restaurant, comptoir bancaire, service hospitalier...); dans certains cas, le consommateur de la prestation de service peut être l'une des ressources mobilisées dans la fourniture de la prestation (distributeur de marchandise, Guichet Automatique Bancaire...); lorsque la prestation de service se caractérise par la fourniture d'une information (horaire, position de compte, achat de billet électronique d'avion...) ou d'un bien à livraison différée (VPC Internet), la localisation du consommateur importe peu dans un environnement de *web office* qui permet à un client distant d'accéder aux prestations désirées via Internet.

Table des matières

Index thématique

L'article est caractérisé par des attributs qui peuvent être intangibles (désignation, quantité à fabriquer, gamme utilisable, etc.) ou modifiables au cours de la simulation (statut de l'article après un contrôle, par exemple). Les arrivées des articles rentrant dans le système, et certaines de leurs caractéristiques, sont habituellement régies par des lois statistiques (stables ou non au cours du temps) choisies pour une simulation. Il est possible de contrôler cette génération aléatoire² pour que le même jeu de données soit soumis à un système productif dans lequel on fait varier le niveau de certaines ressources ou les règles de pilotage.

Dans un modèle de simulation, l'article est inévitablement soit dans un processeur (voir ci-après), soit dans un *stock*, l'article étant nécessairement prélevé dans un stock pour aller dans un processeur pour y subir une opération.

1. Il peut s'agir d'un langage de programmation structurée propre au logiciel et/ou de langages de programmation évolués comme VB ou C++ ou encore, la possibilité de mobiliser à tout moment d'une simulation, les ressources offertes par Excel et VBA. Dans cette dernière solution, un modèle de simulation peut mobiliser un classeur Excel et l'ensemble de ses fonctionnalités (étendues par les possibilités de VBA), mais, réciproquement, un modèle décrit dans un classeur Excel peut mobiliser le modèle d'un simulateur de processus. Cette synergie récente ouvre des perspectives qui modifient de manière notable l'approche de nombreux problèmes de gestion, d'autant plus que l'arrivée d'algorithmes génétiques sous la forme d'add-in d'Excel permet une optimisation de problèmes non linéaires d'une certaine complexité.

2. En fait, les générateurs de nombres aléatoires sont des algorithmes qui génèrent un ensemble conséquent (plusieurs dizaines de milliers) de valeurs aléatoires. Le contrôle s'effectue alors par le choix du générateur et d'un paramètre d'initialisation.

- Si l'article est un objet, le stock sera un magasin de pièces détachées, un entrepôt, un conteneur, une cuve qui se situent à distance des processeurs ou à proximité pour un stock dédié d'articles devant être rapidement traités par le processeur.
- Dans le cas particulier de véhicules terrestres, aériens ou maritimes¹, on retrouve aussi le stock soit sous la forme de parking lorsque le véhicule est en attente d'affectation, soit sous la forme de point d'embarquement (quai de transbordement...).
- Si l'article est une personne, le stock sera une *file d'attente* ou une salle d'attente, selon que la personne peut s'asseoir ou non.

Un stock est caractérisé par des attributs: désignation, capacité maximale, règle de gestion des entrées et des sorties des articles dans le stock (FIFO...), etc. Le stock est passif en ce sens qu'il ne provoque pas l'entrée ou la sortie d'un article en son sein: ce sont les processeurs qui tirent des articles d'un stock et poussent les articles qu'il traite vers d'autres stocks. On introduit des stocks fictifs à l'entrée du système étudié pour y accueillir les articles venant de l'extérieur pour être traités par le système productif. De même, on introduit des stocks fictifs à la sortie du système étudié pour y accueillir les articles traités par le système étudié et quittant celui-ci.

La simulation fait appel à des *processeurs* (ou des *serveurs* ou des *machines*, selon la terminologie utilisée) qui sont des centres de production ou des postes de travail, selon le niveau de détail retenu, dotés ou non d'équipements spécifiques. Lorsque l'article fait l'objet d'une transformation physique, le processeur comporte une ou plusieurs machines (éventuellement mises en lignes de production ou d'assemblage). Lorsque la prestation est une prestation de transport, le processeur est un engin de transport (véhicule terrestre, aérien ou maritime) ou de manutention² (chariots, convoyeurs...). Dans la production de biens, le poste de travail comportera des machines permettant de réaliser des opérations de transformation, de manutention ou de transport. Dans la production de prestations de services impliquant la présence du consommateur en un lieu précis, le processeur sera, par exemple, une table de restaurant, un cabinet de consultation médicale, une salle de cours..., qui pourront être dotés ou non d'équipements (automate bancaire, distributeur de marchandise, mobilier, micro-ordinateur, appareil médical...).

Le processeur peut ou non traiter simultanément plusieurs articles (four, table de restaurant...). À la sortie du processeur, l'article peut conserver le même nom ou en changer (un nouveau composant étant créé au cours de l'opération à partir d'un ou plusieurs autres composants). L'opération effectuée par le processeur peut ou non nécessiter la présence d'un *outillage* spécifique lequel dépend de l'opération à réaliser et peut-être partagé par plusieurs processeurs du même type, son indisponibilité empêchant l'exécution d'une opération. L'exécution de l'opération peut nécessiter la présence d'un *opérateur* ou de plusieurs opérateurs (ayant ou

1. Dans ce cas, le processeur réalise des opérations d'embarquement, de débarquement ou d'acheminement.

2. Certains simulateurs sont spécialisés dans la gestion de magasins de stockage automatique, de transports filoguidés et de convoyeurs; ils permettent d'optimiser la conception ou la transformation de tels systèmes (équipements, implantation, règles de fonctionnement).

non des qualifications identiques). Selon les simulateurs, le processeur peut effectuer des opérations plus ou moins complexes :

- prendre 1 article (ou un lot de n articles) pour sortir 1 article (ou un lot de n articles),
- prendre plusieurs articles pour les assembler en un article à la sortie,
- prendre un article pour produire n articles en sortie (désassemblage).

Le processeur utilise une *gamme* dont les caractéristiques (distribution de probabilité du temps de lancement et du temps opératoire unitaire, règle de lotissement) sont prédéterminées s'il est spécialisé dans le traitement d'un seul article. Dans le cas contraire, cette définition est liée aux attributs de l'article à traiter. La progression des articles dans le système productif est assurée par l'ensemble de règles de fonctionnement des processeurs. Lorsque celui-ci est libre, l'occurrence d'un événement – sa libération étant un événement – déclenche une tentative d'utilisation du processeur en cherchant un travail à effectuer par prélèvement d'un article (ou un lot d'articles) dans un stock appartenant à une liste de stocks en vérifiant qu'il dispose des ressources en opérateurs et outillage. De nombreuses règles de balayage sont disponibles et sont d'autant plus sophistiquées que le processeur est polyvalent et la production complexe (voir [chapitre V, section II, page 409](#)). Lorsqu'une opération s'achève, des actions peuvent être déclenchées, conduisant à la modification d'attributs d'articles, d'indicateur associés à des ressources ou de certains paramètres de pilotage de la simulation. Le produit est ensuite envoyé dans un stock qui peut être toujours le même ou être déterminé par un attribut de l'article ou tiré aléatoirement parmi quelques stocks possibles (par exemple, un dossier peut être traité définitivement avec une probabilité de 80 % ou conduire à une demande d'information complémentaire avec une probabilité de 20 %, ce qui conduit à deux stocks possibles en sortie).

Table des matières

Index thématique

La disponibilité des différentes ressources du système productif est décrite par des plannings d'ouverture. Des pannes aléatoires de processeurs peuvent être simulées, ainsi que les durées de réparation.

La simulation du fonctionnement d'un système productif est effectuée pour évaluer les conséquences d'une modification de certaines caractéristiques du système productif (ressources mobilisées, procédures, etc.) et / ou de son usage (demandes à satisfaire). Ces conséquences sont évaluées à travers un certain nombre d'indicateurs physiques dont on retrace l'évolution au cours de la simulation par des graphiques et qui ont principalement trait aux ressources (occupation...), stocks (longueur de files d'attente...) et articles (temps de séjour dans le système...). On tire de ces évolutions des distributions que l'on peut considérer, sous certaines conditions, comme de bonnes approximations de distributions de probabilité de ces indicateurs physiques et résumer par des indicateurs de tendance centrale (attente moyenne d'un article dans le système, par exemple) et de dispersion. Des paramètres de tendance centrale et de dispersion de ces indicateurs physiques peuvent être utilisés pour évaluer globalement le fonctionnement du système simulé sur une période donnée. Certains simulateurs permettent facilement de calculer des indicateurs synthétiques faisant intervenir de nombreuses informations (coûts de fonctionnement, valeur de production, marge réalisée..., calculés sur la durée de la simulation).

Trois remarques complémentaires doivent être faites :

- Le suivi en temps réel de certains de ces indicateurs physiques et leur accessibilité à tout moment dans la simulation permettent un pilotage sophistiqué du système productif en permettant, par le biais de méta-règles utilisant la valeur courante de ces indicateurs physiques, de modifier au cours du temps les règles de gestion utilisées globalement ou localement sur certains postes de travail.
- Depuis quelques années, arrivent sur le marché des logiciels de simulation qui offrent des possibilités d'optimisation¹. Cette approche, bien que posant quelques problèmes méthodologiques², repose sur le choix d'un indicateur synthétique et l'existence d'alternatives relatives à des paramètres sous contrôle (niveaux de ressources, procédures, etc.). Le logiciel cherche alors la combinaison des variables de contrôle qui optimise l'indicateur synthétique, toutes choses égales par ailleurs.
- Dès que le système productif comporte quelques dizaines de processeurs, la représentation cartographique devient difficilement lisible. Pour faciliter la compréhension des processus complexes, certains simulateurs permettent de réunir plusieurs processeurs en un macro-processeur qui les remplace dans la représentation graphique, un simple clic sur le macro-processeur ouvrant une fenêtre décrivant le processus élémentaire traité par le macro-processeur. Cette mise en œuvre de la vision hiérarchique des processus, prônée dans la plupart des approches de modélisation de processus, n'est pas encore généralisée, mais s'imposera nécessairement à terme.

I-2.1.2 Exemple

En cliquant sur les icônes mises en marge du texte, vous pouvez examiner (sur PC seulement) deux simulations très simples du fonctionnement de deux organisations d'un bureau de poste comportant cinq positions de travail et accueillant des clients venus faire soit des opérations postales, soit des opérations financières (les lois de l'intervalle de temps séparant deux arrivées successives étant des lois exponentielles³ respectivement de moyennes 1,5 minute et 3 minutes). La distribution du temps de traitement requis par un client venu effectuer des opérations postales ou bancaires est décrite à la [figure 28 de la page 153](#), avec l'intervalle de confiance à 90 % de cette durée, ainsi que ses principaux paramètres de tendance centrale et de dispersion.

Table des
matières

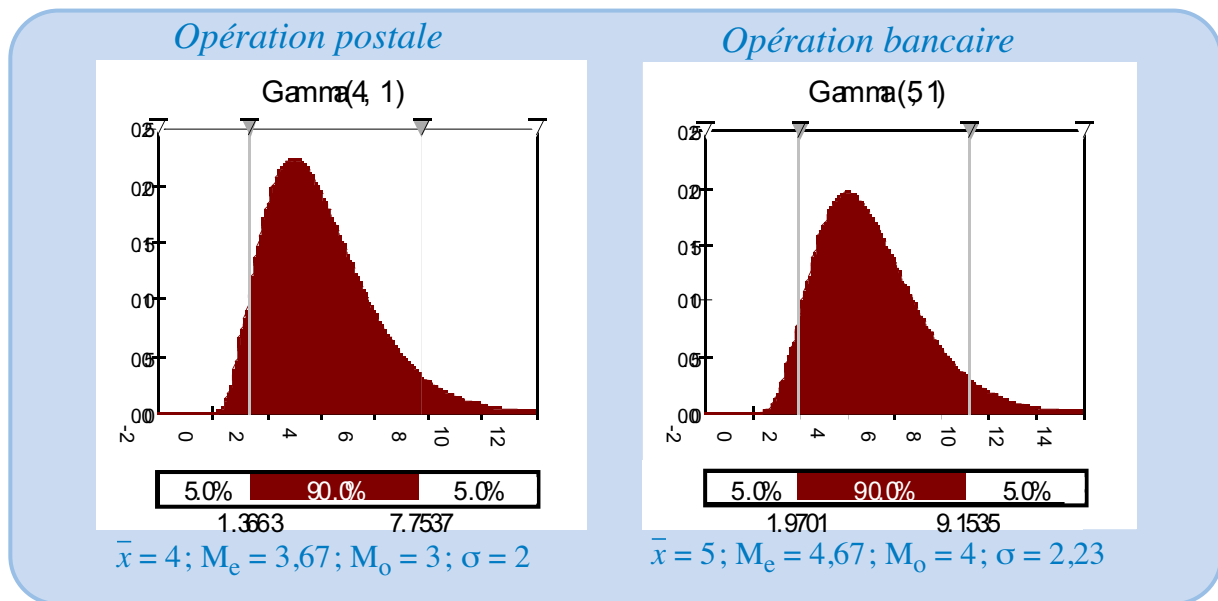
Index
thématique

1. C'est le cas de gros simulateurs industriels comme Witness fonctionnant sur PC, mais aussi de simulateurs un peu moins ambitieux, mais beaucoup moins chers comme Simul8.

2. Voir sur ce point la contribution d'Andradottir dans Banks (1998, [35]).

3. Rappelons que la loi exponentielle de paramètre β est telle que la probabilité que la durée X soit supérieure à x est: $P(X > x) = e^{-x/\beta}$ et que cette distribution est reliée à la loi de Poisson, puisqu'elle décrit la probabilité de l'intervalle de temps séparant deux événements successifs se produisant dans le cadre d'un processus de Poisson dans lequel la distribution de probabilité du nombre Y d'événements se produisant par unité de temps suit la loi $\mathcal{P}(\lambda)$, avec $\lambda = 1 / \beta$. Sachant que $E(X) = \beta$ et $E(Y) = \lambda$, il s'ensuit que la durée moyenne séparant deux événements successifs est l'inverse du nombre moyen d'événements se produisant par unité de temps (laquelle est, bien entendu, la même que celle utilisée pour définir l'intervalle de temps séparant deux événements successifs). Bien évidemment, dans la réalité, les lois d'arrivée varient au cours du temps; cette prise en compte dans la simulation est sans problème, mais n'a pas été retenue ici pour éviter de compliquer inutilement cet exemple introductif.

FIGURE 28
Distributions de la durée d'une opération bancaire ou postale



Dans la première organisation, 3 guichets sont spécialisés dans les opérations postales et les 2 autres dans les opérations financières. Dans la cartographie du processus de la [figure 29 de la page 154](#), on peut voir deux arrivées de ces deux clients dans le système productif, visualisées par deux portes¹. On fait l'hypothèse que le bureau comporte deux files d'attente spécialisées et que tout client qui entre dans le bureau de poste et trouve dans une file d'attente de 10 personnes, refuse de rentrer. Par ailleurs, on suppose que tout client qui passe plus de 10 minutes dans la file d'attente se lasse et s'en va sans être servi².

La cartographie du processus de l'organisation du bureau de poste avec des guichets polyvalents est fournie dans la [figure 30 de la page 154](#); dans ce cas, la file d'attente est limitée à 20 (mais dans la simulation effectuée, le maximum observé est de 16 clients dans la file).

La simulation est réalisée en continu sur 40 heures représentant le fonctionnement du bureau de poste pendant 5 jours³, avec rigoureusement les mêmes arrivées et les mêmes temps de service dans les deux configurations testées. Les résultats comparés de ces deux simulations sont fournis dans le [tableau 8, page 155](#); la [figure 31 de la page 155](#) synthétise les distributions de probabilité des attentes des clients et la [figure 32 de la page 156](#) illustre l'évolution des files d'attente et de l'occupation des guichets. On peut vérifier sur cet exemple la supériorité de la polyvalence sur la spécialisation, en termes de niveau de service pour

1. Il était possible de fusionner ces deux arrivées, mais les animations disponibles sur le CD-Rom auraient été moins « parlantes ».

2. Il est facile de modéliser tout autre comportement dans la simulation, par exemple par le biais d'une distribution de probabilité du temps d'attente maximal. De telles sophistications n'auraient rien apporté à cet exemple introductif.

3. Cette simulation devrait être améliorée sur deux points: outre la variation dans la journée (et dans la semaine) des lois d'arrivée des clients, il faudrait tenir compte du fait qu'en fin de journée, le bureau ferme et vide les files d'attente (cela étant, on peut observer l'existence de files d'attente avant l'ouverture). Ces améliorations sont faciles à réaliser, mais n'amènent rien pour cet exemple introductif.



FIGURE 29

Cartographie du processus du bureau de Poste dans la configuration de spécialisation des guichets

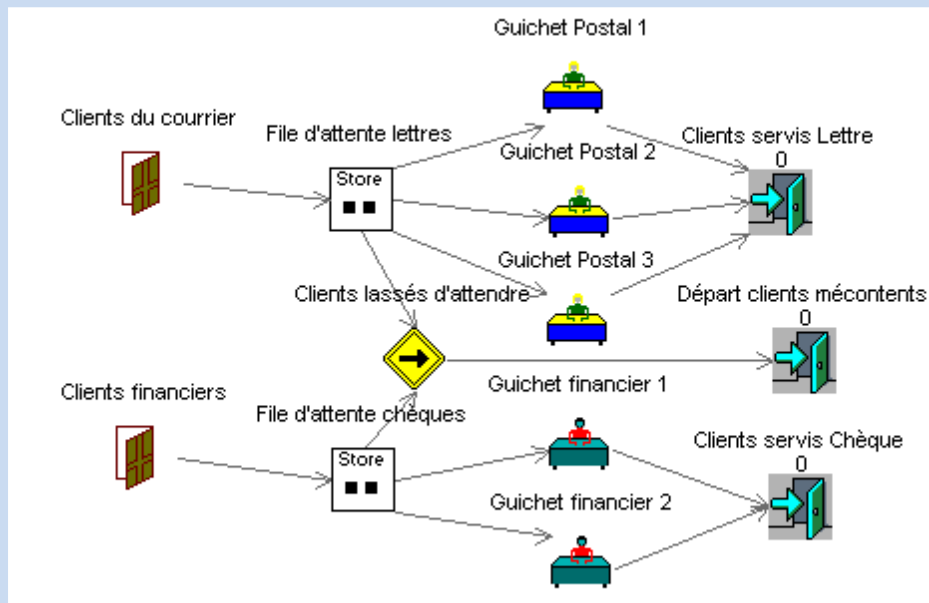


FIGURE 30

Cartographie du processus du bureau de Poste dans la configuration de polyvalence des guichets

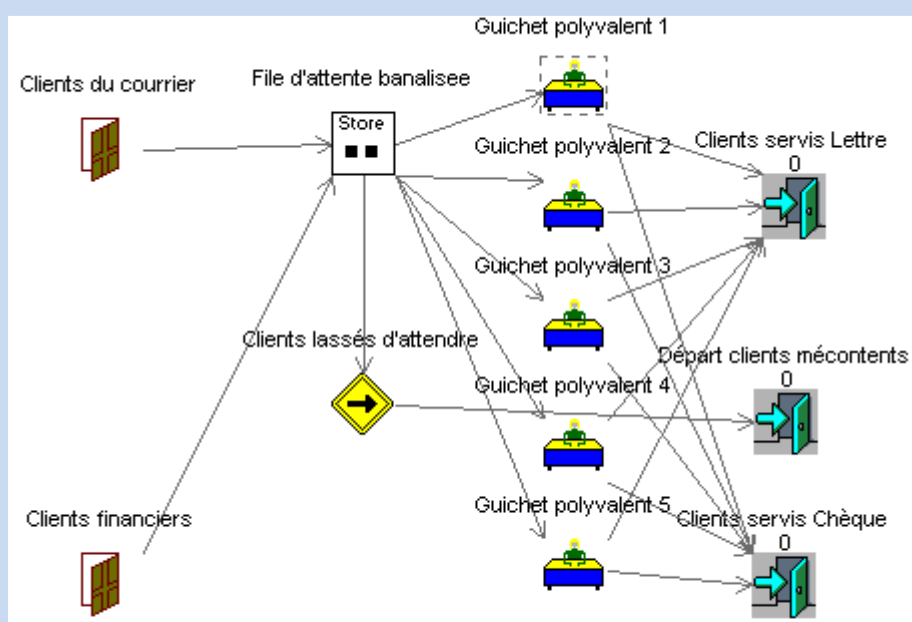


TABLEAU 8
Analyse comparative des deux organisations

		Spécialisation	Banalisation
Clients postaux (lettres)	Clients non rentrés en raison de la longueur excessive ¹ de la file d'attente (sur les 1637 clients s'étant présentés)	0,2%	0
	Temps moyen en file d'attente (limité à 10 minutes)	3,09	2,19
	% de clients ayant attendu dans la file d'attente	73,5%	881
	Temps moyen d'attente des clients ayant attendu	4,17	3,90
	% de clients partis (en raison d'attente trop longue ²)	3,3%	1,5%
Clients financiers (chèques)	Clients non rentrés en raison de la longueur excessive [†] de la file d'attente (sur les 789 clients s'étant présentés)	0%	0
	Temps moyen en file d'attente (limité à 10 minutes)	3,08	2,49
	% de clients ayant attendu dans la file d'attente	66,9%	87,5%
	Temps moyen d'attente des clients ayant attendu	4,63	3,43
	% de clients partis (en raison d'attente trop longue [‡])	2,0%	0,9%

1. File d'attente limitée à 10 personnes dans chacune des deux files d'attente de la configuration « spécialisée » (dans la simulation, les longueurs moyennes de queues ont été respectivement de 2,11 et 0,96 clients) et à 20 personnes dans le cas de la file d'attente unique de la configuration « banalisée » (en réalité, dans la simulation, le maximum observé est 16 et la longueur moyenne de la queue est, 2,28 clients).

2. Attente maximale de 10 minutes dans chaque configuration.

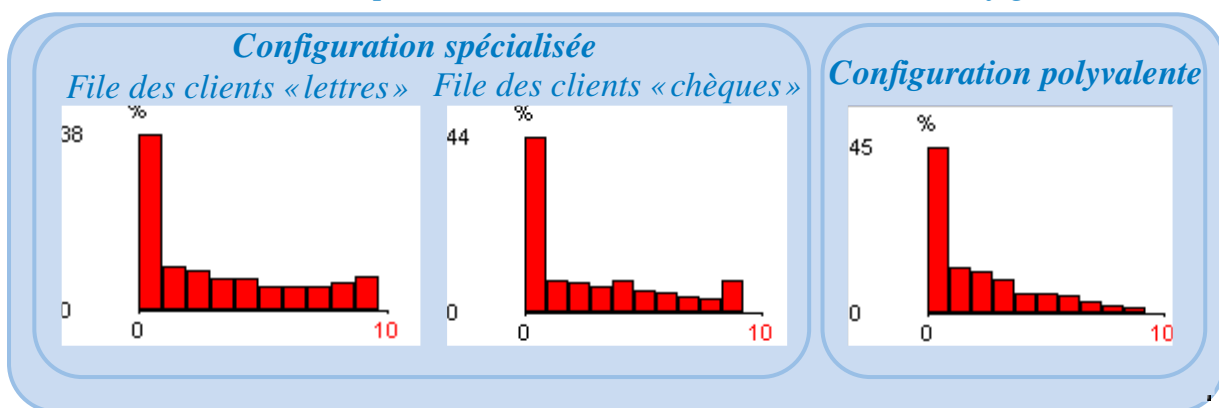
Table des matières

le client. Ce constat ne tient pas compte du fait que le poste polyvalent peut être plus onéreux que le poste spécialisé et que, dans ce cas, des structures hybrides combinant guichets spécialisés et polyvalents peuvent constituer un meilleur compromis.

Index thématique

FIGURE 31

Distribution du temps d'attente des clients dans les deux configurations



I-2.2 Vision systémique du fonctionnement du système productif

Parue dans les années cinquante, l'approche cybernétique propose de distinguer dans un centre de production (qui réunit de manière durable un certain nombre de ressources productives complémentaires) :

- un système opérant qui réalise les opérations directement productives

FIGURE 32
Évolution des files d'attente et de l'utilisation des guichets dans la simulation

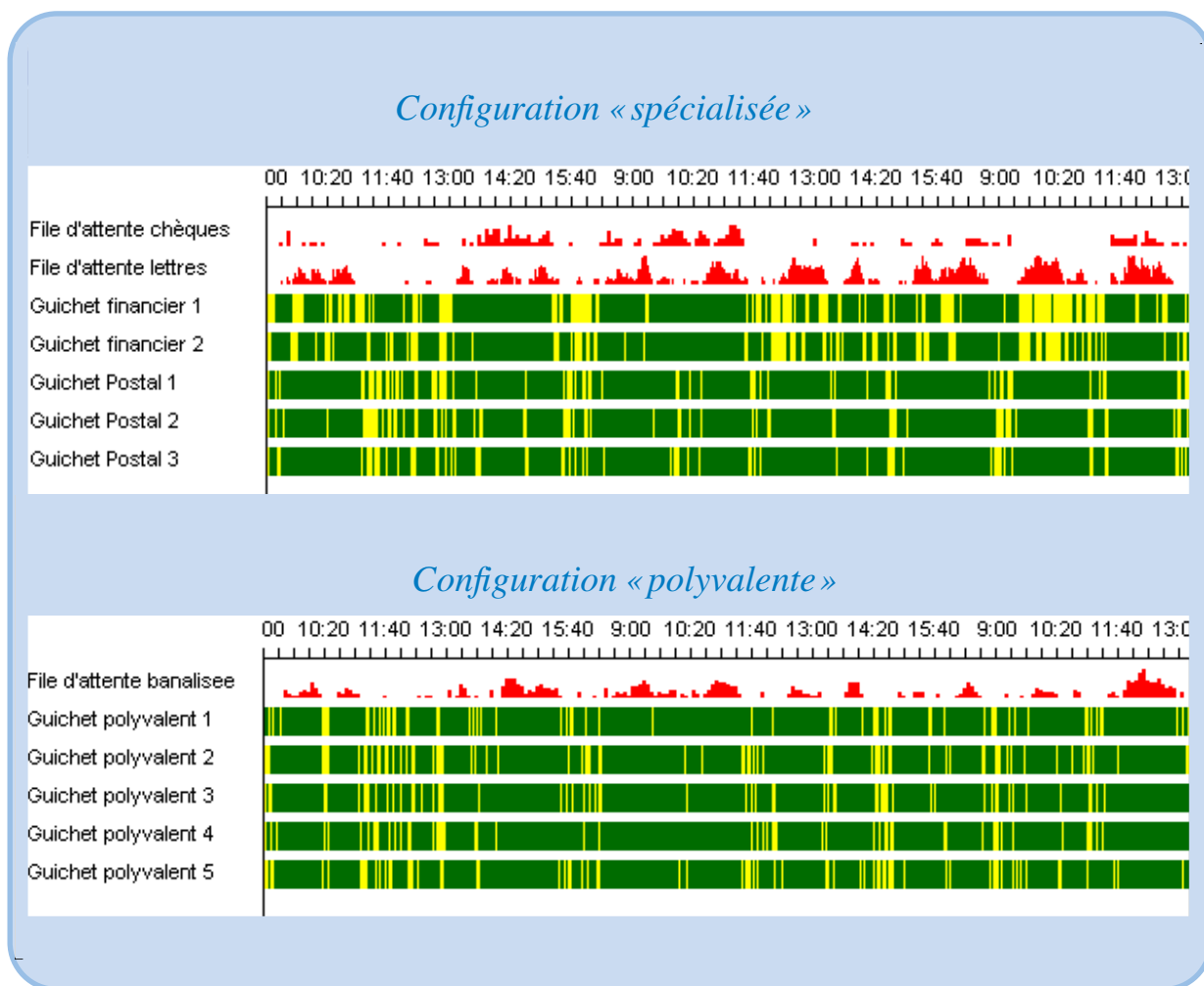


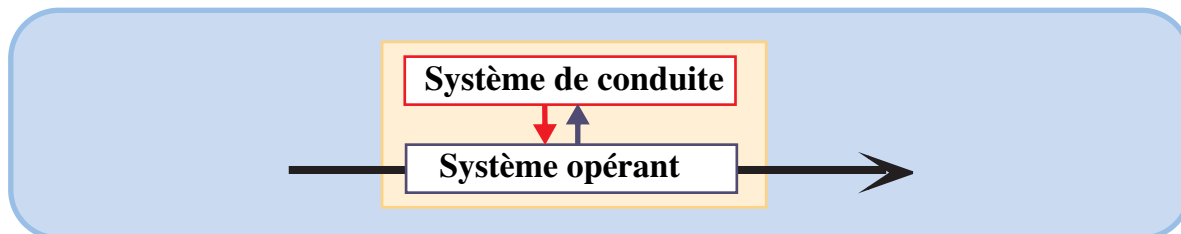
Table des matières

Index thématique

- et un système de conduite qui intervient pour piloter les ressources productives et qui intègre à la fois le système d'information décrivant de manière plus ou moins fine l'état du système et l'ensemble des procédures de traitement de l'information et de prise de décision.

Cette conception est décrite par la figure 33.

FIGURE 33
Vision cybernétique du fonctionnement d'un centre de production



L'approche simulateur des processus productifs (§ I-2.1, page 148) s'inscrit bien dans cette perspective, le système de conduite étant alors caractérisé par un ensemble de règles permettant le pilotage des flux. Cela étant, on se retrouve dans le cadre de décisions totalement structurées¹ – ce qui en permet la programmation

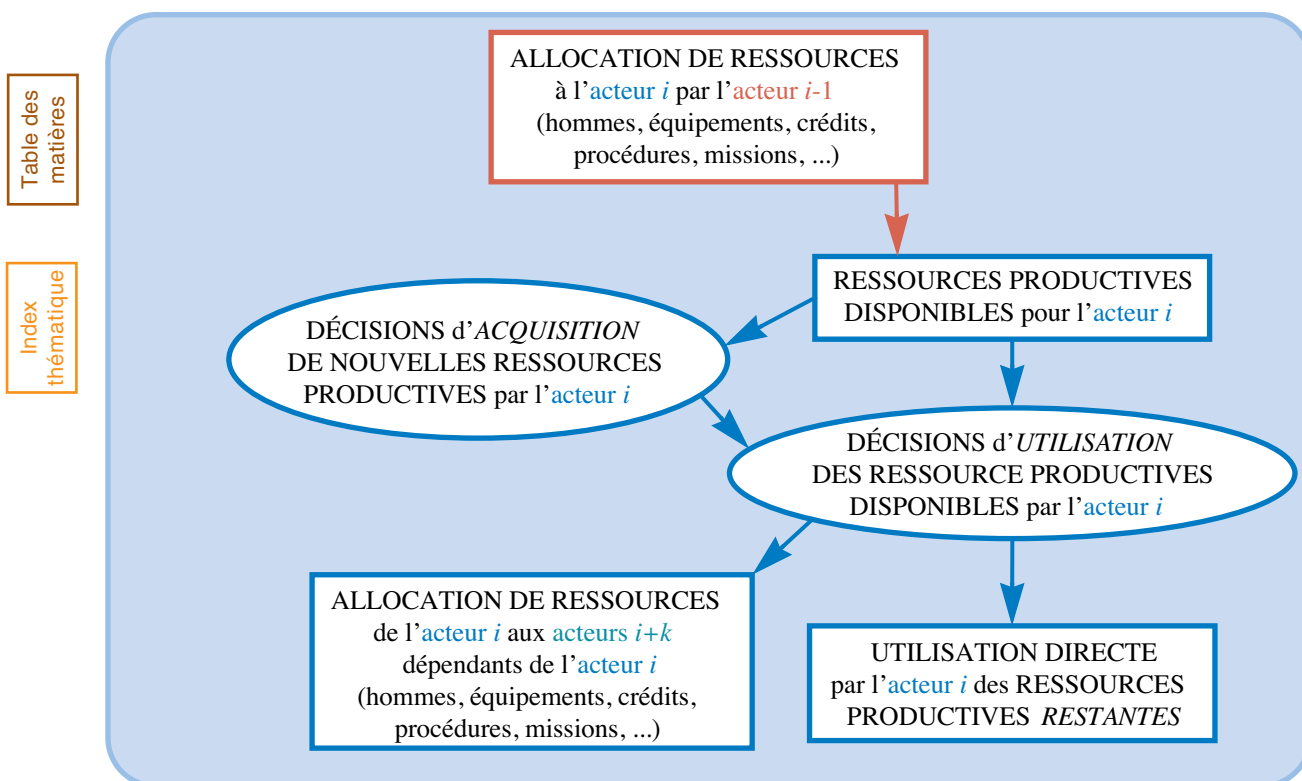
1. Voir chapitre I, page 46.

– qui relèvent des décisions du niveau opérationnel. Cette vision cybernétique évacue la composante socio-organisationnelle du fonctionnement du système productif, nécessaire dans l'analyse des décisions tactiques et stratégiques, qui autorise une analyse en termes de négociation de ressources et d'objectifs.

Le point de vue socio-organisationnel débouche sur une vision d'une organisation en centres de décision que l'on peut représenter schématiquement par la [figure 34](#) qui n'implique aucune hypothèse implicite sur la configuration du système productif ou l'organisation retenue. Cette représentation est totalement inappropriée à la description de processus et ne se prête qu'à l'analyse de certaines décisions tactiques ou stratégiques. Elle reste cependant insuffisante pour éclairer ce type de décisions dans la mesure où elle néglige complètement l'utilisation des ressources dans le cadre du processus productif. Dans l'analyse de dossiers d'investissement qui comporte toujours une composante organisationnelle importante susceptible d'induire des biais importants dans l'analyse, on retiendra une synthèse de ces deux approches ([figure 35, page 158](#)) que l'on utilisera en particulier pour analyser la propagation des effets d'une décision d'investissement. Précisons les quelques concepts utilisés dans cette modélisation.

FIGURE 34

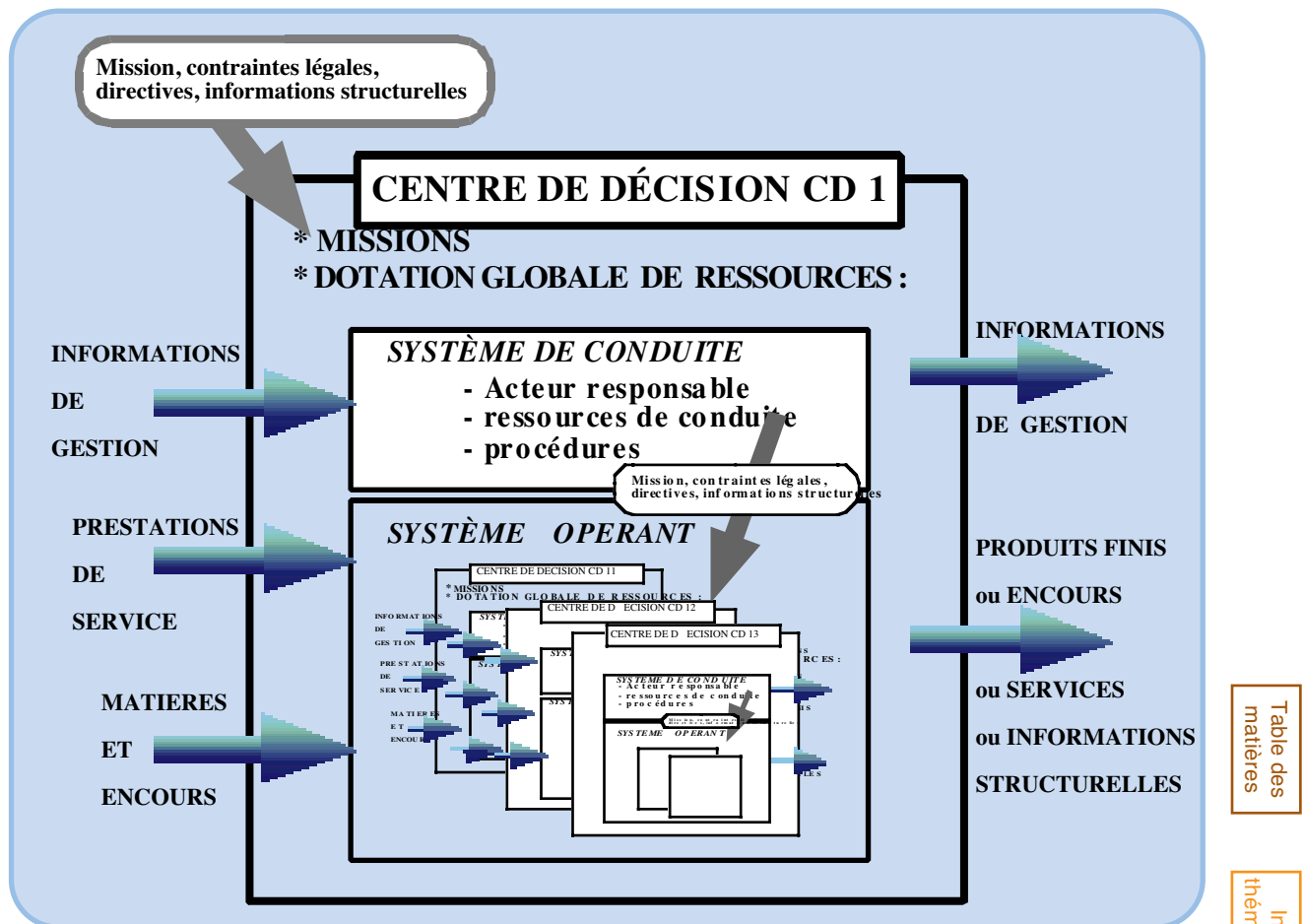
Vision socio-organisationnelle du fonctionnement d'un centre de production



Un **centre de décision** (CD) est un ensemble de ressources, possédant une structure de conduite avec, en particulier, un acteur responsable clairement identifié qui doit être mobilisé en vue de produire une certaine classe d'«objets» (produits physiques, prestations de service, informations structurelles, tous définis ci-après), en respectant au mieux une mission impartie. Un centre de décision comporte donc un système de conduite et des ressources productives qui peuvent elles-mêmes être regroupées et constituer différents centres de décision à l'intérieur du premier si leur conduite nécessite et relève d'une structure décisionnelle

FIGURE 35

Synthèse des visions cybernétique et socio-organisationnelle du fonctionnement d'un centre de production



particulière. Ce modèle simple présente l'intérêt qu'il sépare le système de conduite du système productif et de forcer ainsi l'attention sur des procédures de conduite en général plus ou moins bien formalisées.

En fonction de leur «production», on peut distinguer trois types principaux de centres de décision :

- Les *centres de décision producteurs de produits physiques* correspondent aux sous-systèmes dont la mission principale consiste à transformer physiquement un produit, à en contrôler les caractéristiques ou à le déplacer; par extension, on classera dans cette catégorie les sous-systèmes des entreprises de services qui contribuent directement à la réalisation de prestations de service correspondant à la satisfaction d'une demande finale.
- Les *centres de décision producteurs d'informations structurelles* correspondent aux services fonctionnels de l'entreprise (bureau d'études, service des méthodes...) qui fournissent aux centres de production et aux centres prestataires de service des informations qui spécifient leur «mission». Plus précisément, on appelle informations structurelles des informations qui revêtent un caractère obligatoire quant à leur application et contraignent le fonctionnement du centre destinataire à certaines règles ou performances. Ce sont,

par exemple, les gammes de fabrication, les nomenclatures et les dessins des produits...

- Les *centres prestataires de services* sont les centres dont la mission consiste à fournir, maintenir et rénover les ressources humaines, physiques et informationnelles (hors les informations structurelles) des autres unités, ce qui comporte, entre autres, les services «entretien - maintenance», «fluides», «formation» et «approvisionnement». Généralement, ces unités facturent leurs prestations à des taux standards, aux unités «clientes». Elles travaillent à capacité fixe, c'est-à-dire qu'une décision modifiant le niveau de «consommation de prestations» d'un centre (durée et fréquence des interventions, ainsi que le degré de technicité requis) ne permet pas, la plupart du temps, de redéfinir immédiatement le potentiel alloué à ces services prestataires.

Le modèle de représentation retenu classe en six types différents les flux qui entrent ou sortent d'un centre de décision :

- La *mission* correspond à l'ensemble des contraintes légales, directives et informations structurelles reçu par un centre de décision. Ces informations qui caractérisent la «mission» proviennent donc soit d'un centre de décision hiérarchiquement supérieur, soit de centres fonctionnels producteurs d'informations structurelles.
- Le *flux de production entrant* n'existe que pour les centres producteurs de produits physiques ; il correspond à des matières, articles, composants, sous-ensembles et produits qui entrent dans l'unité de production en provenance de centres fournisseurs (internes ou externes à l'entreprise) et que l'on retrouve, après transformation, dans les produits finis ou semi-ouvrés en sortie du centre de production.
- Suivant la nature du centre de décision, le *flux de production sortant* correspond à une production soit de produits physiques, soit des informations structurelles, soit de prestations de services.
- Le *flux de prestations de services entrant* correspond à l'ensemble des prestations de services dont bénéficie l'unité et qui sont nécessaires à la réalisation de sa mission et de son activité. Dans le cas de centres prestataires de services ou producteurs d'informations structurelles, ce flux entrant peut intégrer certaines matières nécessaires à son activité (pièces de rechange, fluides, supports physiques d'informations...).
- Les *flux d'informations de gestion entrant et sortant* sont constitués des informations éphémères (à opposer aux informations structurelles) que s'échangent, de manière plus ou moins formelle, les différents centres sur leur état, à un instant donné (position des stocks, niveau d'activité, disponibilité des ressources, personnels présents...) et qui permettent, en temps réel, la réactivité du système productif aux aléas et dysfonctionnements. Il faut noter que, suivant le processus de production adopté, ces informations revêtent une importance inégale ; ainsi, dans le cadre d'une unité produisant en juste-à-temps, le volume, la date et la précision de ces informations conditionnent fortement l'efficacité du système.

Tout flux (entrant ou sortant) est défini par des paramètres tels que le volume, la qualité, la régularité, la périodicité, ainsi que par des règles fixant les conditions

d'émission et d'utilisation de ces flux. Il existe souvent un certain nombre de contraintes techniques¹ qui lient les flux et les ressources qui les produisent et qui les utilisent. Il en résulte que, dans certains cas, une modification de certaines caractéristiques de ressources d'un centre productif (respectivement, de flux) implique une modification de flux entrants ou sortants (respectivement, de ressources du centre émetteur du flux ou du centre utilisateur). La mauvaise perception de ces contraintes est l'une des causes de la vision « locale » de certains dossiers.

I-2.3 Les outils de cartographie de processus

Certaines approches, comme celle du modèle SCOR utilisé pour décrire le fonctionnement de la chaîne logistique (voir [page 895](#)) décrivent les processus comme un réseau de « modules » assurant un certain nombre de fonctions.

Depuis le milieu des années soixante-dix, de nombreuses approches de modélisation ont été développées. Ces approches s'appuient sur des bases méthodologiques communes, mais comme chacune d'entre elles privilégie un point de vue et niveau d'analyse particuliers, elles ne sont pas interchangeables. Les grilles de lectures utilisées (en combinaison partielle) sont :

- l'*enclenchement* des tâches identifiées, avec ou sans prise en compte du *temps*; ces enclenchements peuvent ou non faire apparaître explicitement des informations de gamme en explicitant les *alternatives* rencontrées pour détailler tous les traitements que réalise un processus;
- les *ressources* mobilisées: équipements, informations, personnes (ou agents); en ce qui concerne cette dernière ressource, différentes conceptions sont possibles et détaillées dans l'alinéa suivant;
- les *rôles* joués dans un processus; les rôles sont alors déconnectés des structures organisationnelles et peuvent être joués par des personnes n'appartenant pas à un service prédéterminé, cette distinction est importante dans une perspective de révision d'un processus; certaines approches privilégient la notion de service fonctionnel, auquel cas, la liste des rôles joués par les personnes d'un service est considérée comme stable (vision acceptable dans une analyse de l'existant);
- certaines représentations impliquent une approche hiérarchique des processus en visant à travailler simultanément sur un nombre limité d'activités; dans ce cas, des conventions sont utilisées pour faciliter le zoom permettant d'aller au niveau de détail désiré.

Une dernière caractéristique doit être introduite pour pouvoir classer les différentes approches existantes. Certaines d'entre elles sont statiques au sens où elles ne visent qu'à décrire un processus, tandis que d'autres, moins nombreuses, sont dynamiques², au sens où elles visent à simuler le processus en spécifiant les lois des arrivées du processus, celles des temps opératoires ainsi que la distribution de probabilité associée aux alternatives à la sortie d'un aiguillage. Cette dernière approche n'est envisageable que pour des processus opérationnels bien structurés, pour lesquels on dispose d'informations fiables. Cette approche simulatoire doit être distinguée de celle utilisée par les simulateurs de processus présentés au § I-

1. Note de la page précédente. Voir Giard, Triomphe et Vergnenègre (1990, [202]).

2.1, page 148, par le fait qu'elles explicitent les gammes opératoires qui sont «masquées» dans les simulateurs de processus (il faut ouvrir des fenêtres ou lire le code informatique pour prendre connaissance des gammes utilisées). Ces deux approches sont complémentaires : le simulateur de processus fournit des informations sur l'efficacité du processus en fournissant des indications sur le taux d'utilisation des ressources, tandis que les outils dynamiques de cartographie des processus permettent de réfléchir sur les gammes utilisées, en particulier pour les processus administratifs (les gammes de production de produits soulevant moins d'interrogations).

Les premières approches de modélisation de processus¹ ayant connu une réelle diffusion remontent à la fin des années soixante-dix avec **SADT** (*Structured Analysis and Design Technique*), avec son prolongement **IDF0** (*Integrated computer aided manufacturing DeFinition*) développé au cours de la décennie suivante sous l'impulsion du département de la défense aux États-Unis. La modélisation du processus repose sur l'**activité** qui consomme des **inputs** et produit des **outputs**, les inputs et les outputs pouvant être des informations ou des produits, et à laquelle on associe des **mécanismes** qui représentent les ressources humaines, matérielles et logicielles mobilisées par l'activité (une activité pouvant donc faire appel à d'autres mécanismes lorsqu'on révisé un processus, ce qui revient, dans l'analyse, à bien séparer le «quoi?» du «comment?») et des **contrôles** lesquels correspondent à des informations qui contraignent l'exécution de l'activité sans être modifiées par elle. La «brique de base» de cette modélisation est représentée à la **figure 36**. Le positionnement relatif de ces éléments est standardisé ; l'output d'une activité peut être l'input d'un autre, ce qu'illustre la **figure 37 de la page 162**. Un certain nombre de conventions graphiques complémentaires sont utilisées, en particulier pour indiquer si les inputs (ou les outputs) d'une activité sont à relier par des relations «et», «ou inclusif» ou «ou exclusif».

Il est recommandé de limiter à six le nombre d'activités, ce qui oblige à adopter une vision hiérarchique du processus (on parle de **décomposition fonctionnelle**), facilitée par une numérotation décimale des activités. Cela étant, la navigation entre plusieurs niveaux de détail de la modélisation rend difficile la vision d'ensemble ; d'un autre côté, on sait bien qu'un excès d'informations ne favorise pas non plus cette vision d'ensemble. Ajoutons enfin qu'une présentation classique de cette approche consiste à désigner une activité par un verbe d'action et les inputs et outputs par des noms, la représentation de la **figure 36 de la page 162** est alors appelée **actigramme**. On peut en tirer un graphe dual dans lequel les noms sont dans les nœuds du graphe et les verbes correspondent aux arcs ; on parle alors de **datagramme**.

2. *Note de la page précédente.* On n'évoquera pas ici l'approche des réseaux de Petri, en définitive peu utilisée dans la description de processus (pour une présentation synthétique et accessible, voir, par exemple, Proth, 1992, [351], chap VII). Dans cette approche, la description de la circulation de jetons (= objets) à travers le système productif relève en partie seulement d'une approche dynamique dans la mesure où il s'agit surtout de vérifier la cohérence des règles de fonctionnement du système étudié : d'une certaine façon le temps intervient surtout sous la forme des enclenchements. La méthode GRAFCET (voir, par exemple, David, [123], 1992) s'appuie sur cette approche et est utilisée pour décrire des processus de systèmes automatisés de production ; ce niveau de détail est trop fin pour le type de description de processus envisagé par les gestionnaires.

1. Une analyse synthétique de travaux de modélisation de processus peut être trouvée dans Vernadat (1999, [431]) et une analyse détaillée dans Vernadat (1996, [430]).

FIGURE 36
L'activité SADT / IDF0

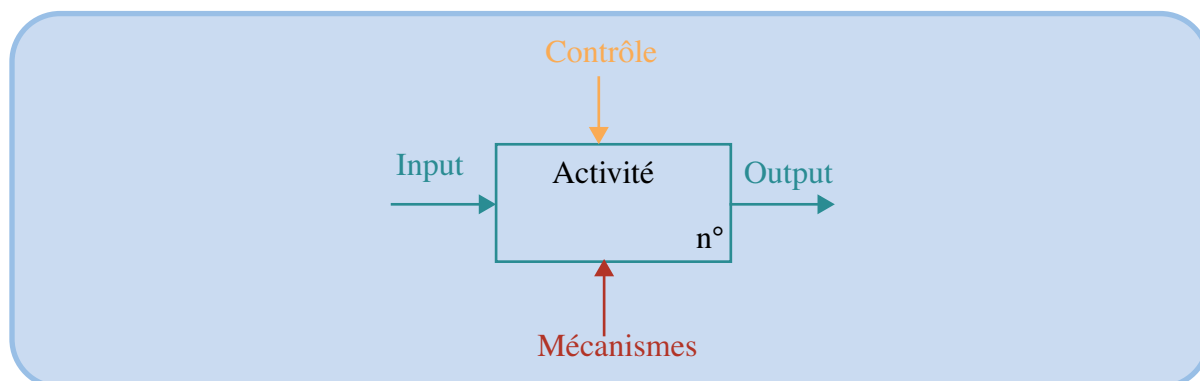


FIGURE 37
Principe d'interconnectivité des activités (d'après Vernadat [431])

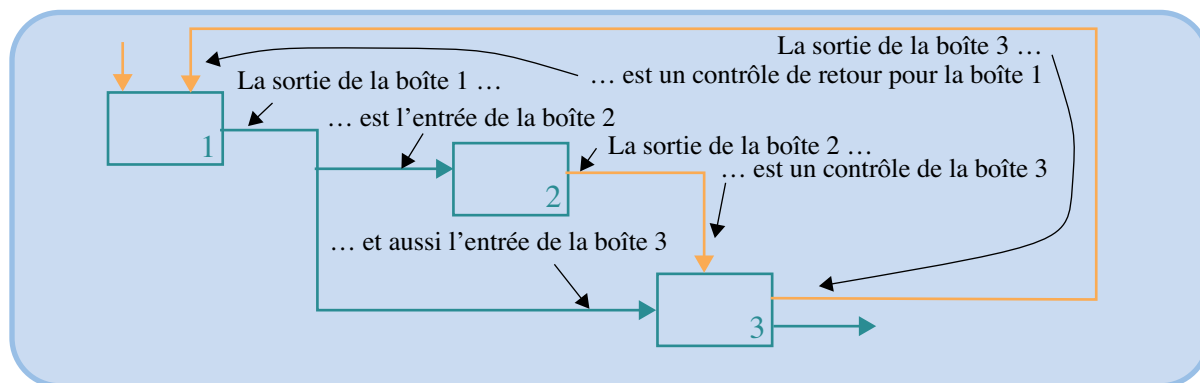


Table des
matières

Index
thématique

Les lacunes de IDF0 en matière de modélisation du comportement de l'entreprise (contrôles d'une activité) ont conduit à IDF3. À la notion d'activité succède celle d'**unité de comportement** (UDC) qui élargit la notion d'activité (qui, déjà, permettait d'aller du processus à l'opération élémentaire selon le zoom retenu) en y rattachant le concept d'événement et la possibilité de pointage sur une autre UDC ou un autre processus avec une mention de type «*go to*». Ces UDC sont reliées par des **liens** et des **boîtes de jonction** qui permettent une modélisation plus fine de la circulation des flux puisque les conventions utilisées permettent d'indiquer le caractère synchrone (simultanéité des inputs ou des outputs, selon le cas) ou asynchrone des flux entrants ou sortants. Les liens peuvent correspondre non seulement à des antériorités (flèche en trait plein) comme dans IDF0, mais aussi à des flux d'objets (flèche à double tête) et à de simples échanges d'informations entre UDC (flèche en pointillés). Par rapport à IDF0, on constate que les mécanismes (ressources mobilisées) sont absents et que les contrôles sont intégrés dans la représentation.

CIMOSA¹ (*Computer-Integrated Manufacturing Open System Architecture*) est une architecture issue d'un vaste programme européen amorcé au milieu

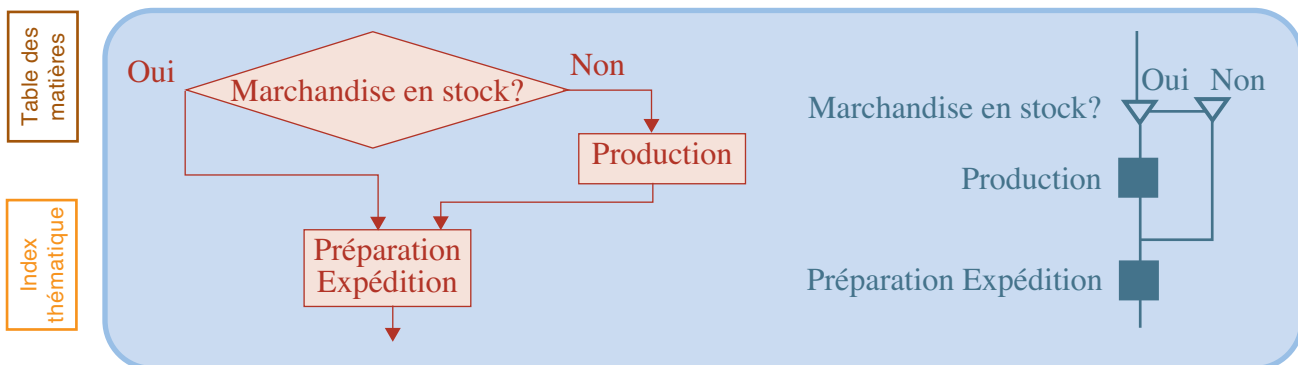
1. Une présentation détaillée (avec une bibliographie très détaillée) de CIMOSA et de ses prolongements peut être trouvée dans Vernadat (1996, [430]).

années quatre-vingt qui a été créé pour construire des systèmes intégrés de production et qui se trouve actuellement au cœur de nombreux travaux. CIMOSA comporte un langage de description des activités et des processus qui, comme les ERP¹, présente un aspect assez normatif. La rigueur de la démarche a pour contrepartie d'en réserver l'usage à des spécialistes et de permettre difficilement une vision d'ensemble d'un processus d'une certaine complexité (lacune que tente de combler des travaux postérieurs). Dans les années quatre-vingt-dix, d'autres approches de modélisation de processus, plus «pragmatiques» ont vu le jour², principalement aux États-Unis. Elles se placent dans la mouvance du *reengineering* et certaines d'entre elles appuient sur des logiciels, ce qui force à une certaine cohérence. En fait, il y a peu de nouveautés sur le plan conceptuel et les différences sont surtout des différences de présentation et, parfois, une incitation à l'utilisation de plusieurs grilles de lecture d'un processus.

La figure 38 illustre deux exemples de conventions utilisées pour décrire des tâches et des gammes. La convention de la partie droite de cette figure (modèle STRIM proposée par Ould, 1995, [323]), présente l'avantage de permettre la visualisation supplémentaire des interactions entre plusieurs rôles joués par des acteurs³ généralement liés à des échanges d'information, et d'indiquer le rôle prépondérant dans l'interaction.

FIGURE 38

Exemple de présentations alternatives de tâches et gammes dans un processus



Illustrons quelques représentations de visualisation de processus en en délimitant, étant entendu que le niveau de détail (zoom) peut toujours être poussé sans problème.

- L'exemple 1 de représentation de processus (figure 39, page 164) s'attache à l'enclenchement des tâches, certains éléments de gammes sont explicites, les

1. Voir le chapitre XIV, § III-2.1, page 968.

2. Voir, par exemple, Tenner & De Toro (1997, [413]) et Ould (1995, [323]). Quelques logiciels sont disponibles, une liste, un peu ancienne, peut être trouvée dans Hunt (1996, [235]); Optima est un logiciel de modélisation de processus représentatif de l'approche dynamique.

3. Ces rôles ne figurent pas ici, mais seront introduits, pour la convention de la partie gauche, sous forme de bandes rassemblant les tâches confiées à un même rôle dans la figure 40, page 165; dans cette représentation, les interactions entre rôles ne sont pas représentées. Aucune illustration des rôles ne sera fournie ici pour le modèle STRIM, mais le principe retenu est très simple à comprendre: l'ensemble des tâches confiées à un même rôle est positionné dans un rectangle à bords arrondis, ce qui permet une visualisation spatiale des différents rôles qui interviennent dans l'exécution d'un processus; les interactions entre deux tâches confiées à deux rôles différents sont tout simplement visualisées par trait reliant ces deux tâches et la tâche accessoire (avis, accord...) est visualisée en gris.

ressources mobilisées sont absentes, les flux de matières et d'informations sont implicites.

FIGURE 39
Exemple 1 de représentation de processus

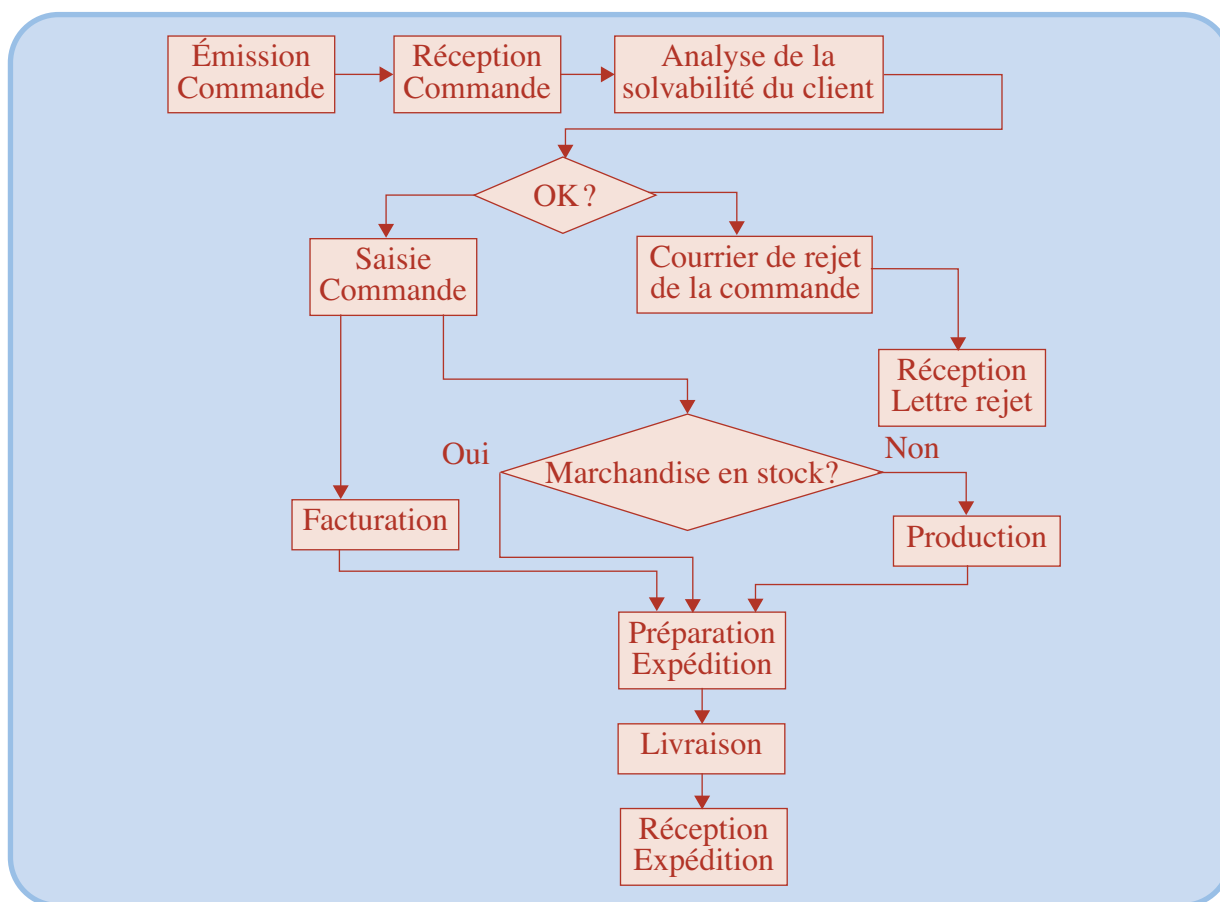


Table des matières

Index thématique

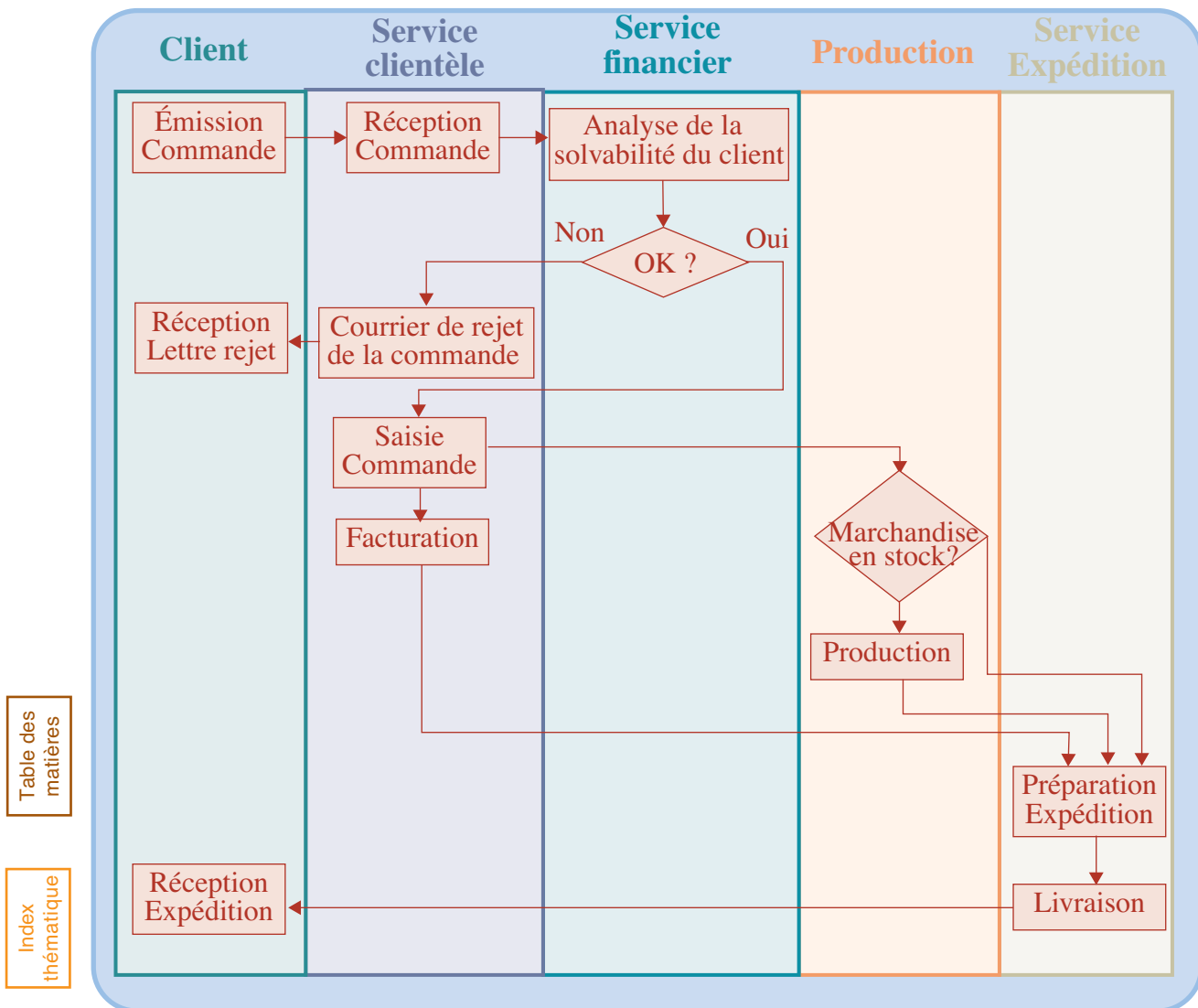
- L'exemple 2 (figure 40) enrichit la présentation en visualisant les services responsables. Les bandes horizontales peuvent être remplacées par des bandes horizontales, mais on visualise également ce qui relève d'un service par un simple rectangle à bords arrondis (les flèches allant aux tâches permettant de repérer «qui fait quoi»), ce qui permet une meilleure utilisation de l'espace, mais peut rendre la lecture du graphique plus compliquée si les flèches vont dans tous les sens. Le service peut être remplacé par celui de rôle ou d'acteur, en particulier à un niveau de détail supérieur à celui utilisé ici.
- L'exemple 3 (figure 41, page 166) représente les tâches du processus selon leur placement dans le temps¹. Il est alors difficile de concilier de manière exacte l'information de date de début d'une tâche et sa durée, ce qui conduirait à une sorte de graphique de Gantt² «enrichi». En outre, la représentation simultanée d'alternatives d'un processus n'est envisageable qu'avec un repérage temporel grossier (ce que l'on va faire ici). On peut ajouter qu'une représentation de type Gantt - ressources³ fléché (pour visualiser les relations

1. Cette présentation et la suivante sont proposées notamment par Tenner et De Toro (1996, [413]), mais elles sont transposables sans difficulté dans d'autres approches, comme celle du modèle STRIM d'Ould.

2. Pour cette représentation, voir le chapitre V, § I-1.1.1.2, page 365 et le chapitre IV, § III-1.1.6, page 306.

3. Voir figure 84, page 307.

FIGURE 40
Exemple 2 de représentation de processus



d'antériorité) est utilisable où les services (ou rôles) correspondent aux ressources, à condition d'éliminer les alternatives (difficilement conciliables avec ce type de représentation). Cette représentation conditionne la recherche d'améliorations axées sur la chrono-compétition¹.

- Des conventions additionnelles sont utilisables lorsque la description est fine. Par exemple, des conventions de couleurs peuvent être utilisées pour dissocier les tâches ayant une valeur ajoutée pour le client, de celles qui n'en n'ont pas, mais bien d'autres typologies sont utilisables («préparer - décider - exécuter», par exemple). Ces représentations sont intéressantes pour stimuler la réflexion visant à améliorer des processus existants (cf. § I-2.4, page 167).

Ajoutons enfin qu'en Europe, à la fin des années quatre-vingt, une méthodologie d'analyse de processus orientée vers la production de prestations de services a été développée pour permettre une meilleure prise en compte de l'impact des nouvelles technologies sur l'organisation du travail. Connue sous le nom d'OSSAD (*Office Support System Analysis and Design*, Dumas & Char-

1. Voir chapitre I, page 67.

FIGURE 41
Exemple 3 de représentation de processus

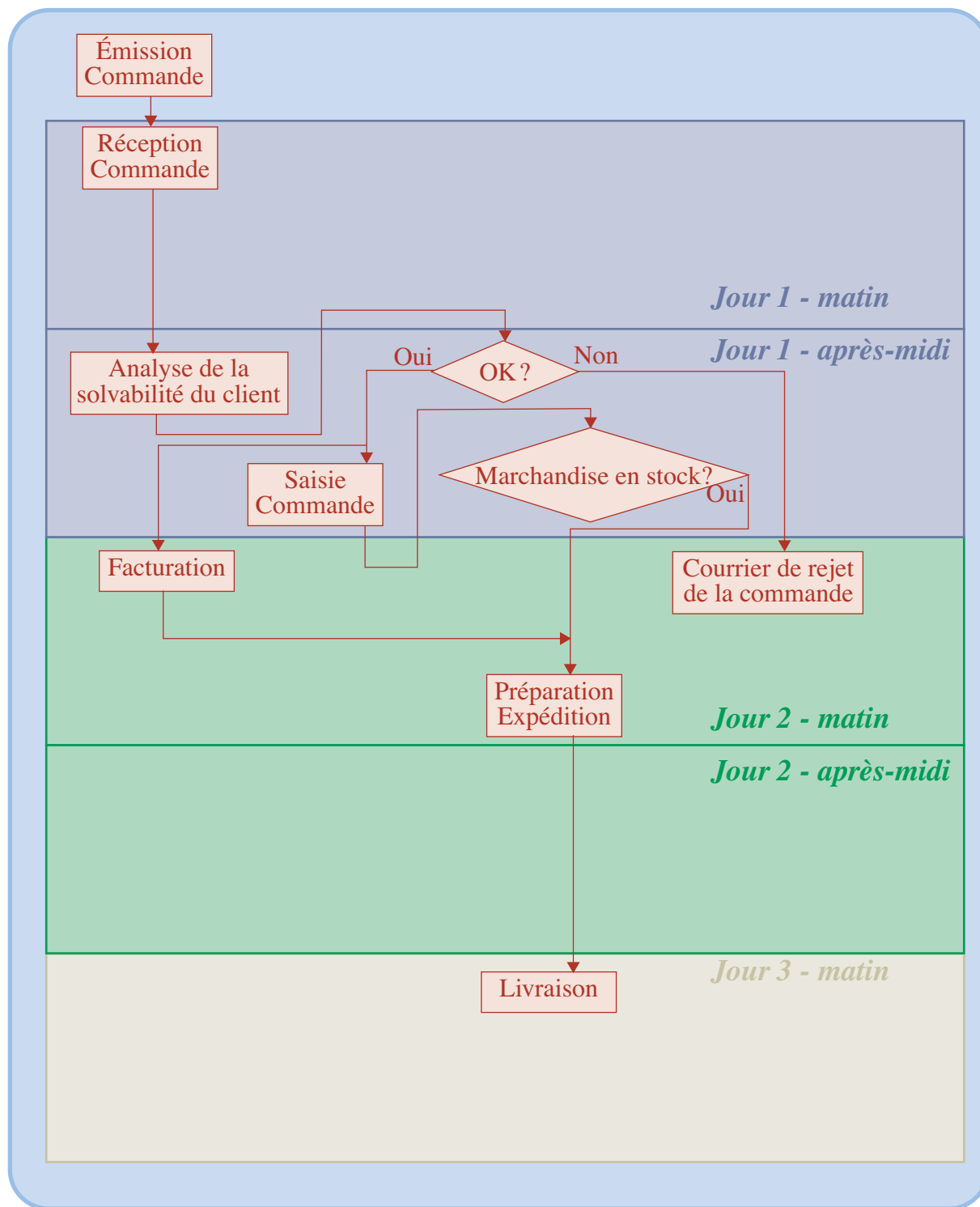


Table des matières

Index thématique

bonnel, [133], 1990), cette méthode s'inspire de démarches utilisées en système d'information en distinguant trois niveaux d'analyse allant du conceptuel à l'implémentation: le modèle abstrait (ce qui doit être fait et pourquoi), le modèle descriptif (modèle contingent à un environnement daté) et le modèle prescriptif (orienté implémentation). À chaque niveau d'analyse correspondent des concepts qui sont en relation avec ceux qui sont utilisés à d'autres niveaux. Par exemple, le modèle abstrait utilise le concept de fonction et d'activité (plus détaillé) et le

modèle descriptif utilise (par niveau de détail croissant) les concepts de procédures de tâches et d'opérations ; on retrouve donc, à un niveau d'analyse donné, le zoom déjà présent dans les autres approches. Au niveau de l'opération, on retrouve une vision voisine de l'activité de SADT, avec la spécification de ressources requises (baptisées ici outil et ressource en information). C'est au niveau de la tâche que la vision est plus originale puisqu'on lui associe un rôle pour l'exécution et que ces rôles sont ensuite rattachés à des acteurs et des unités fonctionnelles caractérisées par une collection de rôles. La description du processus d'un modèle descriptif reprend sur des bandes verticales un repérage des unités et on retrouve un formalisme qui n'est pas très éloigné de ceux présentés ci-dessus avec, comme dans le modèle STRIM, une visualisation des interactions entre opérations.

En définitive, l'arsenal disponible partage des caractéristiques communes importantes que ne doivent pas masquer les différences de formalismes graphiques proposés. La complexité des processus permet difficilement une vision multi-dimensionnelle de ses composants. On est alors amené à travailler sur des représentations privilégiant certaines dimensions, en fonction de l'éclairage adopté pour l'analyse. Cette multiplicité de regards sur un processus est essentielle pour en comprendre les limites et pouvoir les transformer. Cela étant, il n'y a pas vraiment de méthodologie établie d'amélioration d'un processus, mais seulement l'appel à un certain nombre de principes que nous allons examiner maintenant.

I-2.4 L'amélioration d'un processus

Table des matières

Index thématique

Le travail de cartographie d'un processus est mené pour en comprendre le fonctionnement en détail, en juger la pertinence et en faciliter l'amélioration. Dès lors qu'un avis et des propositions doivent être formulés, il est nécessaire qu'au-delà de la définition fonctionnelle du processus (par exemple, traiter les factures des fournisseurs), des objectifs d'efficacité (par exemple, 99 % des factures traitées dans les trois jours ouvrables suivant la réception de la facture) et d'efficience (par exemple, atteindre des objectifs d'efficacité plus contraignants avec les mêmes ressources humaines) soient clairement assignés au processus (Hunt, 1996, [235]). L'amélioration du processus est conditionnée à une réelle volonté de changement, en dépit des obstacles techniques et des pesanteurs socio-organisationnelles.

L'analyse critique du processus implique un repérage des cheminements irrationnels, des délais excessifs et des tâches manquantes ou superflues. Pour faciliter ce diagnostic et disposer de principes d'action, on peut faire appel à un certain nombre de principes bien connus en gestion de la production ainsi qu'à la littérature du *reengineering*¹ qui fournit de nombreuses idées sur les pistes d'amélioration en s'appuyant sur une réflexion apportée aux réponses aux questions classiques «quoi?», «quand?», «comment?», «quoi?». On peut tenter de structurer rationnellement les différentes solutions proposées. Trois pistes doivent être explorées, le poids à accorder à chacune d'entre elles étant lié au diagnostic porté et aux objectifs assignés au processus.

1. Le *reengineering* est présenté au chapitre I, § I-3.2.2, page 72. Parmi les travaux de synthèse sur les principes de réorganisation des processus, on peut citer l'article de Hammer (1990, [214]). Les fondements théoriques de certaines propositions faites par les tenants du *reengineering* trouvent une justification originale par la théorie des files d'attente dans l'article de Peaucelle (2000, [331]).

- Il s'agit tout d'abord d'**éliminer les opérations inutiles**. Le point de vue à privilégier doit être celui de la réelle valeur ajoutée apportée par une activité au client final. De nombreux exemples peuvent être trouvés. Des opérations de pointage, d'archivage de doubles et de saisie multiple d'une même information n'ont pas de valeur pour le client; l'utilisation d'un meilleur système d'information (faisant ou non appel aux ERP / ERM¹) permet de les éliminer. Les opérations de contrôle de qualité des produits ou de prestations, source importante de délais, peuvent souvent être avantageusement remplacées par les opérations de contrôle de qualité du processus; on verra plus loin qu'une fusion de rôles permet également d'éliminer certains contrôles. Des opérations de stockage et de transport internes n'apportent pas de valeur et peuvent éventuellement être éliminées par une meilleure implantation des ressources. La mise en évidence de ces sources d'amélioration suppose l'usage de cartographies de processus dans lesquelles les activités sont qualifiées en faisant appel à typologies fondées sur cette vision de valeur ajoutée (voir ci-dessus). Il s'agit également de rajouter des **opérations manquantes** dont l'absence perturbe le bon fonctionnement du système (boucles peu justifiées, variabilité non maîtrisée de certaines opérations...): par exemple, dans certains cas, il n'existe pas de bonnes procédures pour les prises de décisions routinières.
- L'usage de cartographies de processus privilégiant le temps (voir [figure 41, page 166](#)) peut mettre en évidence la nécessité de **réduire la durée d'exécution d'un processus**. Sans toucher à la liste des opérations (ce que l'on examinera ensuite), trois pistes sont exploitables.
 - La première idée, évidente, est de chercher à jouer sur la **réduction du temps d'exécution de certaines activités** en les automatisant complètement ou partiellement (SIAD), en fournissant de meilleures informations, en appliquant, si cela est possible, les principes du SMED² pour réduire les temps de préparation d'une activité.
 - Faire plus vite connaît vite des limites, il faut alors penser à faire autrement. La durée de traitement d'un objet dans un processus dépend non seulement des temps opératoires, mais aussi de la détermination du chemin critique dont la longueur est tributaire du degré de séquentialité des activités. Il s'ensuit qu'une réduction de la dépendance entre activités, notamment par la dématérialisation de l'information, augmente potentiellement le **parallélisme** des activités et permet, si certaines de ces activités étaient critiques, de réduire le chemin critique.
 - Une dernière source de délai est liée à l'existence de files d'attente devant certaines ressources critiques. La **fluidification du processus** passe par plusieurs mesures: un meilleur ordonnancement assurant une utilisation optimale de ces ressources critiques (un stock tampon pouvant limiter la dispersion des résultats), une réduction de taille de lots de biens ou de dossiers circulant dans le système productif et une amélioration de la conception du système productif et des gammes.
- Si l'on désire diminuer la durée d'exécution d'un processus en acceptant de réviser la liste des opérations, il faut explorer une troisième piste qui consiste

1. Voir le [chapitre XIV, page 957](#), qui traite des ERP / ERM.

2. Voir le [chapitre VII, page 511](#).

à chercher à **fusionner des activités**, ce qui élimine les délais qui existaient entre ces activités. Cette fusion se heurte en général à trois types d'obstacles, chacun d'entre eux pouvant être contourné.

- Le premier obstacle est lié à la *compétence* des individus. Des actions de formation permettent d'obtenir une certaine **polyvalence** permettant un enrichissement des tâches (qui, dans le processus initial pouvaient relever de services différents). Une amélioration de l'accès aux informations pertinentes et l'usage de systèmes - experts ou de systèmes d'aide à la décision permet de reculer considérablement les limites de la polyvalence. La conséquence est une réduction sensible du nombre de personnes nécessaires à la prise en charge de toutes les opérations d'un processus (plusieurs groupes travaillant en parallèle) et l'élimination des délais induits par la séquentialité. S'il n'est pas possible d'obtenir une polyvalence permettant à une personne unique de traiter l'ensemble du processus, il est alors conseillé, pour améliorer l'efficacité du processus, de mettre les clients du processus en contact avec un interlocuteur unique, appelé parfois **gestionnaire de cas**, qui sert d'interface obligée entre le client et la personne en train de travailler pour ce client.
- Le deuxième obstacle est lié à la *complexité* ou à la *difficulté de certains problèmes* qui nécessitent des compétences pointues. Dans ce cas, la polyvalence n'est envisageable qu'au prix d'un accroissement tel du niveau de qualification requis qu'économiquement cette piste est souvent inenvisageable. Une analyse de Pareto sur le degré de complexité des traitements du processus étudié montre habituellement que cette complexité n'affecte qu'une fraction faible du volume des traitements effectués. Si le personnel mobilisé est suffisamment important, une solution efficace consiste à remplacer le processus complexe capable de traiter tous les cas de figure par quelques **processus simplifiés** couvrant plus de 90% des traitements à réaliser et à laisser les cas complexes résiduels à une cellule d'experts. Ces processus simplifiés sont confiés à des opérateurs polyvalents, selon les principes évoqués ci-dessus.

La mise en œuvre de la polyvalence et de la simplification aboutit à une *compression horizontale* de la séquence d'intervenants nécessaires à l'exécution d'un processus.

- Le dernier obstacle est lié au *contrôle hiérarchique*: dans un certain nombre de processus administratifs, on observe classiquement l'exécution d'une série de tâches de type «analyser un problème» - «proposer une solution» - «valider la décision» - «exécuter la décision» - «contrôler l'exécution», souvent confiées à deux catégories acteurs de niveaux hiérarchiques différents. Dans de nombreux cas, la **fusion de rôles** est possible sans modification des compétences requises grâce à la mise en place d'une décentralisation contrôlée de certaines décisions, d'un contrôle automatisé de certains droits et de la mise en place de procédures de gestion par exception. La mise en place de ces principes aboutit à une certaine *compression verticale* de la ligne hiérarchique.

L'exploration méthodique de ces trois pistes conduit normalement à un certain nombre d'idées pertinentes d'amélioration. Certaines d'entre elles sont condi-

tionnées par l'usage des NTIC (nouvelles technologies de l'information et de la communication) dont une démarche inductive permet mettre en évidence de nouveaux champs d'application (voir [chapitre I, page 73](#)). D'autres relèvent de logiques de réorganisation (pouvant prendre appui sur les NTIC). Les plus innovantes d'entre elles s'appuient sur une réflexion sur la possibilité de **délocaliser dans le temps et dans l'espace certains faits générateurs**. L'un des exemples proposés par Hammer et Champy (1993, [215], p. 49) illustre cette idée: le fait générateur du paiement d'un fournisseur est la commande livrée et non le rapprochement d'une facture et d'un certificat de conformité à la commande, des marchandises livrées, à condition de travailler en gestion par exception et d'avoir des fournisseurs fiables.

SECTION II L'ANALYSE D'UN PROJET D'INVESTISSEMENT

On examinera l'analyse physique d'un projet d'investissement (§ II-1) qui conditionne l'analyse économique de ce projet (§ II-2, [page 174](#)). On examinera ensuite l'impact de la précision des informations utilisées au travers d'analyses de sensibilité des résultats (§ II-3, [page 185](#)).

II-1 L'analyse physique d'un projet d'investissement

Il est utile de s'interroger sur la genèse des projets d'investissement (§ II-1.1) pour comprendre certains biais et problème que l'on rencontre classiquement. L'instruction du dossier d'investissement conduit à prendre un certain nombre de précautions méthodologiques (§ II-1.2, [page 171](#)).

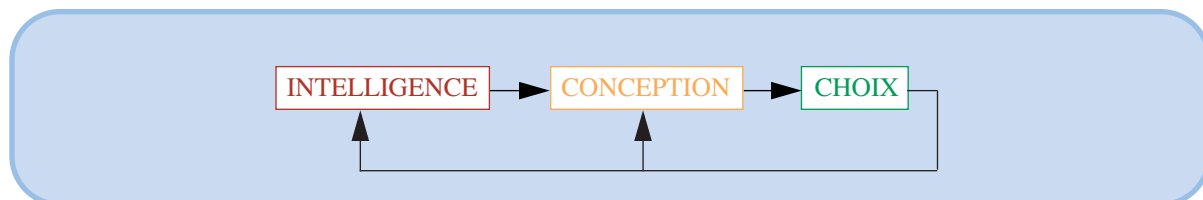
II-1.1 L'origine d'un dossier d'investissement

H.A. Simon¹ distingue trois phases dans l'analyse d'un processus décisionnel, ce que résume la [figure 42](#).

- l'étape d'*intelligence* initialise le processus par l'identification d'un problème ou d'une opportunité,
- l'étape de *conception* met en œuvre les processus d'analyse et d'élaboration de solutions envisageables pour répondre au problème posé,
- l'étape de *choix* consiste à sélectionner la meilleure des solutions trouvées.

FIGURE 42

Présentation «rationnelle» du processus de décision



Cette présentation rationnelle du processus décisionnel est très souvent abusivement considérée plus comme normative qu'analytique. Plusieurs questions importantes restent entières, notamment lorsqu'il s'agit de décisions d'investissement. La première est relative à la genèse du problème posé. Simon souligne le rôle des stimuli² qui déclenchent la prise de conscience et orientent fortement la

1. Voir Simon (1960, [388]).

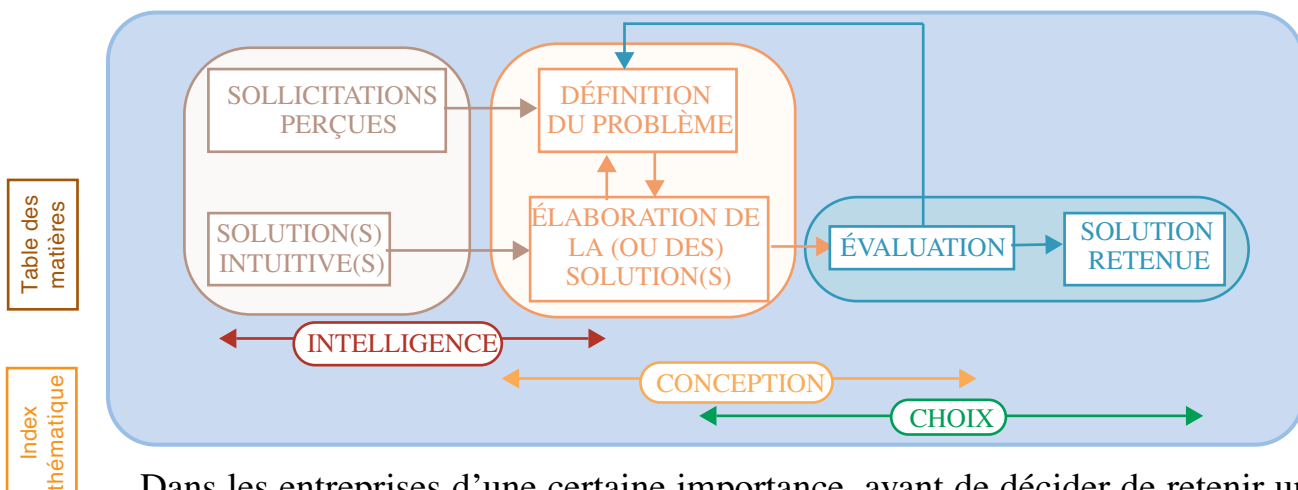
réflexion. Cette idée est reprise sous une forme différente par Pounds¹ pour qui le décideur détecte un problème par différence entre ce qu'il perçoit dans la réalité et une représentation «idéale». Pour lui, trois types de modèles sont utilisables :

- le modèle de type historique (→ «il se passe des choses différentes de ce qui se passe d'habitude»),
- le modèle de type plan (→ «il se passe des choses différentes de ce que l'on avait voulu»)
- et le modèle externe (→ «ailleurs, il se passe des choses différentes de chez nous et c'est mieux»).

On doit ajouter que l'observation montre que bien souvent, un problème est plus ou moins consciemment refoulé tant qu'aucune idée de solution ne se fait jour, ce qui donne un poids particulier au rôle du modèle externe et explique le biais important qui affecte souvent l'étape de conception. La figure 43 illustre les implications de ce point de vue.

FIGURE 43

Incidence des solutions intuitives sur la formulation d'un problème



Dans les entreprises d'une certaine importance, avant de décider de retenir un projet d'investissement, il faut d'abord monter un dossier décrivant en détail l'impact physique et organisationnel de l'investissement envisagé (§ II-1). Il faut ensuite en faire l'analyse économique (§ II-1, page 170).

II-1.2 L'instruction du dossier d'investissement

Dans les entreprises d'une certaine taille, le dossier d'investissement est instruit à l'échelon local par des ingénieurs qui proposent une solution technique à un problème. Ce dossier comporte une description des transformations physiques induites par l'investissement, notamment en ce qui concerne les flux de production; cette analyse se fonde sur un certain nombre d'hypothèses de travail, parfois implicites, qu'il convient de souligner dans le dossier pour éclairer la prise de décision². Il comporte également une valorisation de ces impacts physiques, à l'aide de données tirées de la comptabilité de gestion. Cette étude s'achève parfois

2. Note de la page précédente. Simon (1983, [389]).

1. Pounds (1969, [344]), p. 1-19.

2. Il convient de souligner que certaines hypothèses de travail sont liées à des orientations stratégiques souvent mal connues des acteurs qui instruisent les dossiers.

par le calcul d'indicateurs synthétiques (voir § III-1, page 200) ainsi que la mise en avant de certains éléments, difficilement valorisables, tels que l'amélioration de la qualité des produits ou de la fiabilité des équipements et qui seront d'autant plus facilement avancés que l'argumentaire économique semblera insuffisant pour emporter la décision.

Ce dossier est ensuite analysé à l'échelon central par un service spécialisé qui s'assurera que le dossier est cohérent avec la « ligne stratégique de l'entreprise » et vérifiera très approximativement la vraisemblance du dossier et les calculs opérés. La décision de retenir ou non le dossier est généralement prise presque immédiatement si les sommes engagées sont considérées comme relativement faibles. Elle est différée à une réunion de décision plus formelle (comité des investissements, conseil d'administration...), dans le cas contraire. Le plus souvent, il est trop tard pour remettre en cause les hypothèses du dossier ou certaines options techniques.

L'impression d'ensemble qui prévaut est double.

- On observe très souvent un attachement excessif au traitement des informations numériques du dossier et d'une attention insuffisante sur les conditions de recueil des données et aux hypothèses physiques conditionnant l'étude de rentabilité. Dans ces conditions, il n'est guère étonnant, que de nombreux dossiers d'investissement soient présentés pour corriger des effets indésirables générés par un investissement antérieur ou pour permettre d'atteindre des performances annoncées dans un dossier antérieur et qui n'ont pu être atteintes. On peut ajouter que généralement un seul point de vue est retenu dans l'analyse économique, ce qui peut biaiser la décision (cet aspect sera traité au § II-2.1.1, page 174).
- Le second constat est que la préparation du dossier d'investissement s'accompagne rarement d'une réflexion sur l'adaptation, souvent indispensable, des procédures de pilotage des flux dans le système productif, consécutivement à sa transformation. Par exemple, certains investissements de productivité introduisent des rigidités nécessitant une réorganisation du pilotage. Cette réflexion peut s'appuyer sur la simulation (cf. § I-2.1, page 148) pour tester le réalisme des hypothèses conditionnant la rentabilité du projet. De nos jours, l'instruction de dossiers d'investissement d'une certaine importance suppose donc de travailler avec deux « mailles temporelles » : une maille grossière (découpage annuel ou trimestriel) pour prévoir l'utilisation des nouveaux équipements dans une perspective d'ajustement global « charge - capacité » et une maille fine (découpage de l'ordre de la minute) pour calibrer correctement la capacité effectivement offerte en fonction des procédures et des caractéristiques de la demande.

Pour améliorer les dossiers d'investissement, des efforts doivent être entrepris dans deux directions, en plus de celles citées ci-dessus : il convient de tout mettre en œuvre pour que la vision retenue ne soit pas locale (§ II-1.2.1) et de distinguer deux phases dans la mise en service de nouveaux équipements (§ II-1.2.2, page 173).

II-1.2.1 La nécessaire prise en compte des mécanismes de propagation

La décision d'investissement, par propagation¹ de ses effets, peut rendre nécessaire l'adaptation de certaines ressources d'autres centres de décision (cf. page

157). Il est donc méthodologiquement incorrect de limiter son évaluation physique et économique du dossier, aux seules conséquences «primaires» sur le centre de décision qui est le siège de la décision initiale. C'est donc à une évaluation sur l'ensemble des centres de décision atteints qu'il faut procéder.

Les mécanismes de propagation sont relativement simples à analyser à partir d'une cartographie des flux utilisant les centres de décisions pertinents pour l'étude:

- Une décision de modification de certaines ressources (hommes, machines, procédures...) est projetée pour un centre. Elle peut induire à son tour une modification de certaines *caractéristiques des flux* émis ou reçus par ce centre (cf. [page 159](#)) aussi bien du point de vue de la nature des flux que de leurs volumes ou leurs règles de déclenchement (par exemple, passer à un approvisionnement quotidien, à nature et volume constant, peut engendrer de fortes perturbations; autre exemple, un nouvel équipement s'appuyant sur une nouvelle technologie peut nécessiter des compétences en maintenance différente de celles disponibles en interne).
- Par ricochet, ces modifications de flux entrants ou sortants peuvent perturber le bon fonctionnement des centres atteints (centres émetteurs ou destinataires) qui devront, à leur tour, prendre des *décisions d'adaptation de leurs ressources*, ce qui ramène à l'étape précédente.

Ces mécanismes posent le problème de la détermination des frontières de la propagation dans le temps et dans l'espace. Sur le plan des principes, la réponse est simple: si les modifications des caractéristiques de certains flux restent dans les limites de variabilité que les ressources du centre atteint «savent traiter» sans qu'il soit nécessaire de les modifier, la propagation potentielle induite par ce flux s'arrête.

Table des matières

Index thématique

II-1.2.2 Les phases de la transformation du processus

La décision étudiée étant une décision d'investissement, il est utile de distinguer deux phases dans l'étude des conséquences physiques des transformations des ressources (en équipements, machines, ressources informationnelles ou procédures) et qui se traduit par des variations de charges et/ou avantages par rapport au statu quo:

- du **régime transitoire** est la durée au cours de laquelle les charges (trop souvent sous-estimées) correspondent aux efforts temporaires qui doivent être supportés par le système pour passer d'un certain niveau qualitatif et/ou quantitatif de ses ressources, procédures et prestations, au niveau visé par la prise de décision¹; il s'agit des charges induites notamment par les actions de formation, la phase d'installation, de modification et de démarrage de biens d'équipement, la période d'apprentissage du personnel, la mobilisation limitée dans le temps de personnels intérimaires, d'heures supplémentaires et de moyens complémentaires...; cela dit, la distinction entre les charges ponctuelles d'adaptation, les charges du régime transitoire et les charges

1. *Note de la page précédente.* Ces mécanismes de propagation des effets d'une transformation du système productif ne doivent pas être confondus avec ceux de la propagation de perturbations se produisant en production qui seront abordés au [chapitre X, page 623](#).

1. Ce point est à rapprocher de ce que le *kaizen* appelle la maintenance des processus (voir [chapitre I, page 70](#)).

répétitives du régime de croisière n'est pas sans poser parfois des problèmes pratiques.

- le **régime de croisière**, qui suit le régime transitoire, débute lorsque toutes les caractéristiques des ressources (équipements, hommes) sont celles désirées, ainsi que celles des flux transitant par les centres de décision concernés.

Trop souvent, les dossiers d'investissement négligent le régime transitoire ainsi que les effets de propagation. À la surestimation de l'intérêt du projet qui en résulte s'ajoute une désorganisation souvent plus dommageable qu'il était possible d'éviter.

II-2 L'analyse économique d'un projet d'investissement

Le dossier d'investissement s'accompagne d'une étude économique chiffrée décrivant les conséquences économiques du projet sous forme d'échéanciers de valeurs allant jusqu'à la fin de l'horizon économique retenu. Cette étude est souvent qualifiée de **bilan économique**. Un premier problème se pose, celui du système de coûts à utiliser dans ce type d'étude. Comme on le verra (§ II-2.1), plusieurs points de vue peuvent être retenus et conduisent à des évaluations différentes.

La comparaison de projets d'investissement conduit à rechercher un indicateur synthétique (ce problème sera étudié en détail au § III-1, page 200) parmi lesquels ceux faisant appel à l'actualisation sont considérés comme les plus pertinents. L'introduction de l'actualisation dans le bilan économique conduit à ce que l'on appelle un **bilan actualisé**. Le calcul du bilan actualisé d'un projet pose le problème de la détermination de l'échéancier de **Flux Nets de Trésorerie** (notés **FNT**) d'un projet (§ II-2.2, page 176), c'est-à-dire la variation de flux de trésorerie réalisée au cours de la période t délimitée par les dates ponctuelles $t - 1$ et t ; ces informations seront ensuite résumées par l'un des indicateurs synthétiques.

II-2.1 Le système de coûts à utiliser

L'analyse physique d'un projet d'investissement met d'abord en évidence des flux de consommation de biens et de service et d'utilisation de prestations d'équipements et outillages, en plus de dépenses d'investissement. La valorisation de certains de ces flux implique l'usage d'un système de coûts sur lequel il convient de s'interroger, puisque les conventions sous-jacentes doivent être compatibles avec l'objectif retenu pour l'éclairage économique. Deux problèmes différents se posent: celui de la multiplicité des points de vue à retenir (§ II-2.1.1) et celui de la cohérence temporelle des décisions (§ II-2.1.2, page 176).

II-2.1.1 Multiplicité des points de vue et donc des conventions de comptabilité de gestion possibles

Les décisions prises par les acteurs qui instruisent ou évaluent un dossier comportent une dimension socio-organisationnelle importante (§ I-2.2, page 155) qui conduit à s'interroger sur les utilisateurs des informations produites. *L'évaluation d'une décision varie nécessairement selon le niveau d'observation de l'acteur*¹. En effet, pour un centre de décision donné, une modification du portefeuille de ressources qui lui est affecté se traduit par une modification de charges

à supporter. Cela dit, cette modification de portefeuille de ressources d'un centre ne se traduit pas forcément par une modification équivalente et immédiate pour l'entreprise.

Pour illustrer ce point, prenons l'exemple d'un centre de décision donné où un investissement de productivité peut s'accompagner d'une diminution du nombre d'ouvriers nécessaires se traduisant par une diminution de charges d'exploitation :

- Pour le *responsable de ce centre* (et donc sur un périmètre spatial étroitement défini), l'économie de personnel que permet l'investissement se traduit par une diminution de ses charges d'exploitation. L'usage de ce mode d'évaluation conventionnel, s'appuyant largement sur des *coûts standards*, constitue une incitation puissante à l'amélioration continue des performances de l'entreprise.
- Si l'on considère maintenant le point de vue du *propriétaire de l'entreprise* et donc si l'on élargit le périmètre spatial à l'ensemble de l'entreprise, les conclusions sont plus nuancées et peuvent même être radicalement différentes. Cette remise à disposition de personnel peut conduire à un licenciement du personnel devenu inutile (auquel cas, il y a coïncidence d'évaluation) ou à une nouvelle affectation de ce personnel (avec ou sans formation complémentaire) en remplacement du personnel partant en retraite ou, enfin, à un maintien en activité de ce personnel « surnuméraire » sans qu'il y ait une utilité technique réelle (mais, une utilité sur le plan du climat social). Au niveau de l'entreprise, il ne faut donc retenir que les *modifications effectivement observables de flux de trésorerie* dont on est certain en réalisant le projet.

Table des
matières

Index
thématique

Cette double approche est indispensable et la vérité économique se situe quelque part entre les deux évaluations. En effet, la « consolidation » d'une décision permettant de diminuer d'une demi-personne-année-travail la charge d'un centre, par toute autre décision prise ailleurs et ayant des effets similaires, peut permettre une économie en flux de trésorerie qu'aucune de ces deux décisions ne permet à elle seule d'atteindre. Ces deux évaluations économiques de la décision seront d'autant plus proches que le degré de synergie de l'ensemble des décisions stratégiques prises sera élevé. Les conséquences de tels effets de synergie échappent, en général, à l'analyse du projet étudié. Cette incapacité à planifier des projets à partir d'une consolidation des réalisations passées et d'une anticipation des choix futurs conduit souvent à une gestion myope de la stratégie de l'entreprise : beaucoup de projets n'ont de sens que parce qu'ils préparent d'autres projets à venir dont les gains et les avantages retirés justifieront les premières décisions. On peut noter enfin que cette double logique d'évaluation économique des décisions s'articule parfaitement avec la tendance organisationnelle actuelle des entreprises qui consiste à motiver et responsabiliser les acteurs en leur fournissant des outils locaux de gestion et d'évaluation (tableaux de bord d'indicateurs...) et, en même temps, à les inciter à adopter des stratégies d'amélioration de performances globales de l'entreprise (qualité « totale », délai de fabrication...) au prix même d'une dégradation de performances locales.

1. Une discussion approfondie de ce problème peut être trouvée dans l'article de Fray et Giard (1990, [134]). Ce point a déjà été abordé au [chapitre II, § II-2.2, page 121](#).

À partir d'une même quantification en volume, les actions d'adaptation des ressources et leurs conséquences sur le fonctionnement du système productif devrait toujours être valorisées suivant une logique de coûts conventionnels et suivant une logique de coûts de «trésorerie». Quelques principes simples peuvent être énoncés pour déterminer de tels coûts, dans chaque centre de décision concerné.

- En cas de *modification d'utilisation des ressources disponibles* dans un centre :
 - le coût conventionnel doit être calculé sur la base du potentiel disponible et non sur celle du potentiel réellement utilisé; cette règle a pour effet de permettre sans difficulté une agrégation par simple additivité de charges calculées selon cette méthode et d'autoriser un calcul économique non ambigu de la marge de manœuvre résiduelle du centre;
 - le coût de trésorerie d'une telle modification de ressources physiques ou informationnelles disponibles est nul.
- En cas de variation d'utilisation de *flux de prestations de services*, il convient, pour éviter une double comptabilisation des charges, d'affecter conventionnellement les coûts de variation de flux de prestations de service ou d'informations au CD qui les produit, de préférence au CD qui les consomme parce qu'il y a plus de chances que les éléments constitutifs de ces coûts soient mieux connus au niveau du centre produisant les prestations.
- Dans le cas d'*achat ou de vente à l'extérieur de l'entreprise*, il y a coïncidence entre le coût conventionnel et le coût de trésorerie.

II-2.1.2 Conventions comptables et cohérence temporelle des décisions

Il ne suffit pas de prendre en compte correctement la multiplicité des points de vue à retenir, il faut en outre vérifier dans quelle mesure les conventions comptables utilisées permettent d'assurer un minimum de cohérence temporelle des décisions.

Le projet d'investissement étudié peut se caractériser par un périmètre restreint, en ce sens que les ressources mobilisées sont essentiellement celles étudiées dans le projet d'investissement, ce qui est généralement le cas si l'on est en présence d'un investissement de remplacement. Par contre, lorsque le projet porte sur le lancement d'un produit nouveau, habituellement, la fabrication envisagée fait en partie appel à des équipements existant et utilise des composants que fabrique déjà l'entreprise. Le système de prix de cession utilisé dans l'analyse économique de tels projets n'est pas neutre à la fois sur la rentabilité du projet et sur la cohérence temporelle des décisions. Ces problèmes sont traités au [chapitre II, § IV-1, page 228](#) où l'on montre que la cohérence temporelle des décisions passe par l'usage de l'amortissement économique.

II-2.2 Détermination des flux nets de trésorerie (FNT) à prendre en compte dans les bilans actualisés

Le bilan effectué est nécessairement un bilan différentiel (§ II-2.2.1) qui oblige à bien spécifier une solution de référence. Quelle que soit la technique utilisée pour évaluer les conséquences financières du projet, celles-ci peuvent être décrites par leurs incidences sur les comptes de résultat et sur les bilans comptables (§ II-

2.2.2, page 177). On examinera enfin comment prendre en compte l'inflation dans la détermination des flux et les calculs d'actualisation (§ II-2.2.3, page 182).

II-2.2.1 Le principe du bilan différentiel

L'analyse d'une décision managériale doit s'effectuer par comparaison à une décision alternative que l'on considère comme une solution de référence. Implicitement il y a toujours au moins une solution de référence qui est du type «ne pas prendre de décision et subir passivement les modifications de l'environnement technico-économique». Décider de faire quelque chose à un moment donné avec certains moyens, c'est renoncer à faire autre chose au même moment avec ces mêmes moyens. L'analyse économique d'un investissement conduit donc à définir explicitement une solution alternative de référence¹. La comparaison des conséquences physiques (ou financières) du projet d'investissement s'effectue donc par une analyse des variations physiques (ou financières) induites par la solution nouvelle, par rapport à cette solution de référence. On utilise l'expression **bilan différentiel** pour décrire ce type d'analyse, le terme bilan étant à prendre dans son acception générale et non comptable. Dans cette analyse, il n'est pas nécessaire de tout expliciter puisqu'en définitive seuls comptent les éléments qui sont modifiés par les décisions prises. Le raisonnement différentiel limite le recueil des données à opérer, mais reste très fortement conditionné par le choix de la solution de référence.

II-2.2.2 La traduction comptable des flux de trésorerie

La variation de flux nets de trésorerie ΔFNT_t de la période t , c'est-à-dire la variation de flux de trésorerie réalisés au cours de la période t (délimitée par les dates ponctuelles $t-1$ et t) et obtenue par différence entre les Flux Nets de Trésorerie $FNT_{t,1}$ de la solution étudiée et les Flux Nets de Trésorerie $FNT_{t,0}$ de la solution de référence ($\Delta FNT_t = FNT_{t,1} - FNT_{t,0}$), sont liés à :

- à la comparaison, entre les deux solutions, des opérations d'exploitation réalisées au cours de cette période t et se traduisant par des variations de flux nets de trésorerie ΔFNT_t^c décrites au compte de résultats (§ II-2.2.2.1) et correspondant à la **variation de la capacité d'autofinancement de l'exercice** pour l'entreprise; la longueur de l'exercice joue un rôle important car sa plus ou moins grande amplitude autorise ou non des compensations entre flux de sens contraire; dans l'exemple présenté, on retiendra la période annuelle qui correspond à des traditions comptables bien établies, mais rien n'empêche de retenir dans les calculs une période plus courte, en particulier pour analyser le régime transitoire associé au démarrage d'un investissement;
- à la comparaison, entre les deux solutions, des opérations d'investissement et / ou de financement réalisées au cours de cette période t et se traduisant par des variations de flux de trésorerie ΔFNT_t^b décrites par le rapprochement des bilans établis aux dates $t-1$ et t (§ II-2.2.2.2, page 181).

La variation de flux net de trésorerie ΔFNT_t théoriquement observable sur la période t est donc :

1. Ce principe a été mis en avant par Clark après la première guerre mondiale dans un ouvrage resté célèbre (1923, [95]).

$$\Delta FNT_t = \Delta FNT_t^c + \Delta FNT_t^b \quad \text{relation 13}$$

La variation de Flux Nets de trésorerie Actualisés $\Delta FNTA$ de la solution étudiée en comparaison avec la solution de référence, correspond à valeur actualisée, à la date 0 et pour le taux d'actualisation α , de cet échéancier ΔFNT_t de flux nets de trésorerie :

$$\Delta FNTA = \sum_{t=0}^T \frac{\Delta FNT_t}{(1+\alpha)^t} = \sum_{t=0}^T \frac{\Delta FNT_t^c}{(1+\alpha)^t} + \sum_{t=0}^T \frac{\Delta FNT_t^b}{(1+\alpha)^t} = \Delta FNTA^c + \Delta FNTA^b \quad \text{relation 14}$$

II-2.2.2.1 Les flux nets de trésorerie décrits à travers le compte de résultat

Examinons la variation du compte de résultat prévisionnel d'une entreprise consécutive à une décision d'investissement et / ou de financement. En pratique, il est conseillé d'isoler les variations consécutives à chaque décision et notamment de *dissocier les projets d'investissement, des projets de financement*. La structure de ce compte que nous utiliserons ici est simplifiée, mais on y retrouve le modèle comptable classique de détermination de la capacité d'autofinancement de l'exercice, en supposant que l'impôt de l'exercice est calculé et versé en fin d'exercice (on lèvera cette hypothèse simplificatrice ultérieurement).

La démarche suivie est illustrée dans le [tableau 9](#), qui décrit les notations utilisées. Ce tableau comporte les calculs pour la solution de référence, la solution nouvelle et la différence des solutions; il fournit également l'expression analytique à utiliser pour calculer la variation de flux de trésorerie imputable au compte de résultat dans le cas des hypothèses simplificatrices retenues.

La variation ΔFNT_t^c du flux net de trésorerie théoriquement observable sur le compte de résultat au cours de l'année t est donc :

$$\Delta FNT_t^c = \theta \Delta A_t + (1 - \theta) [\Delta P_t - (\Delta D_t + \Delta F_t)] \quad \text{relation 15}$$

Cette [relation 15](#) amène neuf remarques.

a) On en déduit immédiatement ([relation 16](#)) la variation $\Delta FNTA^c$ des flux nets de trésorerie actualisés observable sur le compte de résultat :

$$\Delta FNTA^c = \theta \Delta FNTA^c_{\text{Amortissement } A} + (1 - \theta) [\Delta FNTA^c_{\text{Produits } P} - (\Delta FNTA^c_{\text{Dépenses } D} + \Delta FNTA^c_{\text{Frais financiers } F})] \quad \text{relation 16}$$

b) L'incidence sur la trésorerie de la variation des postes est correctement prise en compte par la [relation 15](#), ce qui implique que chaque variation doit bien être calculée sur la base de la différence des montants positifs de la solution nouvelle et de la solution de référence, sans tenir compte du fait que le poste considéré correspond normalement à un encaissement ou à un décaissement. C'est ainsi que la variation de dépenses est, dans l'exemple, $\Delta D_t = -7$ (ce qui correspond à une économie de dépenses), dont l'incidence finale est, d'après la formule $-(1 - \theta) \Delta D_t$, ce qui a un impact positif sur le flux de trésorerie en cas d'économie de dépenses et un impact négatif, dans le cas contraire.

c) Le projet étudié peut impliquer de ne prendre en compte que certaines des variables introduites (A_t , P_t , F_t et D_t): par exemple, un investissement de productivité pure ou un problème de choix entre des variantes de financement

TABLEAU 9
Les flux nets de trésorerie décrits dans le compte de résultat (simplifié)

		Solution <i>i</i>		Δ (différence)
		de référence (<i>i</i> = 0)	nouvelle (<i>i</i> = 1)	
Produits	Produits P_t	$P_{0t} = 200$	$P_{1t} = 202$	$\Delta P_t = P_{1t} - P_{0t}$ $= + 2$
Charges	Dépenses courantes d'exploitation D_t	$D_{0t} = 100$	$D_{1t} = 93$	$\Delta D_t = D_{1t} - D_{0t}$ $= - 7$
	Amortissement (+ provisions) A_t	$A_{0t} = 50$	$A_{1t} = 60$	$\Delta A_t = A_{1t} - A_{0t}$ $= + 10$
	Frais financiers F_t	$F_{0t} = 20$	$F_{1t} = 24$	$\Delta F_t = F_{1t} - F_{0t}$ $= + 4$
	Revenus soumis à impôt sur les sociétés (IS) au taux θ : $P_t - (D_t + A_t + F_t)$	$200 - (100 + 50 + 20)$ $= 30$	$202 - (93 + 60 + 24)$ $= 25$	$2 - (-7 + 10 + 4)$ $= - 5$
	Impôt sur les sociétés $M_t = \theta[P_t - (D_t + A_t + F_t)]$ M_t	$M_{0t} = 12$	$M_{1t} = 10$	$\Delta M_t = M_{1t} - M_{0t}$ $= - 2$
	Résultat après impôt $B_t = (1 - \theta)[P_t - (D_t + A_t + F_t)]$ B_t	$B_{0t} = 18$	$B_{1t} = 15$	$\Delta B_t = B_{1t} - B_{0t}$ $= - 3$
<p>ΔFNT_t décrit dans le compte de résultats (= variation de la capacité d'autofinancement de l'exercice):</p> $\Delta FNT_t = \Delta A_t + \Delta B_t = \Delta A_t + (1 - \theta)[\Delta P_t - (\Delta D_t + \Delta A_t + \Delta F_t)]$ $= \theta \Delta A_t + (1 - \theta)[\Delta P_t - (\Delta D_t + \Delta F_t)]$ <p>Application: $0,4 \times 10 + 0,6 \times [2 - (-7 + 4)] = +10 - 3 = + 7$</p>				

Table des matières

Index thématique

- d'un équipement (achat, location, leasing...) n'ont aucun impact sur les produits (P_t), une solution de location n'a aucun impact sur les frais financiers (F_t) et les amortissements (A_t), etc.
- d) La variation du FNT_t imputable aux dépenses F_t et D_t peut se décomposer en $(-\Delta F_t + \theta \Delta F_t)$ pour les frais financiers et $(-\Delta D_t + \theta \Delta D_t)$ pour les dépenses courantes d'exploitation. Dans la mesure où la solution nouvelle accroît la valeur de ces dépenses, on considère que l'impact réel de ces accroissements de dépense sur la variation de FNT_t est $(-\Delta F_t - \Delta D_t)$ diminué de $(\theta \Delta F_t + \theta \Delta D_t)$. Cette dernière expression s'analyse comme une économie d'impôt sur les sociétés. Autrement dit, le fait d'atténuer le montant de l'assiette de l'impôt de $\Delta F_t + \Delta D_t$, fait que l'on paiera $\theta (\Delta F_t + \Delta D_t)$ d'impôt en moins. Cette économie d'impôt n'est réalisée que si l'exercice est bénéficiaire dans la solution de référence et dans la solution nouvelle, sinon une analyse spécifique s'impose.
- e) Une analyse similaire pour les amortissements montre que l'accroissement d'amortissement ΔA_t conduit à une diminution de même ampleur de l'assiette de l'impôt $(-\Delta A_t)$, et donc à une économie d'impôt de $\theta \Delta A_t$, ou, ce qui revient au même, à une variation du bénéfice après impôt imputable au seul ΔA_t , de $-(1 - \theta) \Delta A_t$. Mais ici, à la différence des postes D_t et F_t , l'amortissement est une composante «directe» du FNT_t , ce qui fait que l'impact de la variation des dotations d'amortissement est $\Delta A_t - (1 - \theta) \Delta A_t = \theta \Delta A_t$; ce

dernier terme s'analyse donc à la fois comme une économie d'impôt par la variation des amortissements et comme l'incidence finale de la variation des amortissements sur celle du flux net de trésorerie.

- f) La **relation 15** reste valable en *cas d'absence d'impôt sur les bénéfices* ($\theta = 0 \Rightarrow (\Delta FNT_t^c = [\Delta P_t - (\Delta D_t + \Delta F_t)])$) ce qui peut être le cas de certains «organismes public» procédant à des bilans actualisés ou d'une analyse que l'on souhaite conduire «hors incidence fiscale».
- g) En cas de *versement de l'impôt sur les bénéfices à une date différente de celle de clôture de l'exercice* (par exemple, paiement d'impôt sur les sociétés au 31 mars pour un résultat calculé sur l'exercice civil de l'année antérieure), il est nécessaire de calculer séparément la variation du montant de l'impôt sur les sociétés qui est, d'après ce qui a été vu dans le **tableau 9 de la page 179**:

$$\Delta FNTA_{ImpotsM}^c = \theta[\Delta P_t - (\Delta D_t + \Delta A_t + \Delta F_t)] \quad \text{relation 17}$$

Ce raffinement implique l'usage d'un découpage temporel plus fin et s'inscrit naturellement dans le cadre d'analyses plus fines des recettes et dépenses, ce que l'on va voir maintenant.

- h) On peut vouloir travailler directement sur des flux de dépenses ou de recettes dont la périodicité n'est pas annuelle (salaires mensuels, charges trimestrielles, etc.), sans agrégation de ces valeurs pour les ramener ponctuellement en fin de période. On combine alors les démarches ayant conduit à la **relation 16 de la page 178** (actualisation séparée de ces flux) et à la **relation 17** (explicitation de l'impôt sur les sociétés, qui implique le calcul du cumul des flux sécrétés au cours de l'exercice fiscal). La variation $\Delta FNTA^c$ des flux nets de trésorerie actualisés observable sur le **compte de résultats** est donnée par la **relation 18**, dans laquelle les différents $\Delta FNTA$ d'un poste donné (produits, dépenses, etc.) sont, en réalité, le cumul des FNTA des composantes élémentaires de ce poste sur lesquelles on a voulu travailler.

$$\Delta FNTA^c = \Delta FNTA_{Produits}^c P - (\Delta FNTA_{Dépenses}^c D + \Delta FNTA_{Frais financiers}^c F + \Delta FNTA_{ImpotsM}^c) \quad \text{relation 18}$$

- i) Cette **relation 18** implique que la variation $\Delta FNTA^c$ des flux nets de trésorerie actualisés observable sur le **compte de résultats** est la différence de la variation des flux nets de trésorerie «hors impôt sur les sociétés» ($\theta = 0$) observable sur le **compte de résultats** et de la variation des flux d'impôt sur les sociétés (donnée par la **relation 17**).

Exemple: Supposons, par exemple, que l'on étudie un projet d'investissement dont l'horizon économique est de 4 ans et qui se caractérise, par rapport à la solution de référence, par une variation d'amortissement de +500, une variation mensuelle de recettes ΔP_t de +5 et une variation mensuelle de dépenses «courantes» d'exploitation ΔD_t de -10 (économie de dépense); supposons en outre que le taux d'imposition θ soit de 40% et que le taux (annuel) d'actualisation soit de 10%. Comparons les deux raisonnements étant entendu que, dans les deux cas, il faut ensuite tenir compte de l'incidence des flux nets intervenant au bilan (cf. § II-2.2.2.2).

- *Raisonnement sur flux annualisés*: les variations annuelles sont: $\Delta P_t = 5 \times 12 = 60$, $\Delta D_t = -10 \times 12 = -120$, $\Delta A_t = 500$, $\Delta M_t = 0,4 \times [60 - (-120 + 500)] = -128$ (ce qui s'interprète comme une économie d'impôt). Le raisonnement s'appuyant sur des flux annuels de fin de période conduit à actualiser un échéancier constant de $0,4 \times 500 + 0,6 \times$

$(60+120) = 308$ (en application de la [relation 15](#), page 178). La valeur actualisée à 10 % de cet échéancier est 976,32. On peut ajouter :

- que l'on aurait pu faire également appel à la [relation 18](#) : la valeur actualisée de l'échéancier annuel de variation de recettes (60) est 190,19, celle l'échéancier mensuel de variation de dépenses (- 120) est $-(-380,38) = 380,38$, tandis que celle l'échéancier annuel de variation d'impôt reste inchangée (405,74); ceci conduit bien à $\Delta FNTA^c = 976,32$;
- que cette valeur actualisée est proche de celle qui sera obtenue en partant des flux réels; ceci explique, compte tenu de la précision des données manipulées que l'on travaille souvent sur des flux annualisés.
- *Raisonnement s'appuyant sur les flux réels*: on est alors conduit à utiliser le taux d'actualisation mensuel $1,1^{1/12} - 1 = 0,797414\%$. La valeur actualisée de l'échéancier mensuel de variation de recettes (+ 5) est 198,76, celle l'échéancier mensuel de variation de dépenses est $-(-397,52) = 397,52$ et celle l'échéancier annuel de variation d'impôt (- 128) est 405,74, ce qui conduit à $\Delta FNTA^c = 1002,02$.

II-2.2.2.2 Les flux nets de trésorerie décrits à travers le bilan

La variation ΔFNT_t^b du flux net de trésorerie théoriquement observable sur la variation de bilan entre les bilans de début et de fin de l'année t est imputable à :

- La **variation d'investissement** réalisé l'année t entre la solution nouvelle et la solution de référence induit une variation de décaissement $\Delta(-I_t)$ trouvant immédiatement sa contrepartie dans une variation des immobilisations de l'actif. Ces investissements n'interviennent que certaines années et peuvent ne pas concerner la solution de référence. Du point de vue de la trésorerie, l'investissement se traduit par un décaissement et donc *directement* par un flux de trésorerie *négatif*. Supposons, par exemple, que, dans la solution de référence, les investissements prévus s'élèvent à 320 et à 350, dans la solution nouvelle; la variation du flux net de trésorerie imputable à l'investissement sera donc: $\Delta(-I_t) = (-350) - (-320) = -30$, ce qui correspond bien à l'accroissement de décaissements lié au remplacement de l'investissement de la solution de référence par celui de la solution nouvelle. Par ailleurs, ces investissements donnent lieu ensuite à des amortissements au bilan, mais ceux-ci sont déjà comptabilisés dans le compte de résultat¹. Bien entendu, la revente d'un équipement est à considérer comme une opération symétrique de celle de son acquisition (et donc avec un flux de trésorerie positif). La même notation I_t est donc utilisée pour tous les flux d'achat ou de revente d'équipements. On peut ajouter que ces opérations ont une incidence sur la détermination des impôts et taxes calculés sur la base de la valeur nette comptable (impôts pris en compte dans les dépenses d'exploitation D_t).
- Le produit E_t d'un **emprunt** réalisé l'année t correspond à un flux de trésorerie *positif* qui provoque des variations simultanées et d'amplitude égale de postes de l'actif et du passif (valeurs réalisables ou disponibles et des dettes à long et moyen terme). Au cours de l'année t , on peut, au contraire, rembourser une partie de l'emprunt pour un montant E_t (auquel s'ajoutent les frais financiers pris déjà en compte dans le compte de résultat), ce qui corres-

1. Si les solutions nouvelles et de référence ne diffèrent que sur deux variantes d'un même équipement, mis en service à une même date et amortis de la même manière, il est alors évident que les signes du ΔI_t et des ΔA_t , pour les périodes t où les amortissements interviennent, sont inverses.

pond à un flux de trésorerie *négalif* E_t (la même notation E étant utilisée pour tous les flux d'emprunt ou de remboursement de l'emprunt). Dans le bilan économique, c'est la différence ΔE_t entre les valeurs de la solution nouvelle et de la solution de référence qui sera prise en compte.

- Certaines décisions (caution d'une location par exemple) peuvent entraîner des «*immobilisations de disponibilités financières*», et donc une diminution de la trésorerie disponible, les sommes gelées étant théoriquement récupérables la dernière année de l'horizon économique retenu, et de ce fait incluses dans le flux net de trésorerie de la dernière année. Ces investissements financiers, notés G_t , correspondent notamment aux dépôts de garantie et à leurs ajustements (rendus nécessaires par l'inflation, en particulier) qui se traduisent par un transfert de créances (diminution de «Banque et caisse», et donc un flux de trésorerie négatif, compensée par un accroissement de «créances sur tiers»). Doit être également considéré comme investissement financier, l'accroissement du besoin en fonds de roulement directement lié à la décision étudiée et qui est rendu nécessaire par l'accroissement de l'activité et/ou de l'inflation. Dans le bilan économique, c'est la différence ΔG_t entre les valeurs de la solution nouvelle et de la solution de référence qui sera prise en compte.

L'impôt sur les sociétés n'affecte en rien les variations de postes du bilan. L'incidence finale ΔFNT_t^b des variations des postes du bilan sur la variation de flux net de trésorerie entre les deux solutions étudiées est donc :

$$\Delta FNT_t^b = \Delta(-I_t) + \Delta G_t + \Delta E_t \quad \text{relation 19}$$

On en tire la relation générale suivante :

$$\Delta FNT_t = [\theta \Delta A_t + (1 - \theta)(\Delta P_t - (\Delta D_t + \Delta F_t))] + [\Delta I_t + \Delta G_t + \Delta E_t] \quad \text{relation 20}$$

II-2.2.3 La prise en compte de l'inflation

Quand elle n'est pas négligeable, l'inflation est la source de bien des malentendus en gestion car elle biaise toutes les informations chiffrées disponibles pour des périodes différentes (bilan, compte d'exploitation générale, études économiques prospectives). Sa prise en compte dans les calculs de bilans actualisés peut se faire, sous certaines conditions, en raisonnant à partir des données réelles, c'est-à-dire en euros courants (§ II-2.2.3.1). On peut également raisonner sur des unités monétaires qui gardent le même pouvoir d'achat (§ II-2.2.3.2, page 183). Parfois certains calculs sont effectués en supposant que les prix sont stables (§ II-2.2.3.3, page 185), ce qui a peu de chances d'être correct.

II-2.2.3.1 Le raisonnement en euros courants

Prenons l'exemple d'un projet d'investissement en cours d'exécution au cours du second semestre 2001, conduisant à une mise en service au 1^{er} janvier 2002 pour une exploitation durant 5 ans (2002 à 2006). Les dépenses annuelles d'exploitation de l'année 2002 sont les suivantes, exprimées aux conditions économiques du 30 juin 2001: dépenses de matières = 200, dépenses de main-d'œuvre = 500. Si l'on prévoit, pour les années à venir, un taux moyen d'inflation de 5% pour le poste «matières» et de 8% pour le poste «main-d'œuvre», les

dépenses prévisionnelles pour 2006 (exprimées en unités monétaires de cette époque), soit 5 ans plus tard, sont :

$$x_{2006} = 200 \times 1,05^{2006-2001} + 500 \times 1,08^{2006-2001} = 989,92$$

Supposons que le taux d'actualisation à utiliser pour le bilan actualisé soit de 10% /an, ce taux étant exprimé en euros courants (c'est-à-dire non corrigé de l'inflation), la valeur actualisée \overline{x}_{2006} de x_{2006} est :

$$\overline{x}_{2006} = 989,92 \times 1,1^{2001-2006} = 989,92 \times 1,1^{-5} = 614,66$$

Un tel raisonnement, retracé dans les avant-dernières colonnes des tableaux 10 et 11, ne maniant que des grandeurs effectivement observables aux différentes périodes, est dit **raisonnement en euros courants**.

TABLEAU 10
Prévisions de dépenses en euros courants et en euros constants

Postes de dépense	Coût annuel au 30 juin 2001	Taux d'inflation prévisionnel	Dépenses prévisionnelles au 30 juin 2003 exprimées en	
			euros courants du 30 juin 2006 (F ₂₀₀₆)	euros constants du 30 juin 2001 ¹ (F ₂₀₀₁)
Matières	200	5% an	$200 \times 1,05^5 = 255,26$	$255,26 \times 1,07^{-5} = 181,99$
main-d'œuvre	500	8% an	$500 \times 1,08^5 = 734,66$	$734,66 \times 1,07^{-5} = 523,81$
Total	700	7% an ²	989,92 F ₂₀₀₆	705,80 F ₂₀₀₁

1. Voir explication au § II-2.2.3.2.

2. Voir explication au § II-2.2.3.2.

TABLEAU 11
Actualisation avec taux exprimés en euros courants et en euros constants

Taux d'actualisation	10% an en euros courants	$1,1/1,07 - 1 = 2,804\%$ an en euros constants ¹
Valeur actuelle au 30 juin 2001 de la dépense du 30 juin 2006	$989,92 \times 1,1^{-5} = 614,66$	$705,80 \times 1,028^{-5} = 614,66$

1. Voir explication au § II-2.2.3.2, page 183.

II-2.2.3.2 Le raisonnement en euros constants

Dans le **raisonnement en euros constants**, ce qui est constant c'est un certain pouvoir d'achat attaché à l'unité monétaire. Ce pouvoir d'achat dépend de la structure de consommation choisie, il est donc très variable d'un pays à l'autre ou d'une entreprise à une autre. L'indice de prix retenu dans un bilan actualisé dépendra donc de l'objectif retenu par celui qui effectue l'étude. Supposons, dans notre exemple, qu'il a été décidé de retenir l'indice des prix du Produit Intérieur Brut (auquel il est très souvent fait appel en pratique), pour exprimer le bilan actualisé en euros de juin 2001 (on dit encore : aux conditions économiques de juin 2001) et que la prévision moyenne faite pour le taux d'inflation du PIB soit de 7% /an.

Les dépenses de main-d'œuvre de 2006 doivent être calculées à partir d'une dérive de prix qui n'est plus absolue, mais relative : si 500 croissant au taux de 8%

pendant 5 ans font 734,66, cette dernière valeur doit être modifiée pour tenir compte du fait que 1 euro de l'année 2001 est équivalent à $(1,07^5 =) 1,40$ euro en 2006, ou, ce qui revient au même, que 1 euro en 2006 est égal à $(1 / 1,4026 = 1,07^{-5} =) 0,7130$ euro en 2001. Les dépenses de main-d'œuvre de 2006 s'élèveront donc à $734,66 \times 0,7130 = 523,82$ euros constants 2002. Ceci peut encore s'écrire : $\frac{500 \times 1,08^5}{1,07^5} = 500 \times \frac{1,08^5}{1,07^5} = 500 \times 0,00935^5$. Tout se passe comme si, au lieu d'affecter les dépenses de main-d'œuvre d'une dérive absolue de 8% / an, on avait utilisé une dérive de prix relatifs de 0,935% / an.

Un calcul analogue pour les dépenses de matières conduit à prévoir, pour ce poste (voir [tableau 10, page 183](#)), une dépense en euros constants de 181,99. Autrement dit, c'est une dérive de prix relatifs de $-1,869\%$ / an que l'on doit utiliser pour la matière dans le cadre d'un raisonnement en euros constants.

On peut systématiser la recherche du taux de dérive relative j , à partir du taux d'inflation h du poste considéré et du taux d'inflation i de la consommation de référence choisi (appelé encore déflateur) : $(1 + j) = \frac{1 + h}{1 + i}$. On en déduit :

$$j = \frac{h - i}{1 + i} \quad \text{relation 21}$$

Pour des taux faibles de i (disons inférieurs à 10%), ce taux de dérive relative peut raisonnablement s'approximer, pour des calculs sommaires, comme la différence entre le taux d'inflation h et le taux d'inflation i (ce qui aurait donné ici 1% au lieu de 0,935% et -2% au lieu de $-1,869\%$).

Pour terminer le calcul du bilan actualisé en euros constants, on doit actualiser $523,81 + 181,99 = 705,80$, en utilisant un taux d'actualisation exprimé lui aussi en euros constants, c'est-à-dire un taux de : $\frac{0,1 - 0,07}{1 + 0,07} = 0,02804 = 2,804\%$, ce qui donne : $\overline{x}_{1996} = 705,80 \times 1,02804^{1991 - 1996} = 614,66$

Ce dernier résultat est strictement identique à celui trouvé au § II-2.2.3.1, ce qui, à la réflexion, ne devrait pas étonner car :

$$200 \times \left[\frac{1,05}{1,10} \right]^5 + 500 \times \left[\frac{1,08}{1,10} \right]^5 = 200 \times \left[\frac{1,05/1,07}{1,10/1,07} \right]^5 + 500 \times \left[\frac{1,05/1,07}{1,10/1,07} \right]^5$$

Certains postes, comme celui des amortissements, restent par définition en euros courants. Le raisonnement en euros constants implique de les corriger de l'incidence de l'inflation avant d'utiliser le taux d'actualisation en euros constants. Par exemple, une économie d'impôt réalisée du fait d'un accroissement d'amortissement, qui s'élèverait à 1000 en 2006 est équivalente à une somme de 713 euros constants aux conditions économiques de 2002 et conduit à une valeur actualisée de $713 \times 1,02804^{-5} = 620,91$ euros en 2002¹. *Contrairement à ce que pensent certains praticiens, le raisonnement en euros constants ne dispense pas de faire explicitement une prévision d'inflation sur l'horizon considéré.*

II-2.2.3.3 Le raisonnement à prix constants

Dans le **raisonnement à prix constants**, les dépenses prévisionnelles de main-d'œuvre et de matières en 2006 sont respectivement de 500 et de 200. Seulement la comparaison directe entre ces 2 grandeurs n'a plus guère de sens et a fortiori leur sommation, car les prix relatifs ont changé, et donc la position d'un certain nombre de problèmes (il suffit pour s'en persuader de réfléchir à l'impact de l'évolution des prix relatifs du KW nucléaire par rapport au KW thermique). En outre, le taux d'intérêt ou le taux d'actualisation à utiliser dans un raisonnement à prix constant est difficile à définir, car l'utilisation de taux exprimés en euros courants intègre implicitement l'inflation, tandis que la définition d'un taux exprimé en euros constants pose le problème du déflateur à retenir, c'est-à-dire de la structure de consommation implicitement considérée en référence; d'une certaine façon, le choix d'un taux exprimé en euros constants n'est pas compatible avec la logique du raisonnement à prix constants.

En définitive, il convient de s'abstenir du raisonnement à prix constants.

II-3 Les analyses de sensibilité du projet d'investissement

Après avoir présenté le problème méthodologique posé (§ II-3.1), on examinera les analyses de sensibilité en univers certain (§ II-3.2, page 187) puis en univers aléatoire (§ II-3.3, page 190). On verra enfin (§ II-3.4, page 196) comment optimiser certains paramètres d'un projet d'investissement dont certaines caractéristiques sont définies en probabilité.

Table des
matières

II-3.1 Présentation du problème

L'analyse d'un dossier d'investissement s'appuie sur:

- des données techniques (caractéristiques physiques des équipements que l'on envisage d'acheter, de supprimer ou de réaffecter, des anciennes et nouvelles gammes de fabrication, etc.);
- une analyse différentielle des flux affectés par la transformation envisagée des processus, se traduisant par des échéanciers de variation de consommation de composants et de matières premières, de productions et de ventes;
- des informations de coûts et, éventuellement, de prix permettant une valorisation des données physiques du dossier.

Index
thématique

La synthèse économique de ces informations s'effectue classiquement sur une feuille de calcul d'un tableur. On est alors en présence d'une modélisation simplifiée de la réalité dans laquelle les hypothèses retenues se traduisent par des valeurs assignées à des cellules de la feuille de calcul (paramètres) et par des mécanismes de calcul en chaîne aboutissant aux indicateurs retenus pour éclairer la prise de décision, principalement le Flux Net de Trésorerie Actualisé (FNTA) et le Taux de Rentabilité Interne (TRI), qui sont définis comme valeurs calculées dans des cellules de la feuille de calcul (résultats). Cette modélisation, plus ou moins sophistiquée, s'appuie sur d'autres études, en particulier sur des simulations de la transformation de processus productifs¹ dont elle recueille des informations agrégées.

1. On peut également considérer que l'on est dans un cas de dérive de coût nulle sur ce poste ($h = 0\%$), ce qui

donne: $1000 \times \left[\frac{1,00/1,07}{1,10/1,07} \right]^5$.

gées (taux moyen d'occupation de certaines ressources, par exemple) et certaines hypothèses de travail. On supposera ici que ce travail préalable est pertinent¹, mais que se pose un problème de précision quant à la connaissance que l'on a de certains paramètres, ce qui conditionne la crédibilité des valeurs calculées pour les indicateurs. La décision finale implique alors une *prise de risque* que le décideur souhaite apprécier. Cet éclairage est obtenu par une **analyse de sensibilité**. Pour faire comprendre la démarche suivie et l'intérêt de nouveaux outils apparus au début des années quatre-vingt-dix, il est préférable de s'appuyer sur un exemple.

L'entreprise **MÉCANOR** étudie les conséquences économiques du lancement d'un produit en fin de conception, dont le cycle de vie se caractérise par une date de retrait prévisionnelle imposée (fin 2004) en raison d'une obsolescence technologique et commerciale rapide imputable à un environnement fortement concurrentiel. Le modèle retenu ici (voir la feuille de calcul de la [figure 44, page 187](#)) est simplifié à l'extrême pour éviter de compliquer un exemple se voulant plus illustratif d'une analyse de sensibilité, que d'une modélisation. Dans cet exemple, un équipement nouveau serait en service au 1er mars 2001, pour un investissement ponctuellement arrêté au 31 décembre 2000; le coût unitaire prévisionnel est de 300 dollars liduriens (avec des hypothèses de décroissance de ce coût les années suivantes, portées sur la ligne du dessus); le marché potentiel est supposé croître puis décroître et le prix de vente est supposé baisser d'année en année. Les informations recueillies permettent de déterminer que l'opération a un taux de rentabilité interne de 14,07 % et que le FNTA à 5 % s'élève à 1 099 269 dollars liduriens.

À partir de ce référentiel, on peut amorcer une étude de sensibilité des indicateurs économiques retenus sur la base de variantes de valeurs prises par un ou plusieurs paramètres. Ce jeu du « que se passe-t-il si ? »² est fort instructif et peut conduire, dans l'allocation des ressources financières de l'entreprise, à une modification du classement de l'intérêt économique des projets étudiés, observation qui incite à relativiser l'approche financière « classique » de ces problèmes de choix d'investissement. Par exemple, dans notre exemple, un retard de 3 mois sur la commercialisation du nouveau produit se traduit par une perte de 4 points du taux de rentabilité interne du projet et par une baisse de 43 % de son FNTA à 5 %. Cette analyse comparative permet de définir des équivalences entre composantes du projet: par exemple, il est équivalent, du point de vue de la baisse de FNTA, de

1. *Note de la page précédente.* Ces études se fondent sur des approches en univers certain s'appuyant sur des cartographies de flux ou de processus (voir § I-2.3, page 160). Pour des projets transformant fortement un système productif, il est souhaitable de procéder à des simulations en univers aléatoire, pour compléter la réflexion sur la pertinence de règles de gestion actuelles ou nouvelles au regard de préoccupations de performance économique, de flexibilité et de réactivité (voir § I-2.1, page 148); de nombreux logiciels, ergonomiques et financièrement abordables, sont maintenant disponibles sur micro-ordinateurs.

1. Celle-ci porte sur de nombreux critères: le niveau de détail retenu dans la description des processus, des ressources et des flux doit être suffisamment homogène et compatible avec le niveau d'information disponible, les mécanismes de valorisation retenus (dissociation entre charges fixes et charges variables, détermination des coûts standards, etc.) doivent limiter au maximum les distorsions qu'ils induisent dans une évaluation économique par un bilan différentiel, etc. Enfin, en cas de dossier d'investissement relatif au développement et à la production de produits nouveaux, il est judicieux (ce que l'on ne fait pas dans l'exemple sommaire présenté ici) d'explicitier les ventes prévisionnelles en partant d'un échéancier prévisionnel du marché global de la gamme de produits considérée et d'un échéancier de la part prise sur ce marché (voir Smith & Reinertsen, 1998, [390], chap. II). Il est évident que la pertinence d'un modèle s'apprécie au cas par cas. Dans ce paragraphe, la réflexion porte sur la qualité des informations qui nourrissent le modèle et non sur le modèle lui-même.

2. Les Anglo-Saxons parlent de *what-if analysis*.

FIGURE 44
Données initiales du dossier d'investissement de MECANOR

	A	B	C	D	E	F
1	Année	2000	2001	2002	2003	2004
2	Coef de décroissance du coût			0,9	0,85	0,85
3	Coût unitaire		300,00	270,00	229,50	195,08
4	Prix de vente		500,00	500,00	450,00	400,00
5	Marge unitaire		200,00	230,00	220,50	204,93
6	Nb mois d'exploitation en 2001	10				
7	Coefficient de variation du marché			1,25	0,7	0,5
8	Marché année pleine		10 000	12 500	8 750	4 375
9	Investis. + études (au 31/12/01)	5 500 000				
10	Année	2000	2001	2002	2003	2004
11	FNT (au 31/12/année)	-5 500 000	1 666 667	2 875 000	1 929 375	896 547
12	Taux d'actualisation	5%	10%	15%	20%	
13	FNTA	1 099 269	453 106	-95 613	-565 684	
14	TRI	14,07%				

retarder de 3 mois l'introduction du produit ou d'augmenter de 476000 le montant des investissements et frais d'étude (l'équivalence en termes de baisse de TRI étant une augmentation de 453000). Dans cet exemple, on dispose d'informations permettant d'estimer la dépense maximale à consentir pour éviter de retarder de 3 mois l'introduction du produit nouveau. L'avantage du tableur est de permettre immédiatement des réponses à ce type d'interrogation à condition, bien sûr, d'avoir préalablement isolé dans des cellules, les paramètres que l'on souhaite faire varier.

Table des matières

Index thématique

II-3.2 Systématisation de l'analyse de sensibilité en univers certain

Dans notre exemple, on a seulement 14 paramètres, alors que des problèmes réels peuvent faire intervenir des dizaines, voire des centaines de paramètres. Il est évident que, dans ce cas, l'exploration de tous les scénarios de variations possibles de chaque paramètre est une opération longue et fastidieuse. Un add-in d'Excel, *TopRank*¹, permet d'automatiser ce travail en effectuant mécaniquement ce travail et en classant, pour chaque indicateur retenu, les paramètres par ordre d'incidence décroissante. Avec cette extension des fonctionnalités du tableur, il est possible de décider que tous les paramètres de la feuille de calcul (ou des feuilles de calcul enchaînées) varient, sauf spécifications contraires², de $-k_1\%$ à $+k_2\%$, avec la possibilité de définir, par interpolation, un nombre prédéterminé de valeurs intermédiaires. Dans notre exemple, pour une variation possible de $\pm 10\%$ de chacun des 14 paramètres, les 13 autres restant stables, on obtient un classement pour

1. *Top Rank* est add-in d'Excel ou de Lotus 1-2-3, c'est-à-dire un complément de ce tableur qui en accroît les fonctionnalités. Il est édité par Palisade (<http://www.palisade.com> d'où peuvent être téléchargées des versions complètes d'évaluation, utilisables sur quelques semaines), tout comme trois autres *adds-in* que nous évoquons, *@Risk*, *Evolver* et *Risk Optimizer*.

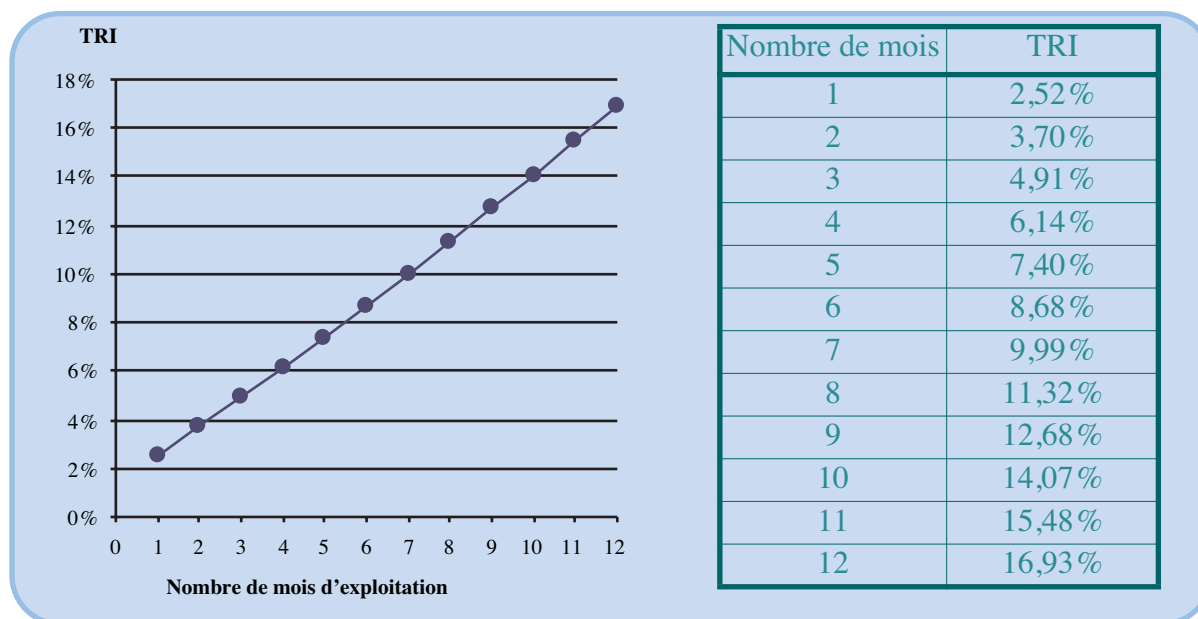
2. En particulier, définition par des écarts algébriques maximaux ou par des listes finies de valeurs; par ailleurs, il est possible d'effectuer autant d'analyses de sensibilité différentes qu'il y a de valeurs possibles retenues pour un paramètre donné (par exemple, le taux d'actualisation), ce qui permet de tester la stabilité des classements en fonction des valeurs de ce paramètre sous contrôle.

chaque cellule cible retenue (TRI et FNTA à 5%) dans lesquels les cinq facteurs les plus sensibles sont les mêmes. Trois graphiques sont utilisables :

- Le **graphique «en tornade»** (voir figure 45) représente un classement de l'incidence des variations extrêmes envisagées pour chaque paramètre sur la variation de cet indicateur, en offrant une visualisation du classement des facteurs par importance décroissante de leurs impacts sur l'indicateur ainsi que l'importance relative et le sens de ces impacts.
- Le graphique «classique» liant l'indicateur étudié à un seul paramètre peut être obtenu (figure 46).

FIGURE 46

Analyse de sensibilité par rapport à un paramètre



- Enfin, le **graphique «en toile d'araignée»** (figure 47, page 190) est habituellement établi sur le sous-ensemble des paramètres les plus influents, offre une représentation alternative intéressante au graphique en tornade lorsque l'on désire visualiser simultanément l'incidence d'un ensemble de valeurs prises par chaque paramètre, en ne prenant pas en compte seulement les valeurs extrêmes des paramètres étudiés (ce que l'on faisait déjà dans le graphique précédent) et que l'incidence des paramètres sur l'indicateur retenu n'est pas linéaire¹).

Il est possible d'étendre cette analyse de sensibilité à un groupe de k paramètres, pris parmi les n introduits, qui interviennent dans la détermination de la valeur d'un indicateur. Dans ce cas, le problème exploratoire peut s'avérer redoutable : à supposer que l'on retienne 4 valeurs possibles pour chaque paramètre, et que l'on retienne $k = 3$, l'analyse d'un jeu de 3 paramètres conduit à explorer $4^3 = 64$ groupes de valeurs différentes pour ce jeu de 3 paramètres ; sachant qu'il existe $14!/(11! \times 3!) = 364$ combinaisons de 3 paramètres pris parmi 14, il devient nécessaire d'explorer $64 \times 364 = 23\,296$ possibilités pour trouver les

1. Lorsque ce type de graphique est généré automatiquement, l'usage de la couleur permet de repérer les courbes associées aux différents paramètres ; en l'absence de couleur, il est nécessaire de procéder à un classement des intitulés dans la légende pour permettre ce repérage car la variété des conventions de traits discontinus n'est pas suffisante pour permettre un repérage clair de plus de 5 paramètres.

FIGURE 45

Analyse de sensibilité du TRI et du FNTA à 5% par un graphique « en tornade »

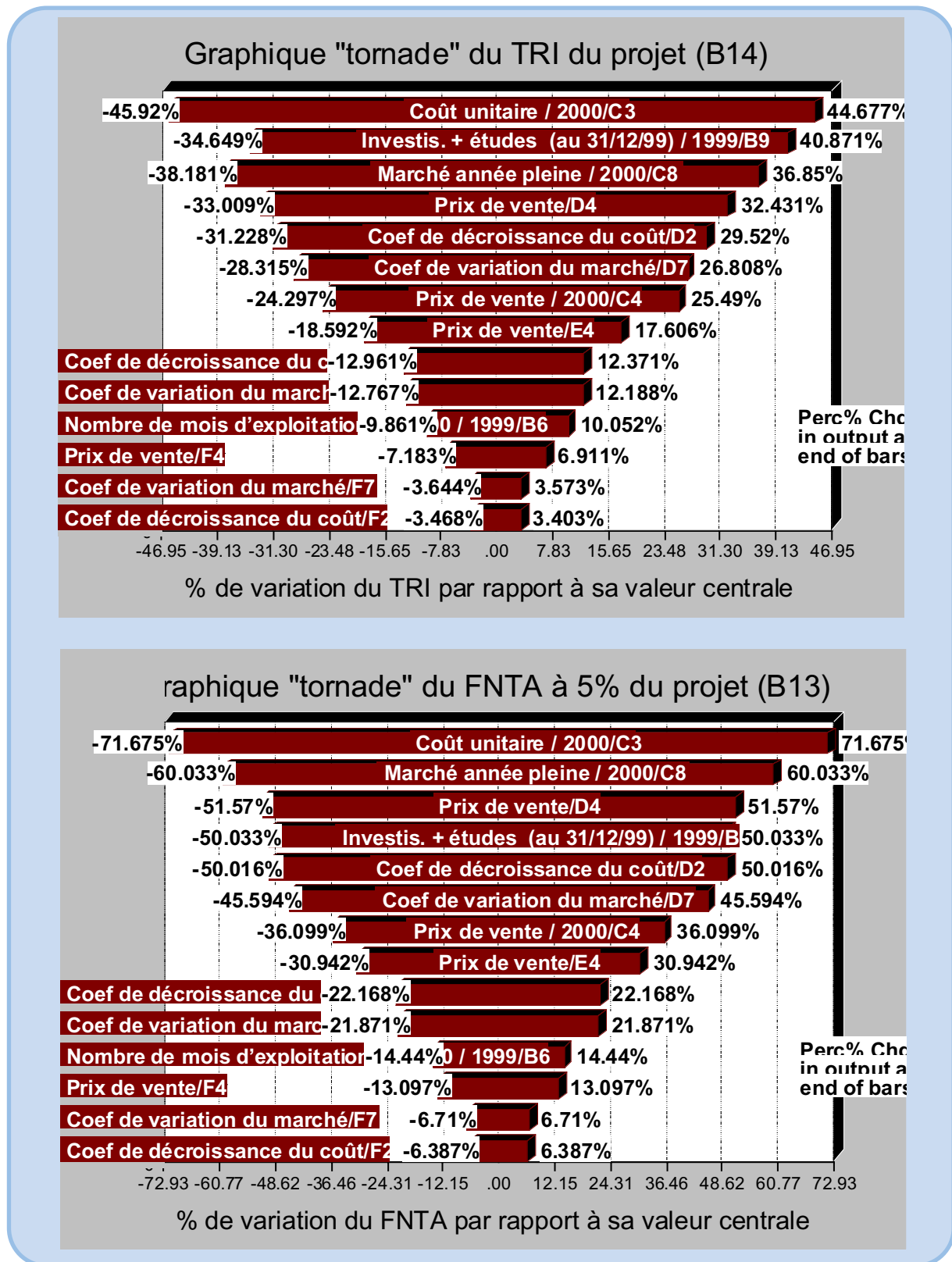


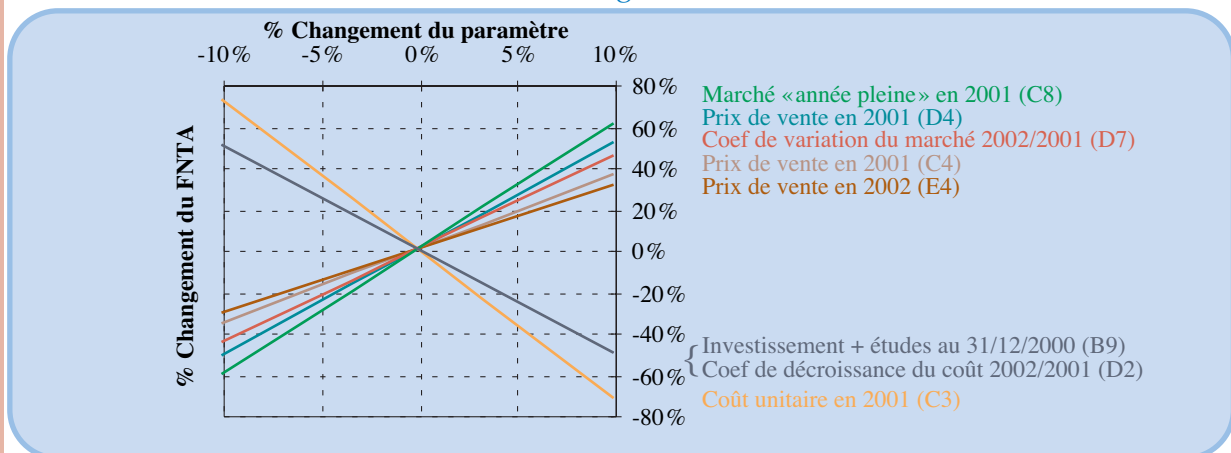
Table des matières

Index thématique

paramètres qui jouent le plus sur l'indicateur retenu. Un travail « manuel » est alors hors de question et, même avec un ordinateur, on entrevoit rapidement les limites de la démarche. Cette recherche automatique est effectuée par TopRank, malheureusement actuellement seulement sous environnement de tableur américain en

FIGURE 47

Représentation de l'analyse de sensibilité du FNTA par un graphique « en toile d'araignée »



raison de problèmes posés par la mauvaise « localisation » (= version internationale) de cet *add-in*.

Cela étant, ce type d'analyse de sensibilité de l'incidence de la variation simultanée de plusieurs paramètres ne doit pas être poussé trop loin pour deux raisons. Tout d'abord, il privilégie l'impact de combinaisons de valeurs extrêmes, qui ont une probabilité faible d'occurrence. Ensuite, et surtout, il ne permet pas d'exploiter le degré de connaissance du problème posé, qu'ont les différents acteurs participant à l'instruction du dossier. Pour aller plus loin, il convient de procéder à une analyse de sensibilité en univers aléatoire.

II-3.3 Analyse de sensibilité en univers aléatoire

L'utilisation de l'approche simulateur dans l'instruction d'un dossier d'investissement remonte aux années soixante¹. Elle repose sur l'exploitation des informations plus ou moins subjectives possédées par les acteurs à l'origine des informations quantitatives exploitées dans le dossier d'investissement, sur la variabilité des paramètres utilisés, pour fournir des indications sur la variabilité des indicateurs utilisés dans la prise de décision. Dans cette optique, on est plus en présence d'une technique d'agrégation cohérente d'opinions que d'une approche objective d'obtention de la distribution de probabilité d'indicateurs, mais cette consolidation d'avis constitue un outil collectif rationnel d'analyse des risques encourus, tels qu'ils sont collectivement perçus. Accessoirement, cette approche, en permettant une focalisation sur la réduction de la variabilité, constitue un instrument de pilotage des comportements collectifs.

On supposera maintenant que le produit étudié se décompose en trois sous-ensembles et que les informations relatives au coût de chacun d'entre eux soient

1. Des propositions d'exploitation de la démarche simulateur pour résoudre des problèmes de gestion se trouvent dans la littérature dès le début des années soixante. En matière d'investissement, un article célèbre de Hertz (1968, [230]) rejette la pratique des scénarios fondée sur des combinaisons d'hypothèses haute, basse et moyenne, pour proposer une démarche simulateur. Cette argumentation est illustrée numériquement dans notre ouvrage (Giard, 1995, [182], p. 114 - 123); on y trouve également une introduction aux techniques de simulation et un exemple d'utilisation de ces techniques avec @Risk, sur le problème de l'estimation de coûts de fabrication d'un produit nouveau (repris ici). Le lecteur désireux d'approfondir ce type d'approche et d'avoir un panorama des logiciels disponibles dans ce domaine est invité à se reporter à l'ouvrage de Vose (2000, [434]); d'autres logiciels similaires sont disponibles, parmi lesquels Crystal Ball est l'un des plus connus (www.decisioneering.com).

décrites par des distributions triangulaires¹ dont les paramètres sont donnés dans le [tableau 12, page 191](#). Pour les autres paramètres, les distributions retenues sont décrites dans le [tableau 13](#), les prix de vente étant supposés fixés a priori².

TABLEAU 12
Informations relatives aux estimations de coût des trois composants du produit (distribution triangulaire postulée)

	A	B	C
Coût minimum	129	91	52
Coût modal	140	100	60
Coût maximum	172	127	65

TABLEAU 13
Informations relatives aux estimations des autres paramètres du modèle

Cellule	Paramètre	
D2	Coefficient de variation du coût (2001 / 2000)	Loi uniforme (bornes: 0,85 et 0,95)
E2	Coefficient de variation du coût (2002 / 2001)	Loi uniforme (bornes: 0,8 et 0,9)
F2	Coefficient de variation du coût (2003 / 2002)	Loi uniforme (bornes: 0,8 et 0,9)
B6	Nombre de mois d'exploitation en 2000	Loi Bêta Pert (Min: 1; Mode: 10; Max: 12)
D7	Coefficient de variation du marché (2001 / 2000)	Loi triangulaire (Min: 1,1; Mode: 1,25; Max: 1,5)
E7	Coefficient de variation du marché (2002 / 2001)	Loi uniforme (bornes: 0,5 et 0,9)
F7	Coefficient de variation du marché (2003 / 2002)	Loi uniforme (bornes: 0,4 et 0,6)
B8	Marché 2000 en année pleine	Loi uniforme (bornes: 8000 et 12000)
B9	Investissement + études (au 31/12/99)	Loi triangulaire (Min: 5200000; Mode: 5500000; Max: 6000000)

Table des matières

Index thématique

On obtient alors la nouvelle feuille de calcul décrite dans la [figure 48, page 192](#), où les valeurs utilisées sont les espérances mathématiques des distributions retenues. On s'intéressera, là encore, à une analyse de sensibilité du TRI et du FNTA à 5%. L'application de la démarche simulatoire au problème posé, en partant de 1000 jeux de données générés aléatoirement, conduit (voir [tableau 14, page 194](#), et [figure 49, page 193](#)) à un TRI moyen de 15,21%, avec une forte dispersion autour de cette valeur (écart-type du TRI: 10,16%) et une probabilité d'obtenir un taux de rentabilité interne négatif de l'ordre de 5,3% et une probabilité de plus de 30% que ce TRI soit inférieur à 10%, ce qui relativise l'information favorable donnée par la moyenne³ (et relativise l'objectivité d'une sélection de projets d'investissement basée sur un strict raisonnement en univers certain).

1. Voir Giard (1995, [182]), p. 157, pour une description sommaire de cette distribution. On notera que la somme des modes des trois distributions donne le coût unitaire de 300, utilisé auparavant. La somme des espérances mathématiques égale au tiers de la somme du minimum, du mode et du maximum, soit $147 + 106 + 59$ conduit à une valeur différente (312, que l'on retrouve dans la copie d'écran de la [figure 48, page 192](#)), mais on a privilégié ici l'hypothèse la plus souvent vérifiée selon laquelle l'information fournie spontanément pour une «valeur centrale» d'une distribution est son mode, valeur considérée comme la plus probable.

2. Pour les distributions «Triangulaire» et «Bêta PERT», le mode utilisé correspond à la valeur retenue en univers certain; pour les distributions uniformes, c'est la moyenne des bornes qui correspond à la valeur retenue en univers certain. Voir également le [chapitre IV, § III-3.2, page 327](#).

FIGURE 48

Données initiales (en espérance mathématique) du dossier d'investissement de MECANOR

	A	B	C	D	E	F
1	Année	2000	2001	2002	2003	2004
2	Coef de décroissance du coût			0,9	0,85	0,85
3	Coût unitaire		312,00	280,80	238,68	202,88
4	Prix de vente		500,00	500,00	450,00	400,00
5	Marge unitaire		188,00	219,20	211,32	197,12
6	Nb mois d'exploitation en 2001		8,83			
7	Coefficients de variation du marché			1,25	,700	,500
8	Marché année pleine		10 000	12500	8750	4375
9	Année		2001	2002	2003	2004
10	Marge totale		1 383 889	2 740 000	1 849 050	862 409
11	Investis. + études (au 31/12/00)	5 600 000				
12	Année	2000	2001	2002	2003	2004
13	FNT (au 31/12/année)	-5 600 000	1 383 889	2 740 000	1 849 050	862 409
14	Taux d'actualisation	5%				
15	FNTA au 31/12/00	510 035				
16	TRI	9,13%				

À partir du moment où l'on dispose d'un ensemble de données obtenues par simulation (1000 jeux de données, dans notre exemple), il est tentant de pousser l'analyse pour chercher à identifier quelques caractéristiques fortes dans ces futurs considérés comme équiprobables. Plusieurs pistes peuvent être suivies :

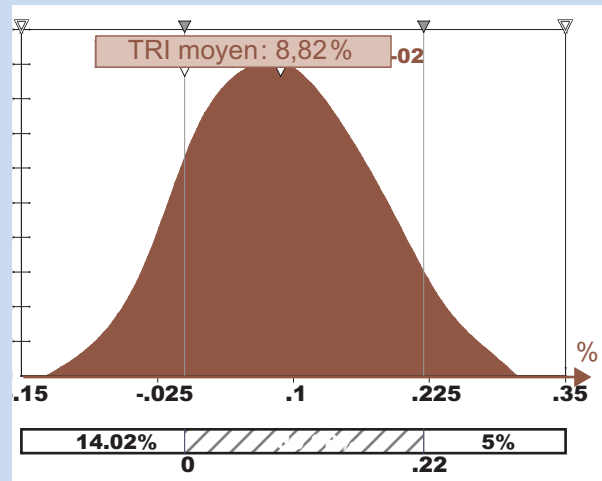
- Dans la mesure où le modèle utilisé comporte des échéanciers, il peut être intéressant d'examiner simultanément la dispersion des valeurs prises par chacun des flux dans la simulation. La synthèse la plus parlante est de type graphique, puisque l'on est en présence d'un phénomène faisant classiquement l'objet d'une représentation dans un graphique où l'axe des abscisses est celui du temps et celui des ordonnées permet de repérer les valeurs des flux. Il est alors possible de construire autour de la courbe d'évolution des valeurs moyennes calculées dans la simulation, un jeu de deux courbes encadrantes correspondant à un intervalle. Plusieurs solutions sont alors envisageables. Si la simulation comporte un nombre suffisant de jeux de données, ce qui est le cas ici, on peut utiliser des fractiles observés dans la simulation en retenant ceux qui sont symétriques par rapport à la médiane, pour définir, par exemple un intervalle à 95 % ou à 50 %, ce qu'illustre la [figure 50 de la page 194](#), pour les flux nets de trésorerie des années 2000 à 2003. Une autre solution consiste à construire les courbes encadrantes en ajoutant $\pm k_1 \times$ écart-type ou $\pm k_2 \times$ écart-type aux valeurs centrales, avec, par exemple, $k_1 = 1$ et $k_2 = 2$.

3. Une analyse similaire sur le FNTA à 5% conduit à une valeur moyenne de 144500, avec dispersion très forte autour de cette valeur (135000) et une probabilité de 15,5% d'avoir un FNTA négatif, et donc un taux de rentabilité interne inférieur à 5%.

FIGURE 49

Distribution du Taux de Rentabilité Interne du projet et de son FNTA à 5 %

Distribution de probabilités du TRI (B16)



Distribution de probabilités du FNTA (B15)

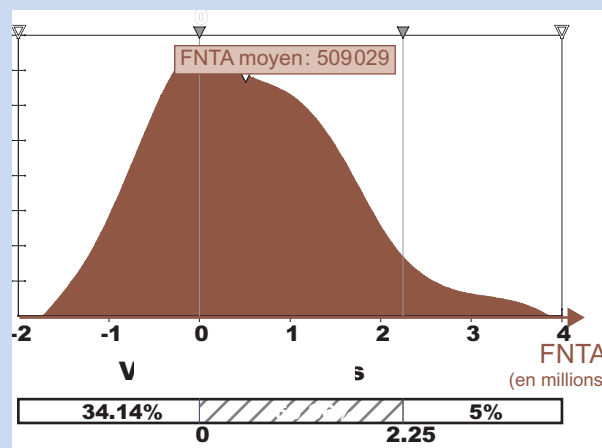


Table des
matières

Index
thématique

- À partir de l'ensemble des résultats de ces simulations, on peut vouloir obtenir des indications sur les facteurs que l'on peut considérer comme les plus influents sur la variabilité des indicateurs retenus. Comme en univers certain, on peut soit envisager une approche traitant de manière isolée l'impact de la variabilité de chaque paramètre intervenant dans la détermination d'un indicateur, sur la variabilité de ce dernier et chercher à les classer par ordre d'influence décroissante, soit chercher à trouver des combinaisons de paramètres qui semblent jouer de manière prépondérante sur la variabilité de l'indicateur étudié. *Cette partie, plus technique, peut être sautée par le lecteur non scientifique.*
 - L'étude de sensibilité de chaque paramètre peut être menée de plusieurs façons. L'add-in @Risk en propose deux qui s'appuient sur des démarches assez classiques en matière de recherche de causalité (voir les résultats dans les copies d'écran de la [figure 51, page 196](#)). La première consiste à calculer les coefficients de corrélation de rangs¹ entre l'indicateur étudié et chaque paramètre défini en probabilité. Cette solution présente l'avan-

FIGURE 50
Variabilité des flux de trésorerie

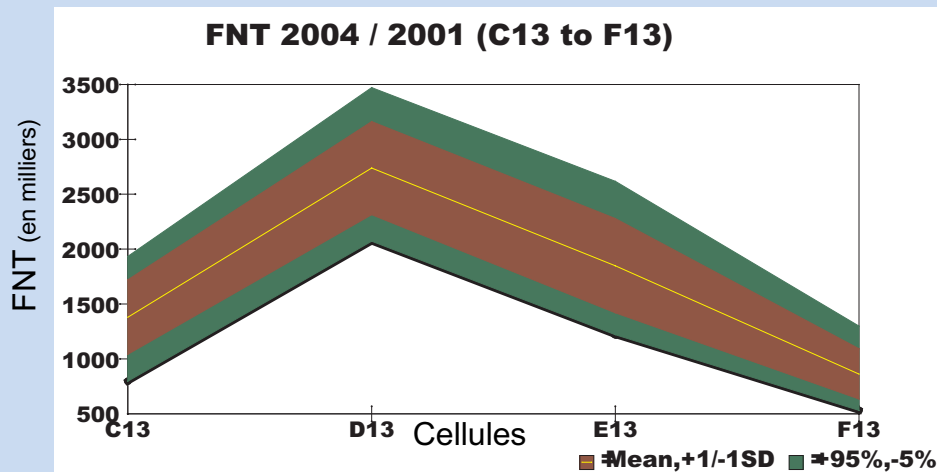


TABLEAU 14
Estimation des fonctions de répartition du FNTA à 5%, du TRI et du coût de production unitaire

	FNTA à 5%	TRI	Coût du Produit
Moyenne	5090230	8,8%	312,0
Écart-type	1013064	8,0%	12,2
Minimum	-1846945	-11,5%	283,5
Fractile à 5%	-1025527	-3,8%	293,3
Fractile à 10%	-751011	-1,5%	296,1
Fractile à 15%	-555876	0,4%	298,6
Fractile à 20%	-382418	1,6%	300,8
Fractile à 25%	-246492	2,9%	303,2
Fractile à 30%	-110386	4,0%	305,2
Fractile à 35%	14034	5,1%	306,9
Fractile à 40%	155577	6,3%	308,2
Fractile à 45%	298296	7,5%	309,8
Fractile à 50%	434837	8,6%	311,5
Fractile à 55%	593551	9,8%	313,3
Fractile à 60%	739433	11,0%	315,0
Fractile à 65%	866479	12,0%	316,7
Fractile à 70%	1005544	13,1%	318,3
Fractile à 75%	1181220	14,3%	320,1
Fractile à 80%	1407062	15,9%	321,8
Fractile à 85%	1630657	17,6%	324,4
Fractile à 90%	1821830	19,1%	327,4
Fractile à 95%	509029,6	8,8%	312,0
Maximum	1013064	8,0%	12,2

Table des matières

Index thématique

1. Il s'agit, rappelons-le, d'un coefficient de corrélation entre deux variables calculées en remplaçant chaque valeur prise par une variable par son rang dans l'ensemble des valeurs prises par cette variable dans l'ensemble étudié (voir plus de détail, voir Giard (1995, [182]), p. 266).

tage de ne reposer sur aucune hypothèse de relation linéaire entre l'indicateur étudié et le paramètre retenu. La seconde démarche repose implicitement sur cette hypothèse et doit donc être utilisée avec prudence. Elle consiste à effectuer une régression linéaire multiple sur les données de la simulation, en remplaçant la variable expliquée (l'indicateur étudié) et les variables explicatives (les paramètres définis en probabilité) par les valeurs centrées réduites correspondantes, afin de faciliter l'analyse des coefficients de régression : dans notre exemple, le coefficient associé au paramètre « marché en année pleine en 2001 » est de 0,696 ; cela signifie qu'un accroissement de 1 écart-type sur ce paramètre se traduit par un accroissement de 0,696 écart-type du TRI. Le classement des coefficients de régression par valeurs absolues décroissantes peut alors être considéré comme une mesure correcte de l'influence finale de la variabilité relative des paramètres retenus, à condition de considérer l'hypothèse de linéarité comme acceptable, en première grandeur (ce qui implique un coefficient de détermination multiple estimé suffisamment élevé ; dans notre exemple, ce coefficient est de 0,996 ce qui rend cette approche tout à fait acceptable). Un dernier problème méthodologique doit être réglé, celui de la sélection des seuls paramètres considérés comme significatifs dans cette régression ; la démarche classique de la régression en *stepwise* peut être utilisée¹. On peut noter ici la grande concordance de résultats entre ces deux approches. On peut remarquer aussi que l'on ne retrouve pas, comme en univers certain, le coût de fabrication comme premier facteur, ce qui s'explique bien en remarquant que la variation arbitraire de $\pm 10\%$ retenue en univers certain pour ce paramètre correspond à 2,5 écart-type des valeurs obtenues en univers aléatoire, ce qui fait que la situation décrite en univers certain doit être considérée comme très peu vraisemblable.

- L'étude simultanée de plusieurs paramètres pose des problèmes méthodologiques plus complexes. L'approche retenue par @Risk est une approche non-paramétrique qui consiste à travailler sur le sous-ensemble des simulations ayant conduit aux plus fortes (ou aux plus faibles) valeurs de l'indicateur, par exemple les 25 % des valeurs les plus fortes (ou les plus faibles), et à rechercher si les valeurs prises dans ce sous-ensemble, pour les paramètres définis en probabilité, diffèrent de celles observées dans l'ensemble des simulations. Pour éviter de fonder les conclusions sur des hypothèses restrictives, la solution retenue consiste à comparer, pour chaque paramètre, la médiane observée dans le sous-ensemble retenu, avec celle observée sur l'ensemble des simulations et à ne retenir que les paramètres considérés comme significativement différents². Dans notre exemple, dans l'échantillon possédant les 25 % plus fortes valeurs du FNTA à 5 %, tout comme dans celui possédant les 25 % plus faibles valeurs

1. La technique de régression multiple optimale, théoriquement préférable, est plus compliquée à mettre en œuvre et les résultats optimaux retenus ne diffèrent généralement pas de ceux trouvés avec la méthode du *stepwise* plus facile à utiliser (c'est du reste la solution retenue par @Risk).

2. On note $M_{e_{i_0}}$ et σ_{i_0} la médiane et l'écart-type du paramètre i dans l'ensemble des simulations et $M_{e_{i_1}}$ la médiane du paramètre i dans le sous-ensemble de simulations ; ce paramètre est considéré comme significatif seulement si $|M_{e_{i_0}} - M_{e_{i_1}}| / \sigma_{i_0} > 0,5$.

FIGURE 51

Analyse de sensibilité du TRI par coefficients de corrélation de rang et par coefficients de régression (stepwise) sur variables centrées-réduites

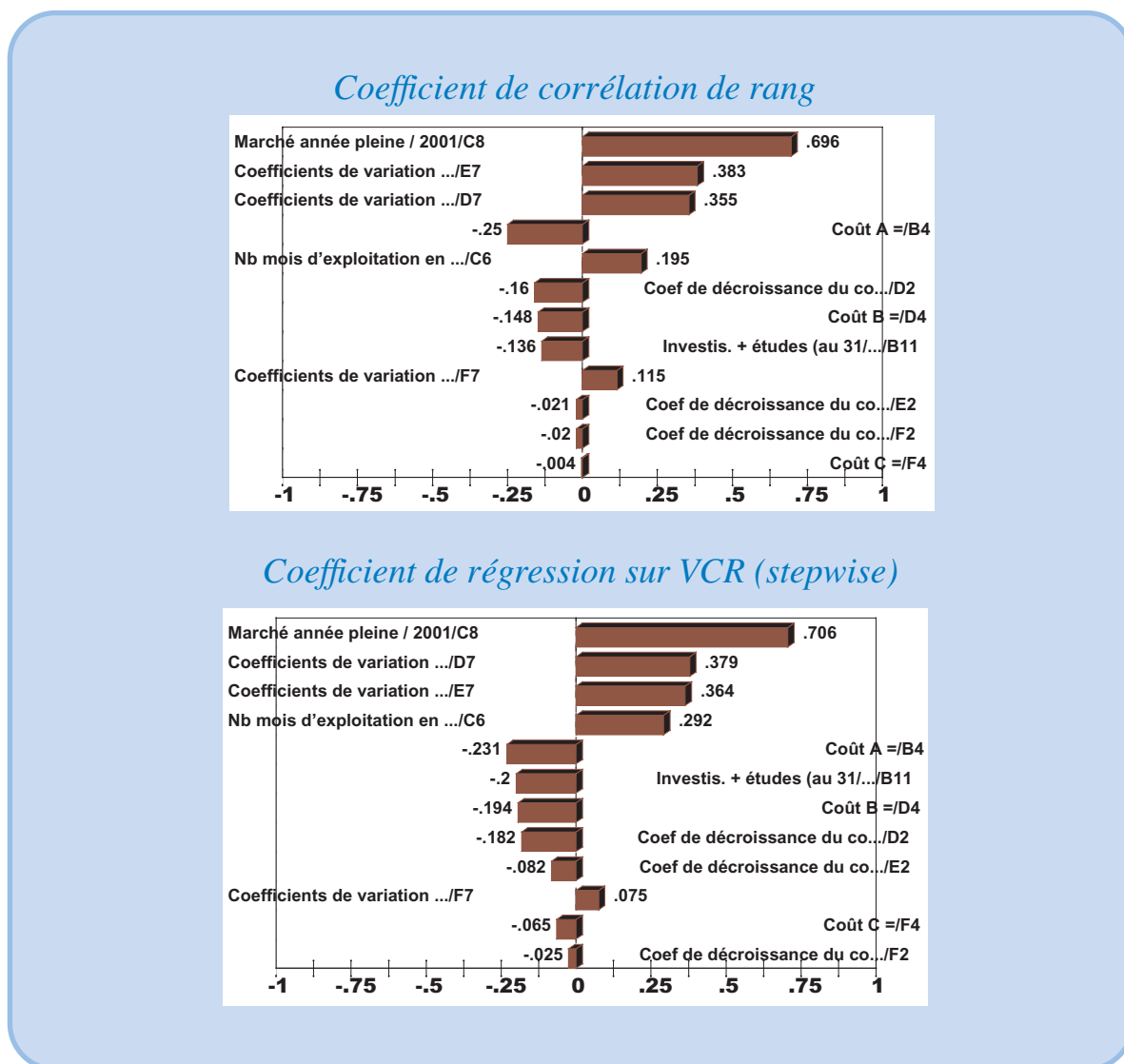


Table des matières

Index thématique

du FNTA à 5 %, on retrouve le même groupe de trois paramètres : le coefficient de décroissance du coût 2003 / 2002 (cellule F2), marché « année pleine » (cellule C8) et investissement et études (cellule B9); s’y ajoute, pour le premier échantillon, le coefficient de variation du marché 2002 / 2001 (cellule E7).

II-3.4 Optimisation de certains paramètres en univers aléatoire

Les progrès réalisés en matière d’optimisation depuis une vingtaine d’années ont permis d’intégrer aux tableurs, sous forme d’*add-in*, des algorithmes génétiques¹ permettant de résoudre des problèmes d’optimisation d’une certaine complexité aussi bien en univers certain² qu’en univers aléatoire³. C’est dans ce dernier cas que nous nous situons ici.

1. Voir § I-3.3.2, page 408 du chapitre I-3.3.2.
 2. Par exemple, l’*add-in Evolver*® de Palisade utilisable dans Excel© (www.palisade.com d’où peuvent être téléchargées des versions complètes d’évaluation, utilisables sur quelques semaines).

FIGURE 52

Analyse de sensibilité du FNTA à 5% par coefficients de corrélation de rang et par coefficients de régression (stepwise) sur variables centrées-réduites

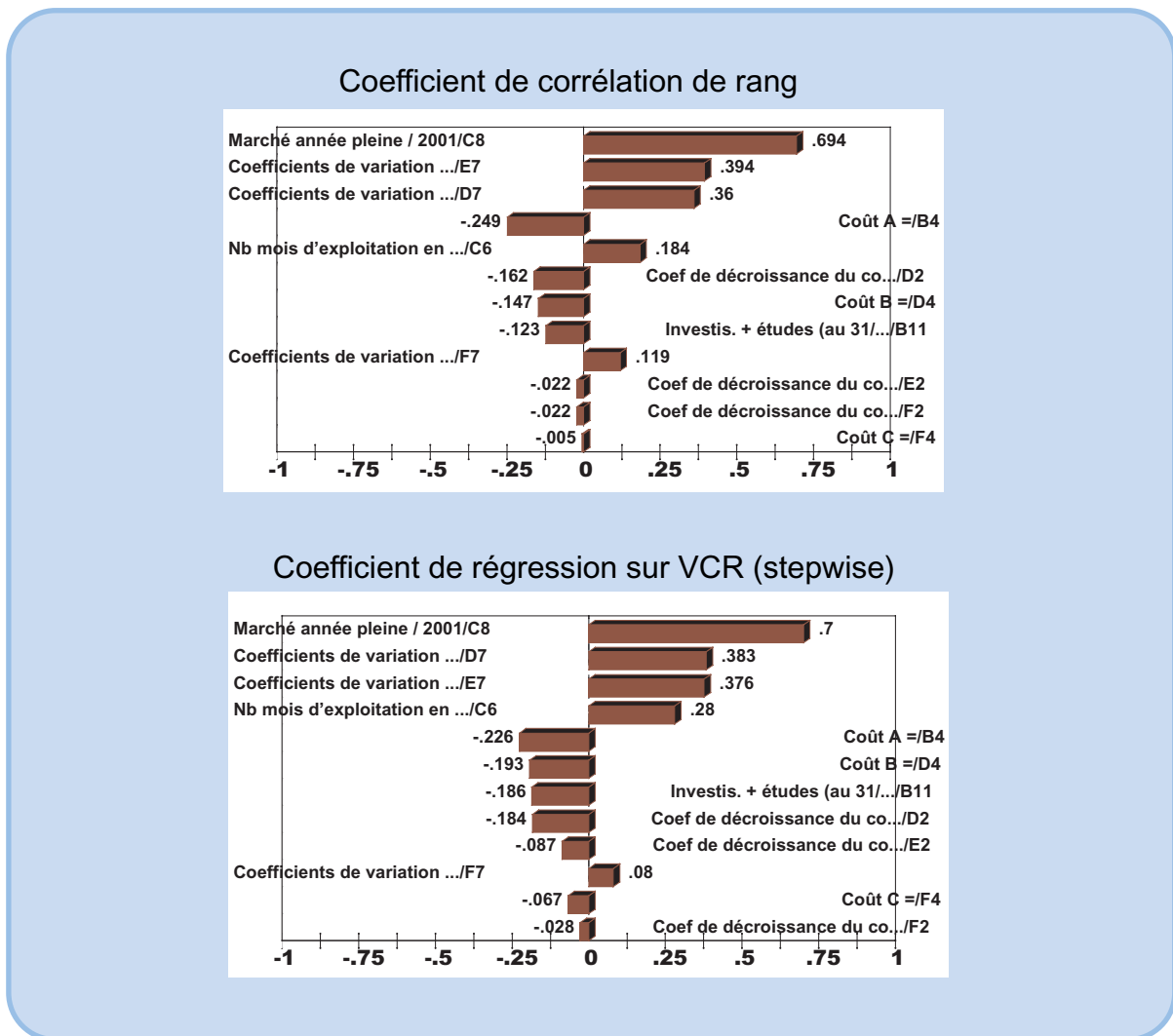


Table des matières

Index thématique

Modifions notre exemple en introduisant tout d'abord deux filières technologiques. La première correspond à une filière nouvelle devant conduire à des coûts de production unitaires plus faibles, mais les incertitudes se traduisent par une assez grande dispersion du coût unitaire prévisionnel; les données de cette hypothèse correspondent à celles utilisées dans l'exemple du § II-3.3. La seconde filière est bien maîtrisée et se caractérise par un niveau moyen de coûts plus élevé et une dispersion plus faible.

Par ailleurs, la capacité à installer devient maintenant une variable de commande. On suppose ici que la capacité minimale installée est de 5000 et que chaque unité de production autorise une production annuelle de 1000, le coût de cette unité supplémentaire étant respectivement de 300000 dollars liduriens pour la filière 1000 et 280000 dollars pour la filière 2. En outre, il faut y ajouter les dépenses d'étude (régies par une distribution triangulaire). La demande satisfaite

3. Note de la page précédente. C'est le cas de l'add-in Risk Optimizer® de Palisade, utilisable sous Excel®, en complément de @Risk (autre add-in de Palisade). L'exemple proposé ici s'appuie sur cet add-in.

TABLEAU 15

Informations relatives aux estimations de coût des trois composants du produit (distribution triangulaire postulée) dans le cas de la seconde filière

	A	B	C
Coût minimum	145	103	60
Coût modal	147	110	63
Coût maximum	151	115	66

au cours d'une année est limitée par la capacité installée¹. Le problème posé ici est donc celui de la détermination simultanée de la filière et de la capacité à installer. Ce problème est très simplifié, mais il donne une idée du champ d'application de cette approche.

Comme dans tout problème d'optimisation, on retrouve une fonction à optimiser, qui correspond ici à une cellule calculée, des variables de commande et des contraintes.

- Les variables de commande du problème correspondent à des cellules dans lesquelles se trouvent des paramètres numériques qui influencent la valeur de la cellule à optimiser. Chaque variable de commande x est définie comme étant de type entier ou réel. Le domaine des valeurs qu'elle peut prendre est restreint par une double inégalité du type $x_1 \leq x \leq x_2$. Ces variables de commande peuvent être des variables binaires (voir [chapitre XVI, page 1135](#)) et peuvent interagir librement entre elles².
- Les contraintes du problème correspondent à des cellules dans lesquelles figurent des résultats induits par les paramètres numériques. Résultant d'une cascade de calculs, elles ne sont pas nécessairement linéaires. Ces contraintes peuvent de deux types :
 - la contrainte porte sur la valeur calculée pour une cellule au cours de l'une quelconque des simulations et son non-respect provoque immédiatement l'abandon du jeu de valeurs prises par les variables de commande ;
 - la contrainte porte sur un paramètre de tendance centrale ou de dispersion établi pour une cellule sur l'ensemble des valeurs calculées au cours des simulations faites avec un même jeu de variables de commande et son non-respect provoque l'abandon de ce jeu de valeurs.

Ces deux types de contraintes peuvent peser sur une même cellule calculée. Il peut s'agir de celle de la fonction-objectif : c'est ainsi que l'on peut chercher à maximiser le taux de rentabilité interne du projet en interdisant tout jeu de valeurs des variables de commande qui conduise une fois à obtenir un TRI négatif et qui conduise à un écart-type de la distribution d'échantillonnage des TRI inférieur à 0,04.

1. Ce qui suppose que la demande soit assez prévisible pour que des ajustements « charge - capacité » puisse s'opérer par la constitution de stock. Dans le cas d'une demande fortement aléatoire sur courte période et ne pouvant être différée, il faut modifier le modèle en s'appuyant sur un découpage temporel plus fin ou en faisant appel aux résultats d'un simulateur couplé avec le tableur (selon un mécanisme assez classique de nos jours).

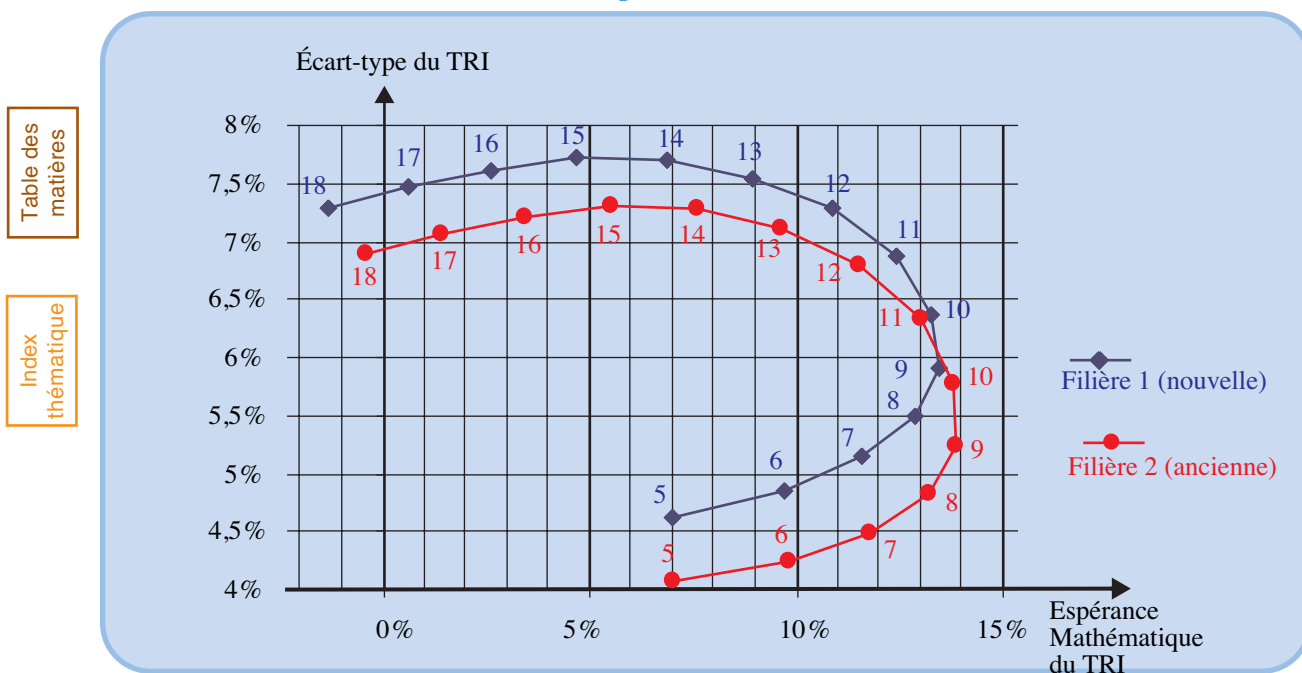
2. Cette interaction est possible dans le modèle linéaire par le biais de variables indicatrices (voir [chapitre XVI, § II-2, page 1135](#)) mais reste limitée. Les principes de modélisation développés au [chapitre XVI, § II-2, page 1135](#), sont utiles dans une modélisation « sous tableur » et ont été utilisés dans cet exemple.

Dans un premier temps, on recherche à optimiser le TRI en déterminant la filière technologique et la capacité installée. L'optimum trouvé est l'utilisation de la filière 2, avec une capacité installée de 9 unités de production, ce qui conduit à une espérance mathématique de TRI égale à 13,4%. Pour prendre un second exemple, on peut imaginer de maximiser le TRI, sous contrainte d'avoir 10% de chances d'obtenir un TRI supérieur à 21%. Dans ce cas, l'optimum trouvé est 13,3% avec une utilisation de la filière 1 et une capacité installée de 10 unités de production.

Le problème posé étant faiblement combinatoire, on peut illustrer pour les deux filières comment varient simultanément l'espérance mathématique du TRI et son écart-type, en fonction des valeurs prises par des variables de commande (figure 53), ce qui permet d'explicitier le problème, classique en finance de marché, de l'*arbitrage entre rentabilité et risque* et de retrouver le concept de solution dominante qui sont celles qui font courir le risque le plus faible pour une rentabilité donnée¹.

FIGURE 53

Évolution de l'espérance mathématique et de l'écart-type de la distribution d'échantillonnage des TRI en fonction de la filière et du nombre d'unités productives



SECTION III LA DÉTERMINATION DU PROGRAMME OPTIMAL D'INVESTISSEMENT

La détermination du programme optimal d'investissements est une généralisation du problème de la comparaison de deux projets avec une dimension fortement combinatoire puisque l'on a à choisir dans l'ensemble des projets instruits, le sous-ensemble qui sera retenu parce qu'il est le meilleur pour le critère

1. Par exemple, ici, la rentabilité moyenne de 10% peut être obtenue de 4 façons et c'est avec l'usage de 6 machines, dans le cadre de la filière technologique ancienne, que le risque est le plus faible. D'une manière générale, cette filière technologique est dominante par rapport à la filière nouvelle.

retenu et qu'il respecte un ensemble de contraintes physiques et financières. On commencera donc par examiner les critères qui peuvent être mobilisés dans cette prise de décision (§ III-1). Cette comparaison de deux projets pose un certain nombre de problèmes méthodologiques qui seront analysés au § III-2, page 210.

Le problème de la sélection du programme optimal d'investissements se décrit assez bien dans une formulation de programme linéaire qui permet une prise en compte réaliste des interdépendances qui lient les projets (§ III-3, page 216).

On illustrera enfin par des exemples numériques (§ III-4, page 223), la résolution de ce problème de définition du programme optimal d'investissements tant en univers certain qu'en univers aléatoire et en adoptant les différents critères qui auront été proposés.

III-1 Critères de comparaison des projets d'investissement

Nous examinerons ici, assez succinctement, le problème du choix du critère que l'on retrouve traité dans de nombreux manuels d'initiation en finance, au calcul économique, ou plus particulièrement orientés vers le choix des investissements. Nous jugerons tout d'abord les différentes règles proposées par les praticiens ou les économistes (§ III-1.1) puis nous évoquerons des problèmes d'interprétation et de détermination du taux d'actualisation (§ III-1.2).

III-1.1 Jugement des règles de choix proposées par les praticiens et les économistes

Nous verrons tout d'abord des règles de bon sens¹ auxquelles devraient obéir des critères de choix (§ III-1.1.1) avant d'en faire l'application pour rejeter les critères des « praticiens » (§ III-1.1.2, page 201) et accepter des critères proposés par des économistes (§ III-1.1.3, page 202).

III-1.1.1 Règles de bon sens auxquelles devraient obéir les critères de choix.

Prenons l'exemple simplifié de la comparaison des échéanciers des 4 projets du tableau 16; chaque échéancier ne diffère d'un autre que sur un seul point.

TABLEAU 16
Établissement de critères de choix à partir de l'analyse de projets

Projets	Investissement au 31/12/2000	Flux Nets de Trésorerie		
		au 31/12/2001	au 31/12/2002	Total
A	- 10000	10000		10000
B	- 10000	10000	1 100	11000
C	- 10000	3762	7762	11524
D	- 10000	5762	5762	11524

Une réflexion de bon sens sur cet exemple conduit aux deux règles suivantes:

1. Voir Bierman & Smidt (1972, [51]), p. 24 -30; l'exemple numérique du § III-1.1.1 est repris de cet ouvrage de référence pour cette réflexion méthodologique. Parmi les ouvrages récents le lecteur peut se reporter au chapitre II de l'ouvrage de M. Albouy (2000, [12]).

- **Règle 1:** Si l'on compare les projets A et B, il est évident que B est préférable à A parce que sa durée de vie plus longue permet d'obtenir en plus du flux net de trésorerie (FNT) que l'on obtient avec le projet A, un FNT supplémentaire.
- **Règle 2:** Si l'on compare les projets C et D, qui procurent l'un et l'autre un même cumul de FNT (11 524), il est évident que le projet D est préférable au projet C puisqu'il anticipe une rentrée financière (2000).

Les critères de comparaison des projets d'investissement ne devront pas violer l'une ou l'autre de ces règles de bon sens.

III-1.1.2 Rejet des règles empiriques utilisées par certains praticiens

Passons en revue trois de ces règles.

III-1.1.2.1 Critère du délai de récupération

C'est le délai au bout duquel l'entreprise recouvre l'investissement initial. Implicitement les flux de trésorerie obtenus après avoir récupéré la mise de fonds initiale sont considérés comme étant «tout bénéfice» et le plus important est de récupérer rapidement sa mise de fonds pour la replacer «ailleurs». Dans notre exemple on a, avec utilisation de l'interpolation linéaire, le classement du [tableau 17](#).

TABLEAU 17
Application du critère du délai de récupération

Projets	A	B	C	D
Valeur du critère	1	1	1,8	1,7
Rang	1er ex aequo	1er ex aequo	4e	3e

La règle 1 n'est donc pas respectée (puisque B n'est pas préféré à A); en outre, si l'investissement pour C et D est de 11 524, la règle 2 est en défaut. Ce critère est souvent utilisé par les praticiens qui souhaitent par ce biais intégrer la notion de risque.

III-1.1.2.2 Critère de la recette moyenne par euro engagé

L'application de ce critère ([tableau 18](#)) conduit à une violation de la règle 2.

TABLEAU 18
Application du critère de la recette moyenne par euro engagé

Projets	A	B	C	D
Recette totale	10000	11000	11524	11524
Investissement	10000	10000	10000	10000
Valeur du critère ¹	1,00	1,10	1,15	1,15
Rang	4e	3e	1er ex aequo	1er ex aequo

1. Valeur du critère = Recette totale/Investissement.

III-1.1.2.3 Critère du revenu moyen sur valeur comptable de l'investissement

Ce critère, illustré par le [tableau 19](#), est, à une transformation linéaire près, identique au précédent si l'amortissement linéaire est utilisé (sinon il peut donner des classements différents); il conduit à une violation de la règle 2.

III-1.1.3 Critères proposés par les économistes

Les principaux critères proposés sont au nombre de deux : le Flux Net de Trésorerie Actualisé (FNTA) et le taux de rentabilité interne (TRI).

TABLEAU 19

Application du critère du revenu moyen sur valeur comptable de l'investissement

Projets	A	B	C	D
Amortissement linéaire moyen	10000	5000	5000	5000
Flux Net de Trésorerie moyen	10000	5550	5762	5762
Revenu moyen ¹	0	550	762	762
Valeur comptable moyenne ²	5000	5000	5000	5000
Valeur du critère ³	0%	11%	15%	15%
Rang	4e	3e	1er ex aequo	1er ex aequo

1. Revenu moyen = Flux Net de Trésorerie moyen – Amortissement linéaire moyen.

2. Valeur comptable moyenne = Investissement/2.

3. Valeur du critère = Revenu moyen/Valeur comptable moyenne.

III-1.1.3.1 Le Flux Net de Trésorerie Actualisé (FNTA)

Le FNTA, appelé encore par certains auteurs **Valeur Actuelle Nette** (VAN) mais cette désignation est moins précise, est la somme des Valeurs actualisées des FNT secrétés chaque année par le projet d'investissement considéré. Pour un taux d'actualisation α constant au cours du temps¹ et un projet dont les FN_T sont secrétés à la fin des années 0 à T, le FNTA à l'année 0 est défini par la [relation 22](#):

$$FNTA = \sum_{t=0}^T FNT_t (1 + \alpha)^{-t} \quad \text{relation 22}$$

Par exemple, le FNTA à 6% du projet B est:

$$FNTA_B = -10000 + \frac{10000}{1,06} + \frac{1100}{1,06^2} = -10000 + 9434 + 979 = +413$$

L'application de ce critère², dans notre exemple, conduit au [tableau 20](#), où l'on constate que si les deux règles de bon sens sont respectées, le rang est fonction du taux d'actualisation retenu.

1. La constance du taux d'actualisation est une simplification que les spécialistes de la théorie financière n'acceptent pas en univers non certain. Dans ce chapitre, on conservera cette simplification notamment parce que les erreurs engendrées sont du second ordre par rapport à la précision des données manipulées.

2. Certains spécialistes proposent d'utiliser le critère du **taux d'enrichissement relatif**, quotient du FNTA à l'investissement pour sélectionner les projets en cas de demande excessive de budget pour le taux d'actualisation retenu. La position la plus fréquente chez les financiers (voir, par exemple, Albouy, [12], chapitre II) est de considérer que le taux d'actualisation est un coût moyen pondéré du capital et que les grandes entreprises ayant accès au marché financier, une régulation s'opère par le marché.

TABLEAU 20
Application du critère du FNTA

Projets	A	B	C	D
Valeur du FNTA à 6%	- 570	+ 413	+ 457	+ 564
Rang	4e	3e	2e	1e
Valeur du FNTA à 30%	- 2308	- 1657	- 2513	- 2158
Rang	3e	1e	4e	2e

III-1.1.3.2 Le Taux de Rentabilité Interne (TRI)

Le **taux de rentabilité interne** d'un projet (TRI), appelé encore par certains auteurs¹ le **Taux Moyen de Rentabilité** (TMR), est le taux d'actualisation qui rend nul le FNTA de ce projet². L'implication de ce critère donne conduit au **tableau 21**, où l'on peut constater que ce critère respecte les deux règles de bon sens. L'utilisation de ce critère peut conduire à des classements différents de celui obtenu avec celui du FNTA³.

TABLEAU 21
Application du critère du TRI

Projets	A	B	C	D
Valeur du critère	0%	10%	8,9%	10%
Rang	4e	1er ex aequo	3e	1er ex aequo

Table des
matières

Index
thématique

Ce critère est utilisé dans certaines entreprises où l'on donne le feu vert à toute opération dont le TRI est supérieur à $x\%$; mais d'un point de vue pratique, il est plus simple de calculer le FNTA d'un projet à ce taux et de voir si ce FNTA est positif (auquel cas son TRI est supérieur à x).

L'avantage du FNTA sur le TRI, est d'être un critère additif: le FNTA à 6% de la réalisation simultanée de C et D est de $457 + 564 = 1021$, tandis que le TRI de cette réalisation simultanée ne peut s'obtenir simplement à partir des TRI des projets d'origine. Cet avantage, décisif du point de vue des calculs jusqu'à il y a une trentaine d'années⁴, explique sans doute la préférence des économistes et gestionnaires pour le FNTA.

III-1.2 Problèmes posés par l'actualisation

Préalablement à tout calcul de FNTA, on doit se demander la signification qu'il convient de donner à un FNTA (§ III-1.2.1) et déterminer un taux d'actualisation de référence (§ III-1.2.2, page 205).

1. D'autres réservent cette appellation au critère décrit au § III-1.1.2.3, page 202.

2. Ce taux peut ne pas être unique (cas de solutions réelles multiples de l'équation polynomiale de degré T).

3. Ce point sera illustré par l'exemple numérique du § III-4, page 223.

4. Cet avantage est quasi inexistant maintenant comme on le verra dans l'exemple du § III-4, page 223.

III-1.2.1 Signification de l'actualisation

Trois justifications ont été trouvées à l'actualisation, mais seule la dernière justifie l'utilisation de l'actualisation dans la comparaison des projets d'investissement¹.

III-1.2.1.1 Prise en compte d'une incertitude qui croît avec l'éloignement de l'horizon économique considéré

L'actualisation a pour effet d'accorder une pondération décroissante avec l'éloignement temporel, cette décroissance étant d'autant plus marquée que le taux d'actualisation est élevé. On peut constater ces deux propriétés dans l'exemple du [tableau 22](#), mais il convient de souligner qu'il s'agit là d'un effet et non d'un but de la technique d'actualisation qui ne constitue pas un moyen acceptable de rendre compte du risque².

TABLEAU 22
Illustration de la croissance du poids relatif des FNT immédiats avec le taux d'actualisation

Temps		$t = 0$	$t = 1$	$t = 2$	$t = 3$	Total
FNT _t		-10000	5000	4000	6000	5000
α	Temps	$t = 0$	$t = 1$	$t = 2$	$t = 3$	Total
0%	$(1 + \alpha)^{-t}$	1	1	1	1	4
	$FNT_t (1 + \alpha)^{-t}$	-10000	5000	4000	6000	5000
	$\frac{FNT_t (1 + \alpha)^{-t}}{\sum_{i=1}^3 FNT_i (1 + \alpha)^{-i}}$	-	33,33%	26,67%	40,00%	100%
5%	$(1 + \alpha)^{-t}$	1	0,95238	0,90703	0,86384	3,72325
	$FNT_t (1 + \alpha)^{-t}$	-10000	4762	3628	5183	3573
	$\frac{FNT_t (1 + \alpha)^{-t}}{\sum_{i=1}^3 FNT_i (1 + \alpha)^{-i}}$	-	35,08%	26,73%	38,19%	100%
10%	$(1 + \alpha)^{-t}$	1	0,90909	0,82645	0,75131	3,48685
	$FNT_t (1 + \alpha)^{-t}$	-10000	4545	3306	4508	2359
	$\frac{FNT_t (1 + \alpha)^{-t}}{\sum_{i=1}^3 FNT_i (1 + \alpha)^{-i}}$	-	36,78%	26,75%	36,47%	100%
15%	$(1 + \alpha)^{-t}$	1	0,86957	0,75614	0,65752	3,28323
	$FNT_t (1 + \alpha)^{-t}$	-10000	4348	3025	3945	1317
	$\frac{FNT_t (1 + \alpha)^{-t}}{\sum_{i=1}^3 FNT_i (1 + \alpha)^{-i}}$	-	38,42%	26,72%	34,86%	100%

Table des matières

Index thématique

1. Voir Bierman & Smidt (1972, [51]).

2. Voir Maillet (1974, [289]), p. 231 à 233.

III-1.2.1.2 Introduction de la préférence de temps

Cette justification est la traduction sophistiquée de l'adage populaire «un tiens vaut mieux que deux tu l'auras». Autrement dit, l'agent économique préfère «consommer» immédiatement les sommes disponibles parce que la prime d'attente offerte en cas de consommation différée n'est pas assez attractive. Cette approche subjective n'est pas suffisante pour étayer l'utilisation de l'actualisation en matière de choix d'investissement car une partie des projets examinés est financée sur emprunt et donc n'implique pas de différer une quelconque consommation (distribution de dividendes, par exemple).

III-1.2.1.3 Alternatives possibles dans l'utilisation des capitaux

Un projet d'investissement ne peut être jugé isolément, mais doit l'être en comparaison avec d'autres projets internes à l'entreprise (y compris le remboursement anticipé d'emprunts contractés antérieurement) et même externes à l'entreprise (prises de participation, placements sur le marché monétaire ou financier). Ces opportunités, tant internes qu'externes, conduisent à rejeter l'existence de fonds gratuits. La comparaison entre projets doit donc se faire à partir d'une rémunération implicite minimale des capitaux, de niveau (= taux d'actualisation de référence) à déterminer (voir § III-1.2.2) et que seule la technique d'actualisation prend correctement en compte.

Si l'on préfère se ramener à la notion plus familière de capitalisation (à un taux d'intérêt moyen identique au taux d'actualisation de référence) d'échéanciers relatifs à des projets de même durée de vie, il est facile de constater que les valeurs capitalisées sont, à un facteur constant multiplicatif près, égales aux valeurs actualisées¹ et qu'en conséquence les classements des projets auxquels conduisent ces deux critères, sont égaux. Cette constatation ne préjuge en rien la rentabilité effective des projets ultérieurs qui seront financés à l'aide de ces flux.

Table des matières

Index thématique

III-1.2.2 Détermination du taux d'actualisation de référence

La détermination du taux d'actualisation de référence est fondamentale, car le classement des projets selon leur rentabilité peut varier avec le taux d'actualisation retenu. On examinera d'abord ce point (§ III-1.2.2.1) avant de présenter les règles de définition du taux d'actualisation de référence (§ III-1.2.2.2, page 206) et d'examiner l'incidence de l'usage du bilan différentiel (§ III-1.2.2.3, page 209).

III-1.2.2.1 Importance du problème

Pour illustrer l'importance du choix d'un taux d'actualisation économiquement correct, il suffit d'analyser l'exemple numérique du [tableau 23 de la page 206](#) qui décrit les FNT de 4 projets de même durée et correspondant à un même investissement, afin d'éviter toute source de distorsion dans les comparaisons; les valeurs actualisées de ces échéanciers sont données au [tableau 24 de la page 206](#) et portées dans la [figure 54, page 207](#).

1. En posant $FNTA_i$, le Flux Net de Trésorerie Actualisé du projet i , au taux α , en $t = 0$ et $FNTC_i$, le Flux Net de Trésorerie capitalisé en $t = T$, il est évident que $FNTA_i = \sum_{t=0}^T \frac{FNT_{it}}{(1+\alpha)^t}$ et $FNTC_i = \sum_{t=0}^T FNT_{it}(1+\alpha)^{T-t}$ entraîne $FNTC_i = FNTA_i(1+\alpha)^T$.

TABLEAU 23
Exemple de projets à comparer

Projets	Fin de l'année						Σ	TRI
	0	1	2	3	4	5		
A	-10000	2100	2600	2800	4200	4300	6000	15,64%
B	-10000	2000	3400	2500	3400	4000	5300	14,56%
C	-10000	1900	3500	2600	4100	6300	8400	20,11%
D	-10000	5300	3600	2600	1800	1400	4700	19,13%

TABLEAU 24
Actualisation des échéanciers des projets

Taux	2%	4%	6%	8%	10%	12%	14%	16%	18%	20%	22%	24%	26%	28%	30%
A	4874	3881	3006	2231	1546	937	397	-83	-511	-892	-1232	-1535	-1806	-2048	-2264
B	4263	3349	2541	1827	1193	630	130	-315	-711	-1065	-1381	-1663	-1915	-2140	-2342
C	7030	5824	4760	3820	2987	2248	1591	1007	487	23	-391	-762	-1093	-1390	-1655
D	3958	3294	2697	2161	1678	1242	848	492	169	-123	-389	-631	-850	-1050	-1232

L'examen de cet exemple montre que si l'on dispose d'un budget de 20000, le choix des deux projets les plus rentables varie en fonction du taux d'actualisation retenu: jusqu'à un peu plus de 8%, il faut retenir les projets A et C et qu'au delà, il convient de retenir les projets C et D. L'intersection de deux courbes dans la [figure 54](#) qui modifie le classement des deux projets concernés est appelée **intersection de Fisher**.

Le taux d'actualisation doit être fondé économiquement, faute de quoi des erreurs de choix pouvant être lourdes de conséquences pour l'entreprise sur le plan financier et technique (choix d'une filière de production) peuvent être commises¹.

III-1.2.2.2 Détermination du taux d'actualisation de référence

Deux écoles s'affrontent sur ce point: la première préconise d'utiliser un coût moyen pondéré des capitaux² figurant au bilan et est donc orientée vers le passé de l'entreprise. La seconde école est au contraire tournée vers l'avenir et considère que le taux d'actualisation de référence découle du «portefeuille de projets d'investissement» de l'entreprise, et n'est que le prix d'une ressource rare matérialisée par le budget d'investissement et dans ces conditions, le taux d'actualisation de référence doit être égal au taux de rentabilité du dernier projet que l'entreprise peut entreprendre et que l'on qualifie de projet marginal³. Cette règle est à interpréter de deux façons différentes, selon que les capacités d'endettement sont atteintes ou non.

1. Les spécialistes qui acceptent l'hypothèse de l'efficacité des marchés estiment que le taux d'actualisation n'est pas directement lié à l'enveloppe budgétaire de l'entreprise, celle-ci étant extensible en fonction des caractéristiques de ces marchés. Cette hypothèse nous semble trop forte.

2. Voir, par exemple, Van Horne (1977, [427]), p. 330 - 331. Certains auteurs sont cependant moins «tournés vers le passé» et raisonnent sur une structure financière «objectif» d'où se dégage un taux pondéré suffisant pour rémunérer les actionnaires et prêteurs compte tenu du niveau de risque encouru.

3. Sa détermination peut ne pas être immédiate si les projets d'investissements ne sont pas indépendants et divisibles.

FIGURE 54
Évolution des FNTA en fonction du taux d'actualisation

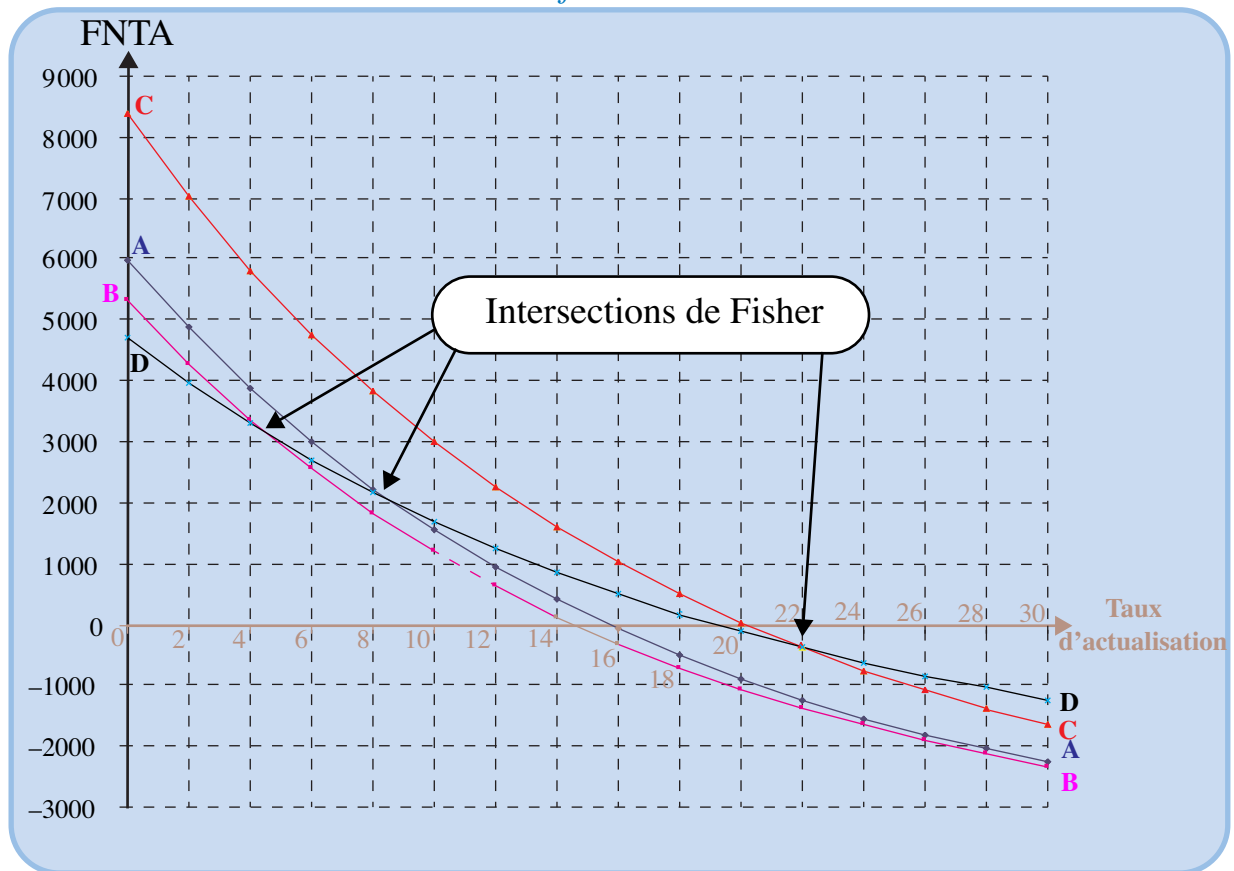


Table des matières

Index thématique

- *Entreprise n'ayant pas épuisé ses capacités d'endettement*

L'entreprise fera normalement appel à des fonds extérieurs tant que la rentabilité du projet supplémentaire examiné est supérieure au taux d'intérêt de l'emprunt; elle s'arrêtera normalement lorsque le taux de rentabilité interne du projet marginal, noté ω , devient égal au taux de l'emprunt supplémentaire, nécessaire à sa réalisation (voir [figure 55, page 208](#)). L'introduction du risque conduit les financiers à considérer que l'adaptation passe par une transformation de la structure du capital et que donc, implicitement, seul ce cas de figure est à prendre en compte, ce qui repose sur l'hypothèse d'une efficacité des marchés financiers.

- *Entreprise ayant épuisé ses capacités d'endettement*

Si l'entreprise ne souhaite pas dépasser un certain niveau d'emprunt (pour respecter une certaine structure financière, par exemple), ou si elle n'obtient pas la totalité des concours bancaires souhaités, l'entreprise doit retenir comme taux d'actualisation, celui qui égalise l'offre et la demande de capitaux (voir [figure 56, page 208](#)) et non un taux arbitraire comme le taux γ de l'emprunt marginal¹.

1. L'utilisation d'un taux d'actualisation inférieur au taux correctement calculé (cas de certaines entreprises publiques auxquelles les autorités de tutelle imposent à la fois un taux d'actualisation et une enveloppe budgétaire par le biais de l'autorisation de hausses tarifaires et de restrictions d'accès au marché financier) a conduit certains économistes à proposer des critères additionnels de comparaison pour éliminer certains projets rentables au taux d'actualisation imposé. Ces critères empiriques sont dénués de justifications théoriques.

FIGURE 55

Détermination du taux d'actualisation de référence pour une entreprise n'ayant pas épuisé ses capacités d'endettement

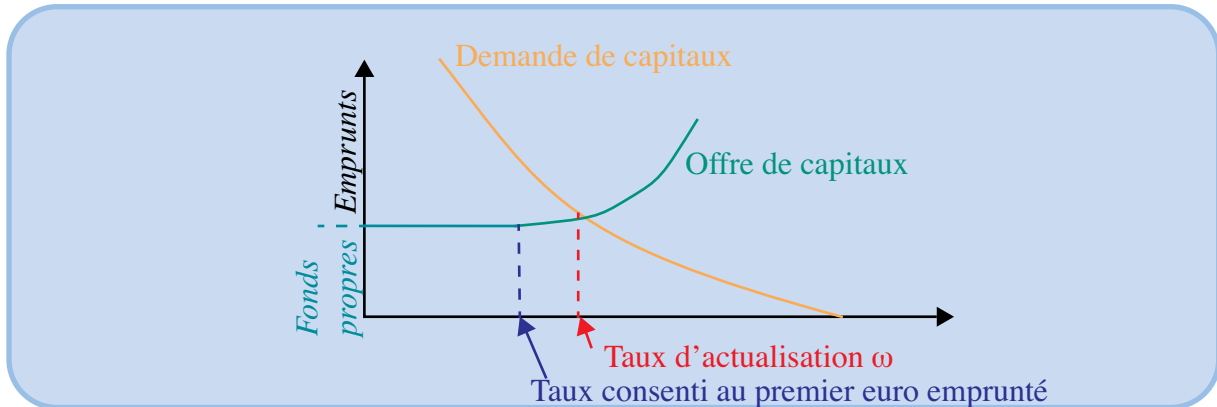
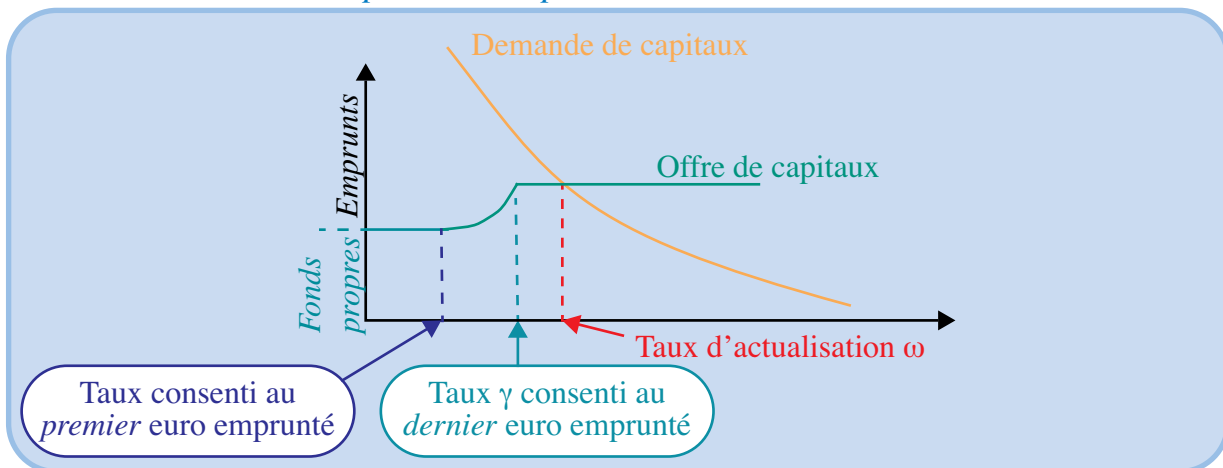


FIGURE 56

Détermination du taux d'actualisation de référence pour une entreprise ayant épuisé ses capacités d'endettement



Ces principes de détermination des taux d'actualisation de référence ont deux conséquences pratiques :

- Tout d'abord, la connaissance du taux d'actualisation implique celle des projets sélectionnés qui dépend elle-même du taux d'actualisation. De nos jours, ce problème numérique est assez facile à résoudre sur tableur avec un add-in approprié. Nous illustrerons cette recherche au § III-4.1.2, page 224, avec un exemple prenant en compte les principaux problèmes méthodologiques rencontrés dans ce chapitre mais nous traiterons aussi le cas, plus simple, de la détermination du programme optimal d'investissement avec l'usage d'un taux d'actualisation imposé (§ III-4.1.1, page 224).
- Ensuite, ce qui importe avant tout dans le FNTA associé à chaque projet, c'est son signe et non son montant (sauf dans certains cas de dépendance entre projets), ce qui permet d'analyser le FNTA du programme (= somme des FNTA des projets retenus) comme une « prime » qui vient s'ajouter à la rémunération minimale du capital implicitement fournie par le taux d'actualisation α .

Il est possible d'aller plus loin dans cette vision prospective de la détermination du programme d'investissement car il nous semble en définitive plus réaliste et

compréhensible de chercher à **maximiser la rentabilité de l'enveloppe budgétaire que l'on désire consommer**, ce TRI optimal correspondant en fait à un taux d'actualisation de référence. Les problèmes numériques posés par une telle position n'en sont plus depuis quelques années, avec les moyens algorithmiques et informatiques dont on dispose et nous illustrerons cette optimisation du TRI de la consommation budgétaire au § III-4.1.3, page 225 (en nous appuyant sur le même exemple que celui utilisé pour illustrer les autres méthodes). Dans cette perspective, on étudie des scénarios de fourchettes d'enveloppes de dépenses d'investissement financées par un appel plus ou moins important à l'emprunt et l'on recherche, pour chaque scénario, le programme d'investissement qui maximise la rentabilité de la dépense d'investissement.

Cette position n'enlève pas tout intérêt à la détermination du **taux d'actualisation de référence** qui n'est alors **plus utilisé pour choisir le programme optimal d'investissement mais pour assurer une certaine cohérence temporelle des décisions**, comme on l'a proposé au chapitre II, § IV-1, page 228, avec l'utilisation de l'amortissement économique. Dans cette optique de calcul d'un amortissement économique et compte tenu des remarques que l'on va faire au § III-1.2.2.3, il nous semble préférable de fixer le taux d'actualisation de référence en accord avec le point de vue rétrospectif (coût moyen pondéré des capitaux figurant au bilan) parce qu'il repose sur une certaine stabilité des attentes des propriétaires et apporteurs de capitaux, en matière de rémunération, dans un contexte technico-économique donné.

Table des matières

III-1.2.2.3 Impact de l'approche de l'analyse des projets par le bilan différentiel sur la rentabilité du programme d'investissement

Index thématique

On a vu que l'analyse des projets d'investissement passe nécessairement par un bilan différentiel (§ II-2.2.1, page 177). Dès lors, on considère implicitement comme acquise la consommation du budget correspondant au cumul des investissements des solutions de référence¹ de chaque groupe de projets alternatifs dans lesquels l'un des projets est nécessairement retenu parce que le groupe de projets alternatifs conditionne la poursuite d'activités que l'on a décidé de ne pas remettre en cause. Cette décision peut avoir été prise pour des raisons stratégiques et ne générer que des flux de dépenses sans impact décelable sur les recettes²; elle peut aussi correspondre à la continuation de décisions antérieurement prises et que l'on n'envisage pas de remettre en cause (par exemple, investissement lié à un élargissement d'une gamme de produits, conformément à un plan de développement arrêté lors du lancement de la gamme).

La rentabilité de cette consommation budgétaire minimale ne peut être facilement déterminée car elle met en jeu toute une série de décisions antérieures à celles du choix du programme d'investissement analysé ici. C'est sur la consommation budgétaire additionnelle que se concentrent les décisions à prendre et *la rentabilité que l'on mesure porte sur cette seule consommation budgétaire*

1. À condition que ceux-ci soient correctement choisis, c'est-à-dire que les solutions alternatives aient une rentabilité différentielle positive.

2. Par exemple, un constructeur automobile peut décider que l'activité de fonderie relève de ses activités de base, pour des raisons de qualité et de sécurité. Dans ces conditions, le remplacement d'un four électrique ou d'un cubilot ne se discute pas, ce qui fait l'objet d'un choix, c'est le type de matériel de remplacement.

additionnelle. Cette observation reste valable, quelle que soit l'école à laquelle on se rattache dans la détermination du taux d'actualisation de référence.

III-2 Problèmes méthodologiques posés par la comparaison de deux projets

Le premier problème est lié à l'homogénéité des FNTA calculés (§ III-2.1) et le second (§ III-2.2, page 211) à l'inégalité des durées de vie des projets.

III-2.1 Homogénéité des FNTA calculés

Le bilan actualisé d'un projet est nécessairement un bilan différentiel, puisque les FNT sont tous calculés par différence entre une solution de référence et une solution nouvelle associée à la réalisation du projet (cf. § II-2.2.1, page 177). La comparaison des FNTA de deux projets est donc conditionnée par les solutions de référence sous-jacentes et ne pas en tenir compte peut conduire à de graves erreurs de jugement s'appuyant sur une apparence de rigueur scientifique. Parmi les problèmes rencontrés en pratique, trois nous paraissent devoir être signalés.

III-2.1.1 Possibilité de retenir un projet ayant une rentabilité absolue négative

Ce cas de figure peut se produire lorsque des recettes sont associées au projet. La variation de FNT du bilan différentiel est en général imputable à un effet de productivité, mais l'investissement de la solution nouvelle peut fort bien correspondre à un *investissement mixte de productivité et de capacité* (auquel cas un accroissement de recettes s'ajoute aux économies de dépenses).

L'exemple numérique du [tableau 25](#) illustre ce cas de figure: le TRI du bilan différentiel est de 19% alors que la rentabilité absolue du projet (A_2) est négative. Sur la base du bilan différentiel et d'un taux d'actualisation inférieur à 19%, on peut donc être amené à retenir un projet non rentable au détriment d'un projet rentable. Cela étant, la poursuite d'activités non rentables peut résulter d'une décision stratégique: vouloir se placer sur un marché porteur, vouloir offrir une large gamme de produits ou de services, etc.

TABLEAU 25
Exemple de possibilité de sélection d'un projet à rentabilité négative

Projet	0	1	2	3	4	5	Total	TRI
A_1	-20000	1500	3000	4000	2000	3000	-6500	-11,39%
A_2	-25000	3000	5000	6000	3000	4500	-3500	-4,76%
$A_2 - A_1$	-5000	1500	2000	2000	1000	1500	3000	18,88%

III-2.1.2 Possibilité d'«engraisser» un projet très rentable

L'une des pratiques courantes (et souvent difficile à détecter) consiste à inclure dans les dépenses d'investissement et/ou de fonctionnement d'un projet à très forte rentabilité (et donc assuré d'être retenu par la direction) des dépenses non directement liées à l'objet initial du projet. Par exemple, le bilan actualisé d'un projet de rénovation d'un atelier de peinture peut être «grevé» par l'introduction de nouveaux engins de manutention de performances nettement supérieures à

celles dont on a besoin, alors qu'il existe des engins moins chers et mieux adaptés. Ces dépenses «de prestige» faussent la comparaison des projets d'investissement.

III-2.1.3 Impossibilité de comparer directement certains projets

Il est bien connu en comptabilité analytique que certaines dépenses ne peuvent être affectées à un produit parce qu'elles contribuent directement ou indirectement à la fabrication de plusieurs produits. Un grand nombre de projets d'investissement fournissent des prestations de cette nature; leurs FNT sont nécessairement tous négatifs, et donc leurs FNTA également. La comparaison de deux projets de ce type n'a de sens que si ces projets fournissent des prestations comparables et si ces projets sont exclusifs (ce qui conduit implicitement à des bilans différentiels).

S'il n'en est pas ainsi, la comparaison des FNTA de deux projets est sans intérêt. Il est inutile, par exemple, de comparer l'achat d'un engin de manutention et celui d'un serveur d'applications informatiques, par contre l'examen des bilans actualisés de plusieurs modèles d'engins de manutention est riche d'intérêt. Cette comparaison a cependant un sens au niveau «global» de la détermination du programme d'investissement où l'on doit tenir compte des rapports coût/performance des différents projets (exclusifs ou non) et en même temps de la concurrence que ceux-ci entretiennent dans l'utilisation des ressources rares. Ce problème sera abordé au § III-3, page 216.

Lorsqu'à un projet on peut associer directement une recette ou un accroissement de recette, son FNTA peut être positif. La comparaison directe d'un projet à FNTA positif et d'un projet à FNTA négatif du type de celui envisagé précédemment n'a pas grand sens, sauf, là encore, dans le cadre de la détermination du programme optimal d'investissement.

Table des
matières

III-2.2 Prise en compte de l'inégalité des durées de vie des projets

Le plus souvent, les projets examinés sont de durées de vie différentes. La comparaison de leurs intérêts respectifs par le critère du FNTA est quelque peu faussée puisque l'argent dépensé pour ces investissements n'est pas immobilisé durant la même période, ce qu'illustre l'exemple du [tableau 26](#). Trois solutions sont envisageables, chacune d'elles présentant des avantages et des inconvénients, mais il est essentiel de s'en tenir toujours à la même pour calculer les FNTA servant à déterminer le programme optimal d'investissement. Les deux premières solutions reposent sur le réinvestissement, en fin de durée de vie, de la somme initialement immobilisée, tandis que la dernière s'appuie sur un horizon économique commun à tous les projets.

Index
thématique

TABLEAU 26
Exemple de projets à durées de vie inégales

	$t = 0$	$t = 1$	$t = 2$	$t = 3$	$t = 4$	$t = 5$	$t = 6$	$t = 7$	TRI	FNTA à 5%
Projet 1	-5000	2000	1900	2200					10,46 %	528,56
Projet 2	-5000	1800	1500	1400	900	800			10,36%	651,46
Projet 3	-5000	1200	1000	1100	1200	700	800	900	9,42 %	772,40

III-2.2.1 Réinvestissement dans le même projet

Cette solution peut revêtir deux formes : l'entreprise peut raisonner sur le plus petit commun multiple des durées de vie des projets soumis à la sélection budgétaire, mais elle peut aussi supposer, pour chaque projet, un renouvellement à l'identique jusqu'à l'infini (qui est le plus grand commun multiple). En pratique, le PPCM est très élevé et les résultats sont sans différence significative que l'on suive l'une ou l'autre méthode.

L'entreprise est obligée de faire explicitement des hypothèses sur l'évolution des échéanciers à prendre en considération. Une hypothèse simplificatrice couramment admise consiste à *reconduire les échéanciers jusqu'à l'infini*. Ceci n'est réaliste qu'à condition de supposer que la production permise par l'investissement considéré est stable et de recettes sensiblement constantes, ce qui fait que l'évolution de l'échéancier de flux nets de trésorerie ne s'explique que par celle des coûts. Cette solution amène deux remarques :

- À terme, les conditions d'offres et de demandes du bien ou du service considéré modifieront profondément les données du problème. Toutefois, avec un taux d'actualisation pas trop bas, l'incidence des années éloignées est faible dans un calcul d'actualisation, en conséquence de quoi la répercussion d'erreurs de prévision l'est aussi.
- L'utilisation de cette hypothèse implicite n'est pensable qu'à la condition que la production du bien ou du service considéré soit en régime de croisière et non en phase de démarrage ou de déclin. Cette remarque est importante car il est normal, pour une entreprise, d'envisager le lancement de produits ou services nouveaux, concurremment à la poursuite d'activités anciennes. Il conviendra donc pour ces produits ou services de formuler des hypothèses de régime permanent afin de ne pas sous-évaluer leur intérêt économique.

Si l'on note $FNTA_n$, le flux net de trésorerie actualisé sur la durée de vie effective n du projet, le renouvellement à l'identique, jusqu'à l'infini, revient à écrire :

$$FNTA_{\infty} = FNTA_n \sum_{t=0}^{\infty} (1 + \alpha)^{-nt} = \frac{FNTA_n}{1 - (1 + \alpha)^{-n}} \quad \text{relation 23}$$

Le **tableau 27** illustre l'application de cette solution avec $\alpha = 5\%$.

TABLEAU 27
Correction de l'inégalité des durées de vie par la chaîne infinie de remplacement à l'identique

	$t = 0$	$t = 1$	$t = 2$	$t = 3$	$t = 4$	$t = 5$	$t = 6$	$t = 7$	FNTA à 5%	FNTA $_{\infty}$ à 5%
Projet 1	-5000	2000	1900	2200					528,56	3881,84
Projet 2	-5000	1800	1500	1400	900	800			651,46	3009,40
Projet 3	-5000	1200	1000	1100	1200	700	800	900	772,40	2669,74

La solution consistant à utiliser, sur l'horizon infini, un échéancier constant y , calculé comme donnant la même valeur actualisée sur la durée de vie effective n du projet que celle de l'échéancier réel conduit, à un facteur multiplicatif près, à

la même solution que celle du renouvellement à l'identique sur une période infinie, ce que montre la [relation 24](#).

$$y = \text{FNTA}_n \frac{\alpha}{1 - (1 + \alpha)^{-n}} = \alpha \cdot \text{FNTA}_\infty \quad \text{relation 24}$$

Si ces deux solutions aboutissent au même classement des projets, la première nous semble préférable car elle met l'accent sur l'incidence réelle de l'inégalité des durées de vie et le réemploi possible des sommes dégagées, et force à faire des hypothèses sur la rentabilité du placement des sommes libérées. Dans la seconde solution, celle-ci est toujours implicitement égale à la rentabilité du projet qui libère ces sommes; il s'agit là d'une hypothèse forte qu'il vaut mieux expliciter.

On peut ajouter enfin que, normalement, les projets internes à l'entreprise ont une rentabilité supérieure au taux hors risque qui est celui des placements présentant une garantie absolue (bons du Trésor, etc.). Il s'ensuit que le taux d'actualisation de l'entreprise est normalement supérieur au taux hors risque. Il est alors facile de constater d'après les formules de termes correctifs que si on retenait le taux hors risque pour calculer la rentabilité du réemploi des capitaux, le terme correctif à ajouter serait négatif, ce qui serait aberrant. Remarquons en outre que retenir une rentabilité des capitaux réinvestis égale à la rentabilité marginale, revient à rendre nul le terme correctif, et donc à ne pas tenir compte des inégalités de durées de vie¹.

Table des matières

Index thématique

III-2.2.2 Réinvestissement dans un «projet moyen»

Comme dans la première solution, l'entreprise considère qu'en fin de durée de vie, un montant égal à l'investissement initial est réinvesti, mais sa rentabilité est égale à la rentabilité moyenne des capitaux. Cette rentabilité moyenne est obligatoirement supérieure à la rentabilité marginale, cette dernière définissant le taux d'actualisation. Ce choix se base sur l'hypothèse que, dans l'avenir, la distribution des taux de rentabilité interne des différents projets ne sera guère différente de celle observée et résulte en outre du refus d'affecter à un projet particulier, les sommes libérées par tous les équipements en fin de vie, au cours de l'année considérée. Toutefois, par prudence, l'entreprise peut être amenée à minorer le taux de rentabilité moyen à utiliser, prenant de ce fait une certaine «assurance» sur l'avenir.

Le taux d'actualisation utilisé dans l'exemple précédent (5%) correspondait au taux de rentabilité du projet marginal. Supposons maintenant que les capitaux investis dans l'entreprise dégagent, en moyenne, une rentabilité de 10%. On considérera alors qu'à la fin de la durée de vie des projets 1 et 2 (respectivement 3 et 5 ans), l'entreprise investira une somme égale à l'investissement initial pour récupérer respectivement au bout de 4 et 2 ans (c'est-à-dire au terme du projet le plus long) ce montant capitalisé à 10%. On obtient alors les FNTA du [tableau 28](#).

Ajoutons, ce qui est mathématiquement évident, que cette correction est inutile lorsque le taux d'actualisation utilisé est justement ce taux moyen. Si la sélection s'effectue sur la base d'une maximisation du TRI de la dépense d'investissement

1. Il est à noter que cette solution a la préférence des nombreux financiers qui évacuent de ce fait le problème de l'inégalité des durées de vie.

TABLEAU 28
Correction de l'inégalité des durées de vie par la chaîne infinie de remplacement à l'identique

	$t = 0$	$t = 1$	$t = 2$	$t = 3$	$t = 4$	$t = 5$	$t = 6$	$t = 7$	FNTA corrigé
Projet 1	-5000	2000	1900	2200 - 5000				+ 5500 x 1,1 ⁷⁻³	1 186,72
Projet 2	-5000	1800	1500	1400	900	800 - 5000		+ 5500 x 1,1 ⁷⁻⁵	2 196,49
Projet 3	-5000	1200	1000	1100	1200	700	800	900	772,40

(voir page 209), il faut considérer que cette rentabilité moyenne est égale à ce TRI pour rendre cette correction inutile, ce qui est acceptable s'il s'avère que ce TRI est stable sur longue période.

III-2.2.3 Horizon économique borné arbitrairement

Une dernière possibilité, sans doute plus délicate à mettre en œuvre, consiste à comparer les différents projets sur une période assez longue, par exemple $T = 10$ ans. Les projets à durée de vie inférieure sont supposés être renouvelés à l'expiration de leur durée de vie. Pour tenir compte des reliquats d'activité, il suffit alors de créditer les différents projets de leur valeur résiduelle à la dixième année, se plaçant ainsi dans le cas fictif d'une cessation d'activité. S'il existe un marché d'occasion, la détermination de la valeur résiduelle ne présente guère de difficultés. Dans le cas contraire, il faut déterminer cette valeur.

Plusieurs méthodes sont possibles. Citons tout d'abord une pratique qui n'a pour elle que sa simplicité d'utilisation, c'est celle qui consiste à prendre comme valeur résiduelle la définition du capital non amorti à la fin de l'horizon économique retenu, en supposant que l'on pratique un remboursement par annuités constantes (amortissement + intérêt). Par exemple, un équipement acheté 10000 et d'une durée de vie de 15 ans aura dans ces conditions une valeur résiduelle de 4171 € si le taux d'actualisation réel de 5% est utilisé¹. À notre avis, deux cas de figure doivent être distingués selon qu'à l'équipement considéré on associe uniquement des flux de dépenses ou des flux de dépenses et des flux de recettes.

a) Si l'on associe au projet uniquement des flux de dépenses, la détermination de la valeur résiduelle V_T est nécessairement arbitraire. Pour lever cet arbitraire, il faut introduire un critère. Celui que l'on retiendra ici (mais d'autres sont envisageables) correspond à une volonté de maintenir constante chaque année la somme des coûts directs d'utilisation (qui, en général, croissent au cours du temps) et d'un amortissement économique (lequel n'a rien à voir avec l'amortissement fiscal), qui correspond à la diminution de valeur de déclasserement ($V_{t-1} - V_t$) augmentée, le cas échéant, de la rémunération αV_{t-1} du capital immobilisé². Illustrons ceci par un exemple simplifié où l'horizon retenu est de 3 ans (au lieu de 10) et la durée de vie de l'équipement de 5 ans. L'investissement est de 1000, et la somme non

1. On a en effet: $\frac{1,05^{15} - 1,05^{10}}{1,05^{15} - 1} \cdot 10000 = 4171$.

2. Cette somme $(V_{t-1} - V_t) + \alpha V_{t-1}$ est appelée «charge d'immobilisation» par Boiteux (1964, [59], chap X).

actualisée des coûts C_t de fonctionnement est de 600, ce qui conduit à une annuité de 320 et à une valeur résiduelle de 370 à la fin de l'année 3, comme le montre le [tableau 29](#).

TABLEAU 29
Détermination de l'échéancier de valeurs résiduelles en cas d'absence de recettes et sans prise en compte de la rémunération du capital investi

	0	1	2	3	4	5	Σ
C_t		100	110	120	130	140	600
$C_t + (V_{t-1} - V_t)$		320	320	320	320	320	1600
$V_{t-1} - V_t$		220	210	200	190	180	1000
V_t	1000	780	570	370	180	0	

Si l'on introduit l'actualisation, avec un taux d'actualisation α de 12%, on obtient une valeur résiduelle de 440,15 à la fin de l'année 3, comme on peut le constater sur le [tableau 30](#).

TABLEAU 30
Détermination de l'échéancier de valeurs résiduelles en cas d'absence de recettes et avec prise en compte de la rémunération du capital investi

Table des matières

Index thématique

	0	1	2	3	4	5	Σ	FNTA
C_t		100	110	120	130	140	600	424,45
$x = \frac{1000 + 424,45}{\{(1 - 1,12^{-5})/0,12\}}$		395,16	395,16	395,16	395,16	395,16	1975,78	1424,45
$x - C_t = 0,12V_{t-1} + (V_{t-1} - V_t)$		295,16	285,16	275,16	265,16	255,16	1375,78	1000,00
$0,12V_{t-1}$		120,00	98,98	76,64	52,82	27,34	375,78	289,68
$V_{t-1} - V_t$		175,16	186,17	198,52	212,34	227,82	1000,00	710,32
V_t	1000	824,84	638,67	440,15	227,82	0,00		

b) Si l'on associe au projet des flux de recettes et des flux de dépenses, la valeur de déclassement est également en grande partie arbitraire. En effet (cf. [tableau 30](#)) la valeur actualisée des FNT_t positifs (différences entre les recettes d'exploitation R_t et les dépenses d'exploitation D_t) peut s'analyser comme la valeur actualisée des charges d'immobilisation (c'est-à-dire la perte de valeur $V_{t-1} - V_t$, augmentée de la rémunération αV_{t-1} du capital immobilisé) et de bénéfices nets d'exploitation B_t . Si l'on suppose pour simplifier que l'investissement I a lieu l'année $t = 0$, on a :

$$\sum_{t=1}^T FNT_t(1 + \alpha)^{-t} = \sum_{t=1}^T (R_t - D_t)(1 + \alpha)^{-t}$$

$$= \sum_{t=1}^T \{(V_{t-1} - V_t + \alpha V_{t-1}) + B_t\}(1 + \alpha)^{-t}$$

$$= I + \sum_{t=1}^T B_t(1 + \alpha)^{-t} = I + \text{FNTA}$$

Il ressort de cette formulation que, pour un taux d'actualisation α et un échéancier de valeurs résiduelles donné V_t , on peut déduire sans difficulté un échéancier de bénéfices nets dont la valeur actualisée correspond au FNTA du projet. Réciproquement, si l'on connaît l'échéancier de bénéfices nets, on peut calculer l'échéancier de valeurs résiduelles. Mais comme cet échéancier de bénéfices nets est inconnu (on ne connaît que sa valeur actualisée) il est impossible, sans hypothèses complémentaires, de calculer l'échéancier des valeurs résiduelles. Une solution possible pour résoudre ce problème consiste à dire que la valeur résiduelle à la fin d'une année quelconque, l'année 3 par exemple, a la même rentabilité que l'investissement initial. Dans l'exemple donné au [tableau 31](#) le projet au TRI de 16,79% et la valeur résiduelle à la fin de la troisième année est de 347,18 car un tel placement, procurant des FNT de 200 et 240 les années suivantes, a également un TRI de 16,79%. Cette solution, qui a le mérite de la simplicité, n'en reste pas moins arbitraire.

TABLEAU 31

Détermination de l'échéancier de valeurs résiduelles en cas de recettes, avec prise en compte de la rémunération du capital investi

	0	1	2	3	4	5
FNT _t	-1000,00	400,00	300,00	350,00	200,00	240,00
V _t		767,95	596,93	347,18	205,49	

Table des matières

Index thématique

III-3 La définition du programme optimal d'investissement par la programmation linéaire

En univers certain, le programme optimal d'investissements se détermine en toute rigueur en faisant appel aux techniques de programmation linéaire en nombres entiers¹. Les coefficients c_i de la fonction-objectif sont les FNTA associés aux projets, et la variable x_i associée à ce coefficient est la part du projet que l'on réalise, cette part pouvant être comprise entre 0 (le projet n'est pas retenu) et 1 (le projet est retenu dans sa totalité), et ne prendre éventuellement que l'une de ces deux valeurs si le projet n'est pas fractionnable (on parle alors de variable binaire, voir [chapitre XVI, page 1135](#)). Il est possible également de donner à x_i des valeurs entières non négatives; ce sera le cas, par exemple, d'un nombre x_i de véhicules qu'une société de taxis désire acquérir, et le coefficient c_i n'est alors autre que le FNTA unitaire.

Les interdépendances sont correctement prises en compte à l'aide des contraintes. L'utilisation intelligente de ces diverses contraintes garantit que la

1. Cette formulation est due à Weingartner (1963, [438] et 1966, [439]). Certaines formulations fournies ci-après sont des extensions des résultats énoncés par cet auteur. Une application de cette approche a été développée par la SEMA, avec le programme CAPRI (voir Lesourne, 1973, [276], chap. XI). Les possibilités offertes de nos jours par les modélisateurs (voir le § II-1, page 1132, du [chapitre XVI](#)) mais aussi par les tableurs et leurs add-in permettant des optimisations en univers aléatoire, de modèles non linéaires de complexité moyenne (voir § II-3.3, page 190, et § II-3.4, page 196) permettent d'utiliser facilement ces approches.

sélection finale des projets par la programmation linéaire sera cohérente sur le plan technique et conforme aux objectifs de l'entreprise. Cette conformité exige bien sûr, en outre, que la « banque de projets » soumise à la sélection budgétaire n'entre pas elle-même en conflit avec ces objectifs.

Ces contraintes peuvent être classées en 2 catégories : celles qui visent les relations entre projets deux à deux (§ III-3.1) et celles relatives à l'ensemble du programme (§ III-3.2, page 218). On illustrera ces possibilités sur un exemple numérique simplifié (§ III-4, page 223).

III-3.1 Les contraintes de dépendance réciproque des projets

Les variables représentant les projets i et j sont les variables dichotomiques x_i et x_j . Examinons par quelles contraintes se traduisent les diverses relations autres que celle d'indépendance (qui se traduit par l'absence de contrainte).

III-3.1.1 Exclusion

L'application des règles 1 du chapitre XVI, page 1139 conduit à la relation 25 permettant de prendre en compte l'interdiction de sélection simultanée de 2 projets et à la relation 26 qui porte cette interdiction de sélection simultanée à k projets.

$$x_i + x_j \leq 1 \quad \text{relation 25}$$

$$\sum_{i=1}^k x_i \leq 1 \quad \text{relation 26}$$

C'est de cette façon que peut être traité le problème des variantes d'un même projet. Ces variantes, qui remplissent toutes la même fonction principale pour l'entreprise, se différencient soit par la technique utilisée, soit par la date d'inscription à un programme (ou par toute combinaison des deux). Si l'on a décidé qu'un investissement de remplacement (correspondant à l'une des variantes susvisées) est nécessaire « en tout état de cause », la contrainte à retenir est celle de la relation 27, qui est une application des règles 2 du chapitre XVI, page 1139.

$$\sum_{i=1}^k x_i = 1 \quad \text{relation 27}$$

III-3.1.2 Réalisation conditionnelle

Si j ne peut être réalisé qu'à condition que i le soit, on utilise la relation 28, qui est une application des règles 3 du chapitre XVI, page 1140.

$$x_j \leq x_i \quad \text{relation 28}$$

Si j ne peut être réalisé qu'à condition que l'un quelconque des k premiers projets (exclusifs ou non) soit réalisé, la généralisation de cette contrainte passe par l'utilisation de la relation 29, qui généralise la relation précédente.

$$x_j \leq \sum_{i=1}^k x_i \quad \text{relation 29}$$

III-3.1.3 Synergie

Si une plus-value résulte de la réalisation simultanée de i et de j , on introduit une opération x_k de coût nul et la **relation 30** (en application des règles 3 du **chapitre XVI, page 1140**, comme pour la **relation 28**) qui permet, lorsque i et j sont réalisés, de porter à 1 la valeur de x_k puisque la fonction-objectif s'accroît sans répercussion sur la contrainte de budget.

$$x_k \leq x_i \text{ et } x_k \leq x_j \quad \text{relation 30}$$

Si, à la place d'un effet de synergie, nous avons une moins-value (effet de concurrence), il faut passer par la **relation 31** car le modèle a tendance à rendre x_k aussi faible que possible, c'est-à-dire égal à 0, ce qui ne se produit que si x_i ou x_j est nul.

$$(x_k + 1) \geq x_i + x_j \quad \text{relation 31}$$

En général si la plus-value, ou la moins-value, résulte de la réalisation simultanée de k premiers projets, on crée un projet fictif i , de coût nul et on utilise :

$$k \cdot x_i \leq \sum_{j=1}^k x_j (\text{plus-value}) \quad \text{relation 32}$$

$$x_i + k - 1 \geq \sum_{j=1}^k x_j (\text{moins-value}) \quad \text{relation 33}$$

On peut ajouter que les rendements croissants ou décroissants peuvent être pris en compte « discrétionnairement » par le biais de projets à réalisation conditionnelle et synergie (cas de rendements croissants) ou effet de concurrence (cas de rendements décroissants). Un autre artifice est encore possible et consiste à introduire des projets exclusifs correspondant à autant d'hypothèses de rendement moyen.

III-3.2 Les contraintes portant sur l'ensemble du programme

III-3.2.1 Contraintes de trésorerie

On peut exiger que les flux nets de trésorerie résultant du choix du programme soient supérieurs à un minimum b_t , lequel peut varier chaque année t . Cette contrainte s'exprime par T inéquations correspondant aux T périodes constitutives de l'horizon économique retenu (**relation 34**). Ces flux ne sont pas actualisés.

$$\sum_{i=1}^N x_i \text{FNT}_{it} \geq b_t, \text{ avec } t = 1, \dots, T (\text{contrainte de trésorerie}) \quad \text{relation 34}$$

Pour couvrir leurs charges fixes (et donc éviter de rendre déficitaire un exercice), les entreprises sont conduites à souhaiter une certaine régularité du cumul des FNT. Ceci explique que souvent des entreprises préfèrent à des projets fortement rentables mais à rentrées irrégulières, des projets moins rentables mais à rentrées régulières. À ceci s'ajoute également le fait que les projets les plus rentables peuvent être les plus risqués et que l'arbitrage entre rentabilité et risque (cf. **page 199**) peut les rendre moins attractifs.

On peut également exiger que ces flux nets de trésorerie soient compris dans une fourchette, et c'est par ce biais que l'on traitera de préférence le problème de la définition de programmes optimaux pluriannuels. Ceci conduit aux deux remarques suivantes :

- Si l'on se place du seul point de vue de la date optimale de réalisation d'un projet, le critère du FNTA indique sans équivoque à quel programme annuel ce projet doit être inscrit. Cette année de mise en service, optimale du point de vue des variantes d'un même projet, peut être remise en cause dans la détermination optimale du programme d'investissement, pour «soulager» la contrainte de trésorerie de cette année. Le retard étant nécessairement limité dans le temps, il est nécessaire, en particulier pour des projets ne générant pas de recettes, d'exiger qu'il soit réalisé au cours de l'un des k premiers exercices en appliquant la relation 27 de la page 217 $\left(\sum_{i=1}^k x_i = 1 \right)$.
- On a vu au § III-3.1.1, page 217, qu'il y avait intérêt à considérer les variantes d'un projet qui ne diffèrent que par leur date de réalisation, comme autant de projets exclusifs. Les FNTA de ces projets exclusifs diffèrent pour deux raisons.
 - En retardant une opération, on modifie, par le seul jeu de l'actualisation, le FNTA qui lui est associé.
 - En décalant dans le temps les échéanciers de FNT, ceux-ci peuvent changer d'amplitude sous des influences multiples (dérives de coûts, variation de la demande...).

Il faut souligner enfin que la marge de manœuvre dont on dispose au niveau budgétaire est bien plus faible qu'il ne le paraît. On a évoqué (§ III-1.2.2.3, page 209) le fait que de nombreux investissements ne génèrent aucune recette et que l'on était alors souvent dans l'obligation de choisir dans chaque sous-ensemble d'alternatives, l'une d'entre elle. Il s'ensuit qu'une partie importante du budget, celle correspondant au cumul des alternatives les moins onéreuses de chaque sous-ensemble, doit être considérée comme déjà engagée. Les degrés de liberté «résiduels» dont on dispose alors, offrent la possibilité de préférer une autre variante dans chacun des sous-ensembles et de retenir des projets à FNTA positifs (n'appartenant pas aux sous-ensembles précités). Il est intéressant de noter que le FNTA et les investissements de ces derniers projets, qui correspondent souvent à de nouvelles opportunités et sont pris dans leur intégralité, rentrent en compétition avec des variations de FNTA et d'investissements résultant d'études de bilans différentiels de variantes de projets de renouvellement d'équipement qui intègrent ou non des effets de productivité ou de capacité, et dont la rentabilité absolue – si celle-ci a un sens – peut être très différente (voir § III-2.1.1, page 210). La rationalité de la démarche est cependant assurée au niveau global car le problème posé est celui d'une allocation optimale d'un budget d'investissement et non celui de comparaison d'alternatives partielles.

III-3.2.2 Contraintes physiques

On peut aussi se fixer le même genre de contrainte, année par année, pour toutes les ressources rares de l'entreprise. C'est ainsi que si, à certains projets, des écono-

mies de personnel importantes sont associées, on pourra introduire une limite à la décroissance des effectifs (qui tient compte des départs naturels et ce, éventuellement, par qualification).

III-3.2.3 Remarques

Sur le plan de la mise en œuvre de la programmation linéaire, deux remarques importantes concernant la conciliation de divers points de vue, peuvent être faites.

III-3.2.3.1 Permutation possible du rôle de certaines contraintes et de la fonction-objectif

Les objectifs d'une entreprise sont multiples et le critère financier est loin d'être la seule préoccupation de ses dirigeants. Le pluralisme de vues peut avoir sa traduction en programmation linéaire, si les autres objectifs peuvent s'exprimer par un ensemble de seuils, pour lesquels les différents projets mis en concurrence ont des répercussions. Des préoccupations stratégiques peuvent conduire à exiger que la sélection de projets permette d'assurer, année par année, un certain potentiel minimal de production pour certains produits ou services.

Mais on peut aussi fort bien ne pas vouloir privilégier l'aspect financier, ce qui conduit alors à changer de fonction-objectif, au profit par exemple d'une fonction cherchant à maximiser le potentiel de production, dans une optique de croissance (la détermination de ce potentiel pose implicitement, au niveau de la fonction-objectif, un problème d'agrégation assez délicat).

Les préoccupations financières ne disparaîtraient pas pour autant et seraient alors intégrées en contraintes, l'entreprise désirant maximiser son potentiel de production, à condition de ne pas descendre en dessous d'une rentabilité minimale (approche connue sous le nom de *goal programming*). Ce seuil minimal, par exemple b_1 , sera saturé par $\sum a_{1j}x_j$ où a_{1j} correspond au FNTA associé au projet j . En pratique, il peut être préférable de rechercher s'il existe un noyau stable de projets lorsque l'entreprise cherche à concilier des objectifs différents.

III-3.2.3.2 Analyse multicritère et programmation linéaire

Ajoutons enfin que l'approche par la programmation linéaire peut partiellement se substituer aux techniques d'analyse multicritère. En effet, l'introduction des variables dichotomiques permet de hiérarchiser des projets selon un point de vue (à l'aide des relations de réalisation conditionnelle) en laissant la possibilité de considérer comme équivalents plusieurs projets se situant à un même niveau «hiérarchique». Par exemple, les projets 1 à $k-1$ sont équivalents (un seul devant être réalisé) et préférés au projet k , mais le projet i leur est préféré. Cette hiérarchie est prise en compte par la [relation 35](#).

$$x_k \leq \sum_{j=1}^{k-1} x_j \leq x_i$$

relation 35

Or, à chaque point de vue, correspond une hiérarchie de choix dont l'agrégation entraîne pratiquement toujours des effets Condorcet, c'est-à-dire, en utilisant le langage des contraintes: $x_1 < x_2$, $x_2 < x_3$, $x_3 < x_1$. Mais dans notre système, les relations de hiérarchie sont prises en compte par des inégalités larges (\leq) et non des inégalités strictes ($<$) ce qui fait que si deux points de vue sont, a priori, incom-

patibles pour un ensemble de trois projets ou plus, pour lesquels des effets Condorcet se produisent, et s'il est possible par ailleurs de les réaliser tout simultanément, les inégalités larges se transforment en égalités et le programme linéaire peut intégrer cette combinaison dans l'une de ses bases.

Cela étant, vouloir faire coexister à tout prix des points de vue différents s'effectue au détriment de l'optimum et, si les points de vue exprimés sont très différents, on peut être amené à ne pas saturer l'enveloppe budgétaire. Pour ces raisons, il vaut peut-être mieux appliquer les techniques d'analyse multicritère lors de la définition de la banque de projets. Rappelons enfin que la conciliation de points de vue ne constitue pas une fin en soi et que l'art de diriger consiste, dans l'entreprise comme ailleurs, à arbitrer entre plusieurs stratégies possibles.

III-3.2.3.3 Prise en compte du risque

La démarche décrite au § II-3.4, page 196, sur la prise en compte probabiliste du risque dans l'analyse d'un projet se transpose sans difficulté dans la recherche du programme optimal d'investissement. On illustrera cette possibilité au § III-4.2, page 226.

III-3.2.3.4 Raisons de la faible diffusion de l'approche rigoureuse du choix du portefeuille d'investissement

Rares sont les entreprises qui procèdent à une démarche de rationalisation des choix d'investissement aussi sophistiquée que celle présentée ici. De nombreuses raisons expliquent cela. La méconnaissance de ces approches «rationnelles» et la difficulté (faible aujourd'hui) de leurs mises en œuvre ne constituent qu'une raison parmi d'autres.

La plus importante tient sans doute au fait que le problème du choix des investissements ne se pose pas de manière rationnelle une fois par an, sachant que les contraintes fiscales conduisent, dans bon nombre de pays à avoir une détermination annuelle de la capacité d'autofinancement. Le calendrier des décisions est rythmé par des besoins et des opportunités qui forcent à des prises de décisions plus fréquentes, avec des budgets d'investissement «élastiques» en fonction de ces besoins et opportunités, avec une certaine régulation de l'enveloppe d'investissement s'effectuant sur un calendrier annuel. Dans ce cadre, il n'est pas rare d'observer une absence de discussion réelle dès lors que l'on est assuré que la rentabilité des projets retenus est très élevée pour l'entreprise et le budget dégagé correspond alors aux besoins. Cette pratique est également habituelle pour des investissements de faible montant, dans le cadre d'une décentralisation de la décision opérée par des entreprises d'une certaine importance, et la mise sous tension est alors généralement complétée par une dotation budgétaire annuelle et un contrôle a posteriori. Bien évidemment, une analyse périodique (au moins annuelle) des autres projets est réalisée.

Si un certain nombre de précautions sont prises, cette pratique peut aboutir au même résultat que celui d'une mise en œuvre annuelle d'une démarche rationnelle de choix d'investissement, en permettant de mieux coller aux besoins et opportunités. Cela étant, plusieurs remarques doivent être faites :

- On a évoqué (§ III-2.1.3, page 211) le fait qu'il n'est pas possible d'associer des recettes à certains investissements, la pratique du bilan différentiel

conduit alors à choisir l'alternative la plus intéressante, mais la consommation budgétaire de l'alternative retenue porte sur la totalité du montant de l'alternative et non sur l'investissement différentiel.

- On a évoqué (§ III-2.1.1, page 210) le fait que la direction de l'entreprise décide de rester sur des activités peu rentables, voire non rentables. La pratique du bilan différentiel ne doit pas conduire, là aussi, à une absence de réflexion stratégique sur le maintien de telles activités.
- L'analyse périodique du portefeuille «résiduel» de projets peut s'inspirer des approches décrites ici, d'autant plus qu'elles autorisent une prise en compte du risque (§ III-3.2.3.3, page 221) et ne remettent pas en cause des décisions stratégiques¹.
- Le cadre théorique de référence offert par les démarches décrites ici permet d'évaluer les risques que l'on accepte de courir en utilisant des méthodes empiriques et, accessoirement, peut orienter l'empirisme raisonné à mettre en œuvre.

TABLEAU 32
Échéancier du portefeuille de projets

Projets	$t = 0$	$t = 1$	$t = 2$	$t = 3$	$t = 4$	$t = 5$	$t = 6$	Taux de rentabilité interne	
								sans réinvestissement	avec réinvestissement ¹
A	-000	300	600	400	0	0	0	13,71 %	13,85 %
B	-1 100	300	600	300	450	0	0	17,99 %	16,76 %
C ²	-800	200	300	100	300	100	100	11,35 %	11,35 %
D ³	0	50	60	70	0	0	0	-	-
E	-600	150	100	300	300	0	0	13,20 %	13,45 %
F ⁴	-2000	800	600	500	800	400	0	18,02 %	17,41 %
G ⁵	0	-50	-70	-30	-10	-10	0	-	-
H ⁶	-1 300	550	600	800	0	0	0	21,74 %	18,16 %
I	-900	300	600	200	200	0	0	18,63 %	17,09 %
J	-1 700	800	600	700	0	0	0	11,68 %	12,91 %
K	-2 300	1 200	600	140	300	400	300	10,29 %	10,29 %

1. au taux de 14 % (voir § III-2.2.2, page 213); dans ces conditions, il convient de retrancher au dernier FNT (par exemple, pour le projet E, 300 pour $t = 4 = \tau$), le montant de l'investissement (ce qui donne ici - 300) et d'ajouter à la dernière période le montant de l'investissement capitalisés entre τ et $t = 7$ (ce qui donne ici $600 \times 1,05^2 = 779,76$)

2. C ne peut être choisi que si B a déjà été sélectionné (voir § III-3.1.2, page 217).

3. D est un bonus associé à la réalisation simultanée de A et B (voir § III-3.1.3, page 218, en particulier la relation 32).

4. F et B sont exclusifs (voir § III-3.1.1, page 217).

5. G est un malus associé à la réalisation simultanée de E et F (voir § III-3.1.3, page 218, en particulier la relation 33).

6. C ne peut être choisi que si B a déjà été sélectionné (voir § III-3.1.2, page 217).

1. Puisque choix portant alors sur des variantes, dont une est obligatoirement prise (cf relation 27 de la page 217).

III-4 Exemples d'application de la démarche de détermination du portefeuille optimal d'investissement

Les coefficients de la fonction-objectif sont, nous l'avons dit, les FNTA associés aux projets. L'exemple de la page 187 illustre le calcul du FNTA d'un projet, avec les analyses de sensibilité en univers certain puis en univers aléatoire. Nous allons montrer concrètement, sur un exemple numérique simplifié, comment sélectionner des projets d'investissement dans un ensemble de projets-candidats, en traitant ce problème, en univers certain et en univers aléatoire, à travers les approches basées sur l'actualisation.

Dans cet exemple (voir tableau 32, page 222):

- on a tenu compte des contraintes de dépendance réciproque des projets (voir § III-3.1, page 217);
- on a tenu compte des contraintes portant sur l'ensemble du programme (voir § III-3.2, page 218); ici on n'a retenu que la contrainte budgétaire¹ (d'une dépense d'investissement maximale de 7000);
- on a utilisé successivement deux critères:
 - tout d'abord, la maximisation du FNTA du portefeuille retenu, pour un taux d'actualisation imposé (5%) et avec le TRI du projet marginal,
 - ensuite, la maximisation du TRI (taux de rentabilité interne) du portefeuille retenu (voir page 209);
- les projets retenus se caractérisant par des durées de vie inégales, le principe d'un réinvestissement à la fin des projets, sur un horizon borné correspondant à celui du projet le plus long, dans un projet «moyen» (§ III-2.2.2, page 213) de rentabilité égale:
 - à 14%, si l'optimisation porte sur le critère du FNTA du portefeuille retenu, que l'on utilise un taux d'actualisation de 5% ou que l'on recherche le taux d'actualisation de référence;
 - au TRI, si l'optimisation porte sur le critère est celui de la maximisation du TRI du portefeuille retenu.

Table des
matières

Index
thématique

Examinons maintenant les solutions optimales trouvées pour les différentes formulations retenues. On utilisera ici le terme de programmation mathématique, plus général que celui de la programmation linéaire, parce que certaines formulations ne sont pas linéaires du fait que l'une des variables utilisées (le taux d'actualisation) intervient dans la détermination des coefficients de la fonction-objectif. Pour cette raison, nous avons utilisé un add-in d'Excel qui utilise un algorithme génétique, pour rechercher la solution du problème posé². Tout ceci ne doit pas faire oublier (voir § III-1.2.2.3, page 209) que l'approche du bilan différentiel conduit à considérer qu'une partie du budget d'investissement est consommée, les choix portant sur variations d'investissement.

1. On a plutôt intérêt à définir une fourchette de budget d'investissement pour tenir compte du caractère discontinu de la demande de capitaux de projets non divisibles. Cette fourchette doit correspondre à ce que l'entreprise souhaite investir, avec un rendement maximal du capital investi (rendement exprimé sous forme de FNTA ou de TRI).

III-4.1 Choix du programme optimal en univers certain

III-4.1.1 Programmation mathématique et taux d'actualisation prédéfini

La formulation du problème et la solution optimale trouvée sont décrites dans la feuille Excel de la [figure 57 de la page 225](#). Comme indiqué au début du [§ III, page 199](#), à chaque projet correspond une variable binaire x_i (cellules B4 à B14) et, dans la fonction-objectif $z = \sum c_i x_i$, les FNTA de ces projets (cellules D4 à D14) sont les coefficients c_i associés ces variables binaires; les cellules C4 à C14 correspondent aux $c_i x_i$ et le FNTA z du programme d'investissement est dans la cellule C15, qui est la somme des cellules C4 à C14. Les contraintes soumises au *solveur* génétique ont la forme des contraintes décrites dans les cellules jaunes de la feuille; s'y ajoute une contrainte forçant les variables x_i à ne pouvoir prendre que la valeur 0 ou la valeur 1. Le portefeuille de projets «projets A, B, D, E, H, I et J» maximise le FNTA à 5% avec un taux de rentabilité des réinvestissements de 14%, avec un FNTA maximum égal à 3 123 et une consommation de budget égale à 6 600.

III-4.1.2 Programmation linéaire et mathématique et taux d'actualisation égal au TRI du projet marginal

La détermination du taux d'actualisation de référence suivant la procédure décrite à la [page 208](#), avec un taux de rentabilité des réinvestissements de 14%, conduit au taux égal à 10,28%¹, correspondant au TRI du projet J, projet marginal. Dans cette formulation, on utilise au mieux le budget parce que les FNTA des projets sont d'autant plus élevés que le taux d'actualisation est faible. La solution optimale consiste alors à sélectionner les projets A, B, D, E, H et K, ce qui conduit à une consommation budgétaire de 6 300 et un FNTA de 995 (non comparable au précédent, le taux d'actualisation n'étant pas le même). On constate donc un choix diffère de celui réalisé avec le taux de 5%.

2. *Note de la page précédente.* Cet *add-in* est Evolver de la société Palisade (www.palisade.com d'où peuvent être téléchargées des versions complètes d'évaluation, utilisables sur quelques semaines). Comme les grands codes de programmation linéaire ou non linéaire, il offre le choix entre plusieurs algorithmes spécialisés dans des classes de problèmes et autorise un paramétrage de ces algorithmes. Par ailleurs dans des problèmes d'une certaine taille, il ne garantit pas d'avantage l'obtention de l'optimum et le choix de la solution initiale utilisée pour amorcer les calculs s'avère souvent importante dans le processus d'obtention de l'optimum. L'utilisation de cet *add-in* est proche de celle retenue par le *solveur* d'Excel pour définir un problème de programmation linéaire (voir [chapitre XVI, § I-4.4, page 1129](#) et la [figure 268, page 1130](#)). Les formulations retenues s'appuient sur des variables binaires, selon la logique décrite dans les zones jaunes de la [figure 57](#) mais l'utilisation directe de conditions logiques appropriées formulées avec les fonctions du tableur aurait conduit au même résultat.

1. Dans ce problème, la difficulté est de forcer le taux d'actualisation, à utiliser pour établir le programme d'investissement, à être égal au taux du projet marginal de ce programme: le taux d'actualisation est alors défini comme étant $\text{Min}_i(x_i \text{TRI}_i^* + (1 - x_i)\Gamma)$ où TRI_i^* est le TRI du projet i avec réinvestissement et où Γ est une constante supérieure à n'importe quel TRI. Pour obtenir ce résultat, on a mis dans les cellules N4 à N14, le TRI du projet si celui est retenu et $\Gamma = 200\%$, dans le cas contraire (par exemple, dans la cellule N4, ceci conduit à l'instruction «=B3*M3 + 2*(1-B3)» mais on aurait obtenu le même résultat avec «=SI(B3; B3*M3; 2)»). Il suffit ensuite de déterminer (dans la cellule N15) le minimum des cellules N4 à N14. Enfin, dans la cellule B1 qui contient le taux d'actualisation utilisé pour calculer les FNTA $_i$, on met la valeur minimale trouvée (cellule N15) diminué d'une valeur très faible (ici 0,001%) pour permettre au projet marginal d'avoir un FNTA positif et donc d'être retenu dans le programme.

FIGURE 57

Optimisation du FNTA au taux d'actualisation de 5% et réinvestissement à 14%

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
1	Taux d'actualisation 5%		Taux de réinvestissement 14%									
2	PROJET	Variable binaire	Investissement	FNTA réalisé	FNTA	t = 0	t = 1	t = 2	t = 3	t = 4	t = 5	t = 6
3	A	1	-1000	417	417	-1000	300	600	-600	0	0	1482
4	B	1	-1100	521	521	-1100	300	600	300	-650	0	1430
5	C (possible si B sélectionné)	0	0	0	149	-800	200	300	100	300	100	100
6	D (synergie si A ET B)	1	0	183	183	0	50	60	70	0	0	0
7	E	1	-600	227,770	228	-600	150	100	300	-300	0	780
8	F (exclusif de B)	0	0	0	844	-2000	800	600	500	800	-1600	2280
9	G (synergie - si E et F)	0	0	0	-153	0	-50	-70	-30	-10	-10	0
10	H (possible si E sélectionné)	1	-1300	773	773	-1300	550	600	-500	0	0	1928
11	I	1	-900	400	400	-900	300	600	200	-700	0	1170
12	J	1	-1700	622	622	-1700	800	600	-1000	0	0	2519
13	K	0	0	0	292	-2300	1200	600	140	300	400	300
14	TOTAL		-6600	3123								
15	CONTRAINTES											
16	C si A et B (synergie +) $B7^*2 \leq B4 + B5$											
17	C possible si B choisi $B6 \leq B5$											
18	B et F exclusifs $B9 + B5 \leq 1$											
19	G (synergie - si E et F) $B10 + 1 \geq B7 + B8$											
20	H possible si E choisi $B11 \leq B3$											
21	Budget $C11 \geq -7000$											

Table des matières

III-4.1.3 Programmation linéaire et critère du TRI maximal du budget investi

Index thématique

Ici le taux de réinvestissement retenu est égal au TRI du programme d'investissement retenu. Dans ce problème, ce n'est plus la valeur de la cellule C15 qu'il faut maximiser mais celle de la cellule B2, en forçant la cellule C15 à prendre une valeur nulle (en pratique, on a forcé cette cellule à prendre une valeur comprise entre - 1 et + 1). Il faut aussi tenir compte du fait qu'une solution triviale consiste à réduire le programme d'investissement au seul projet à plus fort TRI. Si l'on veut dépenser en investissement un montant minimal, il faut alors modifier la contrainte budgétaire (ici on a voulu dépenser au moins 5 500 et, au plus, 7 000); on peut alors *optimiser le rendement du budget investi*. La solution maximisant le TRI (avec un taux de rentabilité du réinvestissement égal à ce TRI) conduit à sélectionner les projets A, B, C D, E, H et I, ce qui conduit à un TRI maximum égal à 17,71% et à une consommation de budget égale à 5 700¹ (figure 59, page 227).

1. Le programme «A, B, D, E, I et K», qui est le second meilleur choix, conduit à une moins bonne saturation du budget disponible (5900) avec une détérioration du TRI du programme (15,05%). Le troisième meilleur choix «B, C, E, H, I et K» consomme un budget de 7000, pour un TRI de 14,90%. Ceci illustre le rendement marginal décroissant des sommes investies et la nécessité de forcer le budget à consommer à un montant suffisamment élevé pour être en mesure de pouvoir dépenser la somme que l'on souhaite investir, au meilleur rendement.

FIGURE 58
Optimisation du FNTA au taux d'actualisation égal au TRI du projet marginal et réinvestissement à 14%

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N
1	Taux d'actual.	10,28%	Taux de réinvestissement		14%									
2	PROJET	Variab e binaire	Inv estis se ment	FNTA réalisé	FNTA	t = 0	t = 1	t = 2	t = 3	t = 4	t = 5	t = 6	TRI	Calcul TRI mini
3	A	1	-1000	141	141	-1000	300	600	-600	0	0	1481,5	13,85%	13,85%
4	B	1	-1100	244	244	-1100	300	600	300	-650	0	1429,6	16,76%	16,76%
5	C	0	0	0	22	-800	200	300	100	300	100	100,0	11,35%	200,00%
6	D	1	0	147	147	0	50	60	70	0	0	0,0		200,00%
7	E	1	-600	72	72	-600	150	100	300	-300	0	779,8	13,45%	13,45%
8	F	0	0	0	419	-2000	800	600	500	800	-1600	2280,0	17,41%	200,00%
9	G	0	0	0	-138	0	-50	-70	-30	-10	-10	0,0		200,00%
10	H	1	-1300	390	390	-1300	550	600	-500	0	0	1926,0	18,16%	18,16%
11	I	0	0	0	191	-900	300	600	200	-700	0	1169,6	17,09%	200,00%
12	J	0	0	0,00	173	-1700	800	600	-1000	0	0	2518,6	12,91%	200,00%
13	K	1	-2300	0	0	-2300	1200	600	140	300	400	300,0	10,29%	10,29%
14	TOTAL		-6300	995										10,29%
15	CONTRAINTES													
16	C si A et B (synergie +)	\$B\$7*2 <= \$B\$4 + \$B\$5												
17	C possible si B choisi	\$B\$6 <= \$B\$5												
18	B et F exclusifs	\$B\$9 + \$B\$5 <= 1												
19	G (synergie - si E et F)	\$B\$10 + 1 >= \$B\$7 + \$B\$8												
20	H possible si E choisi	\$B\$11 <= \$B\$8												
21	Budget	-\$C\$11 <= 7000												

Table des matières

III-4.2 Choix du programme optimal en univers aléatoire

La démarche décrite au § II-3.4, page 196, est transposable sans difficulté pour résoudre le problème posé en univers aléatoire¹. Il faut simplement plus de temps de calcul et une meilleure expertise dans le choix des méthodes utilisables et la détermination d'une solution initiale respectant les contraintes. Le **tableau 33** adapte au cas aléatoire les données du **tableau 32 de la page 222**. Une distribution triangulaire a été systématiquement utilisée avec un mode correspondant au flux de trésorerie correspondant du **tableau 32**.

Avec le taux d'actualisation de 5% et le taux de réinvestissement de 14%, on retrouve la même solution qu'en univers certain² mais on dispose maintenant en plus de la distribution de probabilité du FNTA du programme. Celle-ci est approximativement symétrique, son espérance mathématique est 2978, son écart-type est 137 et ses fractiles à 5% et 95% sont respectivement 2748 et 3198.

La recherche en univers aléatoire du programme d'investissement qui maximise le rendement d'une dépense budgétaire comprise également entre 5500 et 7000

1. Les distributions utilisées dans cet exemple sont indépendantes mais l'add-in utilisé permet sans difficulté d'introduire des corrélations entre les variables aléatoires (ce qui peut permettre, dans certains cas de traiter de façon plus judicieuse les effets de synergie entre projets).

2. Ceci s'explique par le caractère faiblement dissymétrique des distributions retenues.

Index thématique

FIGURE 59

Optimisation du TRI avec consommation budgétaire définie par une fourchette

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
1	Taux d'actualisation 17,71%		Taux de réinvestissement 17,71%									
2	PROJET	Variable binaire	Investissement	FNTA réalisé	FNTA	t=0	t=1	t=2	t=3	t=4	t=5	t=6
3	A	1	-1000	-66,8	-67	-1000	300	600	400	0	0	0
4	B	1	-1100	6,2	6	-1100	300	600	300	450	0	0
5	C (possible si B sélectionné)	1	-300	-114,1	-114	-300	200	300	100	300	100	100
6	D (synergie si A et B)	1	0	128,7	129	0	50	60	70	0	0	0
7	E	1	-600	-60,2	-60	-600	150	100	300	300	0	0
8	F (exclusif de B)	0	0	0,0	13	-2000	300	600	500	300	400	0
9	G (synergie - si E et F)	0	0	0,0	-121	0	-50	-70	-30	-10	-10	0
10	H (possible si E sélectionné)	1	-1300	90,8	91	-1300	550	600	300	0	0	0
11	I	1	-900	14,7	15	-900	300	600	200	200	0	0
12	J	0	0	0,0	-158	-1700	300	600	700	0	0	0
13	K	0	0	0,0	-316	-2300	1200	600	140	300	400	300
14	TOTAL		-5700	-0,7								
15	CONTRAINTES											
16	C si A et B (synergie +)	$\$B\$2 \leq \$B\$4 + \$B\3										
17	C possible si B choisi	$\$B\$3 \leq \$B\2										
18	B et F exclusifs	$\$B\$2 + \$B\$8 \leq 1$										
19	G (synergie - si E et F)	$\$B\$9 + 1 \geq \$B\$7 + \$B\8										
20	H possible si E choisi	$\$B\$11 \leq \$B\7										
21	Budget	$-7000 \leq \$C\$11 \leq -65000$										
22	FNTA	$1 \leq \$C\$15 \leq 1$										

Table des matières

Index thématique

TABLEAU 33

Échéancier du portefeuille de projets¹ en univers aléatoire : paramètres des distributions triangulaires retenues (Minimum / Mode / Maximum)

Projets	t = 1	t = 2	t = 3	t = 4	t = 5	t = 6
A	270 / 300 / 330	540 / 600 / 660	360 / 400 / 440			
B	255 / 300 / 360	510 / 600 / 720	255 / 300 / 360	382,5 / 450 / 540		
C	180 / 200 / 220	270 / 300 / 330	90 / 100 / 110	270 / 300 / 330	90 / 100 / 110	90 / 100 / 110
D	45 / 50 / 57,5	54 / 60 / 69	63 / 70 / 80,5			
E	120 / 150 / 165	80 / 100 / 110	240 / 300 / 330	240 / 300 / 330		
F	600 / 800 / 1040	450 / 600 / 780	375 / 500 / 650	600 / 800 / 1040	300 / 400 / 520	
G	-45 / -50 / -60	-63 / -70 / -84	-27 / -30 / -36	-9 / -10 / -12	-9 / -10 / -12	
H	440 / 550 / 605	480 / 600 / 660	640 / 800 / 880			
I	270 / 300 / 360	540 / 600 / 720	180 / 200 / 240	180 / 200 / 240		
J	560 / 800 / 880	420 / 600 / 660	490 / 700 / 770			
K	1080 / 1200 / 1440	540 / 600 / 720	126 / 140 / 168	270 / 300 / 360	360 / 400 / 480	270 / 300 / 360

1. Les relations de dépendance réciproques de ces projets sont définies au tableau 32, page 222.

conduit également au même résultat qu'en univers aléatoire, avec un TRvI moyen de 17,58 %, un écart-type de 0,7 %. De surcroît, on voit qu'il y a environ 30 % pour le TRI dépasse 18 % et 1,6 % pour qu'il soit inférieur à 16 %. Des analyses de sensibilité du type de celles conduites à la [page 193](#) peuvent être conduites.

SECTION IV QUELQUES COMPOSANTES TECHNICO-ÉCONOMIQUES DE LA RENTABILITÉ DES PROJETS D'INVESTISSEMENT

Les projets d'investissement ont pour objectif de transformer le système productif pour l'adapter à l'évolution des besoins et assurer le maintien de la performance technique et économique de l'entreprise. L'éclairage économique de plusieurs problèmes de nature technique ou organisationnel a déjà été introduit.

- On a évoqué au [§ II-3.4, page 196](#), l'analyse économique du changement de filière de production.
- L'appel aux techniques de simulation ([§ I-2.1, page 148](#)) s'avère indispensable pour mettre en place une organisation pertinente lorsque l'introduction d'équipements modifie de manière sensible «l'équilibre» des caractéristiques techniques des postes de travail. Il s'agit alors d'une réflexion complémentaire sur la nécessaire adaptation des compétences, procédures de conduite et maintenance du système productif étudié mais aussi, dans certains cas de logistique de circulation de flux entre les postes de travail (certains logiciels de simulation offrant dans ce domaine des moyens d'investigation particulièrement puissants).

D'autres problèmes se posent souvent dans la mouvance des dossiers d'investissement. Nous en aborderons ici deux : celui de l'implantation des centres de production, au sens large, ([§ IV-1](#)) et celui de la détermination de la durée de vie optimale de certains équipements ([§ IV-2, page 234](#)). Pour mémoire, un dernier problème ne doit pas être oublié, même si nous ne l'abordons pas explicitement ici : certains investissements s'accompagnent d'une modification du système d'information dont les incidences doivent être correctement évaluées.

IV-1 L'implantation des centres de production

Le problème de l'implantation des centres de production (pris au sens large) a une double dimension :

- Une dimension spatiale tout d'abord, car il s'agit d'une part de savoir où localiser une usine (ou un centre de services), et d'autre part où localiser les différents postes de travail dans cette usine, mais nous ne nous intéresserons ici qu'à ce dernier aspect de la question¹.
- Une dimension organisationnelle, ensuite, car la réponse au problème de la localisation des postes de travail dépend étroitement du mode d'organisation retenu : organisation en ateliers spécialisés (voir [chapitre I, § I-2.2.2, page](#)

1. En effet si les techniques de localisation optimale d'une usine sont relativement développées (voir, en particulier, [chapitre VIII, § I-2.2.2, page 552](#)), il est bien rare que dans la pratique les choix soient fondés sur ce type de rationalité, la politique jouant un rôle primordial dans la localisation de nouvelles usines de grands groupes, et les facteurs d'une rationalité extra-économique (rôle des épouses des cadres susceptibles de déménager par exemple), jouant un rôle non moins important dans la localisation d'unités nouvelles d'entreprises moyennes.

51), organisation en ligne de production ou d'assemblage (voir [chapitre I, § I-2.2.3, page 53](#) et le [chapitre IX, page 589](#)), organisation liée à une mise en œuvre de la technologie de groupe (voir [chapitre I, § I-2.2.5.1, page 59](#)) ou organisation combinant plusieurs de ces formes.

Dans une organisation en ateliers spécialisés, se posent principalement le problème de l'ordonnancement (que nous examinerons au [chapitre V, page 359](#)) et celui de la localisation des ateliers, dans une optique de minimisation des coûts de manutention. Ce dernier problème fera l'objet du [§ IV-1.1](#). Dans une organisation en ligne, ce n'est pas tant le problème de la localisation des postes que celui de leurs contenus en travail qui se pose, avec la prise en compte du souci d'équilibrer les charges de travail sur les différents postes, pour optimiser leur utilisation globale, et de celui de permettre une certaine variété de la production et flexibilité dans les niveaux de production; ces problèmes seront abordés au [chapitre IX](#) (et le problème d'équilibrage d'une ligne sera abordé, en particulier, au [§ I-1.1, page 592](#)).

IV-1.1 La localisation optimale des ateliers spécialisés

La localisation respective des centres de production a une incidence sur le coût des flux circulant entre ces différents centres de production. Ces centres de production peuvent être aussi bien des bureaux d'un service administratif que des ateliers spécialisés. Dans le premier cas, les flux sont des flux d'informations (documents divers) mais également des déplacements de personnes appelées à travailler ensemble de façon plus ou moins régulière. Dans le second cas, les flux qui circulent entre centres de production sont avant tout des flux de matières premières et de produits semi-finis ou finis. Le coût de la manutention comprend les amortissements des engins de manutention qui vont jusqu'aux ponts roulants, les dépenses d'énergie, les salaires de l'équipe de manutentionnaires, et il faut y ajouter le coût de constitution de stocks-tampons complémentaires dans certains cas. Il est souvent possible de diminuer l'importance de ces flux entre centres de production, et ce faisant de diminuer les dépenses de gestion, en améliorant la localisation de ces centres de production.

Nous examinerons dans un [§ IV-1.1.1](#) la complexité de ce problème de localisation en supposant, pour simplifier la présentation du problème, que les centres de production sont d'importance voisine du point de vue de leur encombrement au sol, et qu'aucune contrainte ne pèse sur leur localisation; puis, dans un second paragraphe ([§ IV-1.1.2, page 233](#)), nous lèverons ces hypothèses, pour aborder les problèmes tels qu'ils se présentent dans la réalité.

IV-1.1.1 Présentation simplifiée du problème

IV-1.1.1.1 Exemple introductif

Usinec fabrique du matériel électrique et comporte 5 ateliers spécialisés d'égale importance: l'atelier 1 qui regroupe les tours, l'atelier 2 qui regroupe les presses, l'atelier 3 qui fabrique les moteurs, l'atelier 4 qui s'occupe de l'assemblage, de la finition et de l'expédition et l'atelier 5 qui est le magasin des pièces détachées et matières premières. La manutention entre ateliers s'effectue le plus souvent par container, aussi l'unité de trafic que l'on retiendra est le container, mais on aurait aussi bien pu retenir une autre unité comme la tonne, ou encore une unité fictive

définie en étroite relation avec les coûts de manutention (unité de chargement d'un engin de manutention par exemple).

Cinq localisations sont possibles, les différents emplacements ayant tous la même surface. Les distances (en mètres) entre ces emplacements sont données dans le premier des tableaux 34 (page 230) où l'on peut constater une symétrie par rapport à la diagonale, c'est-à-dire que la distance d_{ij} pour aller de i en j est la même que pour se rendre de j en i (ce qui n'est pas toujours vrai : les emplacements peuvent se situer par exemple à des niveaux différents, ce qui permet d'utiliser la gravité).

La production s'effectuant en petite série, les flux de transport entre ateliers varient d'un article à l'autre. Sur une période représentative, les échanges entre centres de production (en centaines de containers) sont donnés dans le second des tableaux 34 (page 230). La diagonale du tableau est nulle c'est-à-dire que, par convention, on ne s'occupe pas de la manutention au sein d'un atelier spécialisé (ou plus exactement que celle-ci n'affectera pas la localisation respective des différents ateliers) On peut noter en outre que ces flux ne sont pas symétriques.

Supposons que les ateliers 1 à 5 sont respectivement dans les emplacements I à V, et que le coût de manutention est proportionnel au trafic t_{ij} et à la distance d_{ij} , ce qui fait que le coût minimal de manutention est obtenu par l'affectation qui minimise $\sum_i \sum_j t_{ij} d_{ij}$. Le coût de manutention de la solution actuelle est donc de 9311 (= somme des valeurs du dernier tableau 34):

TABLEAU 34
Données du problème d'implantation des ateliers

Distance d_{ij} entre zones
d'implantation

	I	II	III	IV	V
I	0	25	22	45	47
II	25	0	18	21	23
III	22	18	0	24	20
IV	45	21	24	0	22
V	47	23	20	22	0

Trafic t_{ij} entre ateliers

	1	2	3	4	5
1	0	20	50	10	5
2	30	0	15	20	5
3	5	10	0	25	15
4	1	2	1	0	10
5	40	50	35	10	0

$t_{ij} \cdot d_{ij}$

	1 - I	2 - II	3 - III	4 - IV	5 - V
1 - I	0	500	1100	450	235
2 - II	750	0	270	420	115
3 - III	110	180	0	600	300
4 - IV	45	42	24	0	220
5 - V	1880	1150	700	220	0

IV-1.1.1.2 Recherche d'une meilleure localisation

Même dans ce cas très simple, où les ateliers occupent tous la même superficie et où aucune contrainte particulière ne pèse sur les affectations des ateliers, le problème posé est redoutable puisqu'il y a $5! = 120$ affectations différentes possibles. Que dire alors de problèmes réels où le découpage est plus fin et où l'on trouve facilement 30 centres de production, ce qui correspond à $30! = 2,65 \times 10^{32}$ affectations possibles !

Une approche efficace du problème a été mise au point en 1963 par Armour et Buffa¹ qui est connue sous le nom de CRAFT (*Computerized Relative Allocation of Facilities Technique*) et dont le programme est largement utilisé, d'autant plus qu'il permet de résoudre les problèmes beaucoup plus complexes que nous verrons au § IV-1.1.2, page 233. L'algorithme cherche à améliorer progressivement une solution initiale, et à s'arrêter lorsqu'aucune amélioration supplémentaire ne peut plus être obtenue. La procédure suivie est très schématiquement la suivante :

- **Étape 1 :** On recherche l'amélioration de la dernière solution retenue en recherchant la meilleure permutation de 2 centres de production, et l'on retiendra la permutation qui diminue le plus fortement les coûts de manutention. Il faut donc explorer la variation de coût des $C_n^2 = n(n-1)/2$ permutations possibles de 2 centres différents de production pris dans un ensemble initial de n centres (= nombre de combinaisons de 2 éléments pris dans un ensemble de n éléments pour reprendre la terminologie du dénombrement des problèmes combinatoires).
- **Étape 2 :** Revenir à l'étape 1 avec la nouvelle solution comme solution de référence. Si aucune nouvelle diminution de coût de manutention n'est possible, passer à l'étape 3 en conservant la solution de référence.
- **Étape 3 :** La solution retenue est la solution de référence de la dernière itération.

Les résultats de l'application de cet algorithme sont consignés dans le **tableau 35 de la page 232**. Ce tableau résumé amène les commentaires suivants - la solution finalement retenue consiste à affecter aux centres I à V les ateliers dans l'ordre 4, 5, 3, 2 et 1, le coût total de manutention étant de 8469 par période de référence, contre 9311 initialement (d'où une économie de 9%). En explicitant toutes les affectations possibles, on montre que cette solution est optimale, mais d'une manière générale, cet algorithme ne garantit pas l'optimalité de la solution trouvée.

- Cette solution a été obtenue après le calcul du coût de 40 solutions possibles (non toutes différentes), ce qui représente un gain de calcul substantiel par rapport aux 120 solutions théoriquement réalisables. Ces 40 solutions correspondent à 10 permutations de 2 des ateliers pour 4 solutions de référence, ces solutions de référence sont encadrées dans le tableau de synthèse de calcul, et sont également repérées par un astérisque (permutation à coût minimal et inférieur à celui de la solution de référence nouvelle solution de référence).

1. Armour et Buffa (1963, [21]), p. 294-309.

TABLEAU 35
Recherche de l'implantation optimale avec CRAFT

Permutation		Affectation des ateliers aux centres					Coût de manutention	
Numéro	Couple	I	II	III	IV	V		
Itération 1	Solution initiale	1	2	3	4	5	9311	
	1	1 ↔ 2	2	1	3	4	5	9695
	2	1 ↔ 3	3	2	1	4	5	9586
	3	1 ↔ 4	4	2	3	1	5	8632
	4	1 ↔ 5	5	2	3	4	1	9518
	5	2 ↔ 3	1	3	2	4	5	9299
	6	2 ↔ 4	1	4	3	2	5	10050
	7	2 ↔ 5	1	5	3	4	2	9373
	8	3 ↔ 4	1	2	4	3	5	10392
	9	3 ↔ 5	1	2	5	4	3	9399
10	4 ↔ 5	1	2	3	4	5	9273	
Itération 2	Solution initiale	4	2	3	1	5	8632	
	1	1 ↔ 2	4	1	3	2	5	8662
	2	1 ↔ 3	4	2	1	3	5	8912
	3	1 ↔ 4	1	2	3	4	5	9311
	4	1 ↔ 5	4	2	3	5	1	8584
	5	2 ↔ 3	4	3	2	1	5	8614
	6	2 ↔ 4	2	4	3	1	5	10404
	7	2 ↔ 5	4	5	3	1	2	8631
	8	3 ↔ 4	3	2	4	1	5	10387
	9	3 ↔ 5	4	2	5	1	3	8612
10	4 ↔ 5	5	2	3	1	4	9528	
Itération 3	Solution initiale	4	2	3	5	1	8584	
	1	1 ↔ 2	4	1	3	5	2	8776
	2	1 ↔ 3	4	2	1	5	3	8824
	3	1 ↔ 4	1	2	3	5	4	9273
	4	1 ↔ 5	4	2	3	1	5	8632
	5	2 ↔ 3	4	3	2	5	1	8626
	6	2 ↔ 4	2	4	3	5	1	10356
	7	2 ↔ 5	4	5	3	2	1	8469
	8	3 ↔ 4	3	2	4	5	1	10423
	9	3 ↔ 5	4	2	5	3	1	8652
10	4 ↔ 5	5	2	3	4	1	9528	
Itération 4	Solution initiale	4	5	3	2	1	8469	
	1	1 ↔ 2	4	5	3	1	2	8631
	2	1 ↔ 3	4	5	1	2	3	8919
	3	1 ↔ 4	1	5	3	2	4	9221
	4	1 ↔ 5	4	1	3	2	5	8662
	5	2 ↔ 3	4	5	2	3	1	8556
	6	2 ↔ 4	2	5	3	4	1	9586
	7	2 ↔ 5	4	2	3	5	1	8584
	8	3 ↔ 4	3	5	4	2	1	9930
	9	3 ↔ 5	4	3	5	2	1	8607
10	4 ↔ 5	5	4	3	2	1	10173	

Table des matières

Index thématique

- Le coût de manutention est mentionné de préférence à la variation de coût par rapport au coût de la solution de référence, mais en réalité c'est cette varia-

tion de coût que l'on a intérêt à calculer pour minimiser les calculs (il est clair, en comparant les résultats des deux premières solutions de référence qui diffèrent par la permutation des ateliers 1 et 4, que les d_{ij} et d_{ji} ne changent pas dès lors que i et j sont différents de 1 et 4).

IV-1.1.2 Présentation d'un problème réel

Dans la pratique, le problème est beaucoup plus complexe. La raison principale est qu'il est bien rare que les différents centres de production occupent la même surface au sol. Ceci fait que la recherche d'une solution doit nécessairement tenir compte des différences de « consommation d'espace » des centres de production. Accessoirement, la localisation de certains centres peut être sujette à des restrictions (proximité d'une cheminée d'aération par exemple), et la « forme » de certains ateliers peut être imposée; en outre, la configuration du local n'est soumise à aucune restriction.

Ces différentes contraintes peuvent être prises en compte par CRAFT. Reprenons, pour illustrer ce point, l'exemple que Buffa, Armour et Vollmann ont donné¹, et qui traite d'un problème d'amélioration de l'implantation de 22 ateliers (repérés par les lettres A à V, les ateliers U et V ayant une localisation imposée, dans une usine de l'industrie aéronautique). On ne reproduira pas ici les données de base du problème (matrice des flux de transport entre ateliers, matrice des coûts de transport entre ateliers pour une distance unitaire donnée, surface requise pour chacun de ces ateliers), pour ne donner que la configuration initiale (à gauche du [tableau 36 de la page 234](#)) et la configuration finale (à droite du [tableau 36](#)). La nouvelle solution diminue les coûts de manutention de 39%. Chaque rectangle du schéma représente une surface carrée de 100 pieds carrés.

Table des matières

Index thématique

Les distances sont calculées «à vol d'oiseau» entre les centres des ateliers, ce qui est acceptable si ceux-ci sont localisés sur des surfaces carrées, mais est beaucoup plus contestable lorsque l'atelier a une configuration géométrique nettement différente (rectangle de faible largeur, configuration en L...). Le calcul «à vol d'oiseau» peut être biaisé lorsque certaines contraintes (pilier de soutènement par exemple) rendent physiquement impossible cet itinéraire. Par ailleurs, l'hypothèse de coûts de manutention proportionnels aux distances peut ne pas être toujours réaliste. Cela étant, ces distorsions sont du second ordre le plus souvent, car, la recherche d'une solution réellement optimale est sans grand intérêt. En effet, l'optimum est conditionné par la fiabilité des informations recueillies et par leur représentativité (c'est-à-dire pour une performance des structures observées à un moment donné). Ajoutons enfin que le recueil des données de base est d'un coût élevé, ce qui fait que l'on n'aura intérêt à s'attaquer à ce problème que si les coûts de manutention sont élevés et si une certaine permanence des structures peut raisonnablement être postulée.

Pour en finir sur ce problème, indiquons que, depuis de nombreuses années, des logiciels plus performants, prenant en compte des formulations plus complexes du problème de l'implantation (notamment en travaillant sur 3 dimensions) sont disponibles et que des problèmes de complexité moyenne² peuvent maintenant

1. Voir Buffa, Armour & Vollmann (1964, [72]). Le lecteur intéressé pourra consulter une bibliographie complète sur ce thème dans les articles de R.V.Johnson (1982, [244]), et Fould (1983, [155]), ainsi que l'ouvrage de Francis et White (1974, [159]).

TABLEAU 36
Exemple d'implantation optimale dans un cas réel
(adapté de Buffa, Armour & Vollmann, [72])

Ancienne configuration Coût 329498										Nouvelle configuration Coût 264508										
T	T	T	T	T	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V
T	T	T	T	T	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V
T	T	T	T	T	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V
T	T	T	T	T	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V
T	T	T	T	T	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V
T	T	T	T	T	N	N	N	N	N	B	B	B	A	A						
S	S	S	S	S	N	N	N	N	N	B	B	B	A	A						
S	S	S	S	S	N	N	N	N	N	B	B	B	A	A						
S	S	S	S	P	M	L	L	N	N	B	B	B	A	A						
R	R	R	P	P	L	L	L	L	L	B	B	B	A	A						
R	R	R	P	P	L	L	L	L	L	B	B	B	A	A						
Q	Q	P	P	P	L	L	L	L	L	D	D	D	C	C						
Q	Q	P	P	P	L	L	L	K	K	D	D	D	C	C						
Q	Q	P	P	P	K	K	K	K	K	D	D	D	C	D						
O	O	O	O	O	K	K	K	K	K	D	D	D	D	D						
O	O	O	O	O	K	K	K	K	K	D	D	D	D	D						
O	O	O	O	O	U	U	U	U	U	D	D	D	D	D						
O	O	O	O	O	U	U	U	U	U	D	D	D	D	D						
O	O	O	O	O	U	U	U	U	U	D	D	D	D	D						
O	O	O	O	O	U	U	U	U	U	D	D	D	D	D						
O	O	O	O	O	E	E	E	E	E	E	E	E	E	E						
O	O	O	O	O	E	E	E	E	E	E	E	E	E	E						
O	O	O	O	O	I	I	I	I	I	J	J	J	E	E						
O	O	O	O	O	I	I	I	I	I	J	J	J	J	J						
O	O	O	O	O	I	I	I	I	I	F	F	F	F	F						
O	O	O	O	O	M	M	M	M	F	F	F	F	F	F						
O	O	O	O	O	G	G	G	G	F	F	F	F	F	F						
O	O	O	O	O	G	G	G	G	F	F	F	F	F	F						
P	P	P	P	P	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V
P	P	P	P	P	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V
T	P	P	P	P	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V
T	T	T	T	T	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V
T	T	T	T	T	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V
T	T	T	T	T	B	B	B	B	B	B	D	D	M	M						
T	T	T	T	T	B	B	B	B	B	D	D	D	M	M						
T	T	T	T	T	B	B	B	B	B	D	D	D	D	D						
T	T	T	T	M	B	B	K	K	K	D	D	D	D	D						
S	S	S	L	L	L	L	K	K	K	D	D	D	D	D						
S	S	S	L	L	L	L	K	K	K	D	D	D	D	D						
S	S	S	L	L	L	L	K	K	K	D	D	D	D	D						
S	S	S	L	L	L	L	K	K	K	D	D	D	D	D						
R	S	S	L	L	L	L	I	K	K	D	D	D	D	N						
R	R	R	C	I	I	I	I	I	I	I	N	N	N	N						
R	R	C	C	I	I	I	I	I	I	I	N	N	N	N						
Q	Q	Q	C	I	I	I	I	I	I	I	N	N	N	N						
Q	Q	Q	C	U	U	U	U	U	U	G	G	N	N	N						
F	F	F	F	U	U	U	U	U	U	G	G	G	J	J						
F	F	F	F	U	U	U	U	U	U	G	G	G	J	J						
F	F	F	F	E	E	E	E	E	E	A	A	A	J	J						
F	F	F	F	E	E	E	E	E	E	A	A	A	A	A						
F	F	F	E	E	E	E	E	E	E	A	A	A	A	A						
O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O
O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O
O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O
O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O

Table des matières

Index thématique

facilement être résolu en utilisant un tableur et un algorithme génétique sous forme d'add-in¹.

IV-2 Détermination de la durée de vie optimale d'un équipement

Le problème se pose concrètement en univers aléatoire ou en univers incertain, mais avant de traiter ce cas au § IV-2.2, page 243, nous étudierons ce problème en univers certain au § IV-2.1 pour introduire la problématique posée et parce que souvent cette simplification permet d'obtenir rapidement des ordres de grandeurs acceptables.

2. Note de la page précédente. Si les surfaces requises par les différents ateliers sont différentes on peut se ramener au cas général en partant sur des multiples d'une surface de base et en considérant que les trafics entre ces parties d'un atelier sont très importants pour forcer la contiguïté.

1. Voir les exemples d'utilisation d'Evolver dans ce chapitre (page 196 et page 224).

IV-2.1 Détermination de la durée de vie optimale en univers certain

Nous verrons tout d'abord (§ IV-2.1.1) les critères utilisables pour déterminer la durée de vie optimale, avant d'en présenter les applications pour des remplacements à l'identique (§ IV-2.1.2, page 237) ou non (§ IV-2.1.3, page 242).

IV-2.1.1 Critères de détermination de la durée de vie optimale

Différents critères faisant appel à l'actualisation sont possibles. Nous utilisons ici la notation discrète, à la place de la notation continue habituellement utilisée dans la littérature spécialisée, pour rendre la problématique plus facilement intelligible¹. Supposons, pour commencer, que l'équipement considéré soit seul à contribuer à la fabrication d'un bien, ou à la fourniture d'une prestation de services (véhicule automobile d'un chauffeur de taxi, par exemple). On notera :

- R_t , la recette d'exploitation de la période t , imputable à l'équipement considéré,
- D_t , les dépenses directes d'exploitation «hors amortissement» associées au volume de production q_t de la période t , y compris, pour les périodes concernées, le coût d'acquisition de l'équipement ou la recette associée à la revente du matériel d'occasion (dépense négative),
- $M_t = R_t - D_t$, la marge brute réalisée au cours de la période t , laquelle correspond au flux net de trésorerie associé à la séquence d'investissement,
- α , le taux d'actualisation utilisé dans l'entreprise ; ce taux est défini pour une unité de temps qui est celle de la période de référence utilisée.

Le problème de la détermination de la durée de vie optimale peut être formulé dans le cadre d'un horizon limité à T périodes (par exemple l'intervalle de temps séparant la prise de décision et l'échéance d'une concession) ou dans le cadre d'un horizon infini ($T = \infty$). Dans les deux cas, l'optimum se caractérise par une séquence de décisions de renouvellement, et donc par un certain échéancier de dépenses sur T périodes. Le seul intérêt de cette distinction est que, sous certaines conditions, la séquence de décisions optimales dans le cadre d'un horizon infini est la reconduction d'une même durée de vie optimale pour tous les équipements de la chaîne de remplacement. Les échéanciers, définis pour les périodes 1 à T , que nous actualiserons seront implicitement définis pour une politique i donnée de renouvellement des équipements. Cette stratégie a un impact direct sur l'échéancier D_t qui, d'une part inclut les dépenses d'achat et de recettes de revente d'occasion et, d'autre part, comporte des dépenses d'entretien qui dépendent habituellement de la durée de vie retenue et de l'échéancier q_t . Elle peut également avoir un impact indirect sur R_t et/ou q_t , si la production porte sur une prestation de service et que celle-ci se dégrade avec l'âge de l'équipement (par exemple, un taxi a rarement plus de dix ans d'âge, du moins en France).

Le premier critère² qui vient à l'esprit est celui de la maximisation de la marge brute actualisée, par rapport aux différentes politiques i .

1. La notation continue permet de trouver plus facilement les politiques optimales, mais les résultats trouvés sont plus difficiles à interpréter.

2. *Note de la page précédente*. Le seul habituellement utilisé en univers certain. Voir Jorgenson, Mac Call et Radner (1974, [253]), p. 6-8, ou Boiteux (1964, [59]), p. 136-141 ; ces différents auteurs utilisent la notation continue.

$$\text{critère 1 : maximum}_i \left\{ \sum_{t=1}^T (R_{it} - D_{it})(1 + \alpha)^{-t} \right\} \quad \text{relation 36}$$

Si l'échéancier de recettes est le même quelle que soit la politique adoptée, ce critère est équivalent à celui de la minimisation des dépenses.

$$\text{critère 2 : minimum}_i \left\{ \sum_{t=1}^T D_{it}(1 + \alpha)^{-t} \right\} \quad \text{relation 37}$$

Ce dernier critère permet d'éviter d'avoir à formuler des hypothèses sur l'échéancier R_{it} , ou plus précisément sur les recettes unitaires, car l'échéancier D_{it} est fonction de l'échéancier q_{it} . Une hypothèse de calcul très fréquemment retenue est celle de la constance de la production ($q_{it} = q$), qui n'est acceptable, en particulier, que si aucune obsolescence technique ou commerciale ne vient frapper l'équipement étudié mais est cohérent avec l'hypothèse d'un régime de croisière stable.

Lorsque plusieurs équipements concourent simultanément à la production d'un ou plusieurs biens (ou prestations de service), le critère 2 est alors seul utilisable, car il est arbitraire d'imputer tout ou partie des recettes à l'un ou l'autre des facteurs productifs (d'autant plus qu'apparaissent des charges fixes non affectables s'il y a plusieurs productions). L'utilisation de ce critère implique que l'échéancier des recettes associé à l'un quelconque de ces produits (ou prestation de service) est indépendant de la stratégie retenue pour chacun des facteurs productifs. Par ailleurs, s'il y a plusieurs productions j , D_{it} est la dépense directe d'exploitation associée aux productions q_{ijt} , et il est, là encore, commode de postuler que ces productions q_{ijt} sont constantes dans le temps et indépendantes de la stratégie i ($q_{ijt} = q_j$).

Lorsque l'on se situe en univers aléatoire, le choix d'une politique de maintenance et de remplacement se traduit par une espérance mathématique de dépenses $E(D_t)$ et une espérance mathématique $E(\theta_t)$ de temps d'utilisation θ_t durant la période t (on a $E(\theta_t) < 1$, chaque période étant conventionnellement d'une durée égale à 1). Si le temps de fonctionnement correct de l'équipement peut être valorisé au tarif unitaire v , on obtient un troisième critère équivalent au premier en retenant la politique i qui maximise la valeur actualisée de la différence entre l'espérance mathématique de la valorisation du temps disponible, et celle des dépenses :

$$\text{critère 3 : maximum}_i \left\{ \sum_{t=1}^T [vE(\theta_{it}) - E(D_{it})](1 + \alpha)^{-t} \right\} \quad \text{relation 38}$$

Si le temps d'utilisation θ_{it} a une espérance mathématique très proche de l'unité (maintenance ou remplacement effectués en dehors des heures normales d'utilisation, par exemple), le critère 3 est, à une constante près, équivalent au critère 4 suivant, qui est l'équivalent, en espérance mathématique, du critère 2.

$$\text{critère 4: } \underset{i}{\text{minimum}} \left\{ \sum_{t=1}^T E(D_{it})(1 + \alpha)^{-t} \right\} \quad \text{relation 39}$$

D'autres critères peuvent être encore utilisés, et plus particulièrement le quotient de l'espérance mathématique actualisée du temps d'utilisation par celle des dépenses, qui, sous certaines conditions, est équivalent au critère 3 et plus facile d'utilisation. Cette discussion dépasse cependant le propos introductif que l'on s'est fixé¹.

IV-2.1.2 Détermination de la durée de vie optimale dans le cas d'un remplacement à l'identique

Au cours de la présentation des critères, nous avons distingué le cas de l'horizon infini, de celui de l'horizon limité. Nous aborderons d'abord rapidement ce dernier cas, en indiquant que la programmation dynamique à laquelle il sera fait appel, permet de traiter également le cas d'une chaîne de remplacements de caractéristiques non identiques.

IV-2.1.2.1 Cas d'un horizon limité

Nous partirons d'un exemple introductif, que nous résoudrons ensuite après en avoir montré la solution analytique.

IV-2.1.2.1a) Exemple introductif

L'entreprise **Ordomeca** doit acheter une machine au début de la période 1 (et éventuellement au début d'une période ultérieure) pour la fabrication d'un article qu'elle prévoit de fabriquer pendant 6 ans. Les coûts de fabrication, d'achat en début de période et de revente en fin de période, sont donnés (après actualisation à la date $t = 0$) dans le [tableau 37 de la page 239](#), dans lequel c_{ij} est le coût d'utilisation total d'une machine achetée en début de période i (c'est-à-dire à la date $i - 1$) et revendue en fin de période j (c'est-à-dire à la date j), ce qui donne par exemple: $c_{24} = 220 + 50 + 60 - 75 = 225$.

IV-2.1.2.1b) Solution analytique

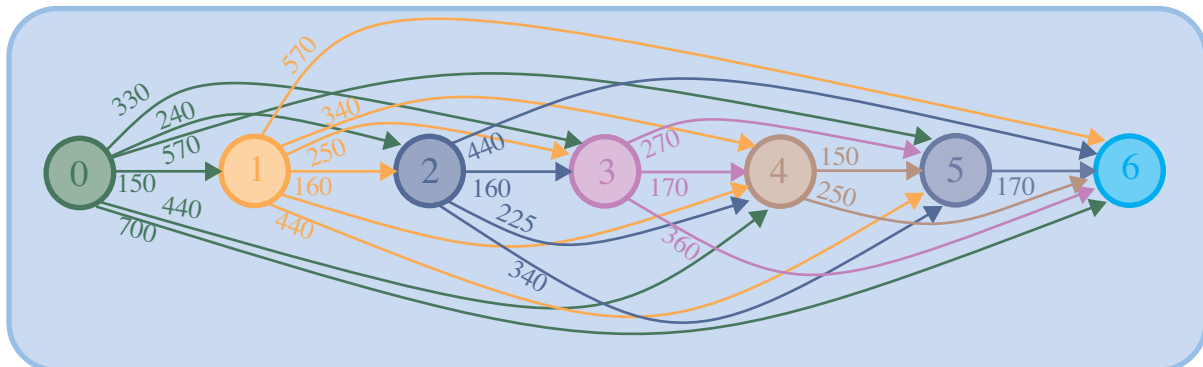
La résolution de ce problème s'effectue sans difficulté en utilisant la programmation dynamique qui sera présentée en détail au [chapitre VIII \(section II, page 562\)](#), l'analogie avec un problème de transport étant évidente, comme l'illustre la [figure 60](#) où :

- les nombres cerclés représentent des dates de fin de périodes, à la place des villes,
- les arcs visualisent l'utilisation d'une machine entre sa date d'acquisition i (nœud de départ) et sa date de revente j (nœud d'arrivée), à la place des itinéraires; sur ces arcs sont notés les coûts c_{ij} , somme des coûts d'achat en i , de fonctionnement entre i et j , diminuée de la valeur de récupération en j .

1. Voir Jorgenson, Mac Call et Radner (1974, [253]), p. 15-17, pour une représentation de ces critères en notations continues.

FIGURE 60

Graphe associé au problème de détermination de la durée de vie optimale d'un équipement (exemple du tableau 37 de la page 239)



On peut utiliser l'algorithme général de la programmation dynamique en définissant de façon récurrente le coût minimal f_t de fonctionnement du système entre les dates t et T :

$$f_t = \underset{i < t}{\text{minimum}}(f_i + c_{it}), \text{ avec } t = T - 1, T - 2, \dots, 0 \quad \text{relation 40}$$

Cette formulation de type *backward* peut être utilisée telle quelle, mais il est aussi simple d'exploiter la formulation équivalente de type *forward* (relation 41 de la page 238) qui sera utilisée dans les problèmes de programmation de la production avec coûts concaves (chapitre VIII, § II-4.1, page 582) et où f_t représente le coût minimal de fonctionnement du système entre les dates 0 et t (c'est-à-dire pour les périodes 1 à t):

$$f_t = \underset{i < t}{\text{minimum}}(f_i + c_{it}), \text{ avec } i = 0 \text{ à } t - 1, f_0 = 0 \text{ et } t = 1 \text{ à } T \quad \text{relation 41}$$

Cette relation 41 permet de rechercher l'optimum dans un tableau du type du tableau 38.

IV-2.1.21c) Résolution numérique de l'exemple introductif

La recherche numérique s'effectue dans le tableau 38 de la page 240 d'où l'on tire que la politique optimale consiste à acheter à la date 0, puis à revendre à la date 2 l'équipement sur le marché de l'occasion, et à racheter aussitôt un équipement neuf qui sera vendu à la date 6, fin de l'horizon économique retenu.

IV-2.1.2.2 Cas de l'horizon infini

On démontre alors¹ que la politique optimale est de type stationnaire, c'est-à-dire qu'elle consiste à utiliser toutes les machines de la chaîne infinie de remplacement, pendant exactement le même nombre de périodes. Nous allons utiliser cette propriété et le critère 2 pour résoudre un exemple numérique.

IV-2.1.22a) Exemple numérique

Ordomeca envisage l'achat de la machine MGI dont la durée de vie physique est de 10 ans et elle se demande quelle est la durée de vie économique de cette machine qui coûte 200000 dollars liduriens. Les données annuelles prévision-

1. Voir Wagner (1975, [435]), p. 399-402.

TABLEAU 37

Exemple de coûts utilisés dans une détermination de durée de vie optimale d'un équipement en univers certain, avec horizon borné

		Période j d'utilisation						
		1	2	3	4	5	6	
machine achetée à la date $i =$	0	Achat en i	200	-	-	-	-	-
		Fonctionnement	50	60	70	90	110	130
		Revente en j	100	70	50	30	10	0
		c_{ij}	150	240	330	440	570	700
	1	Achat en i		210	-	-	-	-
		Fonctionnement		50	60	70	90	110
		Revente en j		100	70	50	40	20
		c_{ij}		160	250	340	440	570
	2	Achat en i			220	-	-	-
		Fonctionnement			50	60	70	80
		Revente en j			110	75	60	40
		c_{ij}			160	255	340	440
	3	Achat en i				230	-	-
		Fonctionnement				50	60	70
		Revente en j				110	70	50
		c_{ij}				170	270	360
	4	Achat en i					230	-
		Fonctionnement					50	60
		Revente en j					130	90
		c_{ij}					150	250
5	Achat en i						250	
	Fonctionnement						60	
	Revente en j						140	
	c_{ij}						170	

Table des matières

Index thématique

nelles de coûts, en dollars constants, sont données dans le [tableau 39 de la page 240](#). Le taux d'actualisation utilisé est de 5% /an (taux réel, et non nominal).

IV-2.1.22b) Solution analytique

L'application du critère 2 ([relation 37, page 236](#)) peut s'effectuer en deux temps:

- calculer la valeur actualisée en $t = 0$ de l'échéancier de la première machine achetée et utilisée n périodes (calcul à effectuer pour chacune des durées de vie possibles);
- calculer l'annuité constante équivalente (fin de période) à l'échéancier réel d'utilisation d'une machine pendant n périodes (calcul à effectuer pour chacune des durées de vie possibles).

TABLEAU 38
Application de l'algorithme forward de programmation dynamique

		Date j de fin de service						
		1	2	3	4	5	6	
Date i de mise en service	0	c_{0j}	150	240	330	440	570	700
	1	c_{1j}		160	250	340	440	570
		$f_1 + c_{1j}$		310	400	490	590	720
	2	c_{2j}			160	255	340	440
		$f_2 + c_{2j}$			400	495	580	680
	3	c_{3j}				170	270	360
		$f_3 + c_{3j}$				500	600	690
	4	c_{4j}					150	250
		$f_4 + c_{4j}$					190	690
	5	c_{5j}						170
		$f_5 + c_{5j}$						740
		f_t		150	240	330	440	570
	g_t		0	0	0	0	0	2

TABLEAU 39
Dépenses d'exploitation et valeur d'occasion de la MG-1¹

t	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Dépenses directes d'exploitation	50	50	50	50	70	80	90	100	120	130
Valeur de revente à l'âge t	100	50	20	10	0	0	0	0	0	0

1. en milliers de dollars liduriens.

La durée de vie optimale est celle à laquelle correspond la plus faible annuité constante équivalente. En effet, pour le taux d'actualisation retenu, si l'échéancier réel, défini pour une durée de vie de n périodes, est équivalent à un échéancier de n versements constants, la répétition jusqu'à l'infini de l'échéancier réel est alors équivalente à la répétition jusqu'à l'infini de l'échéancier constant.

IV-2.1.22c) Solution de l'exemple numérique

Il ressort du **tableau 40** que la durée de vie économique de la MGI est de 7 ans.

La valeur du critère 2, pour cette politique de remplacement à l'identique tous

les 7 ans, est de: $96,05 \sum_{t=1}^{\infty} 1,05^{-t} = 1921$, et le gain réalisé, en choisissant cette

durée de vie économique de préférence à la durée de vie physique, est de $(101,89 - 96,05) / 101,89 = 5,7\%$.

IV-2.1.22d) Remarques

L'étude de la solution optimale appelle trois remarques:

TABLEAU 40
Détermination de la durée de vie optimale de la machine MG-1

Durée d'utilisation n	D_t	$\frac{D_t}{1,05^n}$	$\sum_{t=0}^n \frac{D_t}{1,05^n}$	V_n	$\frac{V_n}{1,05^n}$	$\sum_{t=0}^n \frac{D_t}{1,05^n} - \frac{V_n}{1,05^n}$	Annuité pour une durée d'utilisation n
0	200	200,00	200,00				
1	50	47,62	247,62	100	95,24	152,38	160,00
2	50	45,35	292,97	50	45,35	247,62	133,17
3	50	43,19	336,16	20	17,28	318,89	117,10
4	50	41,14	377,30	10	8,23	369,07	104,08
5	70	54,85	432,14	0	0,00	432,14	99,81
6	80	59,70	491,84	0	0,00	491,84	96,90
7	90	63,96	555,80	0	0,00	555,80	96,05
8	100	67,68	623,49	0	0,00	623,49	96,47
9	120	77,35	700,84	0	0,00	700,84	98,60
10	140	85,95	786,79	0	0,00	786,79	101,89

- La détermination de la durée de vie optimale conduit au calcul d'un coût moyen actualisé annuel. Lorsque plusieurs équipements sont en compétition, la comparaison économique de ces équipements doit s'effectuer en comparant leurs coûts moyens actualisés annuels.
- La détermination de cette durée de vie optimale dépend du taux d'actualisation retenu et peut être éventuellement peu sensible au choix du taux d'actualisation.
- Lorsque la valeur résiduelle est nulle, ce qui se produit dans notre exemple à partir de la cinquième période, et que les dépenses de fonctionnement sont croissantes au cours du temps, on peut arrêter les calculs dès que la dépense annuelle devient supérieure à la dernière annuité calculée. En effet, dans notre exemple, l'échéancier réel d'une machine gardée 7 années est équivalent à un échéancier constant de 7 versements de 96,06. Prolonger la durée de vie d'une année revient à vérifier si l'annuité constante équivalente à l'échéancier réel que l'on aurait en gardant la machine 8 ans, est inférieure à 96,06, or ceci revient à rechercher l'annuité constante équivalente d'un échéancier de huit versements, les sept premiers étant de 96,06 et le huitième, de 100. Lorsque la valeur de revente est négligeable et que les dépenses de fonctionnement sont croissantes, la date de renouvellement optimale est celle qui précède la date pour laquelle la dépense de fonctionnement devient supérieure au coût moyen actualisé¹.

Table des matières

Index thématique

1. Voir également la démonstration, en notations continues et pour le critère 1, dans Boiteux (1964, [59]), p. 140-141 («La date de renouvellement optimale est celle pour laquelle le bénéfice **brut** de l'année devient égal à la moyenne actualisée des bénéfices **nets**»), ou encore dans Jorgenson, Mac Call et Radner (1974, [253]), p. 7-10.

IV-2.1.3 Détermination de la date de déclassement optimale

Lorsqu'apparaît sur le marché un matériel plus performant¹ que celui en cours d'utilisation, deux politiques sont envisageables : garder le matériel initial jusqu'à la fin de sa durée de vie économique ou anticiper son déclassement pour bénéficier des performances accrues du nouveau matériel. Ce problème peut se poser dans le cadre d'un horizon limité et se traite alors sans difficulté à l'aide de la programmation dynamique (cf. § III-1.2.1, page 204) mais il se pose le plus souvent dans le cadre d'un horizon infini (ou, ce qui revient au même, sans horizon bien précis). Nous introduirons d'abord un exemple numérique avant de présenter la solution.

IV-2.1.3.1 Exemple introductif

Ordomeca envisage de remplacer la machine MG1 qui fonctionne depuis 2 ans par la nouvelle machine MG2 plus performante, qui coûte 210 000 dollars liduriens et a une durée de vie physique estimée à 10 ans. Les données économiques de cette nouvelle machine (comparables à celle du [tableau 39 de la page 240](#)) figurent dans le [tableau 41 de la page 242](#).

TABLEAU 41
Dépenses d'exploitation et valeur d'occasion de la MG-2¹

t	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
dépenses directes d'exploitation	30	30	30	40	50	60	70	80	90	100
valeur de revente à l'âge t	100	50	20	10	0	0	0	0	0	0

1. en milliers de dollars liduriens

La durée de vie économique de cette machine MG-2 reste, comme vous pouvez le vérifier, de 7 ans mais l'annuité constante équivalente pour cette durée de vie descend à 79,20 (contre 96,05 pour la machine MG-1). Le problème posé est de savoir quand il est judicieux, d'un point de vue économique, de remplacer la machine MG1 par la machine MG2.

IV-2.1.3.2 Solution

Si l'on reprend le raisonnement des équivalences d'échéanciers conduit au § III-1.2.2.2, page 206, il est évident² que l'on n'a pas intérêt à anticiper la mise en service de la machine MG-2 tant que la nouvelle annuité (79,20) est inférieure à la dépense d'exploitation annuelle (diminuée, le cas échéant, de la valeur d'occasion). L'examen du [tableau 39 de la page 240](#) montre que l'année 6, la dépense d'exploitation (80) est supérieure à la nouvelle annuité, mais que l'année 5 c'est l'inverse qui se produit. On a donc intérêt à acheter la machine MG-2 à la fin de l'année 5 et donc à anticiper d'une année la radiation prévue.

1. À côté de cette obsolescence technique, dont l'incidence porte principalement sur les flux de dépense, peut exister une obsolescence de nature commerciale liée à l'inadéquation progressive de l'équipement à fournir des produits ou des prestations de service vendables. L'obsolescence commerciale a un impact sur les flux de recettes et oblige alors en général, à recourir au critère 1.

2. Voir également Boiteux (1964, [59]), p. 144-145, qui, en utilisant le critère 1 et des notations continues, aboutit à la conclusion suivante, valable si la valeur d'occasion est négligeable : « la date de déclassement optimale est celle pour laquelle le bénéfice brut devient inférieur à la moyenne actualisée du bénéfice net de l'installation de remplacement ».

IV-2.2 Détermination de la durée de vie optimale en univers aléatoire

Lorsque la durée de vie d'un équipement est aléatoire, cet équipement comportant un (ou plusieurs) composant(s) dont la durée de vie est elle-même aléatoire, la dépense d'une période devient alors une variable aléatoire. Il convient alors d'utiliser le critère 3 ou le critère 4. La résolution de ce problème est complexe, car il dépend étroitement de la politique de maintenance. Nous commencerons dans le § IV-2.2.1 par donner un aperçu de cette problématique. Nous aborderons ensuite (§ IV-2.2.2, page 244) le problème de l'estimation de la loi de la durée de vie d'un composant. Nous calculerons enfin (§ IV-2.2.3, page 249), sur un exemple simplifié (mais tiré de la réalité), la durée de vie optimale d'un équipement.

IV-2.2.1 Le problème posé

Nous avons dit que le problème de la durée de vie optimale dépendait de la politique de maintenance suivie¹. Nous nous contenterons d'en retracer ici brièvement la philosophie pour faire comprendre la complexité du problème posé.

Les politiques de maintenance visent à définir un ensemble de règles de décision permettant de garantir, à un coût minimal, un même niveau de service pour un matériel en état de marche, tout au long de son existence. Ces règles de décision concernent la mise en œuvre d'une ou de plusieurs des actions suivantes : remplacement préventif d'un composant, remplacement d'un composant après panne (action exclusive ou non de la précédente), inspection périodique du matériel. Le système d'information conduisant à connaître le bon fonctionnement de tous les composants d'un matériel de façon continue ou par intermittence conditionne le choix des politiques possibles et a un coût qui est généralement non pris en compte dans les modèles de maintenance.

Lorsque le bon fonctionnement du système est connu de façon continue, il n'y a pas d'autre action de maintenance que le remplacement de composants. Si le coût d'un remplacement préventif est plus faible que celui occasionné par le remplacement après panne, et si le taux de défaillance² croît avec l'âge du composant, la politique optimale consiste à remplacer le composant lorsqu'il tombe en panne, ou préventivement à un âge déterminé par le calcul économique. La détermination du remplacement préventif est aisée si la machine considérée ne comporte qu'un seul composant, ou plusieurs composants indépendants (les politiques optimales se définissant alors comme la juxtaposition de politiques déterminées de façon indépendante). La dépendance de composants peut être due soit à des économies réalisées en remplaçant simultanément plusieurs composants

1. Il ne peut être question d'aborder ici la problématique de la maintenance, qui justifierait à elle seule de longs développements et nécessiterait l'appel à des outils mathématiques plus sophistiqués que ceux utilisés dans cet ouvrage. Une bonne introduction à une approche formalisée des problèmes de maintenance peut être trouvée dans l'ouvrage de Pellegrin (1997, [333]).

2. Le taux de défaillance est la probabilité conditionnelle qu'un composant tombe en panne entre t et $t + \Delta t$, en sachant qu'il a atteint l'âge t . Une comparaison démographique peut mieux faire saisir cette notion : si sur une génération de 1000 personnes, 400 sont mortes avant l'âge de 60 ans, c'est-à-dire que 600 atteignent l'âge de 60 ans, et si 50 d'entre elles meurent avant d'atteindre l'âge de 61 ans, la probabilité conditionnelle de décès (c'est-à-dire le taux de défaillance) est de $50/600 = 8\%$, et ne doit pas être confondue avec la probabilité de mourir dans la 61ème année (ici 5%).

(assemblés en module par exemple), soit à des lois de durée de vie de certains composants qui dépendent de l'âge d'autres composants. La politique optimale consiste alors à remplacer simultanément plusieurs composants lorsque l'un d'entre eux tombe en panne, ou après une durée d'utilisation fixée par le calcul. Ces règles de décision sont fixées une fois pour toutes si l'on se place dans une perspective de machine en état de marche jusqu'à l'infini, et si les données de coûts (qui fondent l'arbitrage) restent les mêmes. Par contre, si l'on décide d'utiliser l'équipement pour une durée fixée a priori, ces règles doivent être revues dès lors qu'un remplacement de composant(s) se produit avant un remplacement à titre préventif.

Lorsque le bon fonctionnement du système est connu de façon intermittente, le problème se complique par l'intervention, dans l'arbitrage économique, du coût d'obtention des informations sur le système, informations fournies par des inspections périodiques.

Il ressort de cette description rapide, qu'en univers aléatoire, la détermination de la durée de vie aléatoire est inséparable de la définition d'une politique de maintenance, à moins de n'envisager que le cas de remplacement après panne (qui, habituellement, conduit à un coût plus élevé en raison de perturbations imprévues). C'est ce cas de figure que nous retiendrons pour donner un aperçu des problèmes posés. Mais pour cela, il faut d'abord déterminer la durée de vie de ses principaux composants.

IV-2.2.2 Détermination de la loi de durée de vie d'un composant

Commençons par préciser deux concepts utilisés classiquement dans cette problématique.

- Si l'on note T , la variable aléatoire «durée de vie d'un composant», c'est-à-dire l'intervalle de temps séparant sa mise en service, du moment où il est hors d'usage, la fonction de répartition $F(t)$ donne la probabilité $P(T < t)$, c'est-à-dire la probabilité que la durée de vie du composant soit inférieure ou égale à t . La probabilité que la durée de vie soit supérieure ou égale à t est donc $1 - F(t)$. Ce complément à 1 de la fonction de répartition est appelé **loi de fiabilité** du composant.
- Si l'on note $h(t)$ le **taux de défaillance**, on a, par définition des probabilités conditionnelles et si l'on se souvient que la probabilité instantanée de défaillance – c'est-à-dire la densité de probabilité $f(t)$ – est la dérivée de la fonction de répartition :

$$h(t) = \frac{f(t)}{1 - F(t)} = \frac{F(t)'}{1 - F(t)} = -\{\log[1 - F(t)]\}' \quad \text{relation 42}$$

IV-2.2.2.1 Estimation de la loi de durée de vie

Lorsque l'on dispose d'un échantillon de quelques dizaines d'observations d'une variable, on peut facilement exploiter ces informations à l'aide d'un logiciel spécialisé pour déterminer, parmi les distributions de probabilité qui semblent a priori acceptables pour opérer une bonne synthèse du phénomène étudié, celle qui est la meilleure du point de vue statistique¹. Lorsque l'on s'intéresse à la durée de vie d'un organe, ceci suppose que l'on dispose d'un ensemble d'informations relatives à la durée maximale d'utilisation avant d'être hors d'usage. Souvent les

informations recueillies sont insuffisantes pour permettre une analyse de qualité. Il faut alors exploiter au mieux les informations disponibles et, en particulier, la connaissance que l'on a des composants utilisés depuis un certain temps et considérés encore comme utilisables. Examinons, à partir d'un exemple, comment traiter ce problème.

L'entreprise **Ordomeca** a 35 véhicules **Volnault** en service, et dispose des carnets d'entretien de 5 véhicules radiés. Tous ces véhicules sont utilisés dans des conditions similaires. Les informations relatives au moteur de ce véhicule sont données dans le **tableau 42 de la page 246**. Le fichier ainsi constitué fournit des observations sur davantage de moteurs que de véhicules puisque l'on observe un certain nombre de moteurs en plus des moteurs d'origine¹.

Pour procéder à la reconnaissance d'une distribution théorique, il faut d'abord reconstituer la distribution observée qui se caractérise par un ensemble de couples de points $t, F(t)$, où $F(t)$ est l'estimation de la probabilité que la durée de vie T soit inférieure à t . Deux méthodes sont possibles pour obtenir ces informations: la première est une estimation à partir de fréquences observées et la seconde, plus performante, utilise la fonction de hasard.

IV-2.2.21a) Estimation à partir des fréquences observées

Le principe de base est relativement simple. Il consiste à imaginer que l'on procède, par exemple, à l'expérience suivante: sachant que l'on soumet un échantillon de moteurs à l'expérience «utilisation pendant 120000 km», combien de moteurs seront tombés en panne avant d'atteindre ce kilométrage?

Dans une première approche, on peut imaginer que l'on procède, par exemple, à l'expérience suivante: sachant que l'on soumet un échantillon de moteurs à l'expérience «utilisation pendant 120000 km», combien de moteurs seront tombés en panne avant d'atteindre ce kilométrage? Une première réponse à cette question consiste à ne s'intéresser qu'aux moteurs d'origine. Dans ce cas, les moteurs des véhicules 24 à 40 constituent l'échantillon recherché (de taille 17) où seuls étaient en état de marche après cette épreuve, les moteurs d'origine des véhicules 24, 30, 35, 36 et 39². L'estimation de la probabilité que la durée de vie d'un moteur soit inférieure à 120000 km est alors $(17 - 5)/17 = 70,6\%$.

Table des
matières

Index
thématique

1. *Note de la page précédente*. Plusieurs tests sont classiquement utilisés par des logiciels spécialisés, comme *Bestfit*[®] de Palisade (<http://www.palisade.com> d'où peuvent être téléchargées des versions complètes d'évaluation, utilisables sur quelques semaines): χ^2 , Kolmogorov-Smirnov, Anderson-Darling. Ces deux derniers tests sont à utiliser pour des distributions continues, le test d'Anderson-Darling étant plus puissant que celui, plus connu, de Kolmogorov-Smirnov est à utiliser de préférence pour les distributions continues; le test du χ^2 , le plus connu, présente l'inconvénient, pour les distributions continues, d'un regroupement arbitraire des observations en classe et s'avère le moins puissant. Ces logiciels calculent, pour chaque distribution testée, l'estimation du maximum de vraisemblance de chaque paramètre caractéristique de la loi de probabilité sélectionnée.

1. Par exemple, le *douzième* véhicule du fichier a eu son moteur d'origine changé au bout de 38000 km puis un second moteur changé après 11800 km; son troisième moteur a donc $93600 - 38000 - 11800 = 43800$ km au moment où le fichier est constitué. Le second moteur du *onzième* véhicule est changé au moment où l'enquête est réalisée ($892 = 415 + 477$); son troisième moteur n'a donc pas encore fonctionné, ce qui implique que ce véhicule était en réparation lors de la constitution du fichier. Au total on dispose donc de 68 informations du type «composant tombé en panne au kilométrage x » ou «composant encore en état de marche au kilométrage x ».

2. Le moteur d'origine des véhicules 35 et 39 étaient en état de marche «au Kilomètre 120000» au moment de la constitution du fichier mais ont été remplacés ensuite.

TABLEAU 42
Données de base (âges exprimés en centaines de kilomètres)

n° du véhicule	âge ¹	âge au décès du		n° du véhicule	âge ¹	âge au décès du	
		moteur d'origine ²	second moteur ³			moteur d'origine ²	second moteur ²
1	130	0	-	21	1150	0	-
2	220	0	-	22	1183	0	-
3	300	0	-	23	1190	798	-
4	325	0	-	24	1298	0	-
5	390	0	-	25	1300	448	443
6	490	0	-	26	1311	250	163
7	590	0	-	27	1320	750	0
8	610	0	-	28	1366	439	0
9	680	0	-	29	1380	1150	0
10	830	0	-	30	1400	0	-
11 ⁴	892	415	477	31	1420	500	0
12 ⁴	936	380	118	32	1450	537	656
13	940	554	0	33	1460	870	0
14	969	0	-	34	1500	237	221
15	990	700	0	35	1513	1224	0
16	1027	313	468	36	1550	0	-
17	1060	767	0	37	1640	890	0
18	1070	510	0	38	1700	1000	0
19	1100	800	0	39	1780	1350	0
20	1124	862	0	40	2030	735	0

1. Kilométrage observé lors de la radiation du véhicule ou kilométrage du véhicule en service à la date de recueil des données. Les véhicules ont été classés par valeurs croissantes.
2. 0 si le moteur était d'origine au moment de l'observation ou kilométrage observé au moment du remplacement du moteur d'origine
3. 0 si le premier moteur de remplacement était en état de marche au moment de l'observation ou kilométrage observé au moment du remplacement du premier moteur de remplacement. Un tiret indique que l'information est sans objet, le moteur d'origine étant toujours en usage.
4. Les informations relatives à ces deux véhicules sont repérées par la même convention de couleur de fond de cellules dans les tableaux 42 à 44 et dans le tableau 46.

Cependant cette réponse n'utilise pas toute l'information disponible, puisque l'on ne tient pas compte de ce que sont devenus les moteurs de remplacement: l'examen du [tableau 42](#) montre que le premier moteur de remplacement du véhicule 34 a parcouru $150\,000 - 23\,700 = 116\,300$ km et donc a été réformé sans pouvoir franchir le cap des 120000 km, tandis que celui du véhicule 40 a parcouru $203\,000 - 73\,500 = 129\,500$ km et qu'il fonctionnait encore au moment de la constitution du fichier. En définitive, l'échantillon est de $17 + 2 = 19$ et l'on y enregistre $19 - 5 - 1 = 13$ moteurs n'ayant pas supporté l'épreuve, ce qui donne une estimation de $13/19 = 68,4\%$. La généralisation du raisonnement conduit au [tableau 43](#).

TABLEAU 43
Création de véhicules fictifs

Âge t_i ¹ du véhicule	État du moteur ²	âge de décès du moteur de remplacement	Véhicule fictif ³	Âge t_i ¹ du véhicule	État du moteur ²	âge de décès du moteur de remplacement	Véhicule fictif ³
477	M	477	11 (2)	920	B	?	31 (2)
556	M	118	12 (2)	913	M	656	32 (2)
386	B	?	13 (2)	590	B	?	33 (2)
290	B	?	15 (2)	1263	M	221	34 (2)
714	M	468	16 (2)	289	B	?	35 (2)
293	B	?	17 (2)	750	B	?	37 (2)
560	B	?	18 (2)	700	B	?	38 (2)
300	B	?	19 (2)	430	B	?	39 (2)
262	B	?	20 (2)	1295	B	?	40 (2)
392	B	?	23 (2)	438	B	?	12 (3)
852	M	443	25 (2)	246	B	?	16 (3)
1061	M	163	26 (2)	409	B	?	25 (3)
570	B	?	27 (2)	898	B	?	26 (3)
927	B	?	28 (2)	257	B	?	32 (3)
230	B	?	29 (2)	1042	B	?	34 (3)

1. Kilométrage parcouru par le véhicule depuis le dernier changement de moteur
2. B : moteur en état de fonctionnement lors de la constitution du fichier. M : moteur à changer.
3. suivi du rang du moteur sur le véhicule

Table des matières

Index thématique

Pour plus de facilité de traitement, on peut fusionner les informations de ces deux tableaux en les classant par âge croissant, ce qui donne le [tableau 44 de la page 248](#) dans lequel on a dressé la liste des véhicules fictifs (ceux ayant le moteur d'origine ou un moteur de remplacement), en indiquant le nombre de kilomètre qu'a effectué le véhicule fictif, sans se préoccuper du fait que son moteur a ou non été en usage jusqu'au bout et, si cette information est disponible, le kilométrage du moteur lors de sa radiation.

À partir de ce [tableau 44](#), on peut assez facilement systématiser la démarche décrite ci-dessus, pour quelques valeurs de durée de vie d'un moteur, en essayant de ne pas effectuer d'estimation de la probabilité de décès avant t_i sur des échantillons trop fiables. On obtient alors la distribution du [tableau 45 de la page 249](#).

Cela étant cette approche n'exploite pas au mieux l'information disponible, contrairement à celle s'appuyant sur la fonction de hasard cumulée, et peut conduire, comme c'est le cas ici, à ne pas respecter la propriété de non-décroissance de la fonction de répartition.

IV-2.2.21b) Utilisation de la fonction de hasard cumulée

La **fonction de hasard cumulée** s'établit à partir de la probabilité conditionnelle $h(t)$, qui peut se définir comme: $h(t) = -[\log(1 - F(t))]'$ ([relation 42 de la](#)

[page 244](#)). On en déduit, après intégration: $1 - F(t) = e^{\left[-\int_0^t h(u)du\right]}$ et, si l'on pose

TABLEAU 44
Fusion des tableaux 42 et 43 (trié par âge croissant)

Véhicule fictif	Âge du véhicule	Âge du décès du moteur	État du moteur	Rang inversé	Véhicule fictif	Âge du véhicule	Âge du décès du moteur	État du moteur	Rang inversé
1 (1)	130	?	B	70	31 (2)	920	?	B	35
2 (1)	220	?	B	69	28 (2)	927	?	B	34
29 (2)	230	?	B	68	12 (1)	936	380	M	33
16 (3)	246	?	B	67	13 (1)	940	554	M	32
32 (3)	257	?	B	66	14 (1)	969	?	B	31
20 (2)	262	?	B	65	15 (1)	990	700	M	30
35 (2)	289	?	B	64	16 (1)	1027	313	M	29
15 (2)	290	?	B	63	34 (3)	1042	?	B	28
17 (2)	293	?	B	62	17 (1)	1060	767	M	27
19 (2)	300	?	B	61	26 (2)	1061	163	M	26
3 (1)	300	?	B	60	18 (1)	1070	510	M	25
4 (1)	325	?	B	59	19 (1)	1100	800	M	24
13 (2)	386	?	B	58	20 (1)	1124	862	M	23
5 (1)	390	?	B	57	21 (1)	1150	?	B	22
23 (2)	392	?	B	56	22 (1)	1183	?	B	21
25 (3)	409	?	B	55	23 (1)	1190	798	M	20
39 (2)	430	?	B	54	34 (2)	1263	221	M	19
12 (3)	438	?	B	53	40 (2)	1295	?	B	18
11 (2)	477	477	M	52	24 (1)	1298	?	B	17
6 (1)	490	?	B	51	25 (1)	1300	448	M	16
12 (2)	556	118	M	50	26 (1)	1311	250	M	15
18 (2)	560	?	B	49	27 (1)	1320	750	M	14
27 (2)	570	?	B	48	28 (1)	1366	439	M	13
33 (2)	590	?	B	47	29 (1)	1380	1150	M	12
7 (1)	590	?	B	46	30 (1)	1400	?	B	11
8 (1)	610	?	B	45	31 (1)	1420	500	M	10
9 (1)	680	?	B	44	32 (1)	1450	537	M	9
38 (2)	700	?	B	43	33 (1)	1460	870	M	8
16 (2)	714	468	M	42	34 (1)	1500	237	M	7
37 (2)	750	?	B	41	35 (1)	1513	1224	M	6
10 (1)	830	?	B	40	36 (1)	1550	?	B	5
25 (2)	852	443	M	39	37 (1)	1640	890	M	4
11 (1)	892	415	M	38	38 (1)	1700	1000	M	3
26 (3)	898	?	B	37	39 (1)	1780	1350	M	2
32 (2)	913	656	M	36	40 (1)	2030	735	M	1

Table des matières

Index thématique

$$H(t) = \int_0^t h(u) du \quad \text{relation 43}$$

on obtient alors le résultat fondamental suivant, valable pour toutes les lois de probabilités continues :

$$F(t) = 1 - e^{-H(t)} \quad \text{relation 44}$$

Il suffit donc de faire le cumul des probabilités conditionnelles de panne pour obtenir, après exponentiation, une estimation de la fonction de répartition.

TABLEAU 45
Première estimation de $F(t_i)$

Durée d'utilisation t_i atteinte ou dépassée	Nombre n_i de moteurs soumis à une durée d'utilisation $\geq t_i$	Nombre k_i de moteurs soumis à une durée d'utilisation $\geq t_i$ et hors d'usage avant t_i	Estimation de $F(t_i) = \frac{k_i}{n_i}$
300	59	5	8,5%
400	55	7	12,7%
500	50	13	26,0%
600	45	15	33,3%
700	42	17	40,5%
800	40	21	52,5%
900	36	22	61,1%
1000	29	19	65,5%
1100	24	14	60,9%
1200	19	13	68,4%

Le tableau 46 de la page 250 reprend les informations du tableau 42 de la page 246 en classant les 70 moteurs par kilométrage croissant observé lors de la constitution de l'échantillon, que ces moteurs soient hors d'usage ou non. On en tire alors le tableau 47 de la page 251 dans lequel les moteurs en état de marche sont éliminés. Le taux de défaillance au kilométrage du moteur hors d'usage se calcule alors comme l'inverse du nombre de moteurs ayant atteint ou dépassé ce kilométrage. La fonction de hasard cumulée et la fonction de répartition figurent également dans ce tableau 47..

Table des matières

Index thématique

IV-2.2.3 Détermination de la durée de vie optimale

Nous supposons ici que la maintenance se borne à remplacer à l'identique chacun des composants du véhicule, lorsque ceux-ci tombent en panne. Les lois de durées de vie sont indépendantes (ou très faiblement dépendantes). On calculera donc l'espérance mathématique de la dépense actualisée de remplacement de chacun des composants, en supposant que l'on utilise le véhicule un certain nombre de kilomètres. Puis, comme dans le problème posé en univers certain, on calcule l'annuité constante équivalente à la somme des espérances mathématiques actualisées des dépenses de tous les composants, et de la dépense d'acquisition du matériel I_0 , diminuée de la valeur V_n de revente actualisée du matériel d'occasion; et, comme précédemment, la durée de vie optimale est déterminée par la politique qui conduit à la plus faible annuité constante équivalente. Pour le problème posé, on a calculé une mensualité constante équivalente de préférence à l'annuité. Le véhicule utilitaire considéré parcourt en moyenne 1900 km chaque mois et met donc 5,26 mois (= 0,439 an) pour parcourir 10000 km; les calculs seront conduits pour des durées de vie égales à des multiples entiers de ces données. Nous examinerons successivement 3 problèmes: celui de la détermination de l'espérance mathématique du coût de remplacement d'un composant au cours d'une période, celui du calcul de la durée de vie optimale proprement dite, et enfin une réflexion sur les implications de l'étude de la dispersion des résultats.

TABLEAU 46

Classement des observations faites sur les 68 moteurs changés ou en état de fonctionnement des 40 véhicules du tableau 42 de la page 246

Âge t_i du moteur	État ¹	Véhicule d'origine ²	n_i^3	Âge t_i du moteur	État ¹	Véhicule d'origine ²	n_i^3	Âge t_i du moteur	État ¹	Véhicule d'origine ²	n_i^3
118	M	12 (2)	70	430	B	39 (2)	46	767	M	17 (1)	22
130	B	1 (1)	69	438	B	12 (3)	45	798	M	23 (1)	21
163	M	26 (2)	68	439	M	28 (1)	44	800	M	19 (1)	20
220	B	2 (1)	67	443	M	25 (2)	43	830	B	10 (1)	19
221	M	34 (2)	66	448	M	25 (1)	42	862	M	20 (1)	18
230	B	29 (2)	65	468	M	16 (2)	41	870	M	33 (1)	17
237	M	34 (1)	64	477	M	11 (2)	40	890	M	37 (1)	16
246	B	16 (3)	63	490	B	6 (1)	39	898	B	26 (3)	15
250	M	26 (1)	62	500	M	31 (1)	38	920	B	31 (2)	14
257	B	32 (3)	61	510	M	18 (1)	37	927	B	28 (2)	13
262	B	20 (2)	60	537	M	32 (1)	36	969	B	14 (1)	12
289	B	35 (2)	59	554	M	13 (1)	35	1000	M	38 (1)	11
290	B	15 (2)	58	560	B	18 (2)	34	1042	B	34 (3)	10
293	B	17 (2)	57	570	B	27 (2)	33	1150	B	21 (1)	9
300	B	3 (1)	56	590	B	7 (1)	32	1150	M	29 (1)	8
300	B	19 (2)	55	590	B	33 (2)	31	1183	B	22 (1)	7
313	M	16 (1)	54	610	B	8 (1)	30	1224	M	35 (1)	6
325	B	4 (1)	53	656	M	32 (2)	29	1295	B	40 (2)	5
380	M	12 (1)	52	680	B	9 (1)	28	1298	B	24 (1)	4
386	B	13 (2)	51	700	M	15 (1)	27	1350	M	39 (1)	3
390	B	5 (1)	50	700	B	38 (2)	26	1400	B	30 (1)	2
392	B	23 (2)	49	735	M	40 (1)	25	1550	B	36 (1)	1
409	B	25 (3)	48	750	M	27 (1)	24				
415	M	11 (1)	47	750	B	37 (2)	23				

1. B: moteur en état de fonctionnement lors de la constitution du fichier. M: moteur à changer.

2. suivi du rang du moteur sur le véhicule

3. Nombre de moteurs ayant dépassé l'âge t_i dans l'échantillon

IV-2.2.3.1 Détermination de l'espérance mathématique du coût de remplacement d'un composant au cours d'une période

Introduisons les notations suivantes :

- s : Indice de la période au cours de laquelle le véhicule a atteint entre $(s - 1) \times 10000$ Kilomètres et $s \times 10000$ kilomètres. Compte tenu de l'hypothèse de production mensuelle constante, u on a $t = 10000 s / u$.
- m : indice du numéro d'ordre d'un composant tombant en panne: $m = 1$ pour le composant d'origine, $m = 2$ pour le second composant (premier composant de remplacement); il s'agit toujours du même type de composant (moteur par exemple). Dans notre exemple, nous limiterons m à 5 (c'est-à-dire 4 remplacements), car le problème posé implicitement n'est pas celui de l'étude d'un régime stationnaire, mais celui d'un véhicule dont la durée de

TABLEAU 47

Construction de la fonction de hasard cumulée et de la fonction de répartition de la durée de vie du moteur

t_i	n_i	$h(t_i) = \frac{1}{n_i}$	$H(t_i) = \sum_{j=1}^i h(t_j)$	$1 - e^{-H(t_i)}$
118	70	0,01429	0,01429	1,42%
163	68	0,01471	0,02899	2,86%
221	66	0,01515	0,04414	4,32%
237	64	0,01563	0,05977	5,80%
250	62	0,01613	0,07590	7,31%
313	54	0,01852	0,09442	9,01%
380	52	0,01923	0,11365	10,74%
439	44	0,02273	0,13637	12,75%
443	43	0,02326	0,15963	14,75%
448	42	0,02381	0,18344	16,76%
468	41	0,02439	0,20783	18,77%
477	40	0,02500	0,23283	20,77%
500	38	0,02632	0,25915	22,83%
510	37	0,02703	0,28617	24,89%
537	36	0,02778	0,31395	26,94%
554	35	0,02857	0,34252	29,00%
656	29	0,03448	0,37700	31,41%
700	26	0,03846	0,41547	34,00%
735	25	0,04000	0,45547	36,58%
750	23	0,04348	0,49894	39,28%
767	22	0,04545	0,54440	41,98%
798	21	0,04762	0,59202	44,68%
800	20	0,05000	0,64202	47,38%
862	18	0,05556	0,69757	50,22%
870	17	0,05882	0,75640	53,06%
890	16	0,06250	0,81890	55,91%
1000	11	0,09091	0,90981	59,74%

Table des matières

Index thématique

vie physique est inférieure à 300000 km et que la probabilité d'user plus de 5 composants d'un même type durant la durée de vie physique maximale est tout à fait négligeable.

- P_{ms} : Probabilité de réparation du composant m , au cours de la période s .
- I_{sm} : Espérance de coût (= I_m) de la réparation du composant m au cours de la période s . Lorsque l'indice m manque, c'est que la sommation sur cet indice a été effectuée.

On retiendra, en outre, l'hypothèse que les pannes se produisent nécessairement en fin de période¹.

La détermination de P_{ms} s'établit par récurrence, à partir de la distribution théorique P_{1s} obtenue empiriquement (dans notre exemple, nous avons vu que la

1. Si cette hypothèse est trop forte, il faut alors utiliser des périodes d'amplitude plus faible. Dans notre exemple, on obtient pratiquement les mêmes résultats que ceux obtenus ci-après, en utilisant des périodes d'amplitude 100 fois plus faible à celle utilisée ici: les écarts trouvés sont négligeables.

probabilité que le moteur d'origine tombe en panne entre 20000 et 30000 km, c'est-à-dire au cours de la période $s = 3$, était $P_{1,3} = 0,0194$).

IV-2.2.31a) Détermination de la probabilité P_{2s} qu'une panne de rang 2 se produise à la période s

Le tableau de la figure 61 donne l'âge du véhicule lorsque deux remplacements du moteur se sont produits, et ce, pour les différentes durées de vie possibles du composant considéré. L'âge du véhicule est obtenu en sommant l'âge atteint par le véhicule lorsque le premier remplacement est rendu nécessaire, et celui où la panne du second moteur rend inévitable le second remplacement.

FIGURE 61

Âge du véhicule au second remplacement

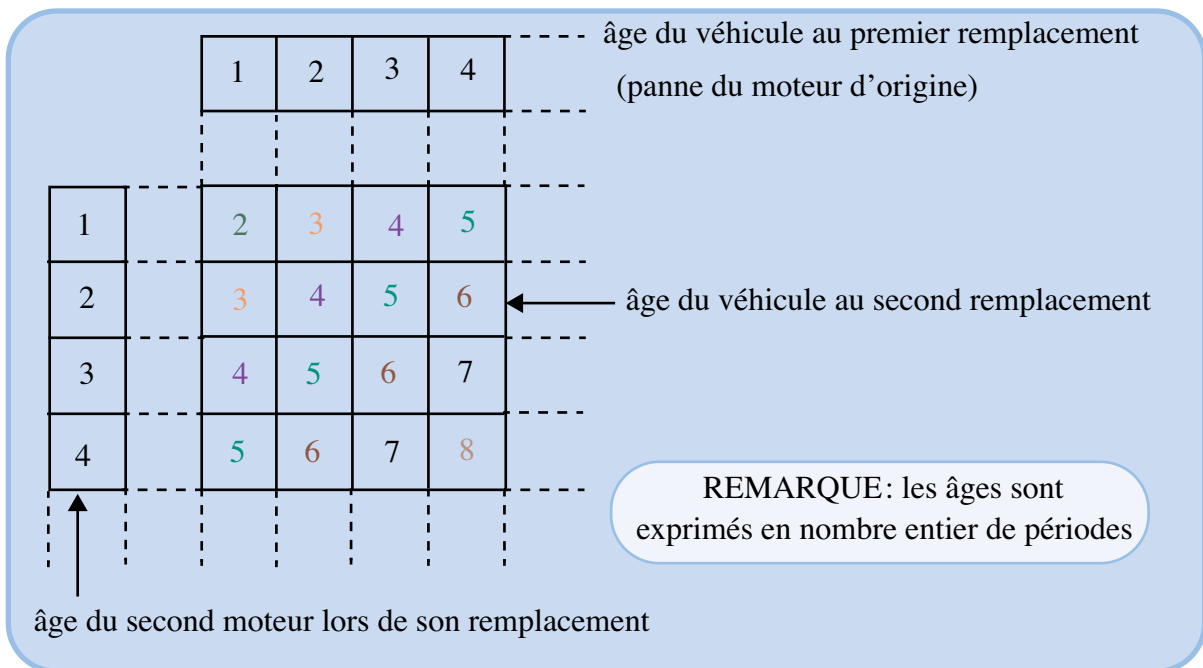


Table des matières

Index thématique

On peut remarquer que les éléments de chaque diagonale Sud-Ouest Nord-Est, sont égaux. Il est facile dès lors de voir que:

$$P_{2,2} = P_{1,1} \cdot P_{1,1}$$

$$P_{2,3} = P_{1,1} \cdot P_{1,2} + P_{1,2} \cdot P_{1,1}$$

$$P_{2,4} = P_{1,1} \cdot P_{1,3} + P_{1,2} \cdot P_{1,2} + P_{1,3} \cdot P_{1,1} \text{ d'où:}$$

$$P_{2,s} = \sum_{j=1}^{s-1} P_{1,j} \cdot P_{1,s-j} \tag{relation 45}$$

Dans notre exemple numérique, on a les probabilités de première panne données dans le tableau 48.

TABLEAU 48

Exemple numérique de distribution de probabilité de la durée de vie du moteur

s	1	2	3	4	5	6	7	...
P_{1s}	0,00175	0,0088	0,0194	0,0323	0,0462	0,0599	0,0722	...

Dans le problème concret qui se pose, la garantie joue pour la première période, ce qui fait que le remplacement du moteur n'est pas à la charge de l'utilisateur s'il doit être effectué au cours de cette période. On considère alors que la probabilité $P_{1,1}$ est nulle. On obtient alors :

$$P_{2,2} = 0 \cdot 0$$

$$P_{2,3} = 0 \times 0,0088 + 0,0088 \times 0 = 0$$

$$P_{2,4} = 0 \times 0,0194 + 0,0088 \times 0,0088 + 0,0194 \times 0 = 0,000077$$

$$P_{2,5} = 0 \times 0,0323 + 0,0088 \times 0,0194 + 0,0194 \times 0,0088 + 0,0323 \times 0 = 0,000341$$

$$P_{2,6} = 0 \times 0,0462 + 0,0088 \times 0,0323 + 0,0194 \times 0,0194 + 0,0323 \times 0,0088 + 0,0462 \times 0 = 0,000945$$

etc., d'où le **tableau 49** où les résultats sont donnés avec une précision de 1/10000.

TABLEAU 49
Exemple numérique de calcul de probabilité de l'âge du véhicule au second remplacement

s	2	3	4	5	6	7	...
P_{2s}	0	0	0,0001	0,0003	0,0009	0,0021	...

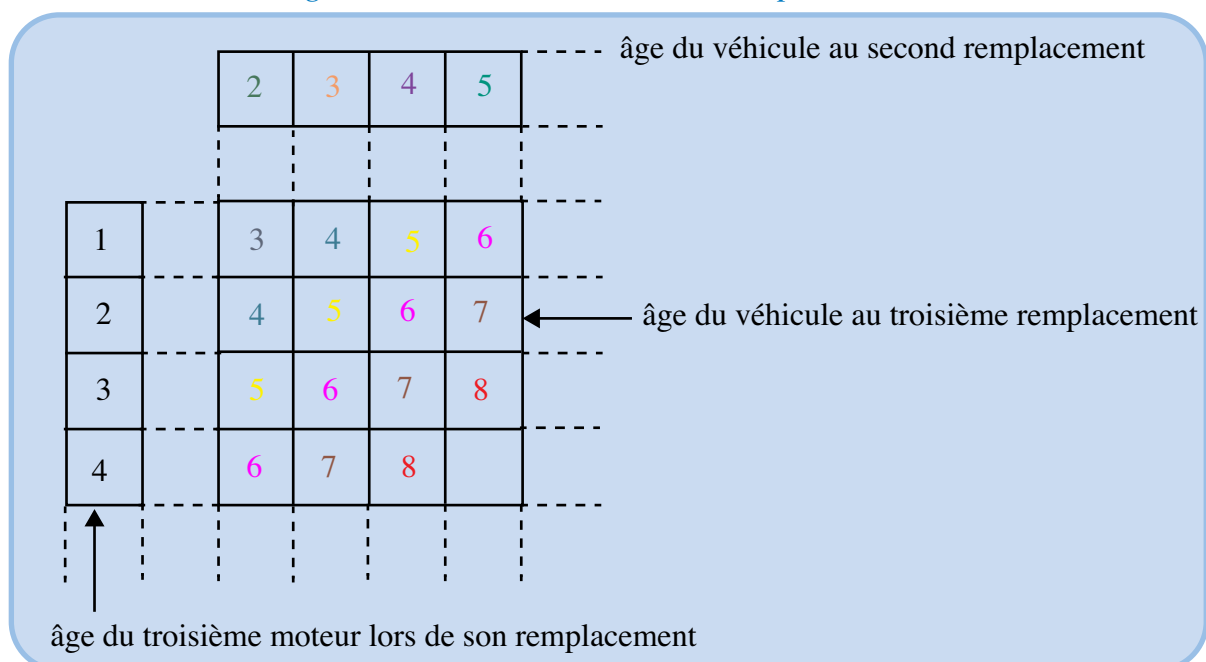
Table des matières

IV-2.2.31b) Détermination de la probabilité P_{3s} qu'une panne de rang 3 se produise au cours de la période s

Le raisonnement généralise celui qui vient d'être présenté. Le tableau de la **figure 62 de la page 253** donne l'âge du véhicule lorsque trois remplacements du moteur se sont produits, et ce, pour les différentes durées de vie possibles du composant considéré.

Index thématique

FIGURE 62
Âge du véhicule au troisième remplacement



Il est facile d'établir :

$$P_{3,s} = \sum_{j=1}^{s-2} P_{2,s-j} \cdot P_{1,j} \quad \text{relation 46}$$

L'application de cette relation 46 à notre exemple numérique conduit au tableau 50.

TABLEAU 50
Exemple numérique de calcul de probabilité de l'âge du véhicule au deuxième remplacement

s	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$P_{3,s}$	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0001	0,0003	0,0005

IV-2.2.31c) Cas général

Par récurrence, on montre que:

$$P_{ms} = \sum_{j=1}^{s+1-m} P_{1j} \cdot P_{m-1,s-j} \quad \text{relation 47}$$

D'où le tableau 51 qui donne la distribution de probabilité de l'âge du véhicule lors du remplacement d'un premier moteur, d'un deuxième moteur, ..., d'un cinquième moteur. Les deux dernières lignes du tableau seront expliquées ultérieurement.

TABLEAU 51
Établissement de la distribution de probabilité (‰) du remplacement d'un moteur selon l'âge du véhicule

$\begin{matrix} s \\ k \end{matrix}$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
P_{ks}	0,0	8,8	19,4	32,3	46,2	59,9	72,2	81,9	88,2	90,5	88,6	83,0	74,5	64,1	52,7	41,5	31,3	22,6	15,5
	0,0	0,0	0,0	0,1	0,3	0,9	2,1	3,9	6,6	10,2	14,9	20,6	27,0	33,9	41,0	47,8	54,0	59,1	62,9
	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,1	0,1	0,3	0,5	0,9	1,6	2,6	3,9	5,7	7,9	10,7
	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,1	0,1	0,2	0,4
	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
P_s	0,0	8,8	19,4	32,3	46,5	60,9	74,3	85,9	94,8	100,8	103,8	104,1	102,5	99,6	96,3	93,3	91,1	89,0	89,6
\bar{P}_s^{-1}	0,0	8,5	18,4	30,0	42,2	54,1	64,6	73,0	79,0	82,2	82,8	81,3	78,3	74,5	70,5	66,9	63,9	61,7	60,1

1. Actualisation à 5% / an de P_s .

IV-2.2.31d) Calcul de l'espérance mathématique du nombre de composants à changer au cours d'une période

Si un moteur est changé au cours d'une période quelconque k , il s'agit soit du moteur d'origine, soit du premier moteur remplacé, soit du second moteur remplacé... On peut alors utiliser le théorème des probabilités totales dans le cas d'événements exclusifs, et on obtient alors la probabilité P_s et qu'un moteur (de rang quelconque) tombe hors d'usage à partir de la relation 48.

$$P_{.s} = \sum_{m=1}^s \sum_{j=1}^{s+1-m} P_{1j} \cdot P_{m-1, s-j} \quad \text{relation 48}$$

L'espérance mathématique du nombre de moteurs en panne au cours de la période s est la moyenne de la loi binomiale $\mathcal{B}(n = 1, p = P_{.s})$, c'est-à-dire $P_{.s}$.

IV-2.2.3.2 Détermination de la durée de vie optimale

L'espérance de coût de remplacement du moteur de coût I_j au cours de la période s est: $I_j \cdot P_{.s}$. La valeur actualisée de ce coût est (la date à laquelle les $s \cdot 10000$ km sont atteints étant $t = 10000 s/u / 12$, où u est le kilométrage mensuel):

$$I_j \cdot P_{.s} (1 + \alpha)^{-t}$$

Si l'on garde le véhicule n périodes, la dépense actualisée de remplacement de moteur au cours de ces n périodes est alors:

$$\sum_{s=1}^n I_j \cdot P_{.s} (1 + \alpha)^{-t} = I_j \sum_{s=1}^n P_{.s} \cdot (1 + \alpha)^{-t} \text{ avec } t = \frac{10000s}{12u} \quad \text{relation 49}$$

Pour faciliter les calculs, la dernière ligne du [tableau 51 de la page 254](#) fournit la valeur actualisée des probabilités $P_{.s}$.

Il ne reste plus qu'à cumuler les dépenses actualisées des différents composants j , et à tenir compte de la valeur de revente V_n (dont la détermination n'est pas toujours des plus faciles) pour calculer la mensualité constante équivalente M_n associée à un renouvellement du véhicule tous les $10000 \times n$ kilomètres:

$$M_n = \left[I_0 - V_n (1 + \alpha)^{-n} + \sum_j I_j \sum_{s=1}^n P_{.s} \cdot (1 + \alpha)^{-t} \right] \frac{\alpha_{12}}{1 - (1 + \alpha_{12})^{-m}}, \text{ avec:}$$

$m = \frac{10000 \cdot n}{12 \cdot u}$ = nombre de mois d'utilisation et $\alpha_{12} = (1 + \alpha)^{1/12} - 1$ = taux mensuel équivalent au taux annuel α .

Dans le cas traité, les mensualités constantes équivalentes du véhicule **Volnault** sont (en dollars liduriens) et pour le taux réel d'actualisation de 5% (on ne tiendra pas compte pour l'instant de la dernière ligne):

TABLEAU 52
Calcul des mensualités constantes équivalentes d'utilisation du véhicule en fonction de l'âge de radiation du véhicule

s	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
M_n	951	633	521	470	444	430	419	408	395	384
σ_n	35	40	43	44	44	41	35	28	25	24

Il ressort de ce tableau qu'il y a intérêt à faire durer le plus longtemps possible le véhicule. Cette observation doit être tempérée par le fait que n'est pris en compte dans l'étude qu'un nombre limité de composants (embrayage moteur, cardans, boîte de vitesses et freins) mais qui correspondent aux « grosses

Table des matières

Index thématique

dépenses». Des dépenses mineures (remplacement d'un moteur de lave-glace, par exemple) sont d'un poids sans doute plus important lorsque le véhicule vieillit et il est sans doute raisonnable de considérer qu'au-delà de 150000 km il y a une sous-estimation de la dépense (cependant 10 dollars liduriens d'écart par mois pour un véhicule utilisé sur 160000 km représentent une valeur actualisée de 711 dollars).

Il faut enfin noter que le choix de garder un véhicule 150000 km par exemple, ne veut pas dire que sa radiation aura lieu nécessairement à cette date: un véhicule en état de marche en franchissant ce cap sera gardé tant qu'une panne d'un composant majeur ne l'aura pas immobilisé, et réciproquement un véhicule tombé en panne peu avant ce kilomètre sera radié avec anticipation. Dans ce dernier cas, le calcul économique permet de dire, lorsqu'un composant tombe en panne, et compte tenu de l'âge des autres composants, s'il est intéressant ou non de procéder au remplacement (en comparant l'espérance mathématique du coût d'entretien après réparation avec la mensualité constante équivalente trouvée dans la stratégie optimale).

IV-2.2.3.3 Le problème de la dispersion des résultats

En univers aléatoire, il est insuffisant de juger sur le seul critère du coût (ou de rentabilité). Le raisonnement décrit à la page 199, en application de la théorie financière moderne, montre qu'il est indispensable de faire intervenir en outre, dans le choix d'un investissement, la dispersion des résultats obtenus pour, le cas échéant, effectuer un arbitrage entre rentabilité et risque.

La dépense actualisée d'une chaîne infinie de véhicules de durée de vie n , est une variable aléatoire dont on a considéré l'espérance mathématique (rappelons que M_n est égal au produit de cette espérance par le taux d'actualisation), mais qui peut également se caractériser par sa dispersion.

On prendra comme paramètre de dispersion σ_n^2 , le produit de la variance σ^2 des dépenses de la chaîne infinie par le taux d'actualisation mensuel, afin de pouvoir comparer plus facilement σ_n^2 et M_n . Si un accroissement de durée de vie $n_2 - n_1$ se traduit par une diminution de la mensualité constante équivalente ($M_{n_2} < M_{n_1}$), mais s'accompagne simultanément d'un accroissement de la dispersion des dépenses $\sigma_{n_2}^2 > \sigma_{n_1}^2$, un arbitrage devra être opéré entre les notions d'espérance et de risque.

IV-2.2.33a) Calcul de σ^2

Deux propriétés classiques facilitent le calcul:

- Tout d'abord, on sait que la variance d'une somme de variables aléatoires *indépendantes* est égale à la somme des variances de ces variables aléatoires. Puisque l'on a considéré les cinq types de pannes comme indépendantes, la variance des dépenses totales sera égale à la somme des variances relatives à chacune des pannes.
- Deuxièmement, la variance des dépenses peut se calculer comme l'espérance mathématique des carrés des dépenses, diminuée du carré de l'espérance mathématique des dépenses.

Le problème se ramène donc au calcul de l'espérance mathématique des carrés des dépenses. Pour des raisons d'homogénéité, il est nécessaire d'y ajouter le carré de la dépense nette¹ d'acquisition du véhicule, dès lors que ce poste figure dans le calcul de l'espérance mathématique des dépenses.

Pour un type de panne quelconque, compte tenu des hypothèses retenues, on peut avoir de 1 à 5 remplacements. Le calcul de l'espérance des carrés s'établit progressivement, en *partitionnant* la variable aléatoire en 5 sous-ensembles.

- **Un seul remplacement est opéré.** Chaque période t ($1 \leq t \leq n$) est caractérisée par la dépense I_t et la probabilité qui lui est associée est égale au produit de la probabilité de l'occurrence d'une panne au cours de la période t par celle qu'aucune panne se produise au cours des $n - t$ périodes suivantes :

$$p_{1t} \cdot \left(1 - \sum_{i=1}^{n-t} p_{1i}\right)$$

On en déduit une première somme de carrés S_1 , constitutive de σ^2 :

$$S_1 = \sum_{t=1}^n \bar{I}_t^2 p_{1t} \cdot \left(1 - \sum_{i=1}^{n-t} p_{1i}\right)$$

- **Deux remplacements sont opérés.** Un premier remplacement est opéré au cours de la période t , et un second au cours de la période u . La dépense effectuée est donc : $(\bar{I}_t + \bar{I}_u)$. La probabilité associée à cette dépense est égale au produit de la probabilité que la panne se produise en période t , par celle qu'elle se produise en période $(u - t)$, puisque 2 pannes successives sont indépendantes, multiplié par la probabilité qu'aucune panne ne survienne au cours des $(n - u)$ périodes suivantes. Elle est donc égale à :

$$[p_{1t} \cdot p_{1(u-t)}] \left(1 - \sum_{v=1}^{n-u} p_{1v}\right)$$

On en déduit une seconde somme de carrés S_2 , à ajouter à la précédente dans le calcul de σ^2 :

$$S_2 = \sum_{t=1}^{n-1} \sum_{u=t+1}^n (\bar{I}_t + \bar{I}_u)^2 p_{1t} \cdot p_{1(u-t)} \left(1 - \sum_{v=1}^{n-u} p_{1v}\right)$$

- **k remplacements sont opérés.** Le premier remplacement est opéré au cours de la période t_1 , le second au cours de la période t_2 , ..., le $k^{\text{ième}}$ au cours de la période k . La dépense effectuée est donc :

$$\sum_{i=1}^k \bar{I}_{t_i} \text{ avec } t_i < t_{i+1} \leq n$$

Il est facile de montrer par récurrence, une fois établi le calcul du point précédent, que la probabilité associée à cette dépense est :

$$\left[p_{1t_1} \cdot \prod_{i=2}^k p_{1(t_i - t_{i-1})} \right] \left(1 - \sum_{v=1}^{n-t_k} p_{1v}\right)$$

1. = valeur d'achat diminuée de la valeur actualisée de la valeur de revente à la fin de la période n .

La somme S_k à ajouter aux précédentes, pour le calcul de σ^2 est donc :

$$S_k = \sum_{t_1=1}^{n-k} \left\{ p_{1k} \left[\prod_{i=2}^k p_{1(t_i-t_{j-1})} \right] \cdot \left[1 - \sum_{v=1}^{n-t_k} p_{1v} \right] \cdot \left[\sum_{i=1}^k \bar{I}_{t_i} \right]^2 \right\} \quad \text{relation 50}$$

Le calcul de σ^2 s'en déduit aisément car on a :

$$\sigma^2 = \sum_{k=1}^5 S_k - (\alpha_{12} M_n)^2 \quad \text{relation 51}$$

IV-2.2.33b) Analyse des résultats

La comparaison des coûts et de leur dispersion (voir le [tableau 52 de la page 255](#) et la [figure 63](#)) montre que seules les politiques consistant à garder le véhicule plus de 100000 km sont efficaces. Autrement dit, pour une même dispersion des résultats (= risque encouru), il est toujours plus intéressant, parce que moins coûteux, de retenir la politique qui conduit à la durée de vie la plus longue.

FIGURE 63

Arbitrage « coût – risque » de la dépense mensuelle d'utilisation d'un véhicule en fonction de sa durée de conservation

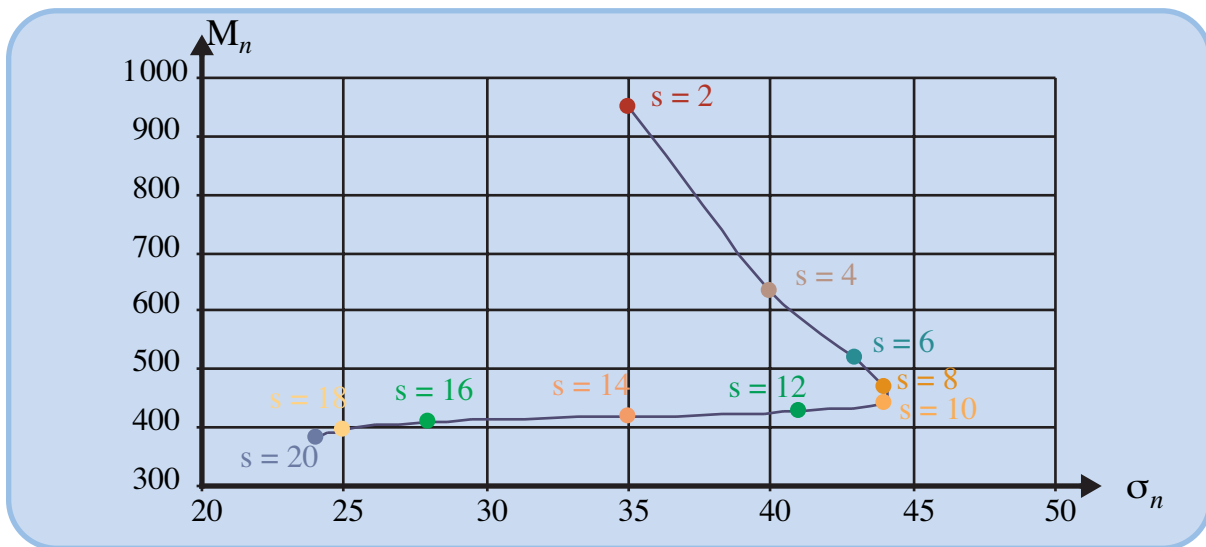


Table des matières

Index thématique

Chapitre IV

GESTION DE PROJET

Ce chapitre traite essentiellement des problèmes d'ordonnement des projets, mais les principaux problèmes de gestion de projet sont évoqués dans ce chapitre, ce qui justifie le titre retenu ici. Pour être plus précis, les organismes professionnels de normalisation (Afnor, 2002, [5]) et de certification associent à la **gestion de projet** (*project control*) la capacité à mobiliser efficacement les instrumentations d'analyse d'un projet et de maîtrise de ses délais et de ses coûts¹, alors que la **direction de projet** (*project management*) se situe à un niveau plus stratégique², le management de projet³ réunissant la gestion et le management de projet. Après avoir présenté les principales caractéristiques de la gestion de projet, on examinera le problème d'ordonnement posé (section II, page 274), avant d'introduire les approches de résolution disponibles (section III, page 288) et de traiter le suivi de l'exécution d'un projet du point de vue des délais et du point de vue des coûts (section IV, page 343).

Table des
matières

SECTION I PRÉSENTATION DE LA GESTION DE PROJET

Index
thématique

I-1 Définition et caractérisation

Le projet est une forme d'organisation productive très ancienne : quand un pharaon décidait de faire construire la pyramide sous laquelle il serait enterré, il fallait exécuter un ouvrage de spécifications techniques précises, en un laps de temps court, avec des ressources matérielles et humaines limitées. Dans tout projet, on retrouve cette prise en compte simultanée de ces trois catégories de contraintes (temps, ressources et spécifications techniques) pour réaliser un objet ou une prestation de service, qui n'a jamais été encore exécuté dans ces conditions précises et qui est d'une certaine complexité. La norme X50-105 de l'Afnor⁴ met d'abord l'accent sur le projet considéré comme un processus en le définissant

-
1. La norme X50-115 (2002, [5]) définit la gestion de projet comme « la fonction qui apporte à la direction de projet les informations nécessaires au pilotage du projet et en assure la fiabilité et la pertinence, permettant de disposer en permanence d'un état instantané et prévisionnel du projet » et ajoute « Son rôle consiste aussi à anticiper le plus en amont possible les risques encourus et à prévoir les dispositions nécessaires pour les maîtriser. Tout au long du projet, elle contribue à sa maîtrise, en établissant également les rapports d'avancement sur les dépenses engagées et prévues et la tenue des délais et jalons ».
 2. La norme X50-115 (2002, [5]) définit la direction de projet comme « la fonction du management de projet dans laquelle sont prises les décisions, tant au niveau des aspects techniques que de l'allocation des ressources et des actions à mener, concernant les objectifs, la stratégie, les aspects financiers et l'organisation du projet ».
 3. Ce qui se traduit, là encore par *project management*, ce qui peut conduire à des problèmes de traduction ou de compréhension.

comme «une démarche spécifique qui permet de structurer méthodiquement et progressivement une réalité à venir» avant de s'attacher au résultat et aux moyens mobilisés, en ajoutant qu'«un projet est défini et mis en œuvre pour élaborer une réponse au besoin d'un utilisateur, d'un client ou d'une clientèle et il implique un objectif et des actions à entreprendre avec des ressources données». La nouvelle norme X50-115 (2002, [5]) est plus restrictive, en reprenant la définition de la norme NF-ISO-10006 (1997, [317]) qui définit le projet comme «un ensemble d'activités coordonnées et maîtrisées comportant des dates de début et de fin, entrepris dans le but d'atteindre un objectif conforme à des exigences spécifiques».

Une certaine substituabilité existe entre ces trois catégories de contraintes : il est plus facile de respecter des spécifications techniques si le délai imparti est grand que s'il est court ou de tenir un délai avec des ressources importantes qu'avec des ressources réduites. La cohérence entre ces contraintes, dont le poids relatif varie d'un projet à l'autre, est essentielle à la réussite du projet. Il faut souligner qu'il n'y a aucune raison pour qu'il en soit ainsi à l'origine du projet, la première difficulté étant de converger rapidement sur une définition cohérente du problème posé¹. Chaque type de contrainte fait l'objet d'une instrumentation spécifique pour s'assurer que le projet respectera son cahier des charges, mais les possibilités de substituabilité évoquées ci-dessus obligent à une coordination rigoureuse des pilotages techniques, temporels et économiques.

- Les spécifications techniques, qui incluent celles de qualité, peuvent consister en une description détaillée d'un produit ou d'une prestation de service à exécuter, ce qui est le cas lorsque le projet fait l'objet d'un contrat entre un client et un fournisseur. Elles peuvent aussi porter sur des spécifications fonctionnelles (besoins à satisfaire) et techniques (fiabilité, maintenabilité, facilité d'usage...), ce qui est souvent le cas pour des **avant-projets** dont l'objet est de fournir une description détaillée d'un produit ou d'une prestation de service ainsi que la définition d'un budget et d'un délai, et que l'on rencontre chaque fois que l'on vise à satisfaire une clientèle potentielle. Lorsque le projet porte sur l'élaboration d'un produit nouveau, les hypothèses relatives à l'importance du marché potentiel font partie des spécifications techniques car elles conditionnent fortement certains choix. Ce pilotage technique reste fondamentalement une affaire d'ingénieur.
- Tout projet a une date d'achèvement annoncée dès sa création. Le délai dont on dispose est une contrainte importante car, en général, les contrats d'exécution de projet comportent des clauses de pénalité de retard et, pour les projets

4. *Note de la page précédente.* Cette norme, reprise dans Afnor (1998, [4]) et en cours d'adaptation avec la norme X50-115 (2002, [5]), a été créée à l'instigation de l'AFITEP, association francophone de management de projet (<http://www.afitep.fr>) qui fédère en France, à titre individuel, plus de 1 100 professionnels de projet et est la seule association professionnelle de gestionnaires de projets. Au niveau international, deux organismes ont édicté un référentiel : le *Project Management Institute* (1996 & 2000, [349], www.pmi.org) et l'*International Project Management Association* (1998, [239], www.ipma.org). Il faut ajouter, en France que le Ministère de la Défense a ses propres normes pour le secteur de l'aéronautique (1998, [362]) et qu'en Grande Bretagne, l'*Association for Project Management* (www.apmgroup.co.uk) a édité également son référentiel. On peut aussi consulter des sites de cabinet comme www.managementprojet.com.

1. L'absence de cohérence conduit les acteurs qui gèrent et exécutent le projet à sacrifier les objectifs qui, selon eux, les pénalisent le moins dans l'évaluation qui sera faite de leur travail. Cela étant, une bonne gestion d'un projet conduit à une «mise sous tension» des équipes pour obtenir des comportements moins routiniers et donc plus innovateurs, ce qui permet d'atteindre des objectifs considérés initialement comme difficiles à tenir simultanément.

de lancement de produits nouveaux, un retard peut compromettre irrémédiablement l'intérêt opérationnel du projet ou sa viabilité économique. Le pilotage temporel du projet s'effectue en faisant appel aux techniques d'ordonnement *Potentiel-Tâches* ou PERT (présentées en détail dans ce chapitre).

- La contrainte de ressources mobilisées peut se traduire par un budget global, Cette valorisation ne transcrit pas toujours correctement la marge de manœuvre dont disposera le directeur du projet qui aura à composer avec les ressources qui lui auront été affectées, c'est-à-dire des hommes de compétence et de motivation parfois éloignées de celles souhaitées et des équipements de caractéristiques techniques parfois insuffisantes. Le pilotage économique s'effectue en faisant appel à des techniques de contrôle de gestion spécifiques (voir § IV-2, page 346).

La spécificité de ces caractéristiques ne s'appréhende bien qu'en les opposant à celles de la production récurrente et stabilisée de biens ou de prestations de service (stabilité des spécifications techniques, du temps disponible et des ressources mobilisées), qui correspond à ce que l'on appelle parfois une activité «opération», par opposition à l'activité «projet». Declerck, Debourse et Navarre (1983, [127]) ont proposé un positionnement de la gestion de projet fondée sur la mise en évidence de quelques différences essentielles entre l'activité «projet» et l'activité «opération», ce qu'illustre le [tableau 53](#).

Table des matières

Index thématique

TABLEAU 53
Comparaison des activités «projets» et «opérations»

Activité projet	Activité opération
non répétitive (one shot)	répétitive
décisions irréversibles	réversible
incertitude forte	incertitude faible
influence forte des variables exogènes	influence forte des variables endogènes
processus historiques	processus stabilisés, gérables en statistiques a-historiques
cashs flows négatifs	cash flow positifs

Quelques autres spécificités peuvent être soulignées¹. Le projet mobilise des experts de différents services selon un périmètre variable au cours du temps. On observe une forte hétérogénéité initiale de points de vue s'appuyant sur des logiques différentes et renforcée par l'incertitude pesant sur des spécifications détaillées. L'évaluation de la validité et de l'importance relative des argumentaires en présence, et leur intégration, repose sur un processus d'apprentissage collectif et d'arbitrage très spécifique qui doit tenir compte de ce qu'au début du projet la connaissance que l'on a est faible, mais les degrés de liberté sont grands, contrairement à ce qui se passe en fin de projet. Se posent enfin pour les projets des problèmes spécifiques de capitalisation d'expérience que l'on ne retrouve pas dans

1. Pour plus de détails, voir Giard et Midler, «Management et gestion de projet: bilan et perspectives» ([197] in [135], 1997) et Garrel, Giard et Midler, «Management de projet et gestion des ressources humaines» (2002, [165]).

les services fonctionnels dont la pérennité permet de mettre au point des solutions-type en réponse à des problèmes-types.

I-2 Typologie des projets

Les caractéristiques communes aux projets, introduites ci-dessus, ne doivent pas conduire à les considérer comme étant homogènes. Pour comprendre la variété des problématiques rencontrées¹, et donc celle des instrumentations mises au point, il est utile de faire appel à trois typologies fondées respectivement sur l'objet du projet, la place économique du projet dans l'entreprise et le client du projet. La typologie des structures mises en place pour gérer un projet (voir § I-3.1, page 268) constitue également une grille d'analyse essentielle.

I-2.1 Typologie des projets selon leur objet

Historiquement, le projet a été créé pour résoudre des problèmes de production unitaire. Il a vu ensuite son champ d'application s'étendre à la conception de produits nouveaux dans les industries de production de masse. Il est maintenant utilisé dans toutes sortes d'entreprises pour gérer des opérations exceptionnelles, complexes et d'une certaine envergure. Ajoutons que la gestion de la production de biens en très petites séries peut faire appel aux approches d'ordonnancement de projet, dans une approche multi-projets avec prise en compte de contraintes sur ressources partagées².

I-2.1.1 Les projets de production unitaire

Si la gestion de projet est ancienne, c'est aux États-Unis qu'elle va se formaliser en un corps de doctrine autonome à l'occasion des grands programmes militaires ou spatiaux et des grands travaux de développement des années soixante, sous l'impulsion des milieux professionnels américains, réunis dans le *Project Management Institute*. Ce « modèle standard » de l'ingénierie des grands projets unitaires, comporte une dimension organisationnelle et instrumentale. Sur le plan organisationnel, il définit un cadre de responsabilités fondé sur le triptyque « maître d'ouvrage, maître d'œuvre et responsable de lots de travaux ». Le **maître d'ouvrage** (*client, contracting part, owner*) est le propriétaire de l'ouvrage futur. Il a la responsabilité de la définition des objectifs (dans les termes de l'ingénierie, il définit le programme ou le cahier des charges). Le **maître d'œuvre** (*contractor, engineer*) assume deux rôles : un rôle d'architecte, d'ensemblier (responsabilité des choix de conception globaux et de décomposition en lots de travaux) et un rôle de coordination de la réalisation de l'ouvrage (organisation des appels d'offres sur les lots, choix des contractants, planification, suivi et contrôle de la réalisation des lots). Les **responsables de lots** assurent la réalisation des tâches élémentaires de l'ensemble ; le modèle peut fonctionner, pour les grands projets, de manière emboîtée : chaque lot pouvant être considéré en cascade comme un sous-projet.

1. Pour mieux apprécier cette diversité et comprendre pourquoi la transposition sans précaution de structures et outils marchant bien pour une entreprise peut s'avérer désastreuse pour une autre, le lecteur est invité à se reporter à l'ouvrage d'ECOSIP, sous la direction de V. Giard et C. Midler, *Pilotages de projet et entreprises - diversités et convergences* (1993, [135]).

2. Voir le § II-3.2.2, page 286, les remarques faites à la page 282.

Sur le plan des méthodes, le « modèle standard » de l'ingénierie réunit une gamme d'outils visant à la décomposition du projet, sa planification et le contrôle de coûts. Ce modèle s'affirme dans l'ingénierie des grands projets unitaires jusqu'à la fin des années 1970, qui marque le début d'une crise grave pour le secteur marqué par une montée de la concurrence internationale et une mise en cause de certains excès dans l'usage de ce modèle standard (en particulier, dans le niveau de détail retenu pour le pilotage et le contrôle des projets). On commence alors à chercher à compléter cette approche en adaptant la démarche d'ingénierie concourante (voir [page 270](#)), qui s'est développée dans les entreprises industrielles, sur une problématique de développement de nouveaux produits.

À titre d'exemple, cette production unitaire se retrouve dans les grands programmes aéronautiques ou spatiaux, dans le secteur de l'ingénierie civile avec aussi bien les grands ouvrages d'art (tunnel sous la manche, grands ponts...) que les projets plus modestes (programmes immobiliers, construction de maisons particulières) ou dans le secteur de l'ingénierie électrique (construction de centrales...).

I-2.1.2 Les projets de conception de produits nouveaux

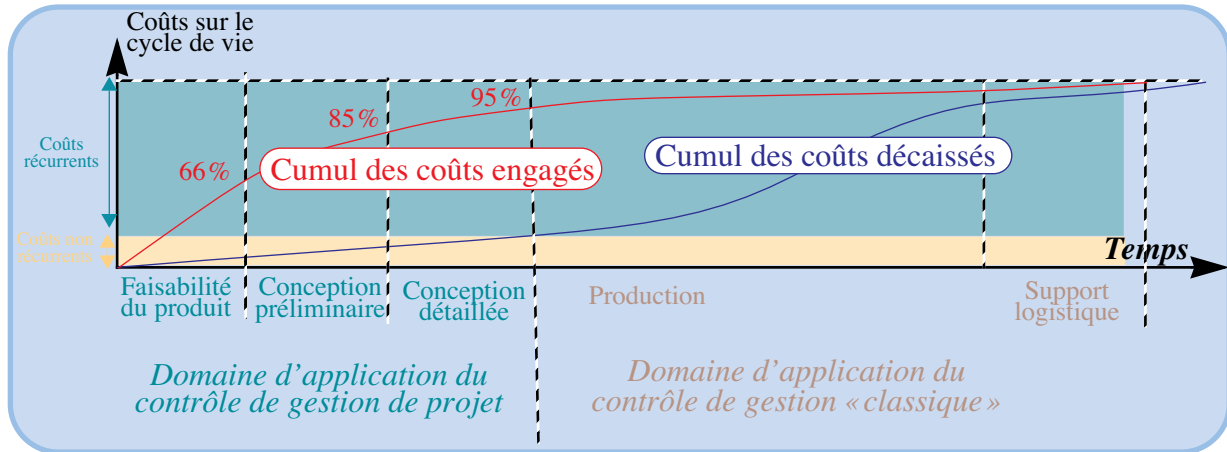
L'émergence et le développement de la notion de gestion de projet dans les industries de grande série s'opèrent à partir des années soixante-dix, lorsque le nombre et la complexité des projets imposent une meilleure coordination et intégration des différentes logiques. On voit alors se créer des rôles de chefs de projet, des revues formalisées et, plus généralement, l'adoption, au sein des entreprises de production de grandes séries, de certains outils du « modèle standard ». Ce modèle va connaître, à la fin des années 1980, une nouvelle rupture, lorsqu'il apparaît clairement que la performance des entreprises occidentales en matière de conception de nouveaux produits n'est pas à la hauteur des compétiteurs japonais, en particulier dans une bataille économique qui, de plus en plus, se joue sur la variété, la qualité et le renouvellement rapide des catalogues (voir le [chapitre II, § II-1.4, page 117](#) et en particulier la présentation des travaux de Womack, Jones et Roos illustrée par la [figure 18, page 117](#)). De nouvelles démarches de gestion des projets émergent, qui donnent un poids plus important au chef de projet, maintenant dénommé « directeur de projet », et visent à assurer une coopération plus efficace des différents contributeurs au sein du processus de conception¹. Par ailleurs, l'attention se focalise de plus en plus sur le cycle de vie d'un produit qui, en gestion de projet, se définit (voir [page 118](#)) comme l'intervalle de temps qui sépare le début de la conception d'un produit, de l'arrêt de sa fabrication, et par tous les événements et décisions qui affectent ce produit durant cette période (acceptation différente de celle donnée à ce terme en marketing, voir [chapitre II, page 117](#)). Cette mise en perspective, illustrée par la [figure 64](#) (adaptée de celle de Berliner et Brimson, 1988, [47], introduite à la [page 120](#)), permet de montrer que des décisions prises très tôt ont des conséquences importantes sur des coûts récurrents qui sont, de fait, engagés par ces décisions, même si leur décaissement est étalé dans le temps. Il s'ensuit une volonté de maîtrise des coûts engagés lors des projets de conception des produits nouveaux qui se traduit par la mise au point

1. Une analyse de ces transformations peut être trouvée dans l'ouvrage de Midler sur le projet Twingo (1993, [301]).

d'une instrumentation complémentaire (**conception à coût objectif**) utilisée dans le pilotage économique de cette catégorie de projets.

FIGURE 64

Comparaison des coûts engagés et décaissés durant le cycle de vie du produit



Cela étant, comme cela a été souligné au [chapitre II](#) (et illustré par la [figure 22](#), [page 131](#)), cette représentation idéale n'est possible qu'à la fin du cycle de vie, c'est-à-dire au moment où il ne reste plus de décision à prendre. Avant, ce que l'on peut chercher à estimer c'est une fourchette de valeurs du coût global sur le cycle de vie, fourchette qui convergera progressivement vers la valeur du coût global effectivement décaissé.

I-2.1.3 Gestion d'opérations exceptionnelles, complexes et d'une certaine envergure

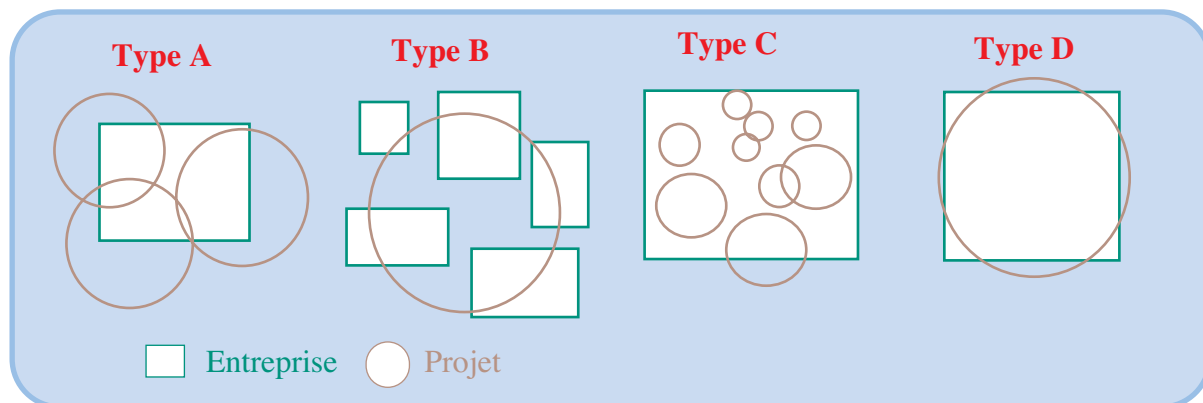
L'approche «projet» est de plus en plus utilisée dans les organisations pour gérer des opérations exceptionnelles, c'est-à-dire non récurrentes, d'une certaine complexité, en particulier parce qu'elles mobilisent des acteurs de différents services, et d'une certaine envergure. On doit retrouver pour ces opérations les contraintes de spécifications techniques, de ressources et de délai qui caractérisent tout projet. L'organisation d'une participation importante à un salon professionnel ou un changement de système de gestion informatisé illustrent ce type de possibilité. Pour France Télécom, entreprise typiquement orientée vers une production de type «opération», le passage à la numérotation à 10 chiffres ou la couverture des transmissions de la coupe mondiale de football 1998 constituent deux autres exemples de gestion de projet.

I-2.2 Typologie des projets en fonction de leur importance économique dans l'entreprise

Cette typologie, proposée par ECOSIP et complétée ultérieurement (2001, [165]) repose sur le poids économique du projet dans l'entreprise. Trois catégories sont retenues et illustrée, par la [figure 65](#).

- Le type A correspond à la configuration dans laquelle une entreprise dominante, pouvant mobiliser d'autres entreprises, est impliquée dans quelques très «gros» projets vitaux pour sa survie et qui fera l'objet d'une décomposition en sous-projets. C'est typiquement le cas de l'industrie auto-

FIGURE 65
Typologie des projets en fonction de leur importance économique dans l'entreprise



mobile. Les régulations en place dans l'entreprise vont alors structurer de manière forte l'organisation du projet. Le problème clé est la question de l'autonomie et de la spécificité de l'organisation du projet par rapport à ces régulations.

- Avec le type B, c'est le projet qui est au centre de la régulation : c'est l'identité la plus forte, dotée d'une personnalité juridique et financière. Les entreprises impliquées rendent compte à la direction générale du projet alors que, dans la configuration précédente, c'est plutôt le projet qui rend compte à la direction générale de l'entreprise dominante. Les entreprises et les acteurs que le projet coordonne n'ont pas l'habitude de travailler ensemble. Le projet est l'occasion, parfois unique, de cette coopération. C'est dans ce deuxième type que le modèle standard de l'ingénierie est le plus prégnant : aucune organisation ni culture d'entreprise ne s'imposant aux autres, toutes doivent adopter les « spécifications managériales » du projet pour pouvoir se coordonner correctement. Les relations contractuelles sont beaucoup plus développées, pour réguler l'interaction d'agents économiques appartenant à des entreprises aux intérêts souvent divergents.
- Dans le type C, qui peut être illustré par le cas de la pharmacie ou celui de la chimie fine, on a affaire à une entreprise qui gère un nombre élevé de « petits » projets, relativement indépendants les uns des autres, et dont aucun ne met en cause, à lui seul, sa pérennité. Dans ce cas, les projets s'inscrivent dans les procédures en usage dans l'entreprise, l'autonomie du projet est plus réduite que dans le premier type. Il n'y a pas forcément d'organisation spécifique, la fonction de chef de projet pouvant se cumuler avec une autre. L'un des problèmes importants est ici de gérer le portefeuille des projets, d'en arrêter certains pour en accélérer d'autres ou en introduire de nouveaux. Dans certains cas (fabricant de machines spécialisées, par exemple), les projets résultent de commandes passées par un nombre restreint de clients, ce qui peut conduire, en cas d'échec d'un projet, à la perte du client, avec des conséquences similaires à celles évoquées pour le type A.
- Le type D correspond au cas particulier de la start-up, c'est-à-dire à un cas de figure dans lequel l'entreprise se confond avec le projet à l'origine de sa création et ce tant que la pérennité de l'entreprise, liée à la conquête d'un marché,

ne semble pas assurée. Encore plus que dans le projet de type A, la mort du projet est synonyme de mort de l'entreprise: celle-ci est condamnée à réussir, avec des ressources limitées et en un temps compté, à s'imposer, par des produits ou des prestations de spécifications présentant quelques originalités, sur un marché. Il est évident que le moment où la start-up change de statut pour devenir une entreprise «banale» est difficile à définir et que les instrumentations à mobiliser proviennent de la gestion de projet et de la gestion «classique».

I-2.3 Typologie des projets en fonction de leurs clients

Le pilotage d'un projet est nécessairement influencé par la manière dont sont négociées ses contraintes et les possibilités d'une renégociation ultérieure. De ce point de vue, les projets à coûts contrôlés se distinguent des projets à rentabilité contrôlée.

Un **projet à coûts contrôlés** se caractérise par l'existence d'un client parfaitement connu avec lequel les spécifications techniques, le budget et le délai sont négociés. Lorsque l'ensemble est verrouillé contractuellement, la marge bénéficiaire du maître d'œuvre dépendra avant tout de sa bonne maîtrise des coûts (et donc du temps) et les raisons de remise en cause par l'un des partenaires des conditions du contrat se limitent en général à des difficultés techniques qui ont été mal appréciées initialement et qui peuvent obliger à une révision de certaines spécifications. Deux types de contrats sont classiquement utilisés.

- Le **marché à prix forfaitaire** correspond à une obligation de résultats à un prix non révisable.
- Le **marché en régie** correspond à une obligation de moyens. Les décaissements sont facturés au client au fur et à mesure de l'avancement du travail et le bénéfice du prestataire est déterminé indépendamment du coût final; un contrôle est exercé par le client sur la réalité de la dépense et la réalisation des objectifs négociés de productivité; dans ce type de contrats, le client a la possibilité de faire évoluer plus facilement les spécifications. Dès lors, mais pour des raisons différentes, les gestionnaires de ces projets s'attachent tout particulièrement au suivi des coûts. Reste le problème de la définition du référentiel de base.

Habituellement, le projet à coûts contrôlés se définit dans le cadre d'un appel d'offre, où les contraintes de spécifications techniques et souvent de délais sont assez fixées, une certaine marge de manœuvre étant généralement laissée au niveau des processus utilisables. Pour avoir intérêt à répondre à cet appel d'offre, il faut que les estimations de coûts¹ conduisent à un budget inférieur à l'offre de prix, jugé acceptable par le client, compte tenu de la concurrence dans cette opération. Cette phase repose sur le savoir-faire des estimateurs, sur une appréciation des risques du contrat², sur une bonne connaissance de la concurrence et du client et, enfin, sur la capacité de l'entreprise à se différencier positivement de ses concurrents, lorsqu'elle n'est pas très bien placée sur le plan du prix.

Un **projet à rentabilité contrôlée**, que l'on rencontre principalement pour le développement de produits nouveaux devant être vendus sur un marché concu-

1. Voir l'ouvrage de la Commission Estimation de l'AFITEP (1995, [3]).

rentiel¹ (comme le développement d'une automobile), se caractérise par l'existence de clients potentiels. Dans ce cas de figure, la définition des spécifications techniques, du coût et des délais suppose qu'il existe dans l'entreprise un acteur, voire plusieurs, qui jouent le rôle de porte-parole de ces clients inconnus². Ce travail de représentation du client est difficile parce que l'importance du marché potentiel varie en fonction des spécifications techniques retenues, du prix de vente final et de la date de lancement sur le marché d'un produit qui s'intégrera dans une offre où d'autres industriels interviennent. Les arbitrages entre spécifications, coûts et délais sont alors plus délicats, parce qu'ils se fondent sur des opinions pas toujours faciles à étayer et parce qu'au fur et à mesure de l'avancement du projet, le contexte concurrentiel peut se transformer au point de remettre en cause les arbitrages initiaux. Dans cette catégorie de projets, on distingue :

- le **pilotage en dérive** lorsque l'on sait, dès le départ, que le projet a de très bonnes chances d'aboutir (par exemple, mise au point du véhicule de remplacement d'une gamme dans l'industrie automobile), la question étant de savoir où et quand,
- le **pilotage en stop or go** que l'on rencontre lorsque le projet peut être abandonné en cours d'exécution (par exemple, mise au point d'une molécule nouvelle dans l'industrie pharmaceutique).

Cette distinction, qui implique des approches différentes des problèmes de gestion, n'est pas aussi tranchée qu'elle le semble. Tout d'abord, commencent à se diffuser des accords contractuels cherchant à intégrer les logiques à coûts contrôlés et à rentabilité contrôlée. Ensuite, de très nombreux avant-projets s'inscrivent dans une approche «à rentabilité contrôlée», avant de passer, une fois l'ensemble des contraintes définies, à une approche «à coûts contrôlés». Par ailleurs, on observe des pratiques de négociation d'un budget initial «plus large», en contrepartie d'un partage des gains de productivité entre les deux parties.

On peut noter enfin que les deux typologies retenues ne sont pas indépendantes. D'une manière générale, les projets de type B sont à coûts contrôlés et ceux de type A sont à rentabilité contrôlée. Les projets de start-up (type D) relèvent plutôt de la rentabilité contrôlée et, pour ceux de type C, on peut trouver tous les cas de figure.

I-3 L'organisation des projets

L'organisation des projets est une affaire de structure (§ I-3.1) et de procédures (§ I-3.2, page 270).

2. *Note de la page précédente.* Pour une analyse détaillée de la gestion des risques dans les projets, voir Courtot (1998, [111]). Le fascicule documentaire de l'AFNOR, FD X 50-117 (sortie prévue en 2003) est consacré à la **gestion des risques d'un projet** (définie comme le processus de traitement, de suivi et de contrôle, et de mémorisation des risques identifiés et des actions entreprises pour les traiter) et le **management des risques d'un projet** (défini comme le processus d'application de la politique de l'organisme permettant la mise en œuvre itérative et continue de l'analyse et de la gestion des risques d'un projet).

1. Les raisons de l'introduction de la gestion de projet pour améliorer la maîtrise du développement de produits nouveaux dans les entreprises de production de masse ont été développées au **chapitre II, § II-1.4, page 117**.

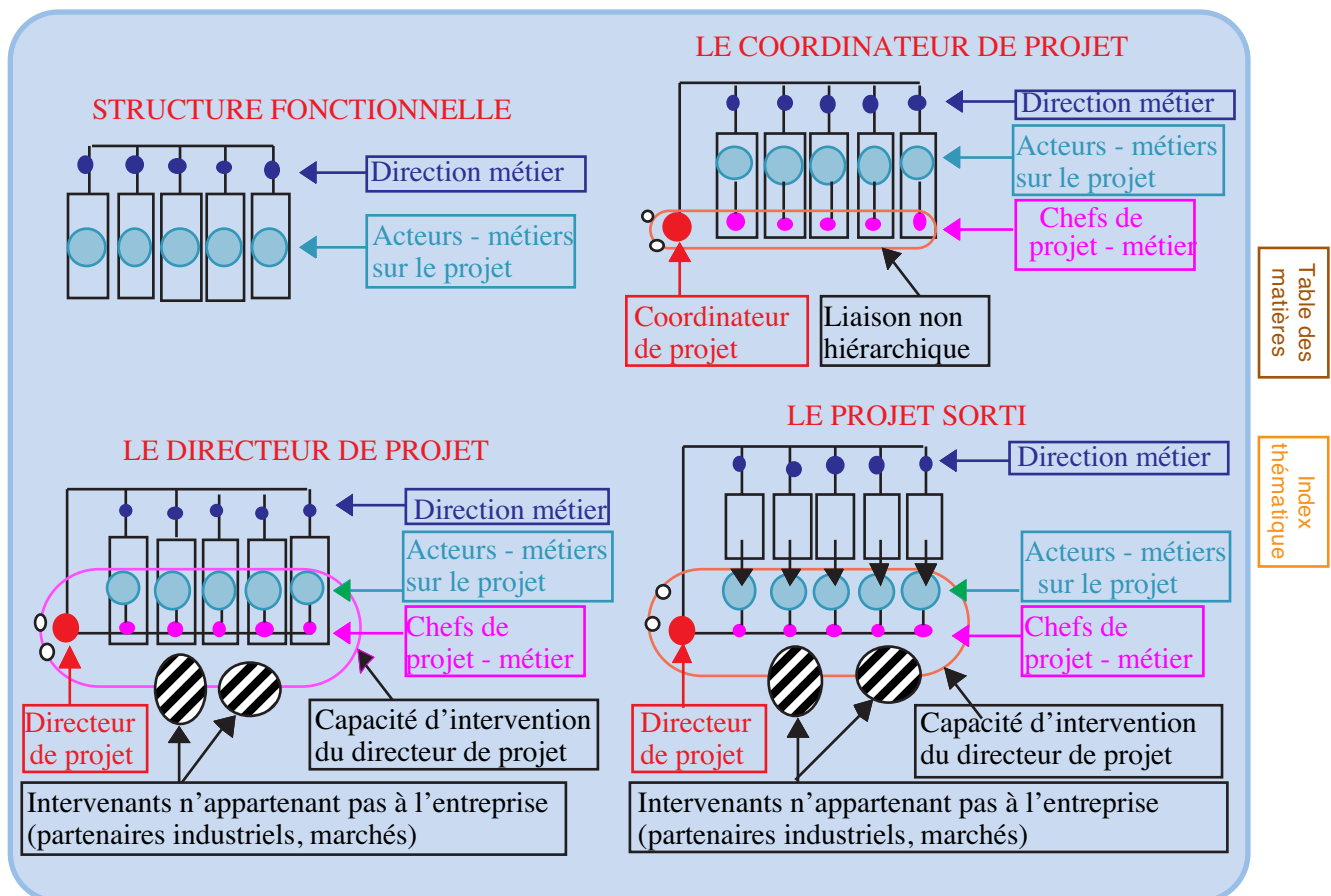
2. Ce concept de client est quelque peu ambigu car il peut s'agir de l'utilisateur final du bien (conducteur d'une automobile ou utilisateur d'un médicament) ou du prescripteur (le réseau de vente de véhicules automobile ou le médecins), quant ce n'est pas les deux à la fois.

I-3.1 Les différentes structurations possibles des projets

L'introduction du projet dans les organisations modifie les mécanismes de commandement et de coordination. L'organisation matricielle est classiquement associée à l'introduction des projets. Ceci mérite d'être précisé car plusieurs formes sont possibles. Clark, Hayes et Wheelwright (1992, [226]) ont proposé une typologie de quatre configurations différentes de la place du projet par rapport aux services fonctionnels, passant par une explicitation des rôles des acteurs (voir la figure 66). La terminologie utilisée ici pour repérer ces différents rôles est générique ; on trouve en pratique une assez grande variété d'appellations entre les entreprises pour repérer un même rôle, ce qui implique qu'une même appellation peut correspondre à deux rôles différents dans deux entreprises différentes et ne facilite pas la communication sur ce thème. Par exemple, le terme de « chef de projet » renvoie en pratique à une grande variété de situations.

FIGURE 66

Les différentes structures organisationnelles du projet



- Dans le projet en structure fonctionnelle, aucun individu n'a la responsabilité du processus global ; ce sont les responsables hiérarchiques métiers qui assurent l'allocation et la coordination des différentes ressources mobilisées dans le projet, notamment celle des acteurs - métiers travaillant pour le projet.
- Le « coordinateur de projet » (*lightweight project manager*) est un acteur responsable de la coordination des activités qui n'a pas d'accès direct aux acteurs métiers intervenant sur le projet. Il consolide les informations fournies par les hiérarchies métiers ou, parfois, par les correspondants chargés d'assurer la coordination des acteurs impliqués sur un même projet au sein

de chaque métier (notion de « chef de projet - métier »). Son rôle est d'animer des instances de coordination collective, la décision restant clairement de la responsabilité des hiérarchies métiers. Cette fonction relève donc plus de la gestion de projet que de la direction de projet au sens où ces termes ont été définis à [page 259](#).

- Le « directeur de projet » (*heavyweight project manager*) a un statut comparable à celui des directeurs de métier: la délégation qu'il a de la direction générale est large, il dispose d'une équipe de chefs de projet - métier et jouit d'une grande autonomie d'animation et d'organisation. Cette fonction relève donc explicitement de la direction au sens où ce terme a été défini à la [page 259](#).
- Dans le « projet sorti » (*tiger team organization*), les acteurs qui travaillent sur le projet sont physiquement et institutionnellement sortis des structures métiers pour être rassemblés sous l'autorité du directeur de projet pendant la durée de leur intervention. Ils reviennent ensuite, soit dans leur métier d'origine, soit sur un autre projet.

Il n'y a pas un modèle unique préférable aux autres dans tous les cas. Plusieurs de ces structures sont appelées à coexister dans une entreprise: le choix d'une structure pour un nouveau projet doit résulter d'une comparaison entre les coûts de fonctionnement induits et les avantages retirés, ce qui implique la prise en compte de la contingence de la forme organisationnelle à la nature du projet et du contexte, en particulier de sa taille, des risques encourus et de son degré de singularité par rapport à l'expérience de l'entreprise. Il faut ajouter qu'il peut être judicieux, pour les projets d'une certaine ampleur, de ne pas conserver la même structure au cours des principales phases du projet.

Table des
matières

Historiquement, on constate qu'à la fin des années quatre-vingt, dans les projets à rentabilité contrôlée des industries de production de masse, on est passé d'une structure fonctionnelle à une coordination de projet à une direction de projet forte. Dans d'autres cas, l'évolution est faible d'un point de vue organisationnel, mais pas d'un point de vue instrumental. Ainsi dans les grands projets d'ingénierie, le plus souvent de type B, le modèle du projet sorti prédomine tandis que celui de la direction de projets s'avère pertinent pour des projets de moindre importance. On peut noter enfin que le projet de type D ne fait appel à aucun de ces archétypes: l'entreprise et le projet ne font qu'un et le directeur du projet est normalement le directeur de la start-up.

Index
thématique

Cette grille d'analyse permet également de mettre en évidence la diversité des acteurs travaillant sur un projet et la variété de leurs rôles.

- Les **acteurs-métiers** sont rattachés à des services fonctionnels et mobilisés temporairement sur un projet (sauf pour les projets sortis) et la réussite de leur mission ne s'évalue que sur la partie du projet sur laquelle ils interviennent.
- Les **acteurs-projets** (chefs de projet - métier, d'une part, et coordinateurs ou directeurs de projet, de l'autre) sont rattachés durablement au projet, incarnent l'identité du projet et sont responsables de la performance globale, résultat du compromis de toutes les interventions des métiers.

La définition de l'équipe-projet se conçoit souvent sur une base plus ou moins large selon l'importance que l'on veut donner au projet, ce qui ne facilite pas la comparaison des projets.

Ajoutons enfin que l'introduction de projets n'est pas sans incidence sur la gestion des ressources humaines, en particulier en cas de choix des structures de coordination ou de direction. Un certain temps est nécessaire pour que la mutation culturelle qu'impliquent les projets soit intégrée par tous les acteurs de l'entreprise et, en particulier, par l'encadrement que cette organisation éphémère «désécurise». La gestion des principaux «responsables» des projets pose de nombreux problèmes spécifiques¹ :

- en recrutement, puisqu'il s'agit pour des individus à fort potentiel de s'éloigner de structures où leur avenir semble assuré,
- en formation, puisqu'il s'agit d'exercer un métier nouveau auquel ces personnes n'ont pas été préparées,
- en évaluation des performances, en particulier en cas de conflits appuyés entre les structures fonctionnelles et les projets,
- en réaffectation en fin de projet, le choix du «risque» ne devant pas être pénalisé.

I-3.2 La mise en place de procédures spécifiques

La gestion de projet est un processus qui a obligé à innover en matière procédurale pour faire travailler ensemble des acteurs appartenant à des services de culture et de préoccupation assez disparates. La plus importante de ces innovations concerne l'ingénierie concourante, mais d'autres approches doivent être évoquées. On examinera successivement les orientations qui ont fait surface dans les projets à rentabilité contrôlés (§ I-3.2.1) et dans ceux à coûts contrôlés (§ I-3.2.2, page 273).

I-3.2.1 Nouvelles procédures mises en place dans les projets à rentabilité contrôlée

Dans le modèle traditionnel, les projets apparaissent comme une séquence d'étapes successives confiées à des experts différents (métaphore de la «course de relais»). Dans ce contexte, la solution trouvée à l'issue d'une phase du projet devenait une contrainte pour les acteurs de la phase suivante (par exemple, le dessin d'un produit par le bureau d'études devient une contrainte pour la définition des gammes opératoires pour le bureau des méthodes). Les démarches modernes, dénommées **ingénierie simultanée** ou, mieux, **ingénierie concourante**², introduisent deux ruptures importantes par rapport à ce modèle.

- Elles organisent la mobilisation de toutes les expertises pour améliorer la prise de décision des différentes étapes dans une perspective plus large (métaphore de la «ligne de rugby»). Pour reprendre notre exemple, si deux pièces doivent être rendues solidaires et que, pour ce faire, il revient stricte-

1. Pour une analyse plus détaillée, voir Garrel, Giard et Midler ([165], 2001).

2. Pour plus de détails, voir l'ouvrage d'ECOSIP, sous la direction de Giard et Midler (1990, [135]) et AFITEP - ANACT (1997, [2]). L'intérêt de l'ingénierie concourante dans le développement de produits nouveaux a déjà été souligné au chapitre II, § II-1.4, page 117.

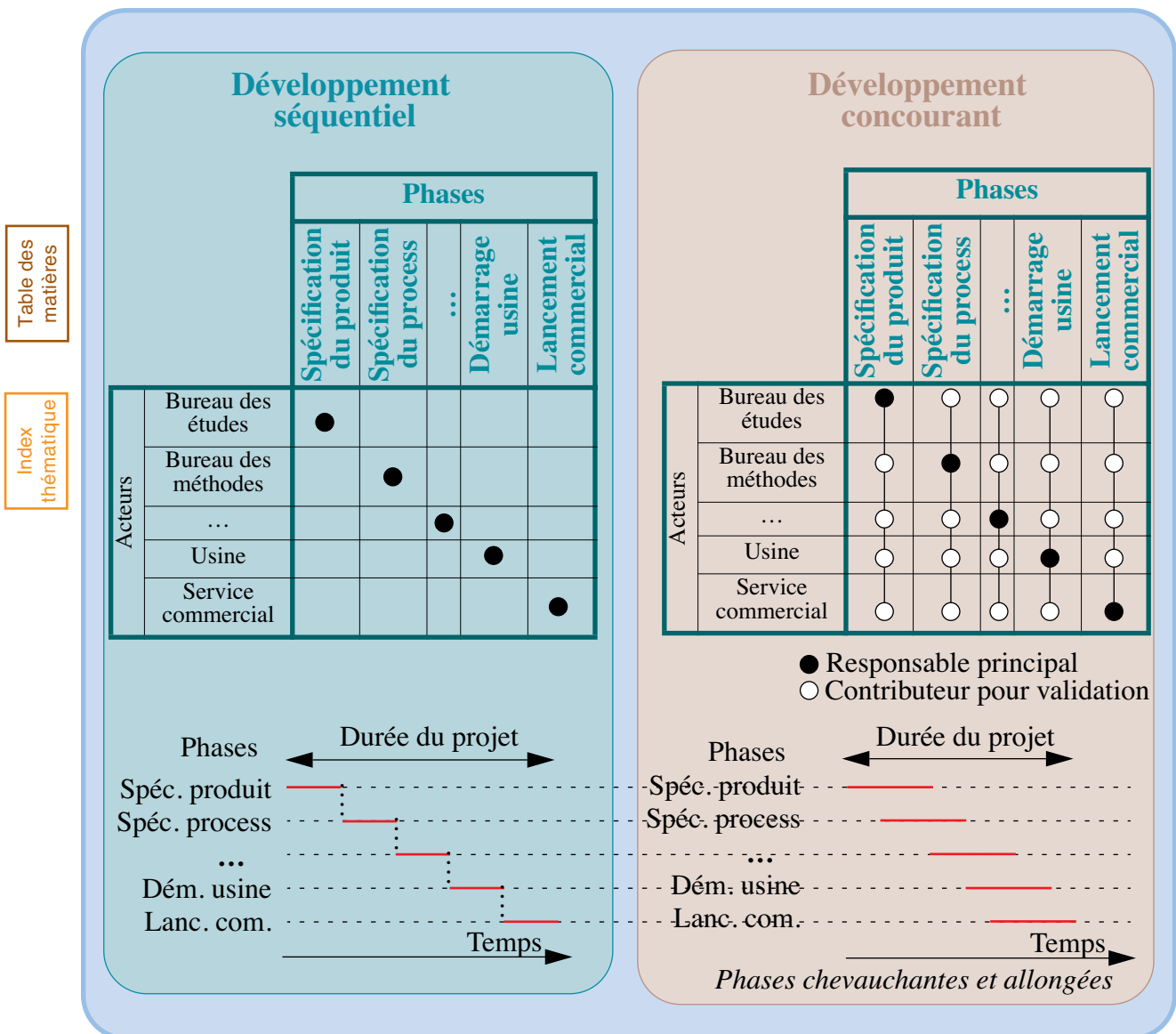
ment au même d'utiliser des rivets ou une soudure, l'avis du bureau des méthodes permettra de choisir l'alternative la moins pénalisante pour eux.

- Elles organisent le chevauchement (voir définition en page 283) entre les différentes phases du projet: spécification du produit, spécification du processus de fabrication, choix des fournisseurs, choix industriels... ceci afin, d'une part, de mieux traiter les interdépendances entre ces variables et, d'autre part, de réduire le délai global du développement.

L'application de ces principes permet d'anticiper les problèmes avant que l'irréversibilité du projet ne les rende trop pénalisants. Elle se traduit par des allongements de phases, mais leurs chevauchements permettent de raccourcir le délai du projet (voir figure 67).

FIGURE 67

Comparaison des approches séquentielles et concourantes du développement d'un produit



Cette mobilisation des expertises est facilitée par la mise en place de **plateaux** qui réunissent physiquement dans un même lieu, au moment de la conception d'un

produit manufacturé complexe (ou d'un sous-ensemble techniquement cohérent de ce produit), les responsables de la conception du produit et du processus, ceux de la fabrication et parfois, ceux de la vente et de l'après-vente de ce produit¹. Les commodités de communication directe et l'usage de maquettes de l'objet en cours d'élaboration facilitent une explicitation des savoirs tacites et l'intégration de points de vue, une meilleure négociation des contraintes et la recherche de solution globalement plus efficaces, à condition toutefois que ces acteurs jouissent d'une certaine délégation décisionnelle de la part de leurs services d'origine et qu'une dynamique de groupe se crée autour du projet. La recherche systématique de la concourance pour réduire les coûts et délais de conception peut conduire à repenser radicalement l'agencement de l'espace; le «Technocentre» de Renault, inauguré fin 1997 et accueillant 7500 personnes, majoritairement des ingénieurs, constitue un exemple remarquable de ce type de mutation².

Les méthodologies de l'ingénierie concourante mettent donc l'accent sur l'intégration organisationnelle et physique des différents acteurs d'un projet, mais aussi des informations échangées. La gestion documentaire, au sens large, et la maîtrise des outils de communication deviennent un enjeu majeur qu'accentue la tendance à la spécialisation et donc à la multiplication des partenaires. Des efforts importants doivent également être consentis tout au cours du projet pour structurer, archiver les informations et en faciliter l'accès. L'hétérogénéité des structures de représentations des objets, des nomenclatures et des gammes, constatée d'une entreprise à une autre, mais aussi souvent d'un service à un autre, constitue un frein aux échanges et génère des dysfonctionnements et coûts importants. Les nouveaux outils télématiques (outils de *groupware*, Internet, etc.), facilitant la désynchronisation temporelle et spatiale des échanges, permettent de nouvelles formes de coopération dans certains projets³.

L'une des tendances actuelles de l'organisation des projets est d'élaborer un double processus de coordination: une coordination procédurale et une coordination par des contrats sur objectifs de résultat. La mise en œuvre de cette tendance se traduit par une évolution duale. À l'intérieur de l'entreprise, on formalise des contrats internes avec les contributeurs métiers de l'entreprise. Entre les entreprises, on favorise une intégration organisationnelle des contributeurs en les obligeant à participer aux plateaux, aux groupes de suivi des projets, etc. Le monde de l'ingénierie des grands travaux avait exacerbé la régulation contractuelle entre les acteurs, en supposant implicitement que le sens des responsabilités et le poids des pénalités pouvaient garantir chacun contre l'incertitude de l'engagement des autres; force est aujourd'hui de constater que cet outil de coordination se révèle plus efficace pour augmenter le chiffre d'affaires des spécialistes en contentieux que pour diminuer les dérives des projets. On s'achemine donc vers la mise au point de compromis entre deux formes de coordination qui se complètent plus qu'elles ne s'opposent. Ce compromis est forcément conditionné par le positionnement du projet au regard des diverses grilles d'analyse qui ont été présentées. Dans ce domaine, comme dans bien d'autres, bien gérer reste un art.

1. Sur l'organisation en plateau, voir Midler (1993, [301]), ECOSIP (1990, [135]), Garrel (1996, [164]), AFITEP-ANACT (1997, [2]) et Garrel, Giard et Midler ([165], 2001).

2. Bonnafous (1998, [60]).

3. Voir Courbon & Tajan (1999, [109]) et Favier, Coat, Trahand & Courbon (1998, [146]).

I-3.2.2 Nouvelles procédures mises en place dans les projets à coûts contrôlés

Les procédures formelles de contrôle ont conduit, avec le développement de l'informatique, à une culture du *reporting* (s'appuyant sur des techniques présentées dans ce chapitre) aboutissant, dans de nombreux cas, à une focalisation excessive sur la production de chiffres au détriment de leur analyse. Ce manque de pertinence n'est qu'en partie imputable à une granularité trop fine des informations traitées, c'est la technique de contrôle qui peut s'avérer inefficace en cas de projet complexe soumis à de fortes contraintes. D'une manière plus générale, on sait que les choix organisationnels et méthodologiques influent sur les comportements des acteurs. La cause première des échecs et dérives majeures de projet est donc plus à rechercher dans la pertinence de ces choix que dans l'incompétence des acteurs.

C'est sur la base de ce constat que c'est développée en management de projet, à partir des années quatre-vingt, l'approche d'une auto-organisation fondée sur des méta-règles, substituant au contrôle détaillé du réalisé, un contrôle a priori sur les procédures¹ d'organisation et de pilotage du projet. Les **méta-règles** sont un ensemble de principes très généraux non contradictoires d'où l'on va pouvoir tirer, pour faire face à un problème donné (ici un nouveau projet), un ensemble cohérent de règles spécifiques². Les méta-règles ont été élaborées chez Spie Batignolles pour formaliser, à partir de l'expérience acquise, les principes d'action communs aux grands projets de l'entreprise (Jolivet & Navarre, 1993, [248] et Jolivet, 1998 & 2001, [249]). À partir de l'analyse de cent projets, dix-sept méta-règles ont été rédigées et consignées dans un petit «livre vert»; aux antipodes du manuel de procédure, la méta-règle sert à baliser l'autonomie de l'acteur-projet, à le responsabiliser sur le résultat (responsabilité du chef de projet, découpage du projet, explicitation des objectifs, revue de projet, dialogue de préférence au contrôle, présence d'un chef de projet chez les grands fournisseurs, etc.).

- Le chef de projet s'organise à partir des méta-règles; il définit l'organisation et les méthodes de gestion.
- La tutelle est intégrée et prend les décisions stratégiques: ces décisions peuvent être pré-identifiées.
- Le processus de développement est adapté au projet: il est arrêté par la tutelle après consultation du chef de projet.
- Le développement se fait par «focalisations successives»: l'analyse globale est de plus en plus nette.
- Les objectifs sont arrêtés après un développement suffisant du projet.

1. Cette évolution est à rattacher à celle observée en maîtrise de la qualité où le contrôle s'est progressivement déplacé du contrôle de qualité sur les produits au contrôle de qualité sur les processus.

2. Jolivet (1988, [249]) définit les méta-règles comme des «règles à produire les règles du projet». En fait, comme en ordonnancement, l'ensemble des règles imaginables est fini et il s'agit plutôt de règles pour sélectionner des règles. Contrairement à ce que pensent certains spécialistes de management de projet, cette approche n'est pas nouvelle en gestion (les premiers théoriciens des organisations ont déjà édicté des méta-règles). Par exemple, elle a souvent été utilisée, à partir des années soixante, pour résoudre des problèmes complexes d'ordonnancement (y compris de projet) pour gérer dynamiquement la sélection d'ensembles performants d'heuristiques en fonction de caractéristiques contextuelles évolutives (voir [chapitre V](#)) et, depuis les années quatre-vingt, elle est d'un usage fréquent dans les approches simulateurs utilisées en aide à la décision pour le pilotage et la conception de processus complexes. Cela étant, son application à la mise en place d'organisations temporaires est un peu plus novatrice.

- Le chef de projet est responsable devant la tutelle ; il reçoit une délégation de type « tout sauf ».
- Le chef de projet se consacre uniquement au projet ; si les projets sont petits, il dirige un portefeuille de projets.
- L'organisation est spécifique au projet, elle est évolutive et intégrée chaque fois que nécessaire.
- Le chef de projet a la maîtrise des ressources humaines : il a le choix des participants au projet (avec, au minimum, le droit de récuser).
- Le chef de projet définit les prestations des services internes : détachement de personnel, équipes dédiées, expertise, etc.
- Le chef de projet choisit et gère les fournisseurs, il décide également du découpage contractuel.
- Les responsabilités sont découpées par sous-ensembles.
- La qualité, les coûts et les délais sont gérés de façon intégrée.
- Le chef de projet assure une gestion « pro active » : projection à terminaison, adaptation des processus.
- ...

Jolivet souligne que ces méta-règles, qui semblent relever du bon sens, sont, en réalité, subversives parce qu'elles remettent en cause un certain nombre de principes d'organisation bien établis.

SECTION II LES PROBLÈMES D'ORDONNANCEMENT DE PROJET

L'ordonnancement du projet est une programmation de ses tâches et des ressources nécessaires à leur exécution, qui respecte les différentes contraintes techniques du projet et les disponibilités des ressources utilisées ; il vise à permettre au projet d'atteindre ses objectifs de délai, de coûts et de performances techniques. Les gestionnaires de projet parlent encore de **planification opérationnelle**.

Les techniques modernes d'ordonnancement de projet remontent à la fin des années cinquante¹. Leur succès réside dans un raccourcissement spectaculaire du délai de réalisation des projets d'une certaine ampleur et dans une meilleure maîtrise des coûts et ressources mis en œuvre. C'est pour cette raison, du reste, que l'administration fédérale des États-Unis exige que les réponses à certains appels d'offre s'accompagnent d'un ordonnancement utilisant ces techniques.

Celles-ci sont connues des spécialistes par différents acronymes dont les plus connus sont **PERT** (pour *Program Evaluation and Review Technique*, mis au point à l'occasion du projet Polaris, par une équipe comportant des spécialistes du *Navy Special Projects Office*, de la *Missiles Systems Division* de *Lockheed Aircraft Company* et du cabinet de consultants *Booz, Allen & Hamilton*), **CPM** (pour *Critical Path Method*, mis au point indépendamment par la *DuPont Company* et la *Remington Rand Univac Division*), ou encore sous le nom de **méthode des potentiels** (mise au point par Bernard Roy, à l'occasion de la construction du

1. L'ouvrage de Hax & Candea (1984, [224], p. 325-327) donne l'ensemble des références bibliographiques de l'approche américaine du problème, à cette époque.

paquebot FRANCE). Leurs fondements théoriques sont les mêmes et les programmes informatiques disponibles sur le marché offrent à peu près les mêmes services en utilisant l'une ou l'autre des techniques de base: méthode **Potentiel-Étapes** ou méthode **Potentiel-Tâches**, que nous présenterons.

II-1 Exemple introductif

ORDOMÉCA, entreprise spécialisée dans la construction mécanique, désire s'agrandir pour élargir sa gamme de produits. La construction d'un nouveau bâtiment s'impose, de même que l'acquisition de nouvelles machines. Fort heureusement le terrain sur lequel elle est installée est assez vaste pour permettre, moyennant quelques aménagements mineurs (réorganisation du stockage notamment), la construction de cette nouvelle unité. Pour simplifier, nous laisserons de côté le problème de la libération du sol et celui de l'embauche et de la formation de nouveaux ouvriers. L'étude de ce projet, menée conjointement avec le maître d'œuvre contacté pour la réalisation du bâtiment, nécessite la décomposition du projet en un certain nombre d'opérations élémentaires, que nous désignerons indifféremment sous le nom de **tâche** ou d'**activité**.

Ces tâches se caractérisent par un début et une fin clairement identifiables, d'un point de vue physique, par une durée et par les ressources qu'elles consomment. Cette définition connaît cependant deux exceptions (qui ne sont pas illustrées par l'exemple introductif):

- le **jalon**, qui est habituellement une tâche de vérification ou de décision, est le plus souvent considéré comme étant de durée nulle et ne consommant pas de ressources;
- certaines tâches ne consomment pas de ressources et sont parfois identifiées¹ pour marquer l'intervalle de temps minimal séparant deux tâches (délai séparant la passation d'une commande de sa livraison; temps de séchage séparant la fin du travail d'un plâtrier, du début de celui d'un peintre sur les mêmes murs...); ces tâches, parfois qualifiées de **tâches d'attente**, sont utilisées pour faciliter la gestion des ressources et pour éviter un allongement possible de la durée du projet qui pourrait être consécutif à la fusion des deux tâches encadrantes, lorsque la tâche aval a plusieurs ancêtres; on parvient au même résultat avec certains logiciels, en utilisant une liaison directe fin - début utilisant un décalage positif.

Ces tâches sont parfois repérées par un code (ici une lettre parce qu'il y en a moins de 27); l'usage de ces codes s'avère cependant peu commode et, de ce fait, est déconseillé dans les documents utilisés à des fins de communication et d'animation. Nous les utiliserons cependant pour des raisons de gains de place et parce que l'interprétation de l'exemple a finalement peu d'importance ici.

La liste des tâches et de leurs codes est donnée dans le **tableau 54 de la page 276**. Celui-ci comporte également la durée d'exécution d_i de cette tâche i et, le cas échéant, la liste des tâches qualifiées d'**ancêtres** (ou d'**antécédents** ou de **prédécesseurs**) de chaque tâche considérée. La tâche i (par exemple, la tâche «charpente verticale») est ancêtre de la tâche j (par exemple, la tâche «charpente de la toiture») si la non-réalisation de i empêche l'exécution de j **et si** aucune autre

1. Un autre moyen pour parvenir au même résultat sera présenté avec le problème type 8 du **tableau 57, page 310**.

TABLEAU 54
Liste des tâches du projet et de leurs caractéristiques

Tâche i	Désignation de la tâche i	Durée d_i	Ancêtres
A	Terrassement	5	-
B	Fondations	4	A
C	Charpente verticale	2	B
D	Charpente de la toiture	2	C
E	Couverture	3	D, F
F	Maçonnerie	5	C
G	Gros œuvre de plomberie et d'électricité	3	B
H	Coulage de la dalle de béton	3	G
I	Chauffage	4	H, F
J	Plâtre	10	I, E
K	Finitions et installation des machines	5	J, M
L	Négociation de l'achat des machines + délai de livraison	15	-
M	Réception des machines et essais «hors site»	3	L

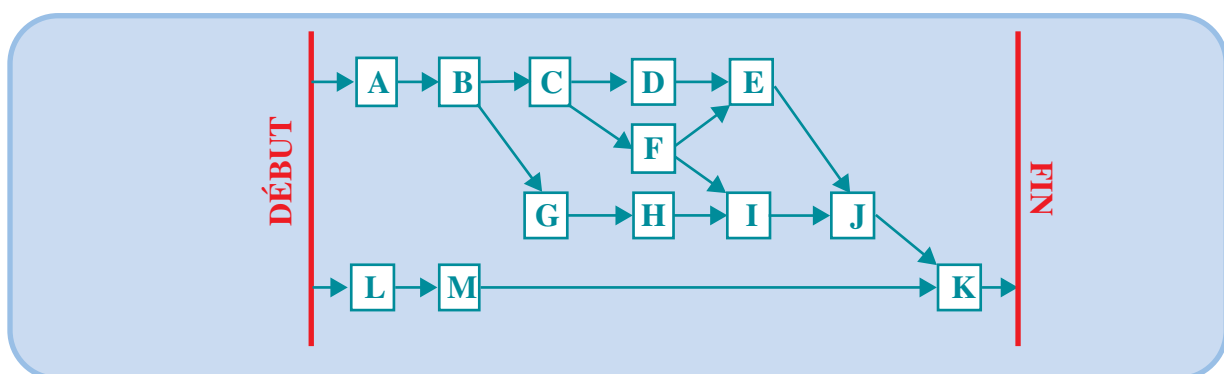
tâche k n'est à la fois ancêtre de i et descendant (ou successeur) de j , ce qui revient à dire que le «lien de parenté» est direct (la tâche de terrassement conditionne l'exécution de la tâche «charpente de la toiture». Elle ne sera pas qualifiée d'ancêtre de cette tâche car elle conditionne aussi l'exécution de la tâche «charpente verticale» qui, elle aussi, conditionne l'exécution de la tâche «charpente de la toiture»). Indiquons, dès à présent, que l'on va privilégier ici une représentation graphique du problème dans laquelle les tâches sont représentées par des rectangles et les relations d'antériorité, par des flèches; celle du problème posé est fournie à la figure 68.

Table des matières

Index thématique

FIGURE 68

Représentation graphique des tâches du projet et de leurs relations
(exemple du tableau 54 de la page 276)



Dans cet exemple introductif, le problème posé a été volontairement simplifié par la seule prise en considération des relations d'antériorité entre tâches. Dans la réalité, les durées associées à ces tâches peuvent ne pas être connues avec certitude et les tâches peuvent entrer en concurrence pour leur consommation de ressources en hommes, en équipements et en matières. La typologie qui suit (§ II-3, page

284) va réintégrer ces éléments dans une présentation générale du problème d'ordonnancement d'un projet.

II-2 L'analyse des projets

L'analyse d'un projet comporte bien des aspects (techniques, organisationnels, financiers...). On se focalisera ici sur l'instrument d'analyse privilégié en gestion, celui de l'organigramme technique (§ II-2.1). On évoquera ensuite le problème de l'estimation des durées de ces tâches (§ II-2.2, page 279) et la nature des relations d'antériorité sera discutée (§ II-2.3, page 282).

II-2.1 L'organigramme des tâches

Le **tableau 54** est le fruit d'un processus de collecte d'informations (comptes rendus de réunion, notes écrites en réponse à une demande...), de négociations et de vérifications; qui peut être d'une grande complexité. Pour faciliter la structuration et le recueil de l'information, on utilise, en gestion de projet, l'**organigramme des tâches**¹ (ou **OT**) qui décompose de manière hiérarchique un projet pour lister, avec un niveau de détail de plus en plus grand, les tâches de production de biens et de services qui doivent être réalisées pour mener à bien le projet, de manière à s'assurer la cohérence de l'ensemble et à permettre une définition non ambiguë des responsabilités d'exécution des tâches.

Le principe de l'organigramme des tâches est simple: à un niveau de détail k , on dispose d'une liste de n_k tâches. Pour passer au niveau de détail $k+1$, on examine chacune des n_k tâches; la tâche considérée est éventuellement décomposée en plusieurs tâches détaillées exclusives dont la réunion reconstitue la tâche initiale. Cette partition de chacune des n_k tâches conduit à un accroissement du nombre de tâches qui passe de n_k (au niveau de détail k) à n_{k+1} tâches (au niveau de détail $k+1$, avec $n_{k+1} > n_k$). On notera que ce document ne comporte explicitement aucune information sur les relations d'antériorité entre tâches. Cette démarche descendante s'appuie sur des considérations qui visent à répondre à des questions du type «quoi?» ou «comment?»; ces considérations sont:

- de type ensembliste, appliquées à l'objet physique ou immatériel auquel le projet est dédié², la tâche correspondant alors à la production d'un objet ou d'une prestation plus ou moins complexe; même si le projet porte sur la réalisation d'un objet physique, un certain nombre de prestations doivent être prises en compte dans l'OT (et qui ne sont pas décrites dans une nomencla-

1. Ce terme est préconisé par l'AFNOR (1998, [4]) comme traduction du terme anglo-saxon *Work Breakdown Structure* (ou WBS), mais on rencontre également le terme d'arborescence technique ou celui d'organigramme technique (l'abandon de ce terme est toutefois préconisé par l'AFITEP et l'AFNOR). Historiquement, ce concept a été officialisé avec quelques autres, dont celui de la valeur acquise (étudiée au § IV-2.2.1, page 349), en 1967 par l'instruction DODI 7000.2 du Département de la Défense du Gouvernement Fédéral des États-Unis, [131] avant d'être adopté par d'autres départements et agences comme le *Department of Energy* (DOE), le *Department of Transportation* (DOT), la NASA, le *National Security Agency*. L'instruction conjointe DOD JIG du 1er octobre 1987 [132] généralise l'usage de techniques d'analyse et de contrôle pour les trois armées et les deux agences de défense aux États-Unis. En France, la recommandation RG.Aéro 00040 (1999, [362]) qui définit des propositions relatives à la «Spécification de management de programme» consacre son §2.3 à l'organigramme des tâches.

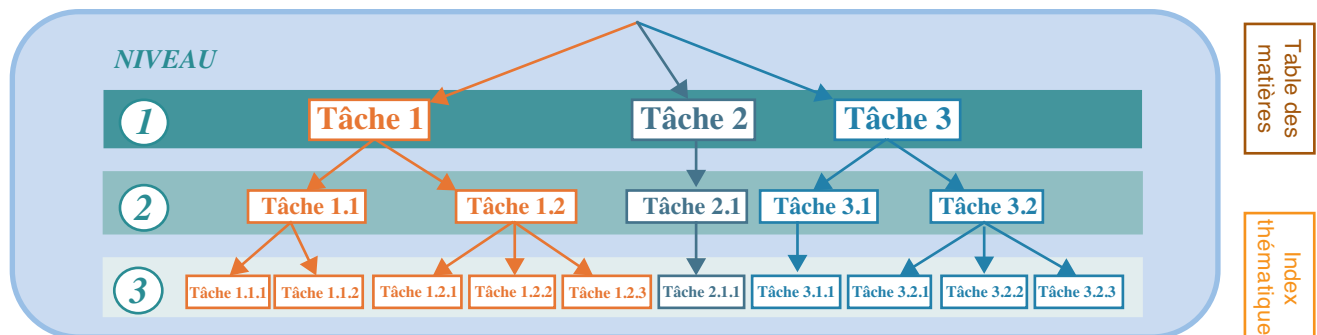
2. Cette décomposition d'un ensemble en sous-ensembles correspond à la structuration classique des nomenclatures décrite au chapitre VI, § II-2, page 463 et la figure 137, page 459.

- ture de produit): création de la documentation technique¹ permettant la maintenance, sécurité des chantiers, tâches de gestion du projet... ;
- de type fonctionnel (tâche relevant de la fonction mécanique, de la fonction électrique...);
 - de type organisationnel (centres de responsabilité internes ou de sous-traitance, centres de coûts, centres de production...); dans les grands projets d'ingénierie, chaque lot (cf. § I-2.1.1, page 262) doit correspondre à une tâche de l'organigramme des tâches (pas forcément au niveau le plus fin).

La décomposition de l'organigramme des tâches doit permettre de croiser les différents points de vue que l'on a décidé de retenir, le document final devant servir de référence commune et unique pour tous les acteurs du projet et permettre l'organisation de leur travail.

Cette démarche de décomposition successive est qualifiée de **démarche descendante** (*top-down*). Le résultat du processus de désagrégation successive peut être visualisé par un arbre dont les arcs représentent des relations d'inclusion et non des relations d'antériorité. La figure 69, illustre la confection d'un tel arbre, par un exemple simpliste à trois niveaux seulement et dans laquelle une nomenclature des tâches de «type décimal» a été retenue.

FIGURE 69
Organigramme des tâches



Les tâches du dernier niveau ne doivent être :

- ni trop nombreuses, l'excès de détail étant un facteur d'échec et non de succès, ce qui conduit les projets d'une certaine ampleur à être structurés en sous-projets dotés d'une certaine autonomie,
- ni d'importance trop inégale (en termes de consommation de ressources et en termes de durée²),
- chacune d'elles suffisamment homogène (unicité de responsabilité et relative autonomie décisionnelle, relative stabilité de l'utilisation des ressources sur la durée de la tâche...), ce qui permet de traiter chaque tâche comme un centre de coûts différent (qui peut appartenir à un autre centre de coûts et être lui-même décomposé en plusieurs centres de coûts, suivant une logique arbo-

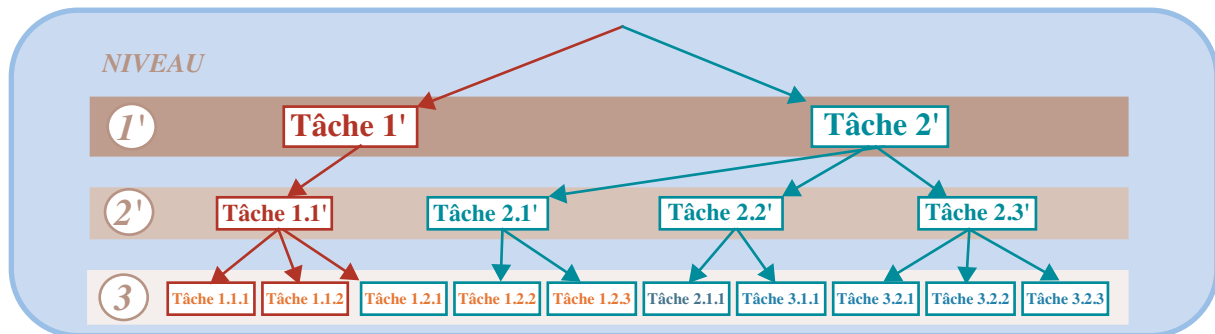
1. L'importance de ce type de tâche est souvent sous-évaluée (il peut représenter jusqu'à 10% du coût de certains projets) et peut être à l'origine de dérives en termes de temps ou de coûts dans l'exécution du projet.

2. De nombreux praticiens préconisent de ne retenir qu'exceptionnellement des tâches d'une durée inférieure à 1% de la durée du projet.

rescente similaire à celle de l'organigramme technique), ce qui est essentiel pour le suivi des coûts directs.

La démarche inverse d'agrégations successives, qualifiée de **démarche ascendante** (ou *bottom-up*), est menée pour obtenir d'autres points de vue sur le projet (vision budgétaire, vision de centres de responsabilité...). À partir de l'OT de la [figure 69](#), on peut créer le graphe de regroupement successif de la [figure 70](#) qui exprime un autre point de vue.

FIGURE 70
Structure hiérarchique alternative



Supposons que celui-ci soit lié à l'organisation de l'entreprise, en se posant la question «qui fait quoi?», on peut, par exemple, établir le croisement visualisé à la [figure 71](#), dans lequel l'organigramme de l'entreprise est décrit à gauche du tableau (décomposition département / service) qui amène quelques remarques.

Table des matières

Index thématique

- le processus d'agrégations successives part du niveau le plus détaillé de l'OT, dans notre exemple, on regroupe d'abord les tâches élémentaires par service, que l'on regroupe ensuite par département¹ ;
- le niveau d'analyse a permis de dire sans ambiguïté l'unité qui a la responsabilité d'exécution de chaque tâche de niveau élémentaire ; si tel n'est pas le cas, des problèmes peuvent surgir lors de l'exécution du projet en raison de responsabilités mal définies ;
- à partir des informations sur les durées des tâches élémentaires et des relations d'antériorité entre ces tâches, on détermine les durées des tâches agrégées ainsi que leurs relations d'antériorité dans le cadre d'une démarche ascendante ;
- cette vision hiérarchique, qui est incontournable dans les projets d'une certaine ampleur, pose cependant quelques problèmes méthodologiques que l'on évoquera au § III-4.3, page 341.

II-2.2 Détermination de la durée d'une tâche

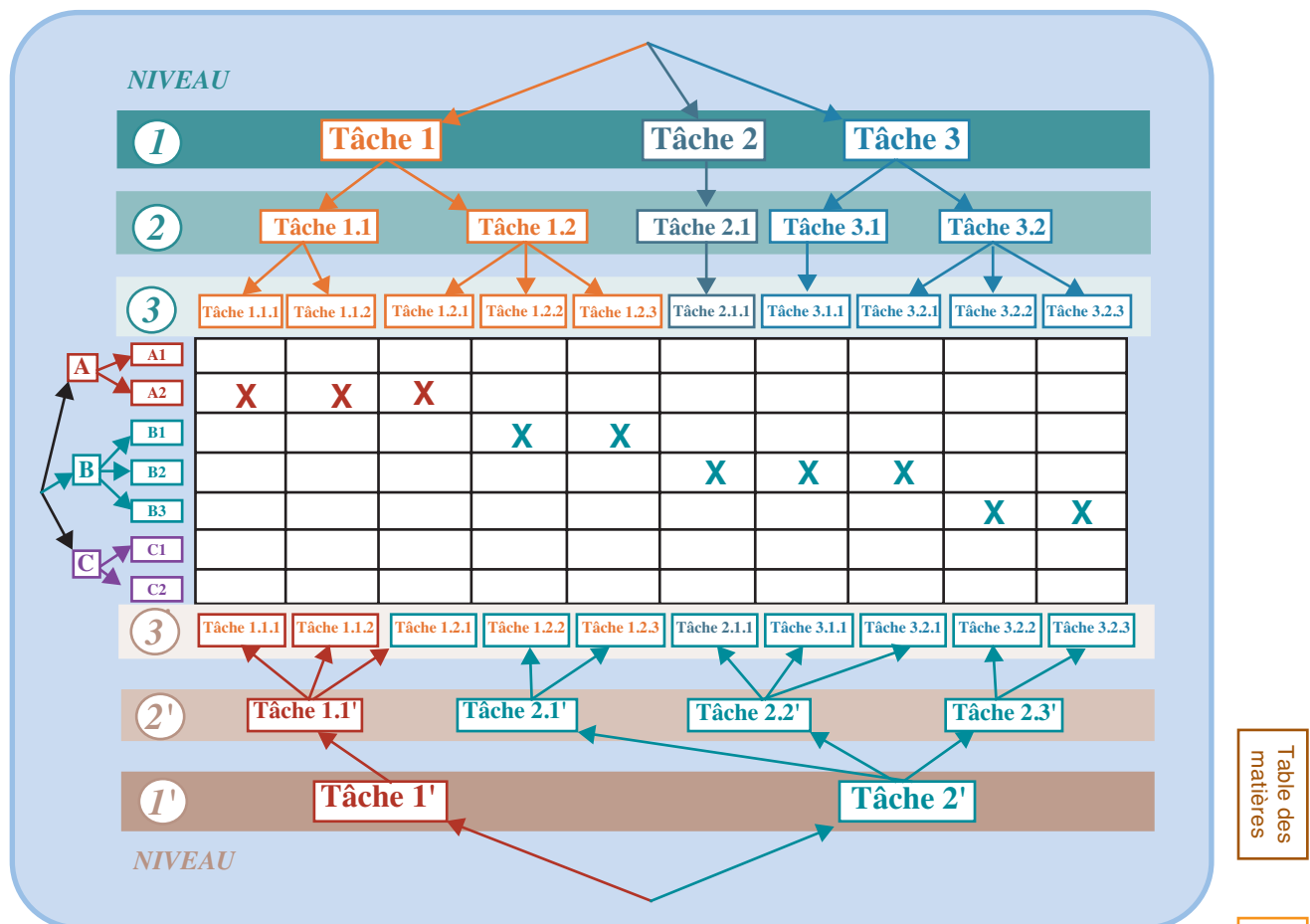
La détermination de la durée d'une tâche se heurte à plusieurs difficultés.

- En toute rigueur, le **concept de durée** d'une tâche n'a **pas d'existence intrinsèque**, la durée d'une tâche résulte d'une conjonction de :
 - *spécifications techniques* (caractéristiques précises de ce qui sera produit par l'activité, c'est-à-dire la réponse à la question «quoi?»), puisque toute

1. Par exemple, les tâches 111, 112 et 121 étant toutes exécutées par le service A2, constituent maintenant la tâche 11' qui diffère de la tâche 11 qui, reposant sur une vision technique, ne reprend que les tâches 111 et 112.

FIGURE 71

Exemple de processus de création d'une nouvelle consolidation hiérarchique des tâches à partir du niveau le plus détaillé de l'organigramme des tâches



modification de ces spécifications modifie le résultat physique final et peut faire varier la nature et l'importance du travail à exécuter, et donc la durée de la tâche,

- et de la double définition du *processus opératoire* utilisé (réponse à la question «comment?») et des *ressources mobilisées* (en quantité et en qualification, c'est-à-dire la réponse à la question «avec quoi?»), puisque la transformation de la gamme opératoire associée implicitement à une tâche peut conduire rigoureusement au même résultat physique final, tout en faisant appel à une combinaison différente de ressources productives, laquelle peut modifier la durée de la tâche.

Beaucoup de durées alternatives se définissent par des intensités différentes de mobilisation des ressources, sans changement du processus opératoire de base, ces variations conduisant immédiatement à des variations de durées de l'exécution de la tâche. Cela revient à dire que nombreuses tâches se caractérisent par une quantité de travail, que l'on appelle encore **énergie** dans la littérature spécialisée d'ordonnancement (voir Esquirol et Lopez, 1999, [140]), et un processus opératoire s'ajustant au niveau de ressources mobilisées et dont l'importance retenue déterminera la durée de la tâche¹.

- Le **niveau de connaissance** que l'on a en début de projet ne permet pas certaines quantifications. C'est ainsi qu'une tâche de création d'une gamme opératoire est conditionnée par une tâche préalable de définition du produit,

Table des matières

Index thématique

non encore exécutée au démarrage du projet. On peut alors procéder par analogie, avec des coefficients de sécurité. De toute façon, la tâche comporte toujours une part d'inconnu qui conduit à se prémunir contre un risque de dépassement du délai par l'utilisation d'un coefficient de sécurité. Il faut bien voir alors que se vérifie le plus souvent la **loi de Parkinson**¹ selon laquelle le temps alloué pour une activité n'est jamais rendu si le travail à exécuter est moins long que prévu. Une alternative est d'utiliser des distributions de probabilités subjectives de ces durées² (mais cette démarche n'est pas encore très répandue) et d'utiliser ces informations dans la programmation finale dans une approche de mutualisation des risques³.

- Une difficulté complémentaire tient au fait que certains acteurs-métiers (définis en [page 269](#)) peuvent travailler sur plusieurs projets et donc être chargés de l'exécution de plusieurs tâches sur une certaine période. Une organisation parfaitement séquentielle permet de travailler sans interruption sur chaque tâche jusqu'à son achèvement, mais, le plus souvent, on assiste à un certain **parallélisme** qui va conduire à fragmenter l'exécution de chaque tâche et à alterner le travail successivement entre ces « fragments » de tâches. Cette façon de procéder présente trois inconvénients :
 - elle conduit, pour le projet, à un allongement factice de la durée du travail, puisque l'intervalle de temps entre le début d'une tâche et sa fin augmente nécessairement avec ce type d'organisation ;
 - elle oblige à chaque reprise de tâche à un travail supplémentaire d'imprégnation du dossier pour faire le point et qui n'existe pas dans l'organisation séquentielle ;
 - elle conduit à un accroissement des encours, moins visible qu'avec les stocks, mais tout aussi réel, ce qui a un coût et affaiblit la capacité de réaction de l'entreprise.

Deux justifications du parallélisme peuvent être avancées :

- la difficulté à prévoir de manière satisfaisante le travail à effectuer pour chaque tâche et le moment précis où celui-ci arrivera. On retrouve là un problème classique en ordonnancement qui conduit à faire un arbitrage entre l'importance des encours et le risque d'inutilisation de ressources productives en attente de travail.
- Les solutions d'ordonnancement tenant compte des ressources disponibles prédéterminées conduisent mécaniquement (voir [§ III-2.1.2, page 315](#)) à une mauvaise utilisation des ressources allouées. Pour améliorer cette utilisation, il faut mettre en place des mécanismes de réallocation dynami-

1. *Note de la page précédente*. C'est ainsi qu'un travail de trente jours de maçonnerie pourra être exécuté par 2 personnes pendant 15 jours ou 3 personnes pendant 10 jours ou 5 personnes pendant 6 jours... (sous réserve que les ressources mobilisées ne se gênent pas). La gestion des délais ne s'effectue donc pas directement par une gestion des durées des tâches, mais plutôt par une gestion des ressources et des gammes. Depuis une dizaine d'années, des logiciels d'ordonnancement de projet permettent de saisir la durée d'une tâche et l'intensité de mobilisation d'une ressource, ce qui conduit à déterminer l'énergie de la tâche, puis à verrouiller cette valeur (choix de l'option «*effort driven*» ou «*piloté par l'effort*» chez Microsoft Project, par exemple), ce qui fait qu'ensuite une modification de la durée fait varier automatiquement l'intensité de mobilisation de la ressource, et réciproquement.

1. Parkinson écrit (1957, [325]): «*work expand so as to fill the time available for its completion*».

2. Voir l'approche probabiliste du problème d'ordonnancement au [§ III-3, page 325](#).

3. On reviendra sur ce point à la [page 305](#).

ques des ressources inutilisées, ce qui relève de la gestion hiérarchique multi-projets, et accepter de faire varier, si nécessaire, l'intensité de mobilisation des ressources au cours de l'exécution d'une tâche (ce que l'on verra au § III-2.1.2).

En tout état de cause, une amélioration de l'information (annonce de l'arrivée imminente d'un travail¹) et une meilleure utilisation des marges de manœuvre² permettent de réduire l'intérêt du parallélisme.

II-2.3 Relations d'antériorité

La contrainte selon laquelle une tâche j ne peut commencer avant qu'une tâche i ne soit achevée est qualifiée de **contrainte d'antériorité** (ou d'antécédence) entre la tâche i et la tâche j ; on dira encore que i est ancêtre de j ou que j est descendant de i ; on parlera encore de **relation d'antériorité** ou de **contrainte d'enclenchement** pour désigner ce type de contrainte. La nature de la relation d'antériorité mérite d'être discutée car, contrairement aux apparences, elle n'est pas triviale. Deux causes bien distinctes, généralement exclusives dans une analyse détaillée, peuvent être à l'origine d'une relation d'antériorité.

Le premier cas de figure est celui de la production, par une tâche ancêtre, d'**informations** jugées, a priori, indispensables pour pouvoir envisager l'exécution d'une tâche-descendant.

- L'impossibilité de réaliser la tâche-descendant sera absolue si la tâche-ancêtre doit définir le processus utilisé par la tâche-descendant (gamme opératoire) ou de recueillir des informations conditionnant l'exécution de ce processus (détermination de paramètres comme des quantités à produire).
- Cette impossibilité sera relative si la tâche-ancêtre vérifie certaines caractéristiques d'un travail exécuté (contrôle du respect de certaines spécifications). Le caractère relatif de cette impossibilité explique qu'il est possible, en cas de problème, de supprimer certaines tâches (de contrôle, notamment), généralement au prix d'un risque accru d'une non-réalisation de tous les objectifs techniques.

Le second cas de figure est celui d'une tâche-ancêtre caractérisée par la production ou la transformation d'un **objet** devant être utilisé dans le processus de fabrication ou de transformation exécuté par la tâche-descendant. Cela étant, il se peut tout d'abord que l'avancement du projet reste possible, même si l'objet n'est pas produit ou transformé, à *condition de modifier* certaines tâches qui sont des *descendants* directs ou indirects de cette tâche-ancêtre exécutée de manière incorrecte. C'est ainsi que les difficultés rencontrées dans la mise au point d'un composant peuvent conduire à se «rabattre» sur une solution éprouvée, mais technologiquement moins performante, ce qui induira en cascade un certain nombre de transformations. Cette modification des processus opératoires s'effectue le plus souvent au prix d'une dégradation des objectifs de spécifications techniques ou de coûts, ce qui conduit à une transformation du projet.

1. Voir page 305.

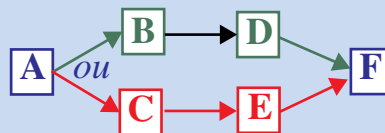
2. Voir page 305.

Cette réflexion sur les relations d'antériorité force les acteurs à se mettre d'accord sur les contenus des tâches et les moyens à mobiliser, puisque le responsable d'une tâche s'engage sur la base de ce qu'il récupère exactement auprès des responsables des tâches-amont et de ce qu'il doit livrer aux responsables des tâches-aval.

Il faut ajouter que la relation d'antériorité retenue dans les formulations habituelles de problèmes d'ordonnancement de projet implique que *toutes* les tâches-ancêtres d'une tâche doivent avoir été achevées avant que la tâche considérée puisse débiter, ce qui conduit à quelques remarques.

- On ne sait pas prendre en compte dans les formulations classiques (et donc avec les logiciels commerciaux) le cas de **gammes alternatives** qui se traduisent par le fait qu'au moins deux ensembles exclusifs¹ de tâches soit à réaliser entre deux tâches, ce qu'illustre la **figure 72** qui décrit le fait que projet implique de réaliser soit la séquence de tâches $A \rightarrow B \rightarrow D \rightarrow F$, soit la séquence de tâches $A \rightarrow C \rightarrow E \rightarrow F$. Le problème de la détermination simultanée d'un ordonnancement et du choix de processus se pose tout particulièrement lorsque l'on veut tenir compte de contraintes de disponibilité de ressources. On peut ajouter que parfois le choix d'une gamme alternative ne résulte pas d'une décision, mais de l'occurrence d'un événement qui n'est pas sous contrôle; c'est ainsi que selon que les conditions climatiques sont favorables ou défavorables, certaines tâches peuvent changer dans leurs contenus et leurs durées.

FIGURE 72
Gammes alternatives



- On ne sait pas prendre en compte dans les formulations classiques (et donc avec les logiciels commerciaux), la relaxation partielle de l'obligation d'avoir achevé tous les ancêtres d'une tâche avant de pouvoir la commencer, la contrainte «il faut préalablement achever les n tâches-ancêtres» devenant «il faut préalablement achever k tâches-ancêtres quelconques prises parmi les n tâches-ancêtres (avec $1 < k < n$)». Ce type de problème se pose par exemple pour une tâche de mise en service d'équipements à partir du moment où un nombre minimal de ces équipements a été installé.
- Une atténuation de la contrainte d'antériorité est la possibilité de **chevauchement** entre deux tâches (on parle encore de **recouvrement** entre deux tâches) c'est-à-dire, la possibilité de commencer la tâche-descendant avant que la tâche ancêtre ne soit terminée. Cette possibilité de chevauchement peut avoir deux origines.
 - Elle peut résulter d'une analyse (parfois implicite) de l'incidence d'une décomposition de ces deux tâches en des tâches plus élémentaires, et de

1. Ce qui diffère de la modulation de la durée d'une tâche en fonction de l'importance des ressources mobilisée, évoquée à la [page 280](#); on reviendra sur cette prise en compte des gammes alternatives aux pages [322](#) et [331](#).

particularités des relations d'antériorité à ce niveau de détail plus fin (on reviendra sur ce point au § III-4.1, page 334). Le concept de chevauchement est donc indissociable de celui de niveau de détail dans l'analyse et de celui de relation d'antériorité.

- Elle peut être liée au fait que les deux tâches successives traitent une série d'objets similaires (réalisation d'une série de plans détaillés suivie de l'exécution de chacun de ces plans, par exemple). Dans ce cas, on peut envisager :
 - . soit de scinder la tâche-amont et la tâche-aval en plusieurs tâches liées par des relations d'antériorité (création du plan i suivi de la création du plan $i + 1$ et de l'exécution de l'objet créé par le plan i), ce qui est souvent souhaitable lorsque le travail de l'une des tâches est quantitativement important ;
 - . soit d'utiliser un chevauchement qui s'appuie sur l'analyse précédente (on reviendra sur ce point au § III-4.1, page 334).

L'usage de l'une de ces deux solutions est souvent nécessaire pour éviter d'allonger inutilement le projet.

Pour terminer, indiquons que parfois l'on peut atteindre un même résultat physique en permutant deux tâches successives à condition de modifier le contenu de ces tâches, ce que l'on ne sait pas prendre en compte dans la formulation de l'ordonnancement (et donc traiter automatiquement avec un logiciel commercial). Pour illustrer ce point, prenons l'exemple de la rénovation d'une pièce avec le ponçage et la vitrification d'un parquet par un menuisier (tâche A) et la peinture de murs, plafond et plinthes par un peintre (tâche B). L'ordre de passage retenu modifie un peu le travail à effectuer, chaque corps de métier préférant passer en tête pour se simplifier le travail. Dans ce cas, c'est souvent la disponibilité des ressources qui déterminera l'ordre de passage et le contenu exact des tâches.

II-3 Typologie des problèmes d'ordonnancement de projet

Plusieurs caractéristiques doivent être prises en compte pour comprendre que plusieurs formalisations du problème sont possibles et que la définition retenue pour un problème peut impliquer que l'utilisation de certains logiciels soit exclue. Ces éléments à prendre en compte sont au nombre de quatre : le critère à optimiser (§ II-3.1), les contraintes prises en compte (§ II-3.2, page 285), la nature certaine ou aléatoire des données (§ II-3.3, page 287) et la méthode de résolution retenue (§ II-3.4, page 287).

II-3.1 Le critère à optimiser

Pour choisir entre plusieurs solutions d'ordonnancement, il faut disposer d'un critère d'évaluation. Une fois défini ce critère, l'utilisateur sera à la recherche d'une solution qui en optimisera la valeur. Deux familles de critères sont proposées. La première est la *date d'achèvement du projet* que l'on cherchera à minimiser. La seconde, d'utilisation peu fréquente, « tourne » autour de l'utilisation des ressources sous des formes diverses dont la plus connue est celle de la recherche de lissage d'une ressource donnée.

Le problème le plus simple à résoudre est celui de la recherche de l'ordonnancement minimisant le temps total de réalisation du projet en se situant en univers

certain. C'est du reste l'aspect de cette problématique qui est non seulement le plus utilisé, mais aussi très souvent le seul connu. Nous nous focaliserons sur ce critère dans ce chapitre, en évoquant accessoirement son utilisation en univers aléatoire.

Dans la pratique, il existe presque toujours plusieurs solutions d'ordonnement qui conduisent à la même valeur optimale de critère, ce qui conduit à parler de recherche *d'une* solution optimale plutôt que de recherche *de la* solution optimale. Ces solutions alternatives ne sont généralement pas équivalentes au regard d'autres critères (notamment ceux liés au coût ou aux risques encourus). La détermination de l'ordonnement final s'appuiera sur la prise en compte de ces critères additionnels (voir § III-1.1.5, page 303).

II-3.2 La prise en compte explicite d'un certain nombre de contraintes

L'exemple introductif ne comportait que des contraintes d'antériorité. D'autres contraintes existent. On distingue classiquement en ordonnancement de projet, trois classes de contraintes : des contraintes potentielles (§ II-3.2.1), cumulatives (§ II-3.2.2) et disjonctives (§ II-3.2.3, page 286). Cette typologie est utile pour formaliser correctement des problèmes complexes d'ordonnement et être à même non seulement d'utiliser les logiciels disponibles sur le marché, mais aussi d'en comprendre les limites.

Table des matières

II-3.2.1 Les contraintes potentielles

Les **contraintes potentielles**¹ peuvent être de deux sortes : des contraintes d'antériorité (§ II-3.2.1.1) ou de localisation temporelle (§ II-3.2.1.2, page 285).

Index thématique

II-3.2.1.1 Contraintes d'antériorité

Avec l'exemple introductif, on a pu voir qu'un projet peut se décomposer en un certain nombre de tâches (ou d'activités) qui, généralement, ne sont pas réalisables dans n'importe quel ordre. L'analyse des tâches conduit à une explicitation de ce type de contraintes que l'on a analysé au § II-2.3, page 282.

Le degré de détail de la décomposition du projet en tâches est laissé à l'appréciation de l'analyste du problème et peut ne pas être sans conséquence sur la performance de l'ordonnement retenu. En effet, il n'est pas rare qu'un accroissement du niveau de détail permette de trouver une solution améliorant le critère à optimiser (voir § III-4.1, page 334 et figure 92, page 336).

II-3.2.1.2 Contraintes de localisation temporelle

Les **contraintes de localisation temporelle** impliquent qu'une tâche donnée i ne peut débuter avant une date imposée (outillage non disponible avant cette date, par exemple) ou qu'elle ne peut s'achever après une date imposée (c'est souvent le cas des jalons). Leur prise en compte ne pose guère de problème comme on le

1. Formellement (voir Roy, 1969, [368]), les contraintes potentielles se définissent à partir des durées d_i et des dates de début t_i des tâches en posant la contrainte $t_j - t_i \geq d_i$ pour exprimer que i est l'ancêtre de j . Les possibilités de cette formulation sont grandes. Par exemple, pour autoriser un recouvrement, il suffit de remplacer d_i par a_i , avec $a_i < d_i$; pour forcer j à débuter avant que i ne soit fini, il suffit d'écrire $t_i + d_i \geq t_j$ (ce qui revient à $t_i - t_j \geq -d_i$); etc. Ce type de formalisation n'est utilisable directement que dans une approche de type programmation linéaire après une légère transformation. On reviendra sur ce point au § III-2.1.3, page 319.

verra à la [page 297](#), pour une contrainte sur la date de début au plus tôt d'une tâche, et à la [page 299](#), pour une contrainte sur la date de fin au plus tard. Les logiciels commerciaux prennent généralement ce type de contrainte de manière satisfaisante.

II-3.2.2 Les contraintes cumulatives

Les **contraintes cumulatives** imposent la prise en compte :

- de la disponibilité datée de différentes **ressources non stockables**, c'est-à-dire des ressources, comme des heures de travail de personnel ou d'équipement, dont on peut disposer au cours d'une période, sont perdues si elles ne sont pas utilisées au cours de cette période¹ ;
- et de leur consommation datée par les tâches dans la recherche d'un ordonnancement.

La prise en compte de ces contraintes s'impose. Par exemple, il ne saurait être question de programmer, pour un jour donné, des tâches qui requièrent toutes en même temps l'équivalent de cinq jours de travail d'un corps de métier qui ne comporterait, pour le projet, que trois représentants. Il est clair que ces contraintes peuvent varier au cours du temps et qu'il faut en créer autant qu'il y a de groupes de ressources non substituables.

En règle générale, les problèmes rencontrés sur le terrain se caractérisent par plusieurs dizaines ou centaines de tâches et la prise en compte de contraintes cumulatives complique de manière considérable la recherche d'un ordonnancement possible. Pour cette raison, lorsque le critère retenu est celui de la minimisation de la date d'achèvement du projet, de telles contraintes sont souvent relaxées dans un premier temps, avec l'espoir que les marges de manœuvre dont on dispose seront suffisantes pour trouver un ordonnancement réalisable dans le temps minimal trouvé.

II-3.2.3 Les contraintes disjonctives

Les **contraintes disjonctives** imposent la non-réalisation simultanée de deux tâches. On trouvera de telles contraintes dans le cas d'utilisation d'une ressource unique (pont roulant, par exemple), mais une formulation par le biais d'une contrainte cumulative est alors tout aussi possible. On rangera plutôt dans cette classe de contraintes des interdictions de réalisation simultanée liées, par exemple, à des raisons de sécurité (protection électrique...) ou de manque de place pour exécuter simultanément plusieurs tâches en un même endroit (par exemple, il n'est pas possible de faire travailler simultanément des électriciens et des plombiers qui installent des toilettes dans un Airbus).

L'existence de contraintes disjonctives, mais aussi celle de contraintes cumulatives, conduit à des choix d'ordonnancement plus ou moins arbitraires². Il ne faut jamais transformer de telles contraintes en des contraintes d'antériorité reflétant

1. Ce qui les différencie des **ressources stockables** (que les Anglo-Saxons appellent *pool resources* ou *storable resources*) comme des matières ou une somme d'argent qui, si elles ne sont pas consommées au cours d'une période, peuvent l'être au cours de la période suivante. La littérature française d'ordonnancement appelle également **ressource consommable** ce que l'on a appelé ressource stockable et **ressource renouvelable**, ce que l'on a appelé ressource non stockable. On reviendra sur ce problème de modélisation des ressources au [chapitre VIII, § I-1.1, page 529](#).

ces choix d'ordonnancement car, souvent, ceux-ci reposent sur des hypothèses de disponibilité de ressources qui peuvent être démenties. Dans ce cas, il faut pouvoir garder la possibilité de permuter la programmation de deux tâches, ce qu'interdit le remplacement de la contrainte disjonctive ou cumulative par une contrainte d'antériorité.

II-3.3 Le caractère certain ou non des données utilisées

Le problème posé se caractérise par la prise en compte de données numériques relatives aux durées associées aux différentes tâches et à leurs consommations de différentes ressources. Supposer que ces différentes informations sont connues avec certitude simplifie grandement la formulation du problème et sa résolution. Cette hypothèse de travail n'est malheureusement pas toujours réaliste. Dans ce cas, d'autres approches du problème pourront être utilisées et seront présentées au § III-3, page 325.

II-3.4 La méthode de résolution retenue

L'existence de contraintes (au moins celles d'antériorité) et d'un critère quantitatif d'évaluation range les problèmes d'ordonnancement de projet dans la catégorie des problèmes d'optimisation sous contraintes.

Si l'on se place en univers certain et si l'on prend en compte toutes les catégories de contraintes, le problème posé peut s'écrire sous la forme d'un programme linéaire en nombres entiers, ce que l'on verra au § III-2.1.3, page 319. Cette formulation est d'une grande utilité restreinte, dans la mesure où il n'existe pas actuellement d'algorithmes généraux capables de résoudre rapidement des problèmes complexes réels d'une certaine dimension¹. Pour des problèmes simples (univers certain, prise en compte des seules contraintes d'antériorité et critère de la minimisation de la date d'achèvement du projet), un algorithme optimal simple à mettre en œuvre existe. Pour des problèmes plus complexes, il sera nécessaire de mettre en œuvre des heuristiques pour proposer une solution, mais sans pouvoir garantir son optimalité.

Lorsque le critère retenu est celui de la minimisation de la date d'achèvement du projet, on a souvent intérêt à utiliser, dans un premier temps, une formulation simplifiée du problème posé, en relaxant certaines contraintes (les contraintes cumulatives en particulier). La date d'achèvement obtenue pour ce problème simplifié constitue obligatoirement la borne inférieure des solutions des problèmes à contraintes non relaxées (problème complet). Il s'ensuit que si l'utilisation d'heuristiques dans la résolution du problème complet conduit à trouver la même date d'achèvement que celle du problème simplifié, on est nécessairement en présence d'une solution optimale du problème complet.

2. Note de la page précédente. Cet ordonnancement peut avoir un impact sur les gammes opératoires des tâches concernées, ce qui vient compliquer le problème. Par exemple, dans le cas de contraintes disjonctives, ce peut être le cas de tâches portant sur des objets physiquement imbriqués ou proches. C'est ainsi que les gammes opératoires des électriciens et des plombiers qui installent des toilettes dans un Airbus ne sont pas les mêmes selon l'ordre d'intervention retenu, à résultat final identique. Ce cas est différent de celui de la rénovation d'une pièce d'appartement évoqué à la page 284 où l'on peut admettre que le menuisier et le peintre peuvent travailler simultanément, ce qui n'est matériellement pas possible pour l'électricien et le plombier de notre exemple.

1. On est confronté à des problèmes numériques que l'on verra au chapitre V, § I-3.3, page 406.

SECTION III RECHERCHE D'UN ORDONNANCEMENT¹

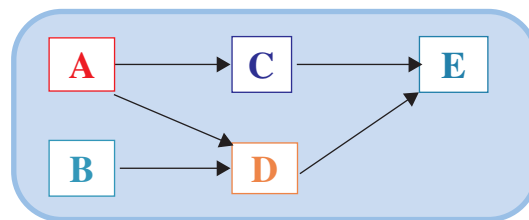
On commencera par étudier le cas le plus simple, celui de l'ordonnancement en univers certain avec prise en compte des seules contraintes potentielles (§ III-1) avant d'aborder celui plus compliqué avec prise en compte supplémentaire des contraintes disjonctives et cumulatives (§ III-2, page 312). On verra enfin comment ce problème se traite en univers aléatoire (§ III-3, page 325).

III-1 Recherche d'un ordonnancement en univers certain avec prise en compte des seules contraintes potentielles

La résolution de cette classe de problème est assez aisée. Pour obtenir manuellement de tels ordonnancements, il est commode de travailler sur un graphique d'enclenchement des tâches. Pour plusieurs raisons, nous utiliserons une représentation du type *Potentiel-Tâches* qui se caractérise par la visualisation des tâches dans des cartouches et représente la contrainte d'antériorité entre deux tâches i et j par une flèche entre ces cartouches, la flèche étant orientée dans le sens « ancêtre-descendant ». Cette visualisation est celle que l'on adopte intuitivement dans une approche « naïve » du problème (déjà utilisée à la figure 68, page 276). Dans la terminologie de la théorie des graphes, ce que nous avons appelé *flèche* est appelé **arc** et les cartouches auxquels aboutissent ou d'où partent les flèches sont appelées **sommets** (ou **nœuds**) du graphe. La figure 73 est un exemple d'un tel graphe avec cinq tâches dont deux n'ont pas d'ancêtre (A et B), une n'a qu'un ancêtre (C) et deux ont deux ancêtres (D et E).

FIGURE 73

Représentation Potentiel-Tâches



Nous examinerons au § III-1.2, page 307, une autre représentation graphique du problème d'ordonnancement, connue sous le nom de graphe *Potentiel-Étapes* ou représentation « classique » PERT. Cette méthode, initialement la plus répandue, présente beaucoup d'inconvénients comme on le verra. C'est la raison pour laquelle elle a été progressivement abandonnée au profit de l'approche *Potentiel-Tâches* connue sous le nom de PDM (*Precedence Diagramming Method*)². Pour terminer sur ce point de vocabulaire, indiquons que, d'une part, jusqu'à une époque très récente, les principaux logiciels du marché utilisaient l'appellation PERT pour désigner le graphe *Potentiel-Tâches*³.

1. Des logiciels de démonstration correspondant à des produits complets ayant soit une durée de vie limitée, soit sans limitation de durée, mais sans sauvegarde, soit avec une limitation du nombre de tâches et de ressources, sont téléchargeables. On peut noter, au moment où ces lignes sont écrites (Microsoft ayant abandonné cette possibilité):

- PSN8 (version US ou Fr, PC) <http://www.lebihan.fr/Telechargement/dload8.asp>,

- Open Plan (version US ou Fr, PC): <http://www.welcom.com/products/download.html>.

L'offre de programmes d'ordonnancement de gestion de projet est abondante (voir AFITEP-CXP, [116]).

2. Les Anglo-Saxons parlent encore d'approche **AoN** pour **Activity on Node**, qui correspond à la représentation *Potentiel-Tâches*, et d'approche **AoA**, **Activity on Arrow**, qui correspond à la représentation *Potentiel-Étapes*.

III-1.1 Recherche d'une solution optimale par la méthode *Potentiel-Tâches*

Cette recherche s'appuie sur des tableaux de calculs associés aux différentes tâches d'un projet. Ces calculs s'effectuent dans un ordre qui prend en compte les relations d'antériorité entre tâches. Dans le cadre d'une résolution manuelle, cette prise en compte est plus simple si l'on « place » ces tableaux de calcul directement sur les nœuds correspondants du graphe *Potentiel-Tâches*.

L'établissement préalable de ce graphe *Potentiel-Tâches* est possible directement « par tâtonnement » lorsque le problème posé comporte moins d'une quinzaine de tâches¹. En pratique, les problèmes réels comportent facilement plusieurs dizaines de tâches et l'établissement du graphe *Potentiel-Tâches* nécessite le remplacement d'un raisonnement intuitif par une démarche méthodique. Celle-ci fait appel au classement des activités par niveaux (§ III-1.1.1). On peut alors établir un graphe (§ III-1.1.2, page 293) sur lequel on effectuera directement des calculs qui mettront en évidence un ensemble de tâches dont l'ordonnancement est imposé si l'on désire que le projet soit exécuté en un temps minimum. Ces tâches sont dites critiques et appartiennent à un (ou plusieurs) chemin(s) critique(s) (§ III-1.1.3, page 294). Pour l'ordonnancement des autres tâches, on dispose d'une certaine « marge de manœuvre » dont l'analyse passe par la détermination préalable de leurs marges totales et marges libres (§ III-1.1.4, page 301). On dispose alors des éléments qui permettent une programmation définitive (§ III-1.1.5, page 303).

Table des matières

Index thématique

III-1.1.1 Classement des activités par niveaux

Le niveau d'une tâche correspond au plus grand nombre de tâches rencontrées sur un même itinéraire depuis le début du projet, plus un, ce qui revient à compter le nombre maximal de « générations » jusqu'à cette tâche.

L'algorithme de traitement est le suivant. On place au premier niveau les tâches qui n'ont aucun ancêtre et on marque ces tâches dans la liste des tâches (marquage réalisé en soulignant chaque tâche concernée). Puis, on procède comme suit :

- *Étape 1* : les tâches du nouveau niveau sont les tâches non marquées de la colonne des tâches qui n'ont plus d'ancêtre ; après affectation au nouveau niveau, ces tâches sont marquées à leur tour dans la colonne des tâches ;
- *Étape 2* : on marque, dans la colonne des tâches et celle des ancêtres, les tâches qui viennent d'être affectées au dernier niveau analysé ;
- *Étape 3* : s'il reste des tâches non marquées dans la colonne des tâches, on continue en repartant à l'étape 1, sinon la décomposition en niveaux est terminée.

L'étape 3 permet de mettre en évidence d'éventuelles incohérences dans l'analyse du problème et plus particulièrement celle d'une *circularité causale* (du

3. *Note de la page précédente*. Par exemple, Microsoft a abandonné l'appellation « fallacieuse » de *Pert Chart* pour la remplacer par celle plus exacte de *Network Diagram* dans la version 2000 de son logiciel *Project*, l'un des plus utilisés du marché.

1. De nombreux logiciels proposent maintenant la construction directe à l'écran du graphe. L'expérience montre qu'en l'absence d'une préparation préalable et/ou d'un module de réorganisation graphique, l'analyse visuelle des antériorités s'avère difficile, les flèches allant dans tous les sens.

type: A a pour ancêtre B; B a pour ancêtre C, lequel a pour ancêtre A; les spécialistes des graphes parlent alors de *circuit*) qui conduit à l'impossibilité de mener à son terme l'algorithme proposé. Le **tableau 55** illustre cette démarche sur l'exemple du **tableau 54**, page 276.

TABLEAU 55
Itération 1

Étape 1

Ancêtres	Tâches	Niveau	
		1	
-	A	A	
A	B		
B	C		
C	D		
D, F	E		
C	F		
B	G		
G	H		
H, F	I		
I, E	J		
J, M	K		
-	L	L	
L	M		

Étape 2

Ancêtres	Tâches	Niveau	
		1	
-	<u>A</u>	A	
<u>A</u>	B		
B	C		
C	D		
D, F	E		
C	F		
B	G		
G	H		
H, F	I		
I, E	J		
J, M	K		
-	<u>L</u>	L	
<u>L</u>	M		

Étape 3

Continuer

Table des matières

Index thématique

Tableau 55 (suite)
Itération 2

Étape 1

Ancêtres	Tâches	Niveau	
		1	2
-	<u>A</u>	A	
<u>A</u>	B		B
B	C		
C	D		
D, F	E		
C	F		
B	G		
G	H		
H, F	I		
I, E	J		
J, M	K		
-	<u>L</u>	L	
<u>L</u>	M		M

Étape 2

Ancêtres	Tâches	Niveau	
		1	2
-	<u>A</u>	A	
<u>A</u>	<u>B</u>		B
<u>B</u>	C		
C	D		
D, F	E		
C	F		
<u>B</u>	G		
G	H		
H, F	I		
I, E	J		
<u>J</u> , <u>M</u>	K		
-	<u>L</u>	L	
<u>L</u>	<u>M</u>		M

Étape 3

Continuer

Tableau 55 (suite)
Itération 3

Étape 1

Ancêtres	Tâches	Niveau		
		1	2	3
-	<u>A</u>	A		
<u>A</u>	<u>B</u>		B	
<u>B</u>	<u>C</u>			C
<u>C</u>	<u>D</u>			
D, F	<u>E</u>			
<u>C</u>	<u>F</u>			
<u>B</u>	<u>G</u>			G
<u>G</u>	<u>H</u>			
H, F	<u>I</u>			
I, E	<u>J</u>			
J, M	<u>K</u>			
-	<u>L</u>	L		
<u>L</u>	<u>M</u>		M	

Étape 2

Ancêtres	Tâches	Niveau		
		1	2	3
-	<u>A</u>	A		
<u>A</u>	<u>B</u>		B	
<u>B</u>	<u>C</u>			C
<u>C</u>	<u>D</u>			
D, F	<u>E</u>			
<u>C</u>	<u>F</u>			
<u>B</u>	<u>G</u>			G
<u>G</u>	<u>H</u>			
H, F	<u>I</u>			
I, E	<u>J</u>			
J, M	<u>K</u>			
-	<u>L</u>	L		
<u>L</u>	<u>M</u>		M	

Étape 3

Continuer

Table des matières

Tableau 55 (suite)
Itération 4

Étape 1

Ancêtres	Tâches	Niveau			
		1	2	3	4
-	<u>A</u>	A			
<u>A</u>	<u>B</u>		B		
<u>B</u>	<u>C</u>			C	
<u>C</u>	<u>D</u>				D
D, F	<u>E</u>				
<u>C</u>	<u>F</u>				F
<u>B</u>	<u>G</u>			G	
<u>G</u>	<u>H</u>				H
H, F	<u>I</u>				
I, E	<u>J</u>				
J, M	<u>K</u>				
-	<u>L</u>	L			
<u>L</u>	<u>M</u>		M		

Étape 2

Ancêtres	Tâches	Niveau			
		1	2	3	4
-	<u>A</u>	A			
<u>A</u>	<u>B</u>		B		
<u>B</u>	<u>C</u>			C	
<u>C</u>	<u>D</u>				D
D, F	<u>E</u>				
<u>C</u>	<u>F</u>				F
<u>B</u>	<u>G</u>			G	
<u>G</u>	<u>H</u>				H
H, F	<u>I</u>				
I, E	<u>J</u>				
J, M	<u>K</u>				
-	<u>L</u>	L			
<u>L</u>	<u>M</u>		M		

Étape 3

Continuer

Index thématique

Tableau 55 (suite)
Itération 5

Étape 1

Ancêtres	Tâches	Niveau				
		1	2	3	4	5
-	<u>A</u>	A				
<u>A</u>	<u>B</u>		B			
<u>B</u>	<u>C</u>			C		
<u>C</u>	<u>D</u>				D	
<u>D, F</u>	<u>E</u>					E
<u>C</u>	<u>F</u>				F	
<u>B</u>	<u>G</u>			G		
<u>G</u>	<u>H</u>				H	
<u>H, F</u>	<u>I</u>					I
<u>I, E</u>	<u>J</u>					
<u>J, M</u>	<u>K</u>					
-	<u>L</u>	L				
<u>L</u>	<u>M</u>		M			

Étape 2

Ancêtres	Tâches	Niveau				
		1	2	3	4	5
-	<u>A</u>	A				
<u>A</u>	<u>B</u>		B			
<u>B</u>	<u>C</u>			C		
<u>C</u>	<u>D</u>				D	
<u>D, F</u>	<u>E</u>					E
<u>C</u>	<u>F</u>				F	
<u>B</u>	<u>G</u>			G		
<u>G</u>	<u>H</u>				H	
<u>H, F</u>	<u>I</u>					I
<u>I, E</u>	<u>J</u>					
<u>J, M</u>	<u>K</u>					
-	<u>L</u>	L				
<u>L</u>	<u>M</u>		M			

Étape 3

Continuer

Tableau 55 (suite)
Itération 6

Étape 1

Ancêtres	Tâches	Niveau					
		1	2	3	4	5	6
-	<u>A</u>	A					
<u>A</u>	<u>B</u>		B				
<u>B</u>	<u>C</u>			C			
<u>C</u>	<u>D</u>				D		
<u>D, F</u>	<u>E</u>					E	
<u>C</u>	<u>F</u>				F		
<u>B</u>	<u>G</u>			G			
<u>G</u>	<u>H</u>				H		
<u>H, F</u>	<u>I</u>					I	
<u>I, E</u>	<u>J</u>						J
<u>J, M</u>	<u>K</u>						
-	<u>L</u>	L					
<u>L</u>	<u>M</u>		M				

Étape 2

Ancêtres	Tâches	Niveau					
		1	2	3	4	5	6
-	<u>A</u>	A					
<u>A</u>	<u>B</u>		B				
<u>B</u>	<u>C</u>			C			
<u>C</u>	<u>D</u>				D		
<u>D, F</u>	<u>E</u>					E	
<u>C</u>	<u>F</u>				F		
<u>B</u>	<u>G</u>			G			
<u>G</u>	<u>H</u>				H		
<u>H, F</u>	<u>I</u>					I	
<u>I, E</u>	<u>J</u>						J
<u>J, M</u>	<u>K</u>						
-	<u>L</u>	L					
<u>L</u>	<u>M</u>		M				

Étape 3

Continuer

Table des matières

Index thématique

Tableau 55 (suite)
Itération 7

Étape 1								Étape 2								Étape 3		
Ancêtres	Tâches	Niveau							Ancêtres	Tâches	Niveau							
		1	2	3	4	5	6	7			1	2	3	4	5	6	7	
-	A	A						-	A	A								
A	B		B					A	B		B							
B	C			C				B	C			C						
C	D				D			C	D				D					
D, F	E					E		D, F	E					E				
C	F				F			C	F				F					
B	G			G				B	G			G						
G	H				H			G	H				H					
H, F	I					I		H, F	I					I				
I, E	J						J	I, E	J						J			
J, M	K						K	J, M	K									K
-	L	L						-	L	L								
L	M		M					L	M		M							

Fin de traitement

Table des matières

Index thématique

III-1.1.2 Le graphe *Potentiel-Tâches*

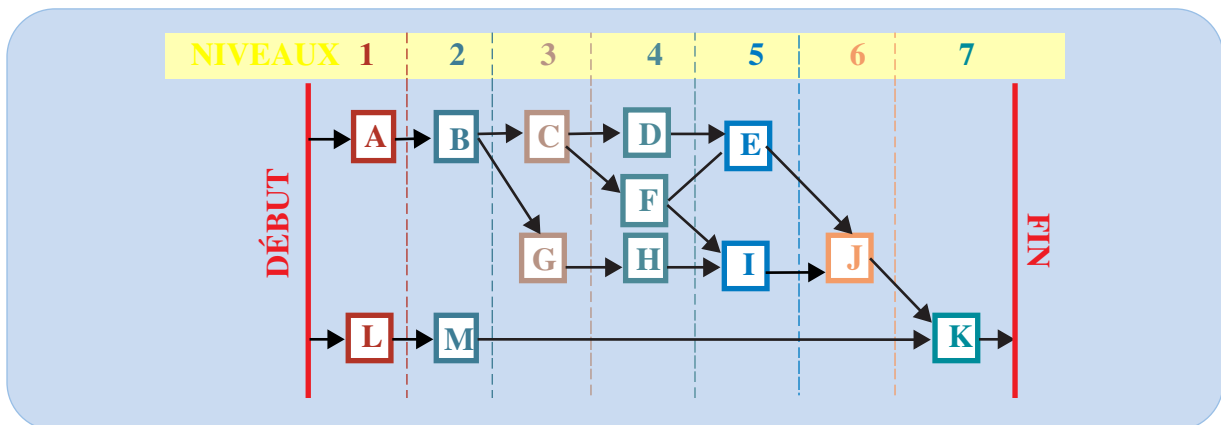
Ce graphe (voir figure 74, page 294) se construit tout simplement en visualisant chaque niveau par une bande verticale et en plaçant, dans chaque niveau, les tâches de ce niveau, puis, en visualisant les contraintes d’antériorité par des flèches (dont la pointe est nécessairement située à droite de son origine). Le début et la fin du travail sont repérés par des traits verticaux. On fait partir du trait vertical de **DEBUT** des flèches qui aboutissent aux tâches de niveau 1 et des tâches sans descendant (qu’elles appartiennent au dernier niveau ou non) partent des flèches qui vont vers le trait de **FIN**¹. Ceci revient à considérer le début et la fin des travaux comme deux tâches supplémentaires de durée nulle, visualisées autrement que par des cartouches.

La «visualisation des niveaux» n’est pas gardée sur le graphe définitif car elle n’est qu’un procédé de construction méthodique du graphe. Dans la pratique même, on utilise au mieux ce type de représentation pour visualiser d’autres informations. On peut, par exemple, regrouper les opérations qui possèdent une caractéristique commune dans des bandes horizontales ou verticales en suivant des logiques qui n’ont donc rien à voir avec celle des niveaux (selon une démarche décrite à la page 280).

- par responsabilité (tâches relevant de monsieur Durand, tâches relevant de monsieur Dupond, tâches relevant de monsieur Dupond...)
- par centre de production (tâches relevant de l’atelier A, tâches relevant de l’atelier B... ou tâches de terrassement, tâches de gros œuvre...),

1. Un contrôle visuel du graphe doit permettre de déceler l’existence illicite de circuit (que les Anglo-Saxons appellent *looping*) ou de tâches sans descendant ou non reliées au trait FIN (que les Anglo-Saxons appellent *dangling*).

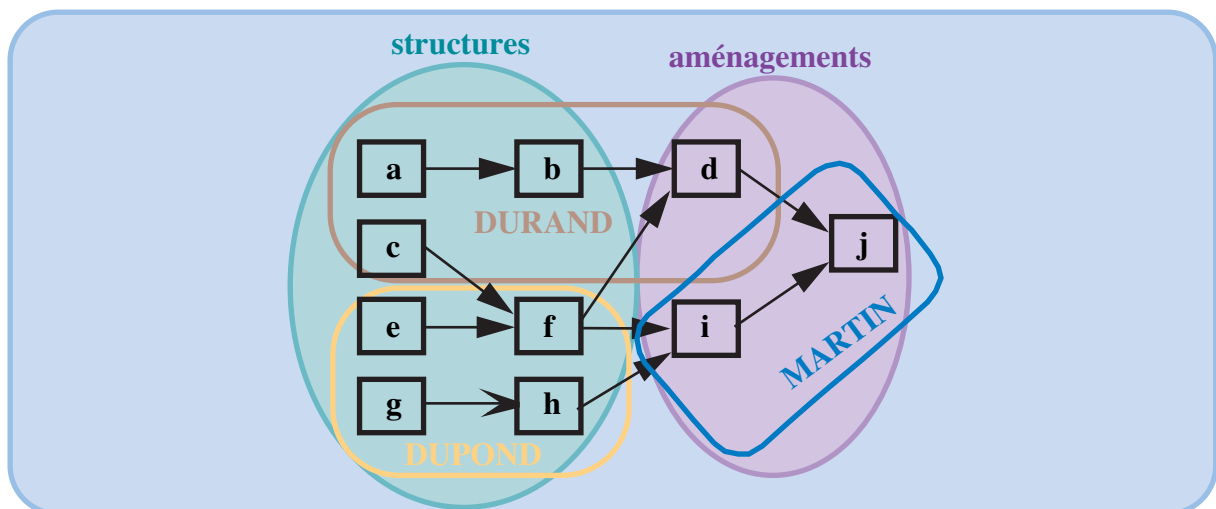
FIGURE 74
Établissement du graphe par niveau



- par sous-ensemble cohérent sur le plan technique (structures, aménagements...), etc.

La figure 75 illustre ce point, avec utilisation de couleurs.

FIGURE 75
Adjonction d'informations sur le graphe du projet

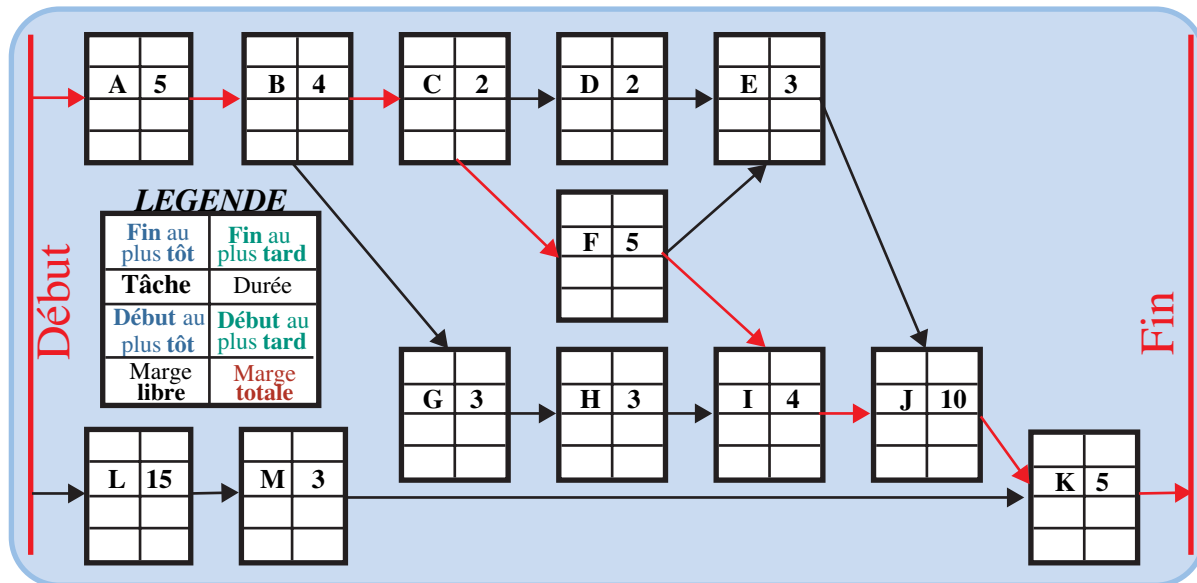


III-1.1.3 Recherche du chemin critique

Sur notre graphe, on appellera **chemin critique** tout itinéraire qui permet d'aller du début du projet à la fin du projet en mettant le temps le plus élevé possible, ce temps étant le cumul des temps opératoires des tâches rencontrées sur ce chemin. La détermination d'un tel chemin s'effectue par le calcul des dates de fin au plus tôt et de fin au plus tard de chaque tâche. Ce calcul est opéré directement sur le schéma de la figure 76, par un remplissage progressif de ses tableaux¹, en tenant compte des relations d'antériorité.

1. La structure de ces tableaux est parfaitement conventionnelle. Les conventions retenues changent d'une entreprise à l'autre et d'un pays à l'autre et les principaux logiciels permettent de paramétrer la représentation graphique selon les besoins de l'utilisateur.

FIGURE 76
Préparation du graphe de calcul des dates et marges



III-1.1.3.1 Les conventions de repérage temporel

La programmation d'un projet, pour être intelligible par tous, doit être présentée en utilisant les conventions calendaires classiques (jour-mois-année) et peut descendre à un niveau plus fin (heure), si nécessaire (notamment en cas d'appel possible à des heures supplémentaires). Cela étant, la date de démarrage du projet est rarement connue lorsque l'on en commence l'analyse. C'est pourquoi, on travaille souvent, dans cette phase de préparation, en prenant pour référence le premier jour d'exécution du projet (jour 1) et en se positionnant relativement par rapport à cette date (par exemple, le jour 3 est le troisième jour depuis le début de l'exécution du projet). Ces **dates relatives** sont exprimées en jours ouvrables, ce qui revient à dire que si le jour 1 est un jeudi, le troisième jour ouvrable sera un lundi, si aucun travail n'est possible durant le week-end. La transcription des dates relatives en **dates calendaires** devra être effectuée ultérieurement, une fois connue la date de début du projet, pour permettre la programmation effective des différentes tâches. Pour des raisons pratiques, on travaillera ici sur des dates relatives.

Le **délai calendaire** est un intervalle exprimé par le rapprochement de deux dates du calendrier. Le **délai arithmétique** mesure ce même intervalle par un nombre d'unités de temps retenu (jour ouvrable, semaine, heure...), cette unité de temps étant parfois désignée sous le nom de quantième.

Il n'est pas rare que la prise en compte de différentes ressources conduise à l'utilisation simultanée de **plusieurs calendriers**. Ce sera le cas, par exemple, d'un projet s'exécutant sur plusieurs pays dont les jours fériés ne coïncident pas ou, plus simplement, d'une activité de séchage de plâtre qui se poursuit en week-end sans la présence d'ouvriers. Par ailleurs, dans certains projets, le temps de travail effectif quotidien peut varier notablement au cours du projet. C'est ainsi que certains metteurs en scène de théâtre ont pris l'habitude de fournir les directives précises pour les costumes et les décors le plus tard possible, en tenant compte du

fait que le personnel mobilisé par ces activités acceptera de travailler en heures supplémentaires, y compris le samedi et le dimanche. On peut ajouter enfin que l'observation montre qu'assez souvent l'efficacité du travail est meilleure en fin de réalisation d'une tâche sous la pression de l'urgence, qu'au début, lorsque l'on a l'impression que l'on dispose de tout le temps voulu.

Un second problème est posé par le *découpage temporel* utilisé. Si une tâche dure exactement 15 minutes et si elle commence à l'instant $t_1 = \ll 10 \text{ heures } 20 \text{ minutes et } 0 \text{ seconde} \gg$, il est évident qu'elle s'achèvera à l'instant $t_2 = \ll 10 \text{ heures } 35 \text{ minutes et } 0 \text{ seconde} \gg$. Dans ce contexte où les dates correspondent à des instants « fugitifs », la date de fin d'une tâche est égale à sa date de début augmentée de sa durée. Dans la pratique, les dates sont repérées non par des instants ponctuels, mais par des périodes¹. Dans le cas habituel d'un découpage journalier, une tâche durant 4 jours et débutant au jour $t = 20$ est réputée commencer au *début* de cette vingtième période, pour s'achever au jour $t = 23$, c'est-à-dire à la *fin* de la 23^e période, ce qui correspond bien à 4 jours de travail. Dans ce contexte où les dates correspondent à des périodes, la date de fin d'une tâche est égale à sa date de début augmentée de sa durée et *diminuée*² de 1. Cette convention que nous adopterons est la plus générale et plus compréhensible lorsque l'on passe en dates calendaires (il semble normal qu'une tâche programmée pour débiter un lundi 2 septembre, commence effectivement à la première heure et non à la fin de la dernière heure, c'est-à-dire le lendemain matin).

La finesse du découpage temporel utilisé est liée au niveau de détail retenu dans l'analyse (voir § II-2, page 277), ce qui conduit, dans des approches hiérarchisées, à utiliser des calendriers plus ou moins détaillés en fonction du niveau d'analyse où l'on se place.

III-1.1.3.2 Calcul des dates au plus tôt de début et de fin de réalisation des tâches (ordonnancement au plus tôt)

On commence par établir l'**ordonnancement au plus tôt** des tâches du projet. Le calcul de la date de début de réalisation au plus tôt des tâches s'effectue progressivement en analysant les tâches du niveau 1, puis, celles du niveau 2... jusqu'à celles du dernier niveau de la façon suivante :

- Pour les tâches de *niveau 1*, la date de début au plus tôt est 1, puisque la date de début se calcule en tenant compte du fait qu'une tâche commence à être exécutée au tout début de la première période où elle est programmée, et la date de fin au plus tôt correspond nécessairement à la durée de la tâche, puisque la date de fin se calcule en tenant compte du fait qu'une tâche reste en cours d'exécution jusqu'à la fin de la dernière période où elle est programmée.
- Pour les tâches des niveaux supérieurs, tout dépend du nombre d'ancêtres de ces tâches :

1. Sauf dans les approches simulatoires si les durées sont décrites par des variables aléatoires continues, auquel cas on travaille généralement avec un repérage temporel de type « instant ponctuel » et non de type « période ».

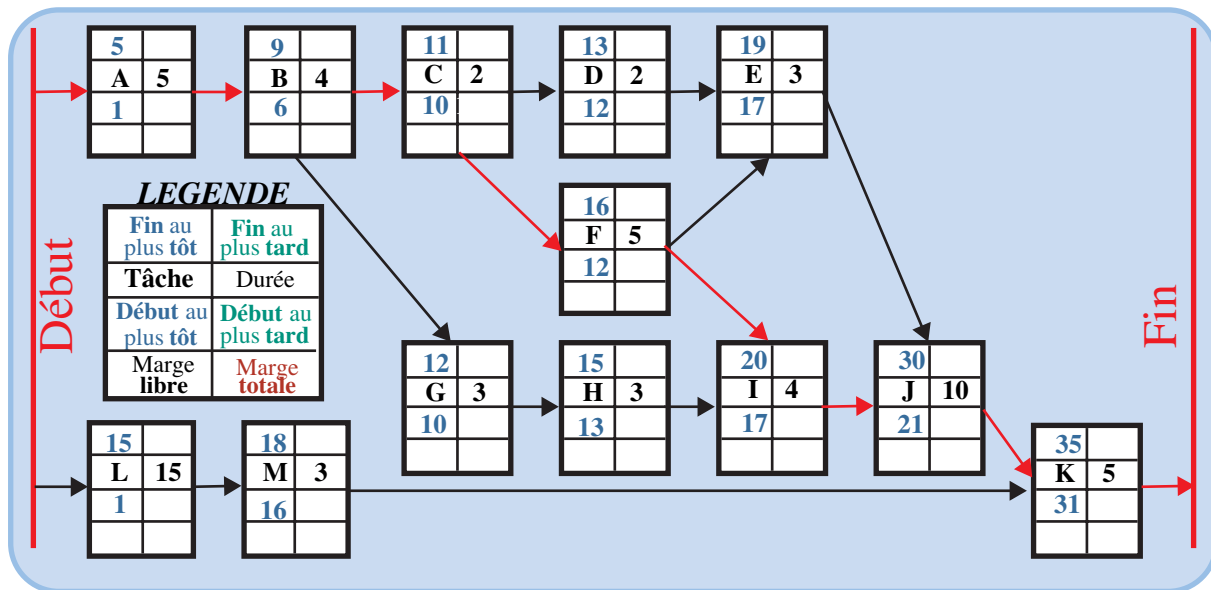
2. Ce qui, formellement, rappelle les bons vieux problèmes de piquets et d'intervalles de l'enseignement primaire !

- Lorsque la tâche n'a qu'**un seul ancêtre**, la date de début au plus tôt est égale à la date de fin au plus tôt de l'ancêtre + 1 et la date de fin au plus tôt est égale à la date de fin au plus tôt de la tâche-ancêtre, augmentée de son propre temps d'exécution (ou encore, à sa date de début au plus tôt, augmentée de sa durée et diminuée de 1). Dans notre exemple, la tâche C n'a qu'un ancêtre, la tâche B se termine au plus tôt le neuvième jour et la tâche C a un temps d'exécution de deux jours. On a donc une date de fin au plus tôt de $9 + 2 = 11$ jours (ou encore $10 + 2 - 1 = 11$ jours).
- Lorsque la tâche a **plusieurs ancêtres**, on procède comme précédemment en privilégiant l'ancêtre dont la *date de fin* au plus tôt est *la plus tardive*, sinon, il y aurait nécessairement violation d'une contrainte d'antériorité. Dans notre exemple la tâche E a 2 ancêtres (les tâches D et F) et ne débute qu'une fois terminées ces deux tâches; si la tâche F se termine au plus tôt le 16^e jour et la tâche D le 13^e jour, il est évident que ce qui conditionne le début de E, c'est la fin de F et que E débutera donc au plus tôt le 17^e jour, pour se terminer au plus tôt le 19^e jour.
- Lorsque la tâche est, en outre, soumise à une **contrainte de localisation temporelle** de type «début au plus tôt», on retient la plus tardive des dates calculées selon les principes développés aux alinéas précédents, sauf si elle est antérieure à la date de début au plus tôt, que l'on retient alors¹. S'il s'agit d'une contrainte de localisation temporelle de type «fin au plus tard», on retient la plus tardive des dates calculées selon les principes développés aux alinéas précédents et si la date de fin au plus tôt qui en résulte est postérieure à celle de la contrainte de localisation temporelle, on est alors en présence d'un problème sans solution, ce qui conduit à le modifier (révision des durées et des contraintes potentielles).
- Lorsqu'un **recouvrement** (ou chevauchement) de durée τ est autorisé entre une tâche j et son ancêtre i (τ étant inférieur à la durée de la tâche j), la date de fin au plus tôt de j est égale à celle de son ancêtre i , augmentée de son propre temps d'exécution et diminuée de la durée τ du recouvrement autorisé. Par exemple, si un recouvrement de $\tau = 2$ jours est autorisé entre la tâche M (de durée 3 jours) et son ancêtre la tâche L (se terminant au plus tôt le 15^e jour), la tâche M se terminera au plus tôt le 16^e jour ($15 + 3 - 2 = 16$), ce qui conduit bien à une exécution simultanée de L et M, les 14^e et 15^e jour. Si la tâche j a plusieurs ancêtres (avec lesquels des recouvrements sont, ou non, possibles), c'est la plus tardive des dates de fin au plus tôt possibles qui sera retenue.

De proche en proche on détermine ainsi, sur la [figure 77](#), que la date de fin au plus tôt de la tâche K, dernière tâche à être réalisée, est le 35^e jour ouvrable. Le temps total d'exécution du projet ne saurait donc être inférieur à cette valeur, et tout ordonnancement aboutissant à une exécution du projet en 35 jours doit être considéré comme optimal, compte tenu du critère de jugement de la minimisation de la durée du projet.

1. On peut expliciter cette contrainte potentielle (que certains logiciels ne gèrent pas) en créant une tâche fictive i , ancêtre de j et dont la durée d_j est égale à la «période gelée».

FIGURE 77
Calcul des dates au plus tôt



Si plusieurs tâches n'ont pas de descendant (et sont donc reliées au trait de fin), il est évident que la durée minimale d'exécution du projet est égale à la plus grande des dates de fin au plus tôt de ces tâches.

L'un de ces ordonnancements possibles est l'ordonnement au plus tôt qui vient d'être trouvé, mais un tel ordonnancement peut poser des problèmes dans l'utilisation des facteurs de production (non disponibilité, acquisition inutilement précoce de certaines ressources productives...) qui peuvent s'atténuer avec un ordonnancement différent ayant les mêmes performances (c'est-à-dire la même valeur du critère retenu, ici la date d'achèvement du projet). Pour apprécier la marge de manœuvre dont on dispose, nous allons déterminer l'**ordonnement au plus tard** qui découle du calcul des dates au plus tard de fin de réalisation des tâches (cf. § III-1.1.3.3). La programmation des tâches pour lesquelles les dates de début et de fin au plus tôt et au plus tard coïncident, est *imposée* si l'on veut respecter la durée minimale d'achèvement du projet. Pour les autres tâches, il faudra affiner l'information avec l'introduction des notions de marge totale et de marge libre que nous présenterons par la suite.

III-1.1.3.3 Calcul des dates au plus tard de réalisation des tâches et ordonnancement au plus tard

Ce calcul ne peut s'effectuer que si le calcul des dates de fin au plus tôt des tâches a été préalablement mené à son terme, puisqu'il faut connaître la durée minimale d'exécution du projet. Ce calcul, contrairement au précédent, s'effectue progressivement en remontant le temps, c'est-à-dire en traitant les tâches du dernier niveau, puis celles de l'avant dernier niveau..., jusqu'à celles du premier niveau (lecture de droite à gauche du graphique).

La date de fin au plus tard des opérations qui n'ont plus de descendant (dans notre exemple, seule la tâche K répond à cette définition) est la durée totale minimale du projet (ici 35 jours). On procède ensuite comme suit:

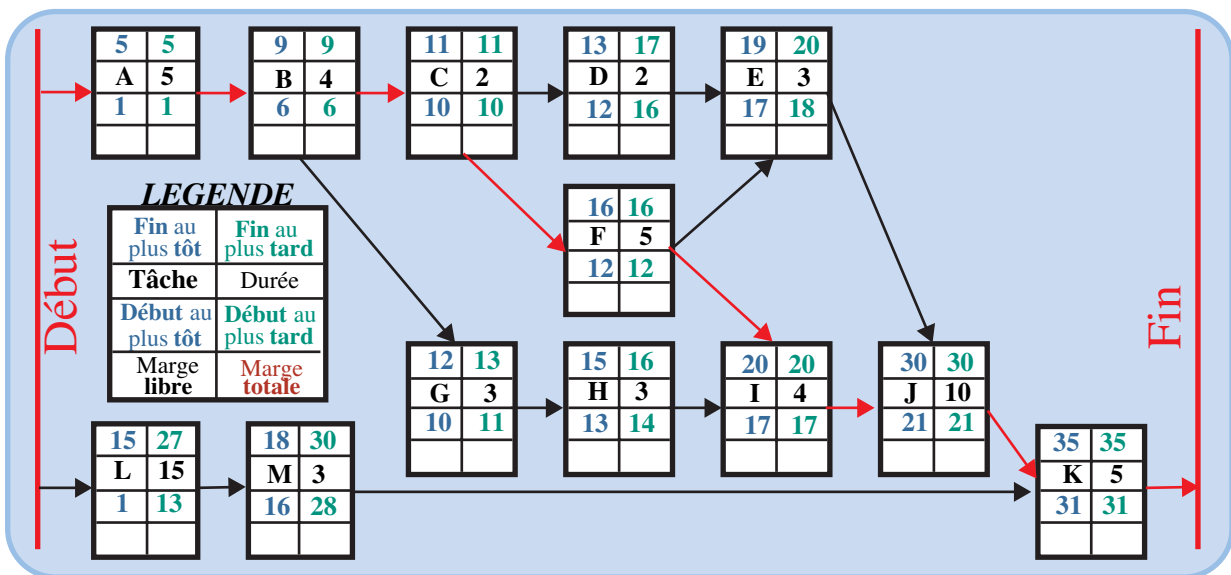
- Lorsque la tâche i n'a qu'un **seul descendant** j , sa date de fin au plus tard est égale à la date de fin au plus tard de ce descendant, diminuée du temps d'exécution d de ce descendant. Par exemple la tâche E n'a qu'un seul descendant (tâche J), sa date de fin au plus tard est donc 30, date de fin au plus tard de J, moins 10, temps opératoire de la tâche J, ce qui donne 20 comme date de fin au plus tard de E.
- Lorsque la tâche a **plusieurs descendants**, on se ramène au cas précédent en privilégiant le descendant qui donne la date *la plus précoce* de début au plus tard, faute de quoi on autoriserait des ordonnancements conduisant à une date d'achèvement postérieure à la date minimale trouvée. Par exemple, la tâche F a deux descendants (E et I), sa date de fin au plus tard peut être $20 - 3 = 17$ si l'on privilégie E, ou $20 - 4 = 16$ si l'on privilégie I; la date la plus précoce étant 16, c'est cette date-là qui sera retenue comme date de fin au plus tard de F.
- Les **dates de début au plus tard** se déduisent des dates de fin au plus tard, en leur retranchant la durée de la tâche, préalablement diminuée de 1.
- Lorsque la tâche est, en outre, soumise à une **contrainte de localisation temporelle** de type «début au plus tôt», on ne doit pas avoir de problème puisque cette contrainte a été prise en compte dans les calculs de dates au plus tôt et que la date de début au plus tard ne peut être antérieure à celle de début au plus tôt (cf. [page 297](#)). S'il s'agit d'une contrainte de localisation temporelle de type «fin au plus tard», on retient la plus précoce des dates calculées selon les principes développés aux alinéas précédents et si cette date est postérieure à celle de la contrainte de localisation temporelle, on retient cette dernière (qui ne peut être antérieure à la date de fin au plus tôt, compte tenu de ce qui a été dit au [page 297](#)).

Table des matières

Index thématique

On en tire le schéma de la [figure 78](#).

FIGURE 78
Calcul des dates au plus tard

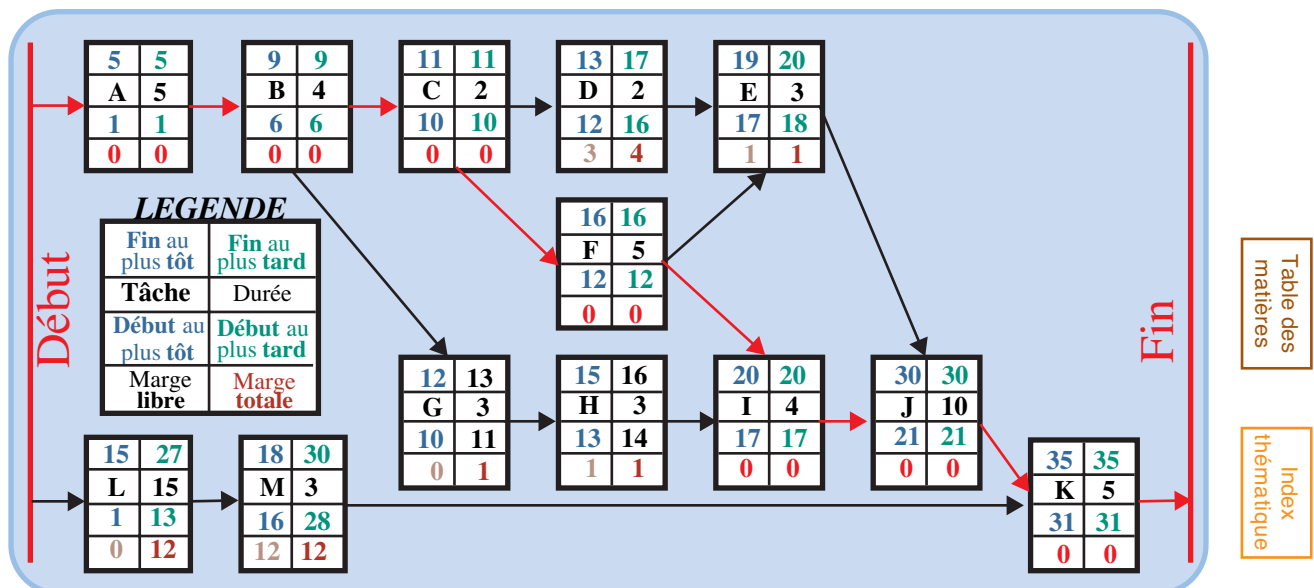


Les tâches A, B, C, F, I, J et K ont la même date de fin au plus tard et de fin au plus tôt. Elles sont appelées **tâches critiques** parce qu'on ne dispose d'aucun

degré de liberté dans leur ordonnancement et que tout retard dans leur achèvement remet en cause la possibilité de réaliser le projet sur la durée minimale trouvée. Le « chemin » du graphe qui ne passe que par des tâches-critiques est dit **chemin critique** (d'où le nom de méthode du chemin critique donné parfois à cette approche). Il est possible d'avoir plusieurs chemins critiques. Habituellement, le chemin critique est repéré sur le graphe en épaississant les arcs qui le constituent.

L'ordonnancement des tâches critiques est donc imposé, mais qu'en est-il de celui des autres tâches? Si l'on ne s'intéresse qu'à une seule tâche, la marge de manœuvre dont on dispose est donnée par la différence entre la date de fin au plus tard et celle de fin au plus tôt (ou le début au plus tard et le début au plus tôt), et que l'on appelle marge totale de la tâche¹. Cette marge totale est calculée à la **figure 79** (on ne se préoccupera pas pour l'instant des marges libres portées également dans ce graphe).

FIGURE 79
Calcul des marges

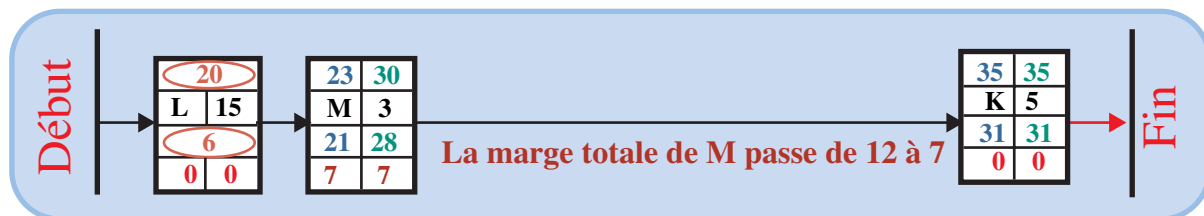


La **marge totale** mesure le degré de liberté dont on dispose pour programmer cette tâche sans remettre en cause la durée d'exécution minimale du projet. Autrement dit, c'est l'intervalle de temps dont on peut éventuellement retarder le début d'exécution d'une tâche programmée au plus tôt, sans qu'il y ait de répercussion sur la date minimale d'achèvement du projet. On peut encore interpréter la marge totale comme l'allongement maximal de la durée de la tâche que l'on peut accepter, sans qu'il y ait de répercussion sur la date minimale d'achèvement du projet. Cet indicateur ne peut être pris en compte pour plusieurs tâches non critiques simultanément. En effet, *l'utilisation de cette « marge de manœuvre » pour programmer une tâche non critique peut éventuellement restreindre les degrés de liberté d'autres tâches non critiques*, ce qui implique qu'une fois décidée l'utilisation d'une partie de la marge totale d'une tâche non critique, il faille recalculer la marge totale des autres tâches non critiques et non

1. que les Anglo-Saxons appellent *total float*, même si certains auteurs d'ouvrages ou de logiciels utilisent abusivement le terme de *slack* à la place de celui de *float* (le *slack* étant un concept peu utilisé qui est associé à l'événement, défini au § III-1.2, page 307, et non à la tâche).

encore programmées, ce qu'illustre la figure 80, où la programmation de la tâche L vient d'être fixée (les dates au plus tôt et au plus tard coïncident alors et les marges, mises à 0 parce que sans objet).

FIGURE 80
Illustration de la portée de la marge totale



III-1.1.4 Les notions de marge libre et de marge indépendante d'une tâche

Le calcul de marges totales des tâches non critiques et non encore programmées est donc normalement à opérer après chaque programmation d'une tâche non critique. Ce principe connaît une exception lorsque l'on utilise la marge libre ou la marge indépendante de la tâche qui vient d'être programmée. Examinons ces possibilités en nous appuyant sur un exemple, illustré par la figure 81, page 302.

Supposons que la tâche D soit programmée les jours 16 et 17 ; la tâche E débute alors au plus tôt le 18^e jour (alors qu'avant elle était conditionnée par la réalisation préalable de F) et sa date de fin au plus tôt est 20 : la marge totale de E a donc été réduite à zéro du fait de l'utilisation complète de la marge totale de D dans la programmation définitive de cette dernière tâche et sa programmation est imposée (la tâche E devient alors critique du fait de la programmation de D). Supposons maintenant que l'on décide d'exécuter cette tâche D les 15^e et 16^e jour (au lieu des jours 16 et 17), la tâche E, compte tenu de la date de fin au plus tôt de la tâche F, débute alors au plus tôt le 17^e jour et sa marge totale reste intacte. Cet exemple montre que l'utilisation d'une marge totale peut ou non avoir des conséquences sur la marge totale d'autres tâches.

Il est donc possible de jouer sur une partie de la marge totale sans diminuer la marge totale d'autres tâches du projet. Si l'on considère que les ancêtres et les descendants de la tâche sont programmés au plus tôt, on définit une partie de la marge totale de la tâche, que l'on qualifie de **marge libre** et qui est égale à la différence entre :

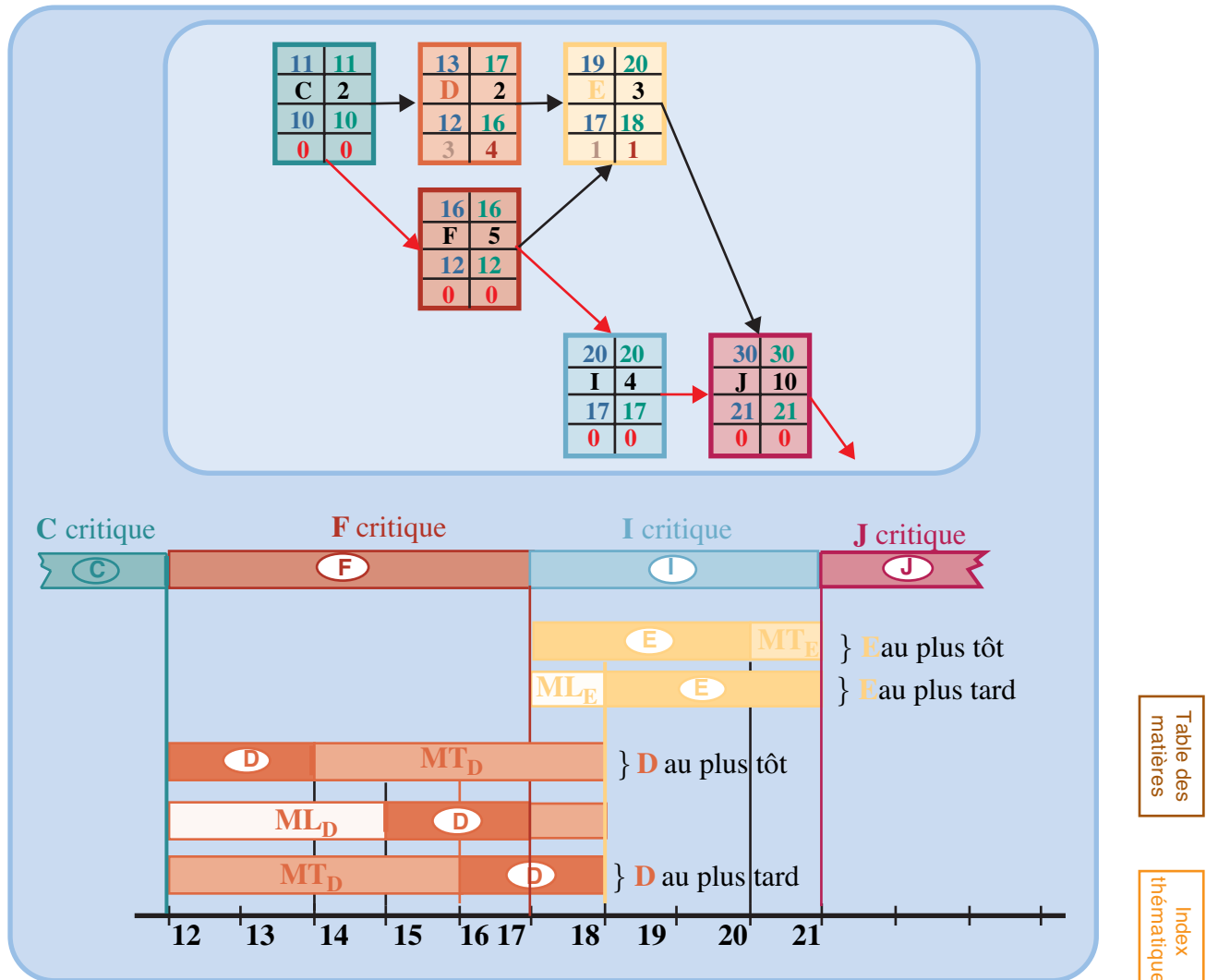
- la date de début au plus tôt du descendant (ou à la plus précoce de ces dates si la tâche a plusieurs descendants), moins 1,
- et sa date de fin au plus tôt.

à condition que cette différence soit positive, sinon la marge libre est nulle.

Les implications pratiques de ce concept sont les suivantes :

- Si cette différence est positive, un retard dans la programmation de la tâche par rapport à une programmation au plus tôt n'a aucune conséquence tant que ce retard n'excède pas cette marge libre.
- Cette marge libre est une partie de la marge totale et peut aller de zéro à la valeur prise par la marge totale¹.

FIGURE 81
Illustration du concept de marge libre



- Une tâche dont la marge totale est nulle a donc nécessairement une marge libre nulle. Si une tâche i se termine au plus tard à la date t et si son descendant débute au plus tôt à la date $t + 1$, aucun jour ouvrable ne sépare la fin de i du début de j . Dans notre exemple, les marges libres sont toutes nulles sauf celle des tâches D, E; H et M.
- Si l'utilisation d'une marge libre d'une tâche non critique n'affecte pas la marge totale des tâches non critiques dont elle est l'ancêtre, il n'en est pas forcément de même de celle des tâches non critiques dont elle est le descendant direct ou indirect (à condition qu'aucune tâche critique ne vienne s'interposer). Pour s'en persuader, il suffit de voir sur la figure 81, que si l'on définit la programmation de E avant celle de D et si, pour ce faire, on utilise la marge libre de E (qui débute donc le 17^e jour), on diminue alors la marge

1. Note de la page précédente. En effet, par définition, la marge totale est la différence entre la date de fin au plus tard et celle de fin au plus tôt alors que la marge libre est la différence entre la date de début au plus tôt du successeur, moins 1, et la date de fin au plus tôt de la tâche étudiée; cette dernière valeur ne saurait être postérieure à la date de début au plus tôt du successeur sans violer la relation d'antériorité.

totale de D qui passe de 4 à 3 jours. Cette remarque conduit à pousser encore l'analyse de la marge.

Si l'on considère que les ancêtres de la tâche sont programmés au plus tard (et non au plus tôt comme précédemment) et ses descendants, au plus tôt, on définit une partie de la marge libre de la tâche, que l'on qualifie de **marge indépendante** et qui est égale à la différence entre :

- la date de début au plus tôt du descendant (ou la plus précoce de ces dates si la tâche a plusieurs descendants), moins 1,
- et la date de fin au plus tard de son ancêtre (ou la plus tardive de ces dates, si la tâche a plusieurs ancêtres) augmentée de la durée de la tâche,

à condition que cette différence soit positive, sinon la marge indépendante est nulle.

Dans notre exemple, la marge indépendante de E est nulle et celle de D est de 3 jours. Cette marge indépendante est moins utilisée que la marge libre, dans la mesure où la programmation des tâches s'effectue le plus souvent par ordre croissant de niveau.

Ces informations consignées dans la [figure 79, page 300](#), se transforment en informations plus directement exploitables si la date de début du projet est fixée. Pour un projet commençant au 2 janvier 2002, la conversion en dates calendaires (cf. § III-1.1.3.1, [page 295](#)) conduit au tableau de la [figure 82](#). Ces éléments de programmation sont maintenant à exploiter.

Table des matières

Index thématique

FIGURE 82
Éléments de programmation finale

N°	Nom de la tâche	Début	Fin	Début repoussé au plus tard le	Fin repoussée au plus tard le	Marge libre	Marge totale
1	A-Terrassement	Mer 02/01/02	Mar 08/01/02	Mer 02/01/02	Mar 08/01/02	0 jour	0 jour
2	B-Fondations	Mer 09/01/02	Lun 14/01/02	Mer 09/01/02	Lun 14/01/02	0 jour	0 jour
3	C-Charpente verticale	Mar 15/01/02	Mer 16/01/02	Mar 15/01/02	Mer 16/01/02	0 jour	0 jour
4	D-Charpente toiture	Jeu 17/01/02	Ven 18/01/02	Mer 23/01/02	Jeu 24/01/02	3 jours	4 jours
5	E-Couverture	Jeu 24/01/02	Lun 28/01/02	Ven 25/01/02	Mar 29/01/02	1 jour	1 jour
6	F-Maçonnerie	Jeu 17/01/02	Mer 23/01/02	Jeu 17/01/02	Mer 23/01/02	0 jour	0 jour
7	G-GO plomberie/électricité	Mar 15/01/02	Jeu 17/01/02	Mer 16/01/02	Ven 18/01/02	0 jour	1 jour
8	H-Dalle béton	Ven 18/01/02	Mar 22/01/02	Lun 21/01/02	Mer 23/01/02	1 jour	1 jour
9	I-Chauffage	Jeu 24/01/02	Mar 29/01/02	Jeu 24/01/02	Mar 29/01/02	0 jour	0 jour
10	J-Plâtre	Mer 30/01/02	Mar 12/02/02	Mer 30/01/02	Mar 12/02/02	0 jour	0 jour
11	K-Finitions	Mer 13/02/02	Mar 19/02/02	Mer 13/02/02	Mar 19/02/02	0 jour	0 jour
12	L-Achat machine	Mer 02/01/02	Mar 22/01/02	Ven 18/01/02	Jeu 07/02/02	0 jour	12 jours
13	M-Réception essais	Mer 23/01/02	Ven 25/01/02	Ven 08/02/02	Mar 12/02/02	12 jours	12 jours

III-1.1.5 Programmation effective du projet

L'existence de tâches non critiques implique qu'il existe plusieurs solutions d'ordonnancement ayant la même performance, c'est-à-dire la même date minimale d'achèvement du projet. Pour être précis, dans notre exemple, il existe 1274 ordonnancements possibles conduisant à une durée d'exécution du projet en 35 jours. Cette valeur est le produit du nombre d'ordonnements possibles sur chaque chemin non critique (soit, de haut en bas¹, $9 \times 3 \times 91 = 2457$). La programmation définitive du projet s'effectuera en fonction de principes généraux de prudence et d'économie.

Le premier principe peut être qualifié de **principe de prudence**. L'existence d'aléas divers incite à programmer au plus tôt les tâches non critiques ou plus exactement assez tôt pour que cette programmation conduise à des marges totales suffisantes pour absorber d'éventuels aléas. En cas de réintroduction, à ce stade,

des contraintes disjonctives et cumulatives, on a d'autant plus de chances de «tenir» le temps d'achèvement minimal que l'on ordonnance au plus tôt les tâches non critiques. Ce principe de prudence conduit à qualifier parfois de **tâches subcritiques**, les tâches dont la marge totale est considérée comme faible par rapport aux aléas susceptibles de se produire. Ces tâches subcritiques sont à ordonnancer au plus tôt. La qualification de «subcritique» est une affaire d'appréciation par le responsable du projet mais certains logiciels proposent de considérer comme telles, toutes les tâches dont la marge totale est inférieure à un seuil défini arbitrairement par l'utilisateur. On verra au § III-3, page 325, comment on peut affiner cette notion en introduisant une approche aléatoire du problème dans laquelle on calcule, pour chaque tâche une probabilité d'être critique, ce qui conduit à considérer arbitrairement comme subcritiques les tâches qui ont, par exemple, au moins 90 % d'être critique.

Le second principe peut être qualifié de **principe d'économie**. L'exécution d'une tâche est normalement consommatrice de ressources diverses. La date d'acquisition de certaines ressources spécifiques peut être conditionnée par la date de programmation de la tâche. Deux cas de figure sont alors à distinguer.

- Il peut s'agir tout d'abord de ressources que l'on peut considérer comme payées au temps de présence dans l'entreprise à partir du moment où elles sont acquises et pour une durée qui excède celle de la tâche; ce sera le cas, par exemple, d'une embauche de personnel ou de la passation d'un contrat de location de longue durée. Dans ce cas, une programmation au plus tôt génère des dépenses inutiles.
- Il peut s'agir de ressources consommées (matières premières ou composants); dans ce cas, il peut exister un coût d'opportunité associé à un achat précoce (agios bancaires, par exemple). La préoccupation d'économie incitera à une programmation au plus tard.

Les points de vue de prudence et d'économie sont donc largement antinomiques et le gestionnaire du projet devra arbitrer. Cet arbitrage se complique par le fait que, bien souvent, le principe d'économie prévaut pour une tâche non critique et que c'est le principe de prudence qui doit être privilégié pour son descendant également non critique. Plusieurs idées sont exploitables, étant entendu que le travail d'ordonnancement doit tenir compte de l'ensemble des contraintes, et pas seulement des contraintes potentielles:

- On a souvent intérêt¹ à mutualiser les risques et donc à chercher à partir d'estimation de durées plutôt optimistes² puis à:

1. *Note de la page précédente.* Le dénombrement 9 correspond aux 4 x 2 cas de figure correspondant à la combinaison de l'événement «D finissant le 13^e ou 14^e ou 15^e ou 16^e jour» et de l'événement «E commençant le 17^e ou le 18^e jour» + «D finissant le 17^e jour et E commençant le 18^e jour». Le dénombrement 3 correspond aux événements «G finissant le 12^e jour et H commençant le 13^e jour» ou «G finissant le 12^e jour et H commençant le 14^e jour» ou «G finissant le 13^e jour et H commençant le 14^e jour». Le dénombrement 91 correspond aux possibilités de programmations de L et de M, sachant que l'on commence par une programmation au plus tôt de L, combinée avec les 13 possibilités de programmation de M, puis que l'on passe à une programmation de L s'achevant le 16^e jour combinée avec 12 possibilités de programmation de M, puis que l'on passe à une programmation de L s'achevant le 17^e jour combinée avec 11 possibilités de programmation de M..., ce qui donne 13 + 12 + 11 + ... + 1 = 91.

- mettre un **tampon** entre la date de fin du projet et celle des tâches sans descendant¹, ce qui correspond à une assurance globale du projet visant à titre principal, l'ensemble des tâches critiques,
- à considérer chaque chemin non critique en mettant un tampon entre le dernier descendant non critique du chemin et son propre descendant, lequel ne peut être qu'une tâche critique; ce tampon correspond à une mutualisation du risque du chemin non critique; reste à programmer les tâches de ce chemin non critique.
 - . Certains spécialistes² recommandent alors de faire une programmation au plus tard des tâches du chemin non critique, en se calant sur le début de la période tampon qui vient d'être définie. Dans ces conditions, un dépassement de durée d'une tâche non critique ayant des répercussions sur son descendant, il convient de mettre en place un système alertant les acteurs-métiers responsables de la tâche suivante, de l'imminence de la fin de la tâche en cours (qu'il y ait ou non retard), si ces acteurs-métiers ne sont pas les mêmes³. En tout état de cause, ce système d'alerte est judicieux à généraliser pour permettre une meilleure gestion des ressources.
 - . En dépit du système d'alerte, cette programmation au plus tard préconisée ci-dessus peut conduire à de fréquentes remises en cause des dates de début qui peuvent s'avérer assez perturbantes, en particulier lorsque l'entreprise se gère massivement par projet. En effet, une énergie et un temps non négligeables sont alors consacrés à gérer l'impact des changements de dates. Il est alors judicieux, si les marges totales des tâches du chemin non critique sont suffisantes, de prévoir entre chaque tâche un tampon dont la taille est liée aux risques encourus. Si les durées sont respectées, le système d'alerte est utilisé pour prévenir les acteurs chargés de l'exécution de tâches non critiques en aval, de la possibilité de commencer plus tôt, ce qui crée des marges de manœuvre localement pour des acteurs-métiers qui doivent travailler simultanément sur plusieurs projets.

-
1. *Note de la page précédente.* Ces bonnes pratiques, bien connues des spécialistes, ont été «théorisées» en prenant appui sur la théorie des contraintes développée par Goldratt (voir aussi la note de la [page 386](#)), l'écrit le plus clair sur ce thème étant celui de Newbold (1998, [316]). Ce courant, s'appuie sur un «nouveau» concept, celui de la **chaîne critique**, qui n'est autre que celui du chemin critique lorsqu'on l'utilise correctement en présence de contraintes cumulatives, sachant ***L'introduction de ces contraintes accroît le nombre de tâches critiques et conduit à créer des chemins critiques partant de tâches non critiques.*** Bon nombre d'utilisateurs (et quelques logiciels, à travers leurs calculs de marges) considèrent à tort comme critiques, les seules tâches considérées comme telles dans le problème d'ordonnancement n'intégrant que des contraintes potentielles. Nous reviendrons sur ce point à la [page 315](#).
 2. *Note de la page précédente.* Le lecteur est incité à revoir, à ce propos, les causes d'allongement de durée décrites au § II-2.2, [page 279](#), et en particulier celles liées au parallélisme souvent utilisé dans la gestion multi-projet des acteurs-métiers.
 1. Ce qui revient à majorer la durée minimale d'exécution du projet calculée sur la base des durées optimistes.
 2. En particulier ceux du courant de la chaîne critique; ce tampon est appelé *feeding buffer* dans cette littérature.
 3. Le courant de la chaîne critique qualifie de mise en place de tampons sur les ressources (*resource buffer*) ce délai minimal de transmission de l'information de l'arrivée d'une tâche. En toute rigueur, il ne s'agit pas, à proprement parler d'un tampon, c'est-à-dire d'un laps de temps dont on peut disposer en cas de retard de certaines tâches et permettant de maintenir la date d'achèvement du projet, si ce retard n'excède pas ce laps de temps.

- Cette vision privilégie le principe de prudence mais, par la programmation au plus tard qu'elle préconise, elle ne « malmène » pas le principe d'économie.
- Dans l'exploitation des marges, il faut tenir compte du calendrier (ce qui suppose déterminée la date de début du projet) pour tenir compte de vacances, fluctuations d'activité..., lors de la programmation de certaines tâches non critiques.
 - On peut avoir intérêt à simplifier l'ordonnancement effectif du projet en essayant de constituer deux ou trois groupes de tâches sur une base organisationnelle et chercher à gérer de manière autonome l'ordonnancement de chaque groupe. Cette indépendance n'est possible que lorsqu'aucune relation d'antériorité ne porte entre deux tâches non critiques (et non encore programmées) appartenant à deux groupes différents. Si l'analyse montre qu'il n'y a pas indépendance, il faut alors commencer par s'intéresser à la programmation de l'une des deux tâches de chacune des paires de tâches repérées.

L'application de ces principes conduit à une vision empirique mais raisonnée de la programmation, dans laquelle le logiciel d'ordonnancement intervient en aide par sa capacité à prendre en compte les conséquences d'un ensemble de décisions et à faciliter le repérage des tâches non critiques. La [figure 83](#), résume la démarche de programmation finale.

FIGURE 83
Utilisation des marges

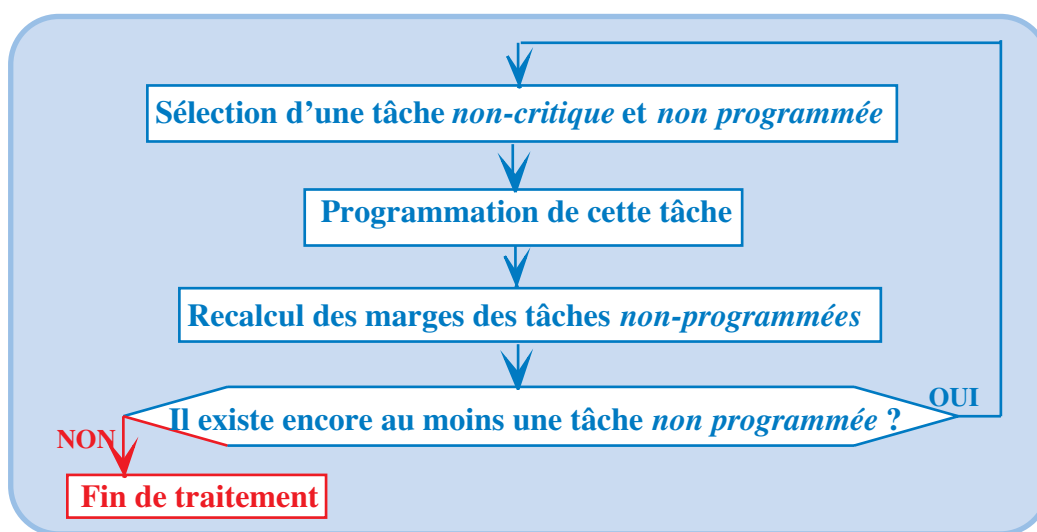


Table des
matières

Index
thématique

III-1.1.6 Présentation des résultats

Le graphe *Potentiel-Tâches* est l'instrument privilégié d'aide à la définition d'un problème d'ordonnancement, en appui de l'organigramme des tâches (cf. [§ II-2.1, page 277](#)), dans la mesure où il force les acteurs du projet à expliciter les relations entre les tâches et facilite la mise au point d'un ordonnancement définitif.

Une fois l'ordonnancement décidé, il vaut mieux transmettre les décisions prises sous la forme d'un graphique de Gantt¹. Ce type de représentation est classiquement utilisé en ordonnancement pour décrire l'occupation des ressources par

1. sur lequel on reviendra au [chapitre V, § I-1.1.1.2, page 365](#).

les ordres de fabrication (OF) grâce à un repérage de l'OF, sur la ligne correspondant au centre, par un segment de droite dont la longueur est proportionnelle au temps d'occupation du centre. Lorsque l'on utilise ce type de graphique en gestion de projet, la notion de ressource est remplacée par celle de tâche et cette représentation est connue sous le nom de *graphique de Gantt* ou de *diagramme de Gantt* ou de *diagramme à barre*. La figure 84 illustre ces deux types d'utilisation.

FIGURE 84

Comparaison du Gantt Ressources et du Gantt Tâche

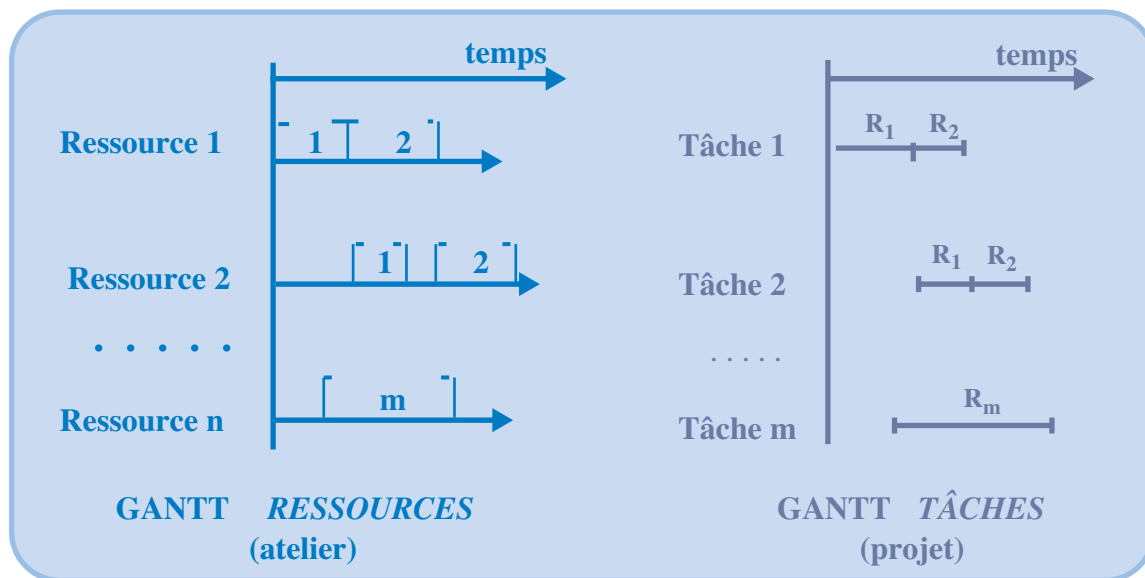


Table des matières

Index thématique

De nombreux logiciels d'ordonnement de projet utilisent un **Gantt fléché**, ce qu'illustre la figure 85, page 308 ; dans ce type de représentation, les flèches correspondent à des relations d'antériorité. La présentation de résultats sur un graphique de Gantt s'avère être l'un des meilleurs outils de communication avec les opérationnels en permettant de visualiser des avancements, d'effectuer des comparaisons entre prévisions et réalisation et de faire comprendre l'interdépendance des décisions d'ordonnement et les conséquences mécaniques de retard

Aujourd'hui, les principaux logiciels offrent tous des filtres permettant de confectionner automatiquement des graphiques et des tableaux de synthèse ne retenant que les informations jugées pertinentes (tâches en cours, tâches mobilisant telle catégorie de ressource, tâches critiques ...) ; ils diffèrent toutefois sur le niveau de sophistication des filtres¹.

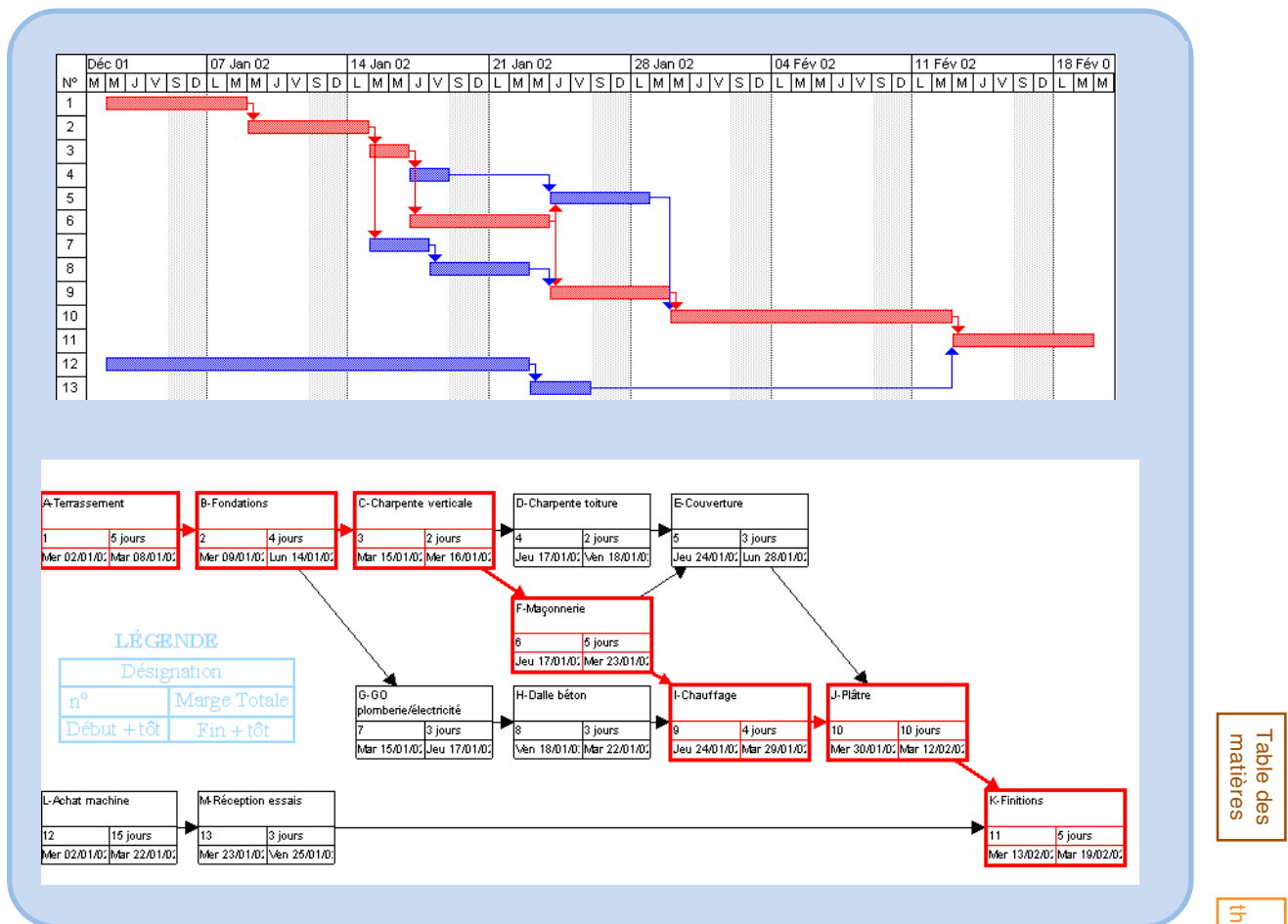
III-1.2 Établissement du graphe *Potentiel-Étapes*

Ce graphe est aussi appelé **graphe Potentiel-Étapes** ou encore **graphe PERT-Étapes** ou plus simplement **graphe PERT**. Dans ce type de représentation :

- les sommets du graphe représentent le début possible d'exécution d'une tâche (ou de plusieurs tâches) et correspondent à une **étape** dans la réalisation du projet² et non à la tâche elle-même comme dans la méthode précédente ; le graphe comporte un sommet de départ final et un sommet final unique ;

1. La sophistication maximale impliquant l'usage de requêtes SQL et donc l'usage d'une base de données relationnelle respectant au moins la troisième forme normale.

FIGURE 85
Gantt fléché et graphe Potentiel-Tâche du projet ordonnancé au plus tôt
(projet débutant le 2 janvier 2002)



- les arcs représentent des tâches mais aussi les relations d'antériorité du fait que l'origine d'un arc est en même temps l'extrémité d'autres arcs (tâches-ancêtres). La longueur de ces arcs est sans signification particulière et au plus, un arc peut relier deux sommets donnés du graphe.

Pour être complet, indiquons enfin que la méthode CPM associe le libellé de la tâche à l'arc et que la méthode PERT explicite, en outre, l'événement correspondant au sommet du graphe. Le [tableau 56](#) résume les différences entre les deux approches. Ces deux graphes *Potentiel-Tâches* et *Potentiel-Étapes* représentent une seule et même logique sous deux formes différentes. On dit qu'il y a dualité entre ces deux formulations, l'une est dite primale, et l'autre duale¹.

Dans ses principes, un graphe PERT est simple à établir. En pratique, sa construction est beaucoup plus délicate que celle d'un graphe *Potentiel-Tâches*. En

2. *Note de la page précédente.* Si l'on définit l'événement \mathcal{E}_i comme la fin de l'exécution de la tâche i , l'étape se définit comme l'événement particulier correspondant à la réalisation simultanée des événements \mathcal{E}_j où les tâches j correspondent aux ancêtres d'une tâche donnée (ou d'un groupe de tâches si toutes ces tâches ont les mêmes ancêtres). Dans cette perspective, retenue par l'AFITEP, l'événement est un concept plus général que celui d'étape. Cette distinction n'est pas retenue dans la terminologie Anglo-Saxonne où les mots *event* et *step* sont généralement considérés comme synonymes.

1. Voir Maurel, Roux & Dupont (1977, [295]), pour une analyse rigoureuse de ce point

TABLEAU 56

Comparaison des conventions retenues dans la représentation Potentiel - Tâches et la représentation Potentiel - Étapes

Problème	Désignation de la méthode	Signification donnée aux	
		sommets	arcs
Dual	Potentiel – Tâches (ou Potentiels)	Tâches	relations d'antériorité
Primal	Potentiel – Etapes (ou PERT)	Étapes	Tâches et relations d'antériorité

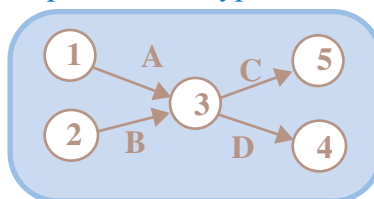
effet, les conventions retenues dans le graphe *Potentiel-Étapes* conduisent à la création d'un certain nombre de **tâches fictives**. Ces dernières, de durée nulle, dupliquent des tâches réelles pour résoudre certains problèmes liés à la double fonction des arcs dans le graphe qui doivent symboliser les tâches et représenter correctement leurs relations d'antériorité (aucune des tâches représentées par un arc quittant un sommet ne peut débuter avant que ne soient achevées **toutes** les tâches représentées par les arcs arrivant à ce sommet).

Pour faire comprendre le mécanisme de création des tâches fictives, nous allons comparer quelques problèmes types auxquels on se ramène toujours, en mettant côte à côte les trois représentations graphiques : Potentiel, PERT et Gantt. Le [tableau 57, page 310](#), fournit la représentation graphique des problèmes types que l'on rencontre et auxquels il est toujours possible de se ramener. L'examen de ces problèmes types conduit à faire quelques remarques.

- Les tâches fictives sont introduites, dans les problèmes types 3 à 5, pour assurer une représentation correcte des relations d'antériorité. Reprenons, par exemple, le troisième problème type et supposons que la représentation graphique de la [figure 86](#) ait été retenue. Sa signification n'est pas compatible avec l'énoncé du troisième problème type : le sommet 3 visualise l'événement (ou étape) de fin d'exécution des tâches A et B, lequel conditionne le début de la réalisation des tâches C et D, alors que l'énoncé ne fait dépendre que C de la réalisation préalable de A et de B. Cet exemple illustre bien le fait que la création de tâches fictives est consécutive au fait que les arcs servent à la fois à représenter des tâches et des relations d'antériorité.

FIGURE 86

Représentation erronée du problème- type 3 du tableau 57 de la page 310



- La tâche fictive créée dans le problème type 6 ne s'impose pas pour des raisons de cohérence graphique ; en effet, il aurait été parfaitement concevable d'avoir deux arcs ayant la même origine et la même extrémité. Il se trouve seulement que les concepteurs de programmes informatiques ont pris l'habitude, dans la codification des données à saisir, de désigner un arc par le

TABLEAU 57
 Comparaison des 3 modes de représentation graphique d'un projet

Problème-type					Représentation graphique		
Numéro	Tâche	Durée	Ancêtres	Remarque	Graphique de Gantt (ordonnancement au plus tôt)	Graphe Potentiel-Tâches	Graphe Potentiel-Étapes
1	A B C	2 3 1	- - A, B				
2	A B C	2 3 1	- A A				
3	A B C D B'	2 3 1 3 0	- - A, B B -	B' = tâche fictive doublant la tâche B			
4	A A' B C D D' E	2 0 3 1 3 0 2	- A A A, D - D D	A' et D' = tâches fictives doublant les tâches A et D			
5	A B C C' C'' D E	2 3 1 0 0 3 2	- A, C - - - - D, C	C' et C'' = tâches fictives doublant la tâche C			
6	A B C D D' B'	2 3 1 2 0 0	- A B, D A - -	B' et D' = tâches fictives doublant les tâches B et D			<p>1° SOLUTION</p> <hr/> <p>2° SOLUTION</p>
7	A B C D	3 4 1 2	- A - C	B débute 1 jour après le début de A => A décomposé en C + D	<p>Recouvrement de 2 jours</p>	<p>(lien début-début)</p>	<p>A décomposé en C + D</p>
8	A B C	2 3 1	- A (C) A	B débute 1 jour après la fin de A => création de la tâche fictive C	<p>Attente de 1 jour</p>	<p>(lien début-début)</p>	<p>(Tâche fictive C)</p>

Table des matières

Index thématique

couple ordonné de ses numéros de sommets, ce qui implique qu'un couple de numéros de sommet ne puisse désigner plusieurs arcs.

- La tâche fictive créée dans le problème type 8 ne répond pas, elle non plus, au souci de cohérence dans la représentation graphique des relations d'antériorité. Il s'agit d'une astuce de présentation permettant de traiter facilement les attentes. De telles tâches peuvent être introduites pour empêcher qu'une tâche ne débute avant une certaine date: il suffit alors d'introduire cette tâche fictive comme ancêtre de la tâche visée¹.

Pour terminer, indiquons que la numérotation des sommets est arbitraire, cependant certains praticiens préconisent d'utiliser des nombres impairs, les nombres pairs étant réservés pour illustrer une particularité du réseau. Conventionnellement, le numéro du sommet d'arrivée est supérieur au numéro du sommet de départ. Le graphe PERT de notre exemple numérique est donné à la [figure 87](#).

FIGURE 87

Représentation du problème par un graphe Potentiel- Étapes (ou PERT)

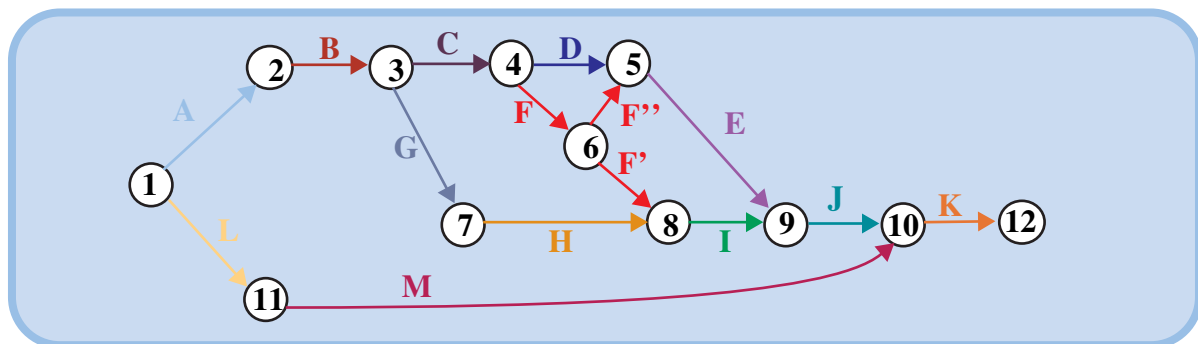


Table des matières

Index thématique

III-1.3 Comparaison des deux approches

Ces deux approches fournissent les mêmes résultats, mais la méthode *Potentiel-Tâches* est plus facile à utiliser pour quatre raisons.

- Le graphique *Potentiel-Tâches* est plus lisible par un non-spécialiste (pas de tâche fictive) et se prête facilement à un calcul direct sur le graphe du chemin critique des dates de fin au plus tard et de fin au plus tôt et des marges, ainsi qu'à une visualisation graphique immédiatement compréhensible de ces informations. Il permet en outre, comme on l'a indiqué à la [page 294](#), de visualiser d'autres informations (partition des tâches en sous-ensembles à l'aide de critères techniques ou administratifs), ce qui n'est pas possible avec un graphe *Potentiel-Étapes*.
- L'introduction de tâches fictives accroît le nombre de tâches (de l'ordre de 40 % en plus dans les applications réelles), ce qui alourdit la méthode *Potentiel-Étapes*.
- La méthode *Potentiel-Tâches*, contrairement à la méthode *Potentiel-Étapes*, permet de travailler directement à différents niveaux d'agrégation de tâches, car on peut avec ce formalisme représenter un groupe de tâches par un seul sommet, ou inversement éclater, sans problème, une tâche en plusieurs tâches

1. Cette procédure utilisable également en *Potentiel Tâches* ou dans les programmes informatiques n'offrant pas cette possibilité, comme on l'a vu dans la note du bas de la [page 297](#).

élémentaires. En passant à un niveau de détail plus grand, il est possible de raccourcir le chemin critique (voir § III-4.1, page 334).

- Enfin, la méthode *Potentiel-Tâches* permet très facilement de modifier le problème initial par adjonction ou suppression de tâches et/ou de contraintes, alors que la méthode *Potentiel-Étapes* conduit, dans ce cas, à des adjonctions et/ou suppressions de tâches fictives, ce qui induit des problèmes évidents sur le plan de la représentation graphique.

III-2 Recherche d'un ordonnancement avec prise en compte de toutes les contraintes

L'introduction de contraintes cumulatives (et disjonctives) est à peu près inévitable dans la définition et la résolution des problèmes de gestion de projet. On se limitera ici au cas de l'univers certain. Reste alors à définir le critère que l'on veut privilégier. Deux critères sont classiquement utilisés : celui de la minimisation de la durée d'achèvement, sous respect des contraintes cumulatives, potentielles et disjonctives (§ III-2.1) et celui (peu utilisé) du lissage de charge des ressources, dans lequel on cherche à définir le niveau des ressources à mobiliser de façon à ce qu'il soit le plus stable possible, ce qui revient à dire que l'on cherche à définir des contraintes cumulatives acceptables (§ III-2.2, page 324).

III-2.1 Critère de la minimisation de la durée d'achèvement du projet

Dans cette formulation, les contraintes cumulatives, potentielles et disjonctives sont considérées comme intangibles. On examinera d'abord les méthodes heuristiques de résolution de cette classe de problèmes (§ III-2.1.1), avant de présenter une formulation rigoureuse du problème permettant, théoriquement, de trouver la solution optimale pour des problèmes de dimension raisonnable (§ III-2.1.1, page 312). On illustrera enfin cette approche par un exemple (§ III-2.1.2, page 315) qui montre la limite de certains logiciels commerciaux et le fait qu'une attention excessive sur le caractère optimal de la solution n'est pas forcément judicieuse, compte tenu de certaines hypothèses utilisées classiquement dans la formulation de cette classe de problèmes.

III-2.1.1 Les méthodes heuristiques de résolution

Il est possible de chercher un ordonnancement des tâches respectant les contraintes d'antériorité et les contraintes cumulatives, tout en utilisant le critère de la minimisation de la date d'achèvement du projet. On parle alors de **nivellement**¹. La résolution de tels problèmes passe habituellement par l'utilisation d'heuristiques s'inspirant des techniques utilisées en ordonnancement en ateliers

1. que les Anglo-Saxons appellent *levelling* ; le nivellement ne doit pas être confondu avec le **lissage** que les Anglo-Saxons appellent *smoothing* et que l'on examinera au § III-2.2, page 324 ; cela étant, on notera que cette correspondance peut être trompeuse, dans la mesure où les définitions retenues ici qui sont celles de l'AFNOR ne correspondent pas toujours à celles de certains utilisateurs anglo-saxons, en particulier, celle donnée par le *British Standard Institution*, qui fonde la différence sur le critère d'utilisation d'un processus itératif (*levelling*) ou non (*smoothing*). Des analyses des heuristiques utilisées peuvent être trouvées dans l'article de Davis (1973, [126]), Davis et Patterson (1975, [125]), Cooper (1976, [105]), Thesen (1976, [416]), Holloway, Nelson & Suraphongschai (1979, [234]) et celui de Kurtulus et Narula (1985, [269]) qui montre l'incidence de la structure du graphe logique sur la performance des règles, complétant l'étude de Patterson (1976, [327]).

spécialisés, surtout si plusieurs ressources doivent être prises en compte. Deux familles d'approches sont utilisées :

- L'approche de **procédures d'allocation en série**¹ (que les Anglo-Saxons appellent « *serial allocation procedure* ») consiste, une fois calculées les dates au plus tôt et au plus tard du problème relaxant les contraintes cumulatives, à établir un classement des tâches qui sera utilisé en cas de conflit pour déterminer la tâche à privilégier. On utilisera par exemple un classement par date de début au plus tard avec, pour départager d'éventuels ex aequo la marge totale par valeur croissante. Au fur et à mesure que des tâches sont ordonnancées, elles sont rayées de la liste. La procédure suivie est simple : on prend la première activité de la liste dont tous les ancêtres ont déjà été retirés de la liste et on la place au plus tôt en fonction des disponibilités résiduelles des ressources, puis on la retire de la liste pour recommencer le processus. Cette méthode est très rapide et est considérée comme donnant de bons résultats². Cela étant, le classement initialement établi ne peut guère prétendre refléter trop longtemps le point de vue qu'il a privilégié, au fur et à mesure que les conflits d'allocation se résolvent³.
- L'approche de **procédures d'allocation en parallèle** (que les Anglo-Saxons appellent « *parallel allocation procedure* ») consiste à ne travailler que sur la liste restreinte des tâches que l'on peut ordonnancer parce que leurs ancêtres ont été déjà ordonnancés et que l'on classe en faisant appel à des critères qui peuvent varier d'une liste à l'autre. Cette approche est la plus fréquemment utilisée, mais elle requiert des temps de calcul plus longs. Cette seconde approche est à la fois plus myope puisque l'on s'intéresse à un sous-problème « local » et plus adaptable parce que le classement se définit sur la base de données réactualisées, sans que l'on puisse savoir a priori si cet avantage compense l'inconvénient précédemment cité. Les considérations qui suivent concernent la seconde approche, qui seule permet d'envisager dynamiquement une modification du problème.

La plupart des logiciels disponibles⁴ qui acceptent la prise en compte de ressources limitées dans la programmation d'un projet, utilisent des heuristiques frustes du type : détermination a priori de classes de priorité des tâches (fondée notamment sur des considérations de coût associées à un retard dans la programmation de la tâche), préférence donnée à la tâche la plus courte⁵, préférence donnée à la tâche de marge totale la plus faible (qui semblerait avoir de bonnes performances), préférence donnée à la tâche dont la date de début au plus tôt est

1. voir Maurel, Roux & Dupont (1977, [295]), p. 124-132, qui qualifient la procédure de **nivellement basé sur une liste d'installation** ; on peut également consulter sur ce point Lockyer & Gordon (1991, [284]), p. 135-140.

2. Voir Lockyer & Gordon (1991, [284]), p. 137

3. On reviendra sur ce point dans la recherche de solution d'ordonnancement en ateliers spécialisés (**chapitre V**, **figure 131**, **page 431**).

4. Certains ouvrages comme celui de Lock (1991, [283]), p. 150-153 ou celui de Meredith & Mantel (1989, [297]), p. 390-400, fournissent plus ou moins explicitement des grilles d'analyse pour guider l'utilisateur dans le choix d'un logiciel.

5. qui est l'équivalent de la règle du **Temps Opérateur Minimum** (connue aussi sous le sigle SOT, pour **Shortest Operating Time**, ou SPT pour **Shortest Processing Time**) utilisée souvent en ordonnancement en ateliers spécialisés (voir **page 413**). Formellement, le problème d'ordonnancement de projet et celui d'ordonnancement en ateliers spécialisés sont très voisins lorsque l'on introduit les contraintes cumulatives.

la plus précoce. Le problème se complique par la mobilisation éventuelle de plusieurs ressources par un même ensemble de tâches, dans la mesure où des conflits peuvent surgir dans l'utilisation de ces règles. En cas de conflit complexe, l'utilisateur ignore souvent comment le logiciel effectue son arbitrage, sauf si celui-ci offre à l'utilisateur la possibilité d'intervenir dans cette résolution. Les solutions ainsi retenues peuvent ne pas être optimales, la recherche par tâtonnement dans le cadre de problèmes hautement combinatoires pouvant réserver quelques surprises.

En tout état de cause, de nombreux progrès restent à faire au niveau des logiciels :

- Il a été montré que la performance des heuristiques utilisées dépend largement de la structure des problèmes rencontrés¹, ce qui conduit à être « prudent » sur la qualité des solutions proposées.
- Il semblerait que l'utilisation de techniques de Séparation et Evaluation Progressive² permettent de résoudre de manière optimale des problèmes comportant moins de 200 tâches et n'utilisant que quelques ressources³. L'approche d'énumération implicite (voir Talbot, 1982, [400]) est plus économe en place mais est un peu moins performante, tandis que les approches d'énumération limitée (voir Davis et Heidorn, 1971, [124]) s'avèrent très performantes dans certains cas, selon l'étude comparative de Patterson (1984, [329]). Ce champ d'investigation continue à être exploré (voir Bell & Park, 1990, [43] et Poiaga, 1989, [341]) et semble devenir de plus en plus attractif, compte tenu de la puissance croissante des micro-ordinateurs et des nouveaux systèmes d'exploitation. Cependant, ces approches ne prennent pas en compte la préemption (autorisation de scission de tâche), l'usage d'intensités variables d'utilisation des ressources et la variation du niveau de ressources au cours du projet, ce qui explique sans doute en partie pourquoi elles ne sont pas utilisées commercialement (du moins à notre connaissance).
- L'exemple de la [figure 88, page 316](#), conduit à s'interroger sur l'intérêt de la recherche d'une solution optimale d'un problème correctement défini du point de vue de la recherche opérationnelle mais qui n'est, en définitive, qu'une formulation possible n'intégrant ni certaines contraintes implicites (durée maximale admissible du projet, par exemple), ni la possibilité d'« assouplir » l'énoncé (par exemple, possibilité de relaxation momentanée de certaines contraintes ou vision « moins rigide » des durées).
- Il est vraisemblable qu'à terme, l'utilisation conjointe de systèmes-experts et d'heuristiques⁴ dans le cadre de systèmes interactifs d'aide à la décision s'appuyant sur un dialogue graphique permettra d'améliorer la performance des solutions proposées. Les expérimentations industrielles actuellement en cours de systèmes d'aide à la décision s'appuyant sur l'utilisation de

1. Voir Patterson (1976, [327]), Kurtulus & Davis [268], Kurtulus & Narula (1985, [269]) et Ülüsöy & Özdamar (1989, [425]).

2. Connue également sous son nom anglais de *Branch and Bound*; cette approche est détaillée au [chapitre V, § I-2.1, page 390](#).

3. Voir Stinson, Davis & Khumawala (1978, [396]), Hasting (1972, [220]), Lockyer & Gordon (1991, [284]), chapitre XV,

4. Voir Bell (1989, [42]).

systèmes-experts pour résoudre les problèmes d'ordonnancement en ateliers spécialisés¹ devraient conduire rapidement à des « transferts de technologie » intéressants.

III-2.1.2 Exemple et limites de la portée des solutions

L'une des caractéristiques essentielles d'un logiciel est la manière dont il peut gérer les conflits liés la consommation des ressources non stockables. Il convient de montrer la limite de la formulation classique et des solutions retenues par les logiciels². Il s'ensuit que ces logiciels doivent être utilisés comme des outils d'aide à la décision et que le gestionnaire ne doit surtout pas se reposer aveuglément sur les propositions obtenues.

Reprenons notre exemple, en introduisant une contrainte cumulative n'impliquant que deux tâches, l'une critique, l'autre pas, pour mieux démontrer les mécanismes mobilisés. Supposons qu'**ORDOMÉCA** dispose de 4 ouvriers pour effectuer tout ce qui touche au gros œuvre et, à ce titre, les tâches F et H. La tâche F est une tâche critique programmée (hors contraintes sur les ressources) pour les jours 12 à 16 et requiert la présence de 3 ouvriers. La tâche H n'est pas critique, sa programmation au plus tôt va du 13^e au 15^e jour (toujours en faisant abstraction des ressources) et nécessite la présence de 2 ouvriers. S'il n'est pas possible de faire appel à des heures supplémentaires ou à un renfort, il est alors impossible de réaliser le projet en 35 jours.

Examinons quelques solutions (illustrées par la [figure 88, page 316](#)) utilisables pour résoudre ce type de conflit :

- La première solution, quelquefois envisageable, consiste à relaxer la contrainte, c'est-à-dire à considérer que la contrainte n'en est pas une, parce qu'il est possible de mobiliser ponctuellement de la main-d'œuvre supplémentaire. On peut ajouter que la détection des surcharges est un préalable à toute négociation pour l'obtention de moyens additionnels.
- La deuxième solution consiste à jouer une logique d'ordonnancement prioritaire des tâches critiques et considérer le nombre d'ouvriers requis chaque jour pour une tâche comme intangible. Dans ce cas, **la tâche H**, programmée les jours 17 à 19, **devient critique** et le projet prend 3 jours de retard. Trois remarques importantes doivent être faites :
 - De nombreux logiciels d'ordonnancement utilisent par défaut cette solution 2, avec possibilité d'utilisation d'indices de priorité pour déterminer qui doit être servi en premier, ce qui n'a rien de contestable puisque c'est cohérent avec la formulation initiale et que l'utilisation d'une démarche optimale (présentée au § III-2.1.3, page 319) peut aboutir au même résultat. Ce qui est **inacceptable** en revanche, c'est que **certaines de ces logiciels considèrent l'une des deux tâches H ou F comme non critique** (voir [figure 89, page 317](#), où la marge totale de la tâche F calculée est de 3

1. par exemple un logiciel comme OPAL, utilisé en France.

2. Ces remarques anciennes (Giard, 1991, [174] et 1992, [173]) n'ont rien perdu de leur actualité. Depuis le début des années 1990, l'offre logiciel a axé ses efforts d'amélioration a sur l'ergonomie et la facilité de *reporting* et n'a que peu progressé sur le reste. Il vous est conseillé d'utiliser votre logiciel de gestion de projet pour traiter cet exemple avec l'introduction d'une seule ressource limitée à 4 et utilisée par les tâches F et H comme indiqué dans le texte, pour comprendre comment peuvent être gérés les problèmes posés par les contraintes cumulatives.

FIGURE 88

Ordonnancement sous contrainte de disponibilité de ressource

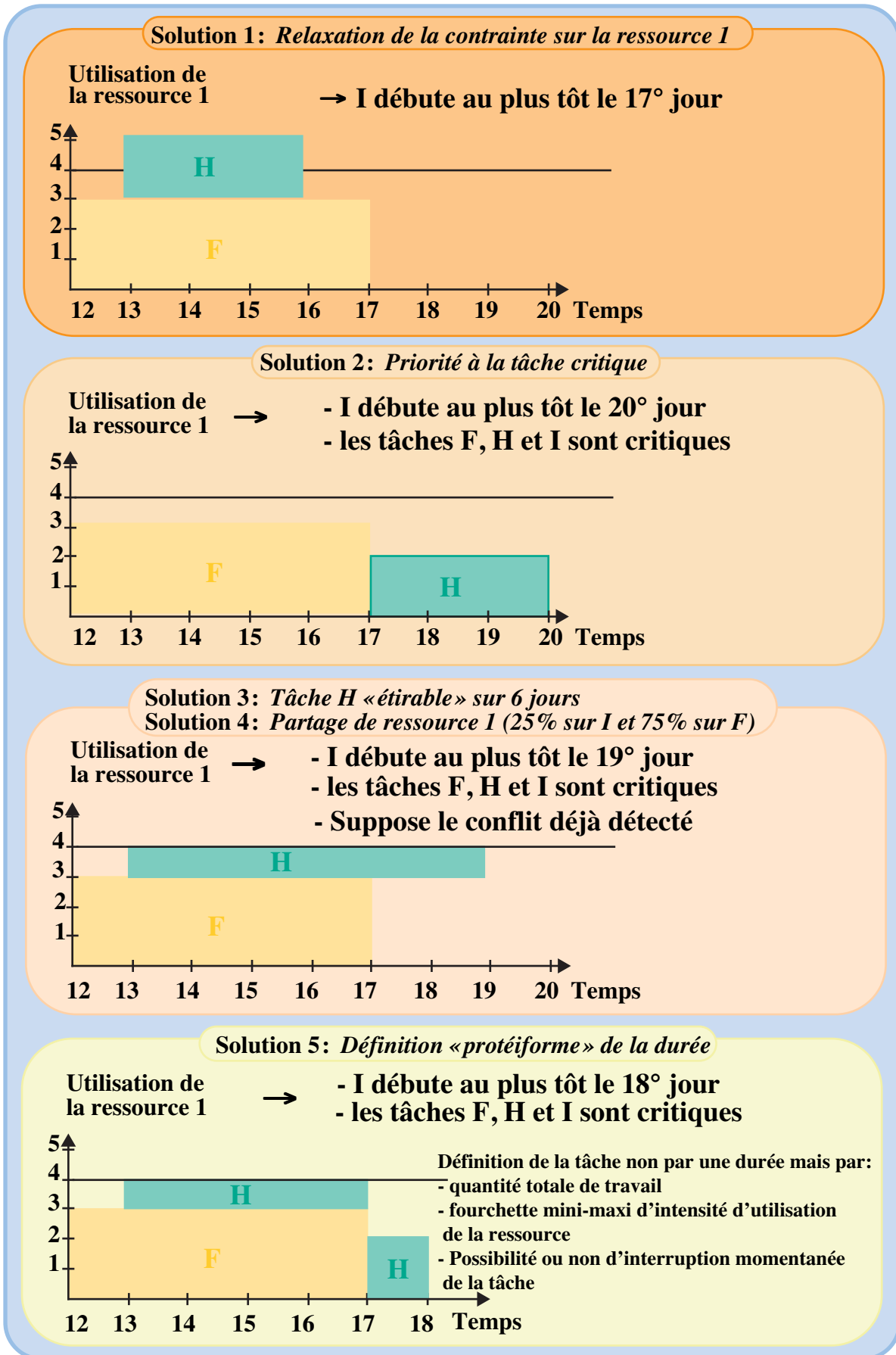


Table des matières

Index thématique

jours, au lieu de 0). L'utilisateur non averti est alors amené à prendre des décisions sur la base d'informations erronées. Le concept de chaîne critique (introduit à la page 305), qui ne fait que déterminer le graphe des tâches critiques lorsque des contraintes cumulatives existent, n'aurait sans doute pas vu le jour sans la persistance de cette erreur méthodologique.

FIGURE 89

Déclaration erronée de tâches critiques suite à une prise en compte d'une contrainte cumulative et utilisation de la solution 2

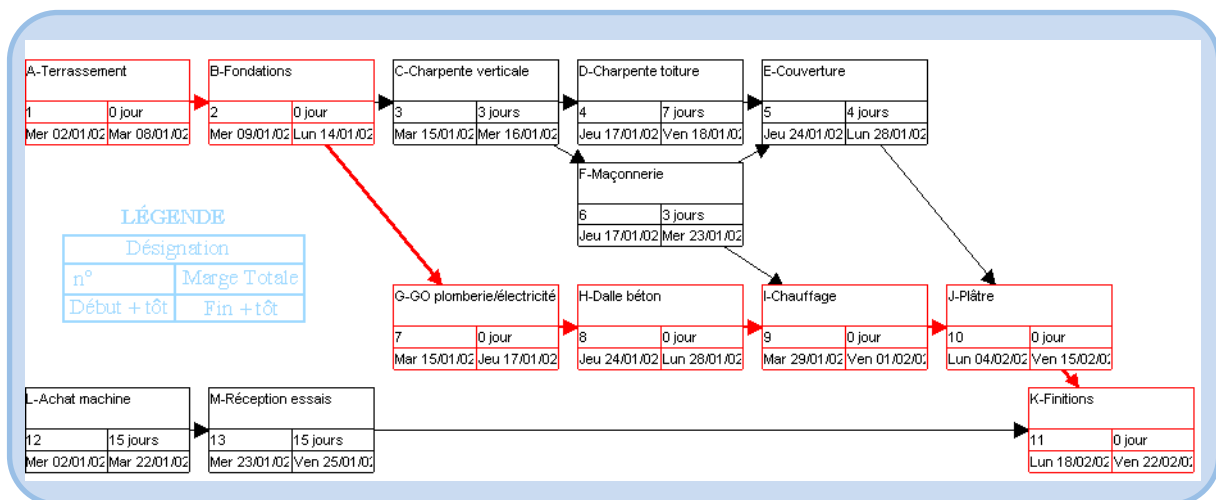


Table des matières

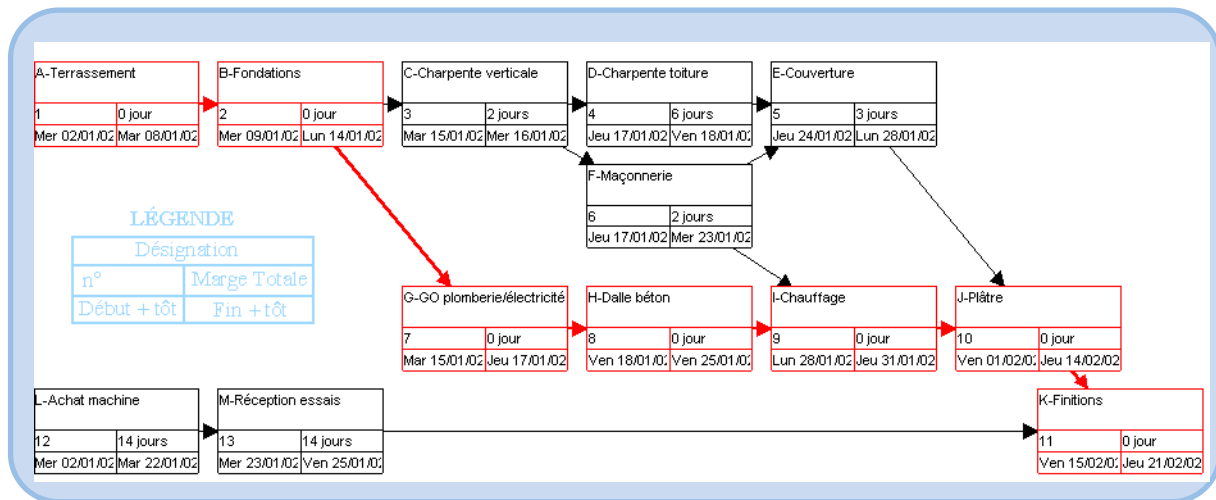
Index thématique

- Les tâches H et F étant également critiques, en raison du partage d'une même ressource, il est équivalent de les permuter dans l'ordonnancement, ce qui peut présenter un intérêt opérationnel.
- Cette solution conduit à l'inoccupation d'un ouvrier durant les jours 13 à 16. Ce point, important d'un point de vue opérationnel, nous reviendrons dessus avec la quatrième solution.
- La troisième solution consiste à partager la ressource entre les tâches, par exemple 75% pour la tâche F (c'est-à-dire 3 ouvriers sur les 4) et 25% pour la tâche H (ces valeurs étant choisies par l'utilisateur). Dans ces conditions, la programmation de F reste celle de l'ordonnancement au plus tôt mais H ne peut bénéficier que d'un seul ouvrier par jour, ce qui revient à dire que sa durée sera de 6 jours et non de 3. Avec cette solution, la tâche H devient également critique, elle est programmée du 13^e au 18^e jour et le projet s'exécute maintenant en 37 jours, soit avec 2 jours de retard. On remarquera que cette solution implique une détection préalable du conflit pour une définition judicieuse du partage, ce qui revient à dire que la *solution rétroagit sur la définition du problème*. Les principaux logiciels permettent cette solution qui conduit à donner une marge totale de 2 jours à la tâche F, antérieurement critique (voir figure 89, la marge totale de la tâche F est de 2 jours).
- Une quatrième solution consiste à considérer que ce qui est donné pour une tâche, c'est son énergie¹, c'est-à-dire sa quantité de travail (6 jours pour H) et non sa durée; celle-ci s'obtient en divisant la quantité de travail par le niveau de ressource disponible (d'où 1 jour pour une disponibilité de 6 ou 2 jours pour une disponibilité de 3 ou 3 jours pour une disponibilité de 2 ou 6

1. Voir page 280.

FIGURE 90

Prise en compte d'une contrainte cumulative et utilisation de la solution 3



jours pour une disponibilité de 1). Cette solution revient à faire de la durée d'une tâche (ou de l'intensité de mobilisation de la ressource critique), une variable de décision, au même titre que sa date de début, ce qui conduit à un problème nouveau, différent de celui étudié jusqu'ici¹. Cette solution, utilisée en combinaison de la règle privilégiant les tâches critiques, donne le même résultat que la troisième solution.

- Une dernière solution remettant également en cause le concept de durée associé à une tâche et que nous qualifierons de *conception protéiforme* de la tâche, consiste à autoriser une modulation de l'utilisation de la ressource par une tâche en fonction de la disponibilité résiduelle de la ressource². Cette solution revient à dire dans notre exemple que la tâche H consomme 6 journées de travail et que la présence simultanée de 2 ouvriers ne s'impose pas. Par hypothèse, la tâche F est prioritaire, la tâche H dispose d'une capacité résiduelle d'un ouvrier les jours 13 à 16 et, les jours suivants, de 4 ouvriers. La programmation de H pourra alors aller des jours 13 à 17, le dernier jour mobilisant alors 2 personnes. Là encore, la tâche H est critique, mais elle conduit à un retard d'une seule journée pour la durée d'achèvement du projet.

Cet exemple ne prétend pas épuiser les techniques auxquelles il est possible de faire appel pour résoudre ces conflits. Il a pour objet d'attirer l'attention du lecteur sur le fait que, si en théorie, les logiciels peuvent tout faire, en pratique on peut aboutir à des performances fort différentes, selon les possibilités de « pilotage » offertes³. Il montre également que la prise en compte des contraintes cumulatives

1. Plusieurs logiciels permettent d'exploiter cette possibilité (voir note de la page 281).

2. *Note de la page précédente*. Le seul logiciel exploitant cette idée, parmi les quelques logiciels que nous avons testés, utilisait plus le concept de « tâche bouche-trou » que celui de tâche protéiforme (où des règles explicites de possibilité de césure et de plages admises pour l'intensité d'une ressource devraient être formellement définies par le responsable du projet). Un logiciel comme Project de Microsoft autorise la préemption, c'est-à-dire la possibilité d'interrompre une tâche (pour libérer une ressource au profit d'une tâche prioritaire) pour la reprendre ultérieurement mais chaque « fragment » conserve la même intensité d'utilisation de la ressource ; dans ces conditions, la solution évoquée revient à remplacer une tâche par deux tâches considérées comme différentes (alors qu'il s'agit de la même avec modulation de l'intensité).

dans un problème d'ordonnancement et le maintien strict de la conception «classique» de la durée des tâches conduisent mécaniquement à une mauvaise utilisation des ressources et/ou à une durée minimale d'exécution du projet (critère généralement retenu) supérieure à celle qui serait possible.

Cela étant, ce qu'il est important de noter c'est que la détection de conflits s'effectue nécessairement au cours de la résolution du problème et qu'elle peut conduire à une remise en cause du problème initial par un processus de relaxation maîtrisé de certaines contraintes (niveau de ressources disponibles) ou de révision de la conception de la tâche. Cette rétroaction d'un processus de résolution sur la définition du problème peut être quelque peu perturbante pour certains mais elle est classique, et pas seulement dans le domaine managérial. D'autres transformations du problème que celles privilégiées jusqu'ici, sont envisageables :

- Il est parfois possible d'utiliser de ressources alternatives. C'est ainsi que l'on peut faire appel à un personnel moins qualifié ou des équipements moins performants en cas de pénurie momentanée des «ressources idéales» que l'on avait prévues. Ce remplacement peut s'accompagner d'une révision à la hausse de la durée de la tâche et/ou d'une révision à la baisse de spécifications techniques (révision implicite d'objectifs de performance).
- Il est parfois possible d'utiliser des méthodes de travail (gammas...) différentes de celles initialement prévues, ce qui conduit à la mobilisation de ressources différentes.
- Il est parfois possible de modifier des relations d'antériorité pour déplacer la programmation de certaines tâches, au prix d'une modification mineure du travail à effectuer.

Table des matières

Index thématique

III-2.1.3 La formalisation du problème général par la programmation linéaire

La programmation linéaire permet de formuler de manière élégante le problème de l'ordonnancement d'un projet¹ et, à défaut d'être numériquement efficace, elle permet de dépasser certaines simplifications habituellement retenues.

III-2.1.3.1 Prise en compte des contraintes potentielles

Soit un ensemble de 5 tâches (A, B, C, D, E) dont les relations d'antériorité sont décrites dans le graphe Potentiel-Tâches du [tableau 58](#). Désignons par τ_i , la date de fin de la tâche i et par $z = \tau_E$ la date de fin du projet². Dans les conventions de temps adoptées ici, une tâche débutant à la période p_1 et s'achevant à la période

3. Une analyse comparative de quelques logiciels ayant traité un même cas utilisant deux contraintes cumulatives peut être trouvée dans Meredith & Mantel (1989, [297], p. 367-372).

1. *Note de la page précédente.* Celle proposée par Pritsker, Watters & Wolfe (1969, [345]) est la plus générale ; elle est reprise par un certain nombre d'articles ultérieurs tels que ceux de Patterson et Huber (1974, [326]) et Patterson et Roth (1976, [328]). Cela dit, le problème ainsi formulé se heurte à la performance des logiciels existants (voir § II-3.4). On peut appliquer cette approche au cas de l'ordonnancement en ateliers spécialisés, chaque commande est traitée comme un projet élémentaire indépendant, l'ensemble des commandes est considéré comme un projet global à ordonnancer et la date de livraison de chaque commande est prise en compte par le biais d'une contrainte de localisation temporelle pesant sur sa dernière tâche. Tout ceci n'a de sens que si l'on tient compte des contraintes cumulatives.

2. Lorsque le projet comporte plus d'une tâche sans descendant, il y a intérêt à créer une tâche fictive ω , de durée nulle, qui est le descendant de ces tâches ; dans ce cas la fonction-objectif à minimiser est $z = \tau\omega$.

p_2 , commencera au tout début de la période p_1 et s'achèvera tout à fait à la fin de la période p_2 .

TABLEAU 58
Description du projet

Tâche i	Ancêtres	Durée d_i	Graphe Potentiel – Tâches
A	-	2	<pre> graph LR A --> C A --> D B --> D C --> E D --> E </pre>
B	-	3	
C	A	1	
D	A, B	3	
E	C, D	2	

Le problème posé est celui de la détermination d'un ordonnancement permettant d'achever au plus tôt le projet (minimisation de z), lequel ne sera pas nécessairement l'ordonnancement au plus tôt¹. Dans ces conditions, si le projet commence au début de la période 1, l'une des solutions optimales est telle que $\tau_A = 2$ et $\tau_B = 3$. Les 3 variables restantes sont telles que les contraintes suivantes doivent être respectées :

- contrainte liée à la tâche C: $\tau_A + 1 \leq \tau_C \Rightarrow 3 - \tau_C \leq 0$;
- contraintes liées à la tâche D: $\tau_A + 3 \leq \tau_D$ et $\tau_B + 3 \leq \tau_D \Rightarrow 5 - \tau_D \leq 0$ et $6 - \tau_D \leq 0$;
- contraintes liées à la tâche E: $\tau_C + 2 \leq \tau_E$ et $\tau_D + 2 \leq \tau_E \Rightarrow \tau_C + 2 - \tau_E \leq 0$ et $\tau_D + 2 - \tau_E \leq 0$.

La fonction-objectif est: $Max z$. Une solution optimale de ce problème est: $\tau_C = 3$, $\tau_D = 6$, $\tau_E = 8$.

D'une manière générale, si la tâche i est un ancêtre de la tâche j et si un recouvrement g_{ij} est autorisé entre la fin de l'exécution i et le début de l'exécution de j (avec $0 \leq g_{ij} \leq d_i$, ce qui implique que ce recouvrement peut être nul et, dans le cas, contraire, ne saurait conduire à un début de j antérieur à celui de i), il faut utiliser la contrainte de la **relation 52**.

$$\tau_i + d_j - g_{ij} \leq \tau_j \text{ *contrainte d'antériorité (formulation 1)* } \quad \text{relation 52}$$

Les contraintes potentielles correspondent aux contraintes d'antériorité, seules prises en compte ici, et aux contraintes de localisation temporelle. La prise en compte de ces dernières est immédiate: interdire à la tâche i de commencer avant la période k_{\min} revient à introduire la contrainte $\tau_i \geq k_{\min} + d_i - 1$ et interdire à la tâche i de finir après la période k_{\max} revient à introduire la contrainte $\tau_i \leq k_{\max}$.

$$\tau_i \geq k_{\min} + d_i - 1 \text{ et } \tau_i \leq k_{\max} \text{ *contraintes de localisation temporelle* } \quad \text{relation 53}$$

1. ce qui conduit à une solution ne correspondant pas nécessairement à l'ordonnancement au plus tôt de toutes les tâches, dans la mesure où il existe des tâches non critiques. L'obtention de l'ordonnancement au plus tôt peut s'obtenir en transformant la fonction-objectif en $Min (z + \sum_i x_i)$, puisque l'ordonnancement au plus tôt est unique et conduit à la plus faible valeur de $\sum_i x_i$ à ajoutant à z .

III-2.1.3.2 Prise en compte des contraintes disjonctives et cumulatives et des gammes alternatives

Examinons maintenant comment prendre en compte, d'une part les contraintes cumulatives, c'est-à-dire celles qui correspondent à la prise en compte de la consommation de ressources non stockables (prestations de travail par des opérateurs ou des machines) par les tâches, la disponibilité de ces ressources étant limitée et, d'autre part, les contraintes disjonctives (qui empêchent la réalisation simultanée de deux tâches). Il est alors nécessaire de modifier la formulation de la date de fin d'une tâche¹ : pour un découpage temporel en T périodes, on est amené à créer pour chaque tâche i , un ensemble de T variables binaires² x_{it} telles que $x_{it} = 1$ si la tâche i s'achève au cours de la période t et $x_{it} = 0$, dans le cas contraire. A priori, il peut y avoir $T - d_i + 1$ variables binaires pour chaque tâche i mais il est souvent possible en pratique de diminuer ce nombre en partant de bornes supérieures et inférieures de la date de fin (point sur lequel on ne s'appesantira pas).

Il est tout d'abord nécessaire que chacune des N tâches du projet ait une date de fin et une seule, ce qui s'obtient par la [relation 54](#) (qui est une application de la règle 1 de la [page 1139](#)):

$$\sum_{t=d_i}^T x_{it} = 1, \text{ pour } i = 1, \dots, N \tag{relation 54}$$

Table des matières

La date de fin τ_i de la tâche i est donc $\tau_i = \sum_{t=1}^T tx_{it}$. Dans ces conditions, si i est ancêtre de j , la contrainte $\tau_i + d_j \leq \tau_j$ devient, avec prise en compte d'un éventuel recouvrement:

Index thématique

$$\sum_{t=1}^T tx_{it} + d_j - g_{ij} \leq \sum_{t'=1}^T t'x_{jt'} \tag{contrainte d'antériorité (formulation 2)}$$

relation 55

$$\sum_{t=d_i}^T x_{it} = 1, \text{ pour } i = 1, \dots, N \tag{relation 56}$$

La tâche i est en cours d'exécution pendant la période t si elle se termine à la fin de cette période ou, au plus tard, à la fin de la période $t + d_i - 1$, ce qui revient à dire qu'elle débute au cours de cette période. Dans ces conditions, on peut dire que

$\sum_{t'=t}^{t'+d_i-1} x_{it'} = 1$ si la tâche i est en cours d'exécution pendant la période t , et 0, dans le cas contraire.

La prise en compte d'une contrainte disjonctive portant sur les tâches i et j passe par la création des T contraintes suivantes³:

1. Voir Pritsker, Watters & Wolfe (1969, [345]).
 2. Le nombre de variables peut être diminué en éliminant les périodes pour lesquelles la programmation de la tâche considérée est impossible (ce qui implique d'avoir déjà traité une formulation partiellement relaxée du problème).

$$\sum_{t'=t}^{t'+d_i-1} x_{it'} + \sum_{t'=t}^{t'+d_j-1} x_{jt'} \leq 0, \text{ pour } t = 1, \dots, T \text{ contrainte disjonctive relation 57}$$

La prise en compte de contraintes cumulatives implique de connaître pour chaque ressource k ($k = 1, \dots, K$), sa disponibilité datée r_{kt} . Par hypothèse, si la tâche i consomme la ressource k , elle le fait avec une intensité constante¹ a_{ir} . Dans ces conditions, la demande de mobilisation de la ressource k durant la période t est

$$\sum_{t'=t}^{t'+d_i-1} a_{ir} x_{it'}$$

et il convient alors d'avoir²:

$$\sum_{t'=t}^{t'+d_i-1} a_{ir} x_{it'} \leq r_{kt}, \text{ pour } t = 1, \dots, T \text{ et } k = 1, \dots, K \text{ contrainte cumulative}$$

relation 58

On peut également prendre en compte³ des **gammes alternatives**, présentées à la [page 283](#), ce qui ne présente d'intérêt que si des contraintes cumulatives sont introduites (sinon, la gamme à durée la plus courte est nécessairement choisie, avec le critère de minimisation de la durée du projet). Une gamme alternative consiste à pouvoir remplacer une tâche (ou plusieurs tâches liées par des relations d'antériorité) par une autre tâche (ou plusieurs autres tâches liées par des relations d'antériorité). Cette substitution, qui ne remet pas en cause les caractéristiques fonctionnelles du projet mais seulement la façon de les obtenir, s'accompagne du remplacement de ressources mobilisées et / ou du changement de l'intensité de mobilisation de certaines ressources⁴. Prenons l'exemple de deux tâches A et E entre lesquelles peuvent s'intercaler soit la tâche B, soit la séquence de tâches C → D. Pour décider la gamme à retenir, on introduit la variable δ_B pour la gamme B et la variable δ_D , pour la gamme composée de la séquence C → D (il est inutile de créer une variable δ_C). On devra avoir (en application de la règle 2, [page 1139](#)) $\delta_B + \delta_D = 1$, pour contraindre au choix de l'une de ces deux alternatives. Il faut utiliser ces variables binaires pour neutraliser les tâches non retenues. Ceci s'effectue très simplement en multipliant les durées d_i (et les consommations a_{ir} de ressource) par la variable binaire δ associée à l'alternative. Dans notre exemple, on a :

- première gamme (avec H constante très élevée):

$$\sum_{t=1}^T t x_{At} + d_B \delta_B \leq \sum_{t=1}^T t' x_{Bt'} + (1 - \delta_B) H; \quad \sum_{t=1}^T t x_{Bt} + d_E \delta_B \leq \sum_{t'=1}^T t' x_{Et'} + (1 - \delta_B) H$$

- seconde gamme (la variable binaire δ_D valant à la fois pour C et D):

3. Note de la page précédente. De meilleures bornes pour t pouvant être facilement trouvées.

1. Cette hypothèse peut être levée, au prix d'une augmentation sensible de la taille du problème.

2. De meilleures bornes pour t pouvant être facilement trouvées.

3. Adapté de Giard (1997, [184]).

4. Par exemple, une tâche nécessitant 12 journées de travail peut faire l'objet de deux gammes alternatives: la première mobilise 4 personnes pendant 3 jours et la seconde 3 personnes pendant 4 jours. Si le personnel requis est demandé par d'autres tâches sur la même période, il peut être judicieux, pour diminuer la durée du projet, d'allonger certaines tâches en diminuant leurs intensités (voir la solution 3 de la [page 317](#)).

$$\sum_{t=1}^T tx_{At} + d_C \delta_D \leq \sum_{t'=1}^T t'x_{Ct'} + (1 - \delta_D)H; \quad \sum_{t=1}^T tx_{Ct} + d_D \delta_D \leq \sum_{t'=1}^T t'x_{Dt'};$$

$$\sum_{t=1}^T tx_{Dt} + d_E \delta_D \leq \sum_{t'=1}^T t'x_{Et'} + (1 - \delta_D)H$$

- exclusion des alternatives: $\delta_B + \delta_D = 1$

Il faut adapter la [relation 54 de la page 321](#) au cas des gammes alternatives; dans notre exemple, on doit poser¹: $\sum_{t=d_B}^T x_{Bt} = \delta_B$, $\sum_{t=d_C}^T x_{Ct} = \delta_D$, $\sum_{t=d_D}^T x_{Dt} = \delta_D$, en application de la règle 4 de la [page 1139](#).

Si, en outre, les tâches B, C et D consomment la même ressource k (laquelle étant supposée, dans cet exemple, n'être consommée par aucune autre tâche), on aura:

$$a_{Br} \delta_B \sum_{t'=t}^{t'+d_B-1} x_{Bt'} + a_{Cr} \delta_D \sum_{t'=t}^{t'+d_C-1} x_{Dt'} + a_{Dr} \delta_D \sum_{t'=t}^{t'+d_D-1} x_{Dt'} \leq r_{kt}$$

pour $t = 1, \dots, T$ *relation 59*

D'une manière générale, pour H alternatives partant toutes d'une même tâche initiale α et aboutissant toutes à la même tâche finale ω , et en indexant par h les gammes alternatives, les indices i et j repérant deux tâches successives (avec recouvrement possible), on obtient la [relation 60](#):

$$\sum_{t=1}^T tx_{i_h t} + d_{j_h} \delta_h - g_{i_h j_h} \delta_h \leq \sum_{t'=1}^T t'x_{j_h t'} + (1 - \delta_h)H$$

pour deux tâches successives de l'alternative h (la première tâche i_h possible étant la tâche α et la dernière tâche j_h possible étant la tâche ω) *relation 60*

La [relation 58](#) ($\sum_t a_{ir} \sum_{t'=t} x_{it'} \leq r_{kt}$) doit être adaptée pour tenir compte du fait que certaines tâches doivent être nécessairement exécutées (sous-ensemble Φ) et que celles qui appartiennent au sous-ensemble $\bar{\Phi}$ des tâches i_h des gammes alternatives h partant toutes d'une même tâche initiale α et aboutissant toutes à la même tâche finale ω . Cette adaptation conduit à la [relation 61](#); sa généralisation à une combinatoire d'alternatives ne pose pas de problèmes particuliers.

$$\sum_{i \in \Phi} a_{ir} \sum_{t'=t}^{t'+d_i-1} x_{it'} + \sum_{h=1}^H \sum_{i_h \in \bar{\Phi}} a_{i_h r} \delta_h \sum_{t'=t}^{t'+d_{i_h}-1} x_{i_h t'} \leq r_{kt}, \text{ pour } t = 1, \dots, T \text{ et } k = 1, \dots, K$$

contrainte cumulative *relation 61*

1. De meilleures bornes pour t pouvant être facilement trouvées.

Table des matières

Index thématique

De même, la relation 54 de la page 321 ($\sum_{t=d_i}^T x_{it} = 1$) n'est plus valable que pour $i \in \Phi$ et doit être complétée par la relation 62 pour les autres tâches $i \in \bar{\Phi}$, notées aussi i_h :

$$\sum_{t=d_{i_h}}^T x_{i_h t} = \delta_h \text{ et } \sum_{h=1}^H \delta_h = 1, \text{ pour } i \in \bar{\Phi} \quad \text{relation 62}$$

Ces extensions du modèle ne seront pas illustrées numériquement en raison du trop grand nombre de variables et contraintes nécessaires, même pour des problèmes très simples, ce qui explique l'usage très limité qui est fait de ce type d'approche pour ces problèmes.

III-2.2 Critère de lissage de charge de ressource(s)

En France, deux conceptions du lissage sont avancées mais la première est pratiquement la seule utilisée.

III-2.2.1 Le lissage à durée minimale d'exécution du projet

Un ordonnancement de projet respectant les contraintes cumulatives et s'exécutant sur une durée minimale donnée n'est généralement pas unique. D'autres ordonnancements peuvent être trouvés respectant ces contraintes et aboutissant à la même durée. Le lissage est alors conçu comme le processus de recherche de l'un de ces ordonnancements alternatifs conduisant à une utilisation plus régulière d'une ressource donnée¹. Si ce processus de recherche aboutit, certains pics de demande de la ressource sur certaines périodes auront été « arasés »; cette diminution d'à-coups peut permettre de diminuer, sur tout ou partie du projet, le niveau de la ressource consacrée au projet. La généralisation au cas de plusieurs ressources est possible à condition de définir une hiérarchie stricte des ressources à utiliser en cas de conflit de lissage.

Une seconde approche² consiste à utiliser la technique de lissage à durée minimale d'exécution du problème en partant d'une situation initiale à capacité infinie puis en modifiant l'ordonnancement pour lisser la demande (avec une sélection aléatoire parmi une liste de candidats, au cours d'une procédure itérative initialisée par un ordonnancement au plus tôt; les ressources sont hiérarchisées sur un critère de coût pour trancher les conflits entre ressources différentes; la meilleure des simulations est retenue pour fixer le niveau des ressources).

III-2.2.2 Le lissage à durée quelconque d'exécution du projet

La seconde approche vise également à lisser la charge d'une ressource sur la durée du projet mais:

- la contrainte cumulative portant sur la ressource peut être violée sur certaines périodes,

1. Des règles empiriques du type « quotient de la consommation totale de la ressource par la marge totale courante de la tâche » semblent donner d'assez bons résultats d'après Lockyer & Gordon (1991, [284]), p. 141.

2. Utilisée dès 1961 par Levy, Thomson et Wiest (1961, [279]).

- la durée d'exécution du projet est fixée à une valeur égale ou supérieure à celle obtenue dans le cadre d'un problème où les contraintes cumulatives sont relaxées.

On passe alors d'un critère de minimisation de la durée du projet à un critère de lissage qui peut être un indicateur du type «moyenne des écarts absolus à la charge moyenne»¹. La solution ainsi trouvée peut conduire à calibrer finalement la ressource à un niveau différent de celui initialement prévu et à couvrir les dépassements par des acquisitions ponctuelles (location, contrat de main-d'œuvre intérimaire, heures supplémentaires...); cette solution peut ne pas correspondre au coût global le plus faible possible. Par ailleurs, la généralisation du lissage de charge à plusieurs ressources s'avère difficile, sauf à définir un indicateur composite ramenant implicitement à une même unité d'œuvre les consommations des diverses ressources.

III-3 Formulation du problème d'ordonnement en univers aléatoire

L'approche aléatoire en ordonnancement de projet remonte au début des années soixante dans les grands projets nord-américains, avec deux écrits académiques qui proposent deux pistes différentes. Le premier s'appuie sur une utilisation du théorème de la limite centrale pour déterminer la distribution de probabilités de la durée d'exécution d'un projet et sera effectivement utilisé dans la gestion de grands projets nord-américains dès la fin de cette décennie (§ III-3.1). Le second préconise une approche simulatoire du problème qui est utilisée par un ou deux logiciels dans les années soixante-dix. Il faut attendre la fin des années quatre-vingt pour que cette approche se diffuse réellement, en accompagnement de logiciels d'ordonnement de projet développés pour les micro-ordinateurs. Cette seconde approche, supérieure à la première sur le plan théorique, s'est imposée même si elle ne permet qu'un éclairage très partiel de la gestion du risque de dépassement des délais (§ III-3.2, page 327).

Table des matières

Index thématique

III-3.1 L'approche aléatoire fondée sur le théorème de la limite centrale

Cette approche est due à Clark (1962, [96]). Ses principes sont les suivants :

- La durée de chaque tâche du projet est considérée comme aléatoire et la distribution statistique Bêta² est systématiquement utilisée; les paramètres de cette loi sont déterminés, moyennant une hypothèse de calcul assez forte³, à partir des valeurs extrêmes A et B que la durée d'exécution peut prendre, et

1. Voir Maurel, Roux & Dupont (1977, [295]), p. 122; cet ouvrage reste l'un des meilleurs sur le plan technique, on notera cependant qu'il utilise de manière interchangeable les termes de «lissage» et de «nivellement» (alors que la terminologie est maintenant bien arrêtée sur ce point (1989, [4])); un algorithme de résolution du problème de lissage y est présenté p.132-143.

2. La loi Bêta est définie pour $A \leq x \leq B$ et se caractérise par deux paramètres de forme positifs α et γ . Ses principales caractéristiques sont :

$$f(x) = \frac{(x-A)^{\alpha}(B-x)^{\gamma}}{\int_0^1 t^{\alpha-1}(1-t)^{\gamma-1} dt} (B-A)^{\alpha+\gamma+1}, \quad E(X) = A + (B-A) \frac{\alpha+1}{\alpha+\gamma+2}, \quad V(X) = \frac{(B-A)^2(\alpha+1)(\gamma+1)}{(\alpha+\gamma+3)(\alpha+\gamma+2)^2} \quad \text{et} \quad M_0 = \frac{A\gamma+B\alpha}{\alpha+\gamma}$$

ce qui permet de voir que les relations définissant $V(X)$ et M_0 définissent implicitement un système de 2 équations à 2 inconnues, α et γ (A et B étant supposés connus), et réciproquement.

du mode M_0 . Il suffit donc de poser les trois questions suivantes : « quelle est la durée minimale ? », « quelle est la durée maximale ? », et « quelle est la durée la plus probable ? », pour obtenir respectivement les paramètres A , B , et M_0 , qui permettent ensuite de calculer la moyenne et la variance de cette durée aléatoire à partir des formules suivantes :

$$E(t) = \frac{a + b + 4M_0}{6} ; V(t) = \left(\frac{b-a}{6}\right)^2 \quad \text{relation 63}$$

- On détermine ensuite le chemin critique du projet, en se plaçant en univers certain et en utilisant les durées moyennes calculées en application de la **relation 63**, ce qui permet de trouver le (ou les) chemin(s) critique(s).
- On se place maintenant en univers aléatoire et la durée du projet est considérée comme la somme des durées des tâches du chemin critique précédemment identifié, ce qui constitue une hypothèse très fortement simplificatrice car l'existence même de durées aléatoires peut se traduire par la possibilité d'autres chemins critiques.
- On utilise alors le théorème de la limite centrale¹ pour approximer la loi de distribution de probabilités de la durée d'exécution du projet ; ce théorème, sous sa forme faible, dit que la loi suivie par la somme d'un grand nombre de variables aléatoires indépendantes est une loi Normale (sous des conditions qui sont respectées avec l'utilisation de la loi Bêta) ;
- L'espérance mathématique (ou la variance) de cette loi se calcule comme la somme des espérances mathématiques (ou des variances) de chaque durée des tâches du chemin critique ; il s'agit là d'une application de résultats analytiques classiques, relatifs à une somme de variables aléatoires quelconques mais *indépendantes*² :

$$E\left(\sum_{i=1}^k X_i\right) = \sum_{i=1}^k E(X_i) \quad \text{et} \quad V\left(\sum_{i=1}^k X_i\right) = \sum_{i=1}^k V(X_i) \quad \text{relation 64}$$

- La connaissance de la loi de la durée du projet permet de calculer des intervalles de confiance de cette durée ou la probabilité qu'une durée donnée soit dépassée, ce qui constitue une mesure possible du risque-délai du projet.

L'application de cette démarche ne pose pas de problème technique particulier. Les trois remarques suivantes, qui en limitent l'intérêt théorique, doivent nécessairement être faites :

- Pour pouvoir utiliser le théorème de la limite centrale, il est nécessaire d'avoir un chemin critique comportant au moins une trentaine de tâches (ce qui ne se réalise qu'avec les très gros projets). Il devient très contestable

3. Dans les utilisations courantes du PERT, on se contente de la connaissance de A , B et M_0 , et l'on impose des valeurs à α et γ : $\alpha = 2 + \sqrt{2}$ et $\gamma = 2 - \sqrt{2}$ **ou** $\alpha = 2 - \sqrt{2}$ et $\gamma = 2 + \sqrt{2}$ qui impliquent que l'on ait : $M_0 = \frac{B+A}{2} \pm (B-A) \frac{\sqrt{2}}{4} \approx 0,5 \times (A+B) \pm 0,35 \times (B-A)$ et $E(X) = A + (B-A) \times \frac{3 \pm \sqrt{2}}{6} = 0,5(A+B) \pm 0,24(B-A)$. Si cette approximation est acceptable, les relations classiquement utilisées dans la Loi Bêta-PERT sont fondées, sinon il est préférable d'utiliser des estimations différentes (voir Farnum & Stanton, 1987, [144]).

1. Ce théorème établit, sous des conditions généralement respectées, que la variable aléatoire constituée par une somme de n variables aléatoires indépendantes suit approximativement une loi Normale, quelles que soient les lois d'origine, dès que n est assez grand. Voir, par exemple, Giard (1995, [182], chapitre III).

2. Voir, par exemple, Giard (1995, [182], chapitre III).

d'invoquer ce théorème si l'on descend en dessous de la dizaine de tâches, comme le font certains praticiens.

- Le raisonnement que l'on vient de tenir peut s'appliquer à n'importe quel cheminement possible entre deux sommets du graphe. Ceci nous permet si l'un des sommets est celui de la fin du graphe, de calculer la date de début au plus tard d'une opération, respectant une probabilité imposée à l'avance de ne pas remettre en cause une date de fin de réalisation du projet. Compte tenu de la remarque précédente, ceci suppose qu'entre la dite opération et la fin du projet, il y ait un nombre suffisant de tâches pour pouvoir appliquer le théorème de la limite centrale.
- Il découle également de l'observation faite précédemment, que l'on peut calculer la probabilité pour qu'un chemin non critique initialement (en espérance mathématique), le devienne. Si cette probabilité d'occurrence est assez forte, il y aura intérêt à prêter un intérêt aussi grand à ce chemin «sous-critique» qu'au chemin critique lui-même. De nombreuses études¹ montrent, du reste, qu'en négligeant les chemins subcritiques, on aboutit à des prévisions plutôt optimistes (sous-estimation de la date d'achèvement du projet); cela étant, la prise en compte de cette multiplicité de chemins possibles est analytiquement inextricable. Seule la démarche simulatoire permet de prendre en compte ce phénomène.

III-3.2 Application de la démarche simulatoire fondée sur la méthode de Monte-Carlo

Table des matières

Index thématique

Si les premiers écrits proposant d'appliquer la méthode de Monte-Carlo à la gestion de projets sont contemporains de ceux privilégiant l'approche fondée sur le théorème de la limite centrale (Van Slyke, 1963, [428]). L'exploitation de l'approche simulatoire² est restée modeste³ dans les années soixante-dix en raison du faible nombre de logiciels et, surtout, de l'incompréhension de ce type d'approche dans les milieux académiques (et donc, a fortiori, ceux de l'entreprise). C'est au début des années quatre-vingt que cette approche décolle, tout comme l'usage de simulateurs industriels, et se répand du fait de la mise au point de logiciels ergonomiques et performants, utilisables sur micro-ordinateurs. Si la démarche suivie est classique, son application est plus ou moins performante selon le logiciel utilisé⁴ (§ III-3.2.1). On illustrera cette approche à partir de notre exemple⁵ (§ III-3.2.2, page 332).

1. Une bibliographie complète peut être trouvée dans Hax & Candea (1984, [224], p. 347).

2. Une description des fondements de l'approche simulatoire peut être trouvée dans Giard (1995, [182]) et, pour une analyse complète de cette approche, le lecteur est invité à se reporter à Vose (2000, [434]). Cette approche a déjà été utilisée au chapitre III (modélisation de processus productifs au § I-2.1, page 148, analyse de sensibilité au § II-3.3, page 190). On ne reviendra donc pas ici sur une présentation générale de cette démarche, pour n'examiner que son application à la gestion de projets, certains points étant plus détaillés dans Giard (1991, [173]).

3. Parmi les projets s'étant appuyés sur cette approche, on trouve ceux de la construction d'oléoducs en Alaska.

4. Dans ce qui suit, nous nous appuyons sur *@Risk for Project* de Palisade qui est un add-in du logiciel Project de Microsoft, Il est possible de télécharger à partir du site de Palisade (<http://www.palisade.com>), des versions complètes d'évaluation, utilisables quelques semaines.

III-3.2.1 Démarche suivie

La première étape est celle du recueil d'informations sur la distribution de probabilités de la durée d'exécution de chaque tâche. Pour toute une série de raisons évidentes, il est peu réaliste de croire possible le recueil, auprès de chaque responsable d'une tâche, de la loi de probabilité qu'il considère vraisemblable, ainsi que la valeur des paramètres la caractérisant, ce que permettent ces logiciels. Deux méthodes pragmatiques sont à privilégier.

- La première consiste à poser préalablement les deux questions suivantes : «quelle est la durée minimale d'exécution de la tâche?» et «quelle est la durée maximale d'exécution de la tâche?», puis à choisir judicieusement deux ou trois valeurs intermédiaires x et à poser la question «quelle est la probabilité pour que la tâche mette plus de x jours (semaines ou mois)?», en prenant les valeurs croissantes de x (pour forcer la cohérence des données recueillies). On obtient alors directement une fonction de répartition de la durée d'exécution de la tâche.
- La seconde approche consiste à utiliser la loi uniforme, qui revient à postuler que «n'importe quelle valeur entre les valeurs extrêmes me semble avoir la même chance que les autres», et / ou la distribution Triangulaire qui repose sur le recueil des valeurs extrêmes et du mode¹. Pour cette dernière distribution, certains logiciels permettent un recueil plus subtil de l'information pour contrer le risque de valeurs extrêmes aberrantes liées à des réflexes de prudence excessifs de certains responsables, en remplaçant la question sur les valeurs extrêmes, par les questions suivantes : «quelle est la durée d'exécution de la tâche en dessous de laquelle on a moins de 5% de chances de se trouver?», «quelle est la durée d'exécution de la tâche au-dessus de laquelle on a moins de 5% de chances de se trouver?»; les extremums implicitement utilisés se déduisent immédiatement des réponses fournies.

Une fois connues les distributions de probabilités, il ne reste plus qu'à utiliser les méthodes classiques de Monte Carlo² pour obtenir par simulation des durées des différentes tâches. L'analyse d'un grand nombre de simulations globales du projet permet de tirer des enseignements généralement impossibles à obtenir de manière analytique. Cette méthode repose sur les principes suivants, conduisant à l'établissement du [tableau 59](#):

- on suppose connue la fonction de répartition $P(X_i < x_i)$ de la durée X_i de la tâche i du projet, lequel comporte n tâches (i varie donc de 1 à n);

5. Les expérimentations de cette approche simulatoire, faites à la régie Renault – voir Courtot (1991, [110]) et Giard, Courtot & Vergnenègre (1991, [189]) – sans prise en compte des contraintes quantitatives ni de scénarios alternatifs, ont permis d'apprécier la probabilité que des projets ne tiennent pas les délais impartis et de confirmer l'existence de risques importants de voir devenir critiques des tâches, identifiées initialement comme non critiques.

1. La loi triangulaire est définie pour $a \leq x \leq b$. Sa densité de probabilité est croissante linéairement jusqu'au mode M_0 , puis décroissante linéairement. On a donc $f(x) = \frac{2(x-a)}{(b-a)(M_0-a)}$, pour $x \leq M_0$ et $f(x) = \frac{2(b-x)}{(b-a)(M_0-a)}$, pour $x \geq M_0$. En outre, $P(X \leq x) = \frac{(x-a)^2}{(b-a)(M_0-a)}$, pour $x \leq M_0$ et $P(X \leq x) = 1 - \frac{(b-x)^2}{(b-a)(M_0-a)}$, pour $x \geq M_0$; $E(X) = \frac{a+b+M_0}{3}$;
 $V(X) = \frac{a^2+b^2+M_0^2-ab-aM_0-bM_0}{18}$.

2. Pour une présentation générale de cette méthode, voir Giard (1995, [182], p. 92-97).

- on réalise K itérations de simulation du problème d'ordonnancement ; la k^{ème} itération (k variant de 1 à K) comporte, pour chacune des n tâches du projet, une réalisation x_{i_k} de la variable aléatoire X_i , durée de la tâche i ; le nombre K d'itérations doit être suffisant¹ pour que l'on puisse obtenir de bonnes estimations des informations recherchées ;

TABLEAU 59
Résultats de la simulation

		Tâche i (durée x_i)						Durée minimale du projet pour la simulation k
		1	2	...	i	...	n	
jeu de de données de l'itération k	1	x_{1_1}	x_{1_2}	...	x_{1_i}	...	x_{1_n}	D_1
	2	x_{2_1}	x_{2_2}	...	x_{2_i}	...	x_{2_n}	D_2

	k	x_{k_1}	x_{k_2}	...	x_{k_i}	...	x_{k_n}	D_k

	K	x_{K_1}	x_{K_2}	...	x_{K_i}	...	x_{K_n}	D_K
Indice de criticité	$\frac{m_1}{K}$	$\frac{m_2}{K}$...	$\frac{m_i}{K}$...	$\frac{m_n}{K}$		

Table des matières

Index thématique

- la réalisation x_{i_k} de la variable aléatoire X_i , durée de la tâche i , pour l'itération k , s'obtient à partir d'un nombre z_{i_k} généré aléatoirement, compris entre 0 et 1, et s'interprétant comme un tirage aléatoire d'une valeur de la fonction de répartition de la durée de cette tâche i $z_{i_k} = P(X_i < x_{i_k})$; les valeurs z_{i_k} sont, par construction, équiprobables ;
- la connaissance de la fonction de répartition de la durée X_i d'une tâche i et celle de la valeur tirée aléatoirement d'une probabilité cumulée $z_{i_k} = P(X_i < x_{i_k})$ permettent de calculer le fractile x_{i_k} ; l'équiprobabilité des valeurs tirées $z_{i_k} = P(X_i < x_{i_k})$ entraîne nécessairement l'équiprobabilité des K durées x_{i_k} obtenues pour une tâche i donnée ;
- on se ramène en univers certain pour chacun des K itération de simulation du problème (c'est-à-dire chacun des ensembles de n valeurs x_{i_k} du k^{ème} jeu de données, k variant de 1 à K) ; on calcule pour chaque jeu, la durée minimale d'exécution D_k du projet et l'on repère les tâches qui sont critiques pour ce jeu (par exemple, en les marquant d'un astérisque dans le **tableau 59**) ;
- l'analyse statistique des K jeux de résultats obtenus par simulation permet d'obtenir trois informations qui, contrairement à l'approche de Clark, tiennent compte de tous les chemins critiques possibles et n'impose de

1. Il est conseillé de donner à K une valeur supérieure à 100.

contraintes sur le nombre de tâches du projet (contrainte liée à l'utilisation du théorème de la limite centrale). Ces résultats sont :

- pour le projet: une estimation de l'espérance mathématique de la durée minimale d'exécution du projet¹ ainsi qu'une estimation de la probabilité que la durée minimale d'exécution du projet excède une durée donnée ;
- pour chaque tâche: une estimation de l'**indice de criticité** de la tâche qui est une estimation de la probabilité que cette tâche soit critique, calculée à partir de la fréquence m_i / K , où m_i est le décompte, dans la colonne i du **tableau 59**, du nombre m_i d'itérations ayant conduit à observer que la tâche i est critique.

Lorsque le projet a été structuré de manière hiérarchique, la question peut se poser de déterminer le niveau de détail pertinent pour effectuer l'analyse. La réponse à une telle question n'est pas aisée. Plusieurs éléments doivent être pris en compte :

- La durée d'une macro-tâche est égale à la durée minimale d'exécution du projet défini par les micro-tâches qui le composent. Il s'ensuit que si l'on retient le même type de distribution pour toutes les tâches, par exemple la distribution triangulaire, on obtient empiriquement pour la macro-tâche une distribution *quelconque* ne se ramenant à aucun modèle théorique connu²; a fortiori, il en sera de même si l'on n'utilise pas toujours le même type de distribution. Il ne peut donc y avoir équivalence entre les deux formulations qu'à la condition expresse d'utiliser pour la macro-tâche la distribution générée par simulation, à l'exclusion de toute autre distribution empirique ou théorique.
- Le passage d'un niveau de détail fin (micro-tâches) à un niveau moins fin (macro-tâches) induit souvent des chevauchements entre macro-tâches (voir § III-4.1, page 334). Ces chevauchements sont non seulement aléatoires mais, de surcroît, dépendent des valeurs prises par les macro-tâches se recouvrant, ce qui complique singulièrement le problème.
- Ces deux considérations conduisent à n'avoir que peu de chances d'observer des résultats très voisins pour les simulations effectuées à ces deux niveaux de détail.
- Cela étant, le problème posé peut être considéré comme un faux problème si l'on considère que ce qui est sans doute le plus important est le degré de fiabilité des informations recueillies. Un niveau de détail trop grand peut nuire à la qualité des informations recueillies (caractéristiques de tendance et de dispersion d'une durée de tâche) si, compte tenu d'une expérience non formalisée, le responsable évalue plus facilement la charge de travail d'une macro-tâches que pour chacune de ses micro-tâches. Inversement, certaines estimations de temps de macro-tâches peuvent nécessiter une décomposition préalable du travail à exécuter «pour y voir plus clair». Dès lors, il est

1. De nombreux travaux montrent qu'en général, l'espérance mathématique de la durée du projet est supérieure à la valeur trouvée en univers certain à partir des durées modales (dans la mesure où la distribution statistique est unimodale)

2. On peut simplement dire que si les simulations donnent toujours le même et unique chemin critique, l'application du théorème de la limite centrale doit conduire à constater que la distribution de probabilité empirique, générée pour la macro-tâche, tend vers une loi Normale.

possible que le bon niveau de simulation soit un compromis utilisant quelques macro-tâches et toutes les micro-tâches des macro-tâches non retenues.

Certains logiciels permettent en outre :

- de faire en sorte qu'un nombre suffisamment d'itérations de la simulation d'un même problème permette de retrouver la corrélation que l'on souhaite observer entre des durées de tâches, ce qui revient à rejeter l'hypothèse, classiquement admise «faute de mieux», d'une indépendance des durées ;
- de définir par une loi de probabilité la date imposée de début de certaines tâches (jalon, par exemple) ;
- de définir par une distribution de probabilité des éléments de coûts associés à une tâche ; ces distributions peuvent ou non être corrélées avec celle de durée de la tâche ; on peut alors traiter simultanément le risque délai et le risque coût (§ IV-2, page 346) ;
- de définir stochastiquement des branchements conditionnels¹, en assignant à chaque alternative, une probabilité ; ceci permet de traiter des cas du type «si les conditions météo sont favorables, alors...» ou «si les conditions météo sont défavorables, alors ...» et de choisir en conséquence le descendant de la tâche étudiée, étant entendu que chaque descendant peut être suivi d'un ensemble de tâches qui ne seront exécutées que si l'alternative est retenue ; au cours d'une itération, une seule de ces alternatives sera retenue ;
- de piloter par des routines externes² :
 - des branchements conditionnels et des lois de durées en fonction, soit de ce qui c'est passé au niveau des ancêtres directs ou indirects de la tâche concernée par ces changements de loi ou ces embranchements conditionnels, soit de résultats provisoires sur certaines informations caractérisant la durée du projet (espérance mathématique ou fractile), ce qui correspond à une rétroaction d'une solution sur le processus de résolution du problème ;
 - la gestion des conflits liés à la présence de contraintes cumulatives ou disjonctives, ce qui permet de contrôler le processus de résolution et permet d'utiliser un certain nombre de travaux relatifs aux heuristiques de résolution de cette classe de problèmes.

Cette approche quantitative, sous ses différentes formes, présente des limites qui font que son intérêt opérationnel ne doit pas être surévalué :

- L'analyse quantitative des risques que permet la simulation permet de focaliser l'attention sur un certain nombre de tâches, dont la définition peut être révisée, et de dérives possibles mais il faut bien voir qu'*en l'absence d'analyse causale sous-jacente, le gestionnaire ne dispose d'aucun guide pour l'action*. Il faut compléter cette approche par une analyse qualitative des

1. Un progiciel, comme Q-GERT, créé et diffusé dans les années soixante-dix (Pritsker, 1979, [346] et Sigal & Pritsker, 1983, [347]), permettait non seulement de combiner durées aléatoires et tâches alternatives, mais en outre d'inclure de véritables tables de décision permettant d'affiner les décisions à prendre en fonction d'événements extérieurs et également de tenir compte de contraintes cumulatives. Des logiciels récents (comme @Risk for project) permettent de tester facilement, dans le cadre de simulations de grande ampleur, l'impact de combinaisons de facteurs contrôlés comme des gammes alternatives.

2. Programmes VB ou VBA, en particulier mais un logiciel comme Q-GERT incluait déjà ces possibilités, au milieu des années soixante-dix.

risques¹ pour mieux en comprendre la nature et être à même de prendre des mesures les plus appropriées. Quelques logiciels aident à l'analyse qualitative des risques et à une capitalisation de leurs caractéristiques².

- Cela étant, la fourniture d'informations quantitatives présente l'avantage de permettre *une certaine hiérarchisation des problèmes* (notamment par l'amélioration de la notion de criticité d'une tâche) et de ne pas traiter toutes les tâches de manière homogène. L'intérêt de ce type d'approche, pour les quelques expériences que nous connaissons, est loin d'être négligeable mais il nous semble que les utilisateurs prêtent aux chiffres un intérêt sans doute excessif, compte tenu des conditions de recueil des informations numériques traitées.

III-3.2.2 Exemple numérique

Les durées des tâches sont maintenant celles du [tableau 60 de la page 334](#), sachant que la durée retenue en univers certain est égale au mode de la distribution triangulaire, lorsque celle-ci est retenue, et à la moyenne de la distribution uniforme, lorsque cette dernière est retenue. On a reporté également dans ce [tableau 60](#) les indices de criticité des tâches, calculés au cours d'une simulation de 5000 itérations (sous *@Risk for Project*³). Sur la base de ces informations, on constate que les tâches M et L ne sont jamais critiques, que la tâche E a près de 20 % de chances d'être critique et la tâche I près de 80 %⁴, que les tâches G et H ont près de 19 % de chances d'être critiques. On peut ajouter que la durée moyenne est de 37,3 jours (valeur supérieure à celle obtenue en univers certain) et qu'il y a plus de 5 % de chances de dépasser 41 jours. L'analyse de sensibilité de la variabilité de la durée du projet à celle des tâches est également fournie⁵ ([figure 91 de la page 333](#)).

Ces informations sont utiles pour la programmation finale du projet (§ III-1.1.5, [page 303](#)) mais elles ne suffisent pas, comme nous l'avons dit, pour comprendre l'origine de ces risques et pouvoir sérieusement les maîtriser.

III-4 Révision de la formulation du problème

Dans la mesure où les premières informations recueillies sur la décomposition du projet en tâches sont obtenues indépendamment les unes des autres, il est fréquent que l'exploitation de ces informations conduise à ne pas pouvoir satisfaire les contraintes de délai (ou de coût) assignées au projet. Dans ce cas, il faut transformer la formulation du problème (définition des tâches, des ressources, du niveau de détail, etc.), en espérant que cette nouvelle formulation permettra d'atteindre cet objectif sinon, il faudra recommencer avec d'autres hypothèses de

1. Voir Giard (1991, [173], chapitre V) et l'ouvrage Courtot (1998, [110]) entièrement consacré à ce thème. Le site personnel de Courtot (<http://perso.wanadoo.fr/courtot.herve/>) comporte des informations régulièrement mises à jour sur ce thème du risque (articles, bibliographie, logiciels).

2. Notamment Riskman (www.riskdriver.com).

3. Certains logiciels de gestion de projets intègrent directement l'approche aléatoire, en particulier Open Plan (www.welcome.com) et Pertmaster Professional + Risk (www.pertmaster.com).

4. La tâche J étant toujours critique, le chemin critique passe nécessairement par l'un ou l'autre de ses ancêtres, tâches E et I. En théorie, on pourrait avoir un double chemin critique mais, les durées étant traitées comme des variables continues, la probabilité d'occurrence de chemins critiques multiples est quasi nulle (ce qui ne serait pas produit si l'on avait décidé d'utiliser des distributions discrètes pour ce problème).

5. Utilisation des coefficients de corrélation de rangs (voir [chapitre III, page 193](#)).

FIGURE 91

Distribution de probabilité de la durée d'exécution du projet et analyse de sensibilité

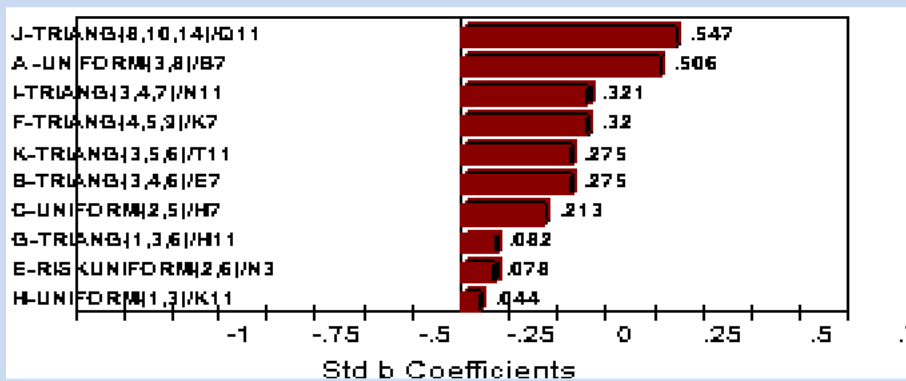
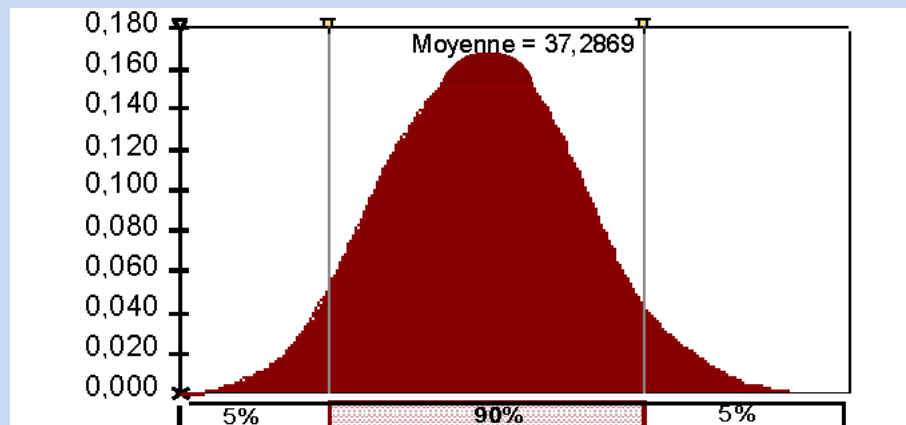


Table des matières

Index thématique

travail. Plusieurs solutions peuvent être envisagées pour diminuer la durée du projet :

- la *suppression de certaines tâches critiques* peut être envisagée pour des tâches de contrôle (ce qui conduit à une impasse technique) ou pour des tâches de transformation associées à des objectifs secondaires du projet (abandon de clauses secondaires du cahier des charges...); le plus souvent, cette solution conduit à une prise de risque plus forte et peut dégrader certains objectifs;
- une solution fréquemment utilisée par les gestionnaires de projet consiste en un *chevauchement de tâches critiques*; cette solution implique une analyse plus fine des tâches concernées et un raisonnement implicite sur les micro-tâches les constituant; on a tout intérêt à expliciter ce raisonnement par un processus de décomposition de ces tâches (voir § III-4.1);
- la solution la plus fréquemment évoquée dans la littérature consiste en une *diminution de durée de tâches critiques*; cette solution, comme on le verra

TABLEAU 60
Définition des distributions de probabilités des durées et indices de criticité calculés

Tâche i	Désignation de la tâche i	Loi de la durée des tâches	Indice de criticité
A	Terrassement	Uniforme(3; 7)	0 %
B	Fondations	Triangulaire(3; 4; 6)	0 %
C	Charpente verticale	Uniforme(2; 3)	0 %
D	Charpente de la toiture	Uniforme(1,5; 2,5)	0 %
E	Couverture	Triangulaire(2; 3; 6)	18,0%
F	Maçonnerie	Triangulaire(4; 5; 8)	0 %
G	Gros œuvre de plomberie et d'électricité	Triangulaire(1; 3; 6)	18,8%
H	Coulage de la dalle de béton	Uniforme(2; 4)	18,8%
I	Chauffage	Triangulaire(3; 4; 7)	82,0%
J	Plâtre	Triangulaire(8; 10; 14)	0 %
K	Finitions et installation des machines	Triangulaire(3; 5; 6)	0 %
L	Négociation de l'achat des machines + délai de livraison	Uniforme(12; 17)	0 %
M	Réception des machines et essais «hors site»	Triangulaire(1; 3; 4)	0 %

(§ III-4.2, page 335) est généralement coûteuse mais surtout quelquefois peu triviale à mettre en œuvre manuellement. En effet, au fur et à mesure qu'un jour additionnel est gagné sur la durée du projet, la liste des tâches critiques peut s'accroître (apparition de chemins critiques additionnels).

On examinera enfin (§ III-4.3, page 341) l'impact de la formulation hiérarchique d'un problème d'ordonnement de projet car cette approche, inévitable pour des projets d'une certaine ampleur, a des conséquences inattendues.

III-4.1 Décomposition de tâches critiques à des fins de chevauchement

Le processus de décomposition d'une (ou plusieurs) tâche(s) critique(s) présente l'avantage d'explicitement le raisonnement conduisant à un chevauchement et force à un examen de la faisabilité technique de la solution imaginée. Ce processus est illustré par l'exemple de la figure 92, page 336, où la «macro-tâche A» est décomposée en deux «micro-tâches» A₁ et A₂, ce qui permet de gagner 4 jours, la tâche B pouvant commencer avant que la tâche A ne soit terminée en totalité (ce qui correspond bien à un chevauchement).

Tout processus de décomposition d'une tâche critique ne se traduit pas obligatoirement par un chevauchement avec une autre tâche critique ni donc par une diminution de la durée d'exécution du projet¹. La figure 93, page 336, illustre les

1. En cas de chemins critiques multiples, ce gain ne sera acquis que si les deux tâches qui se chevauchent appartiennent à une partie commune de tous les chemins critiques.

conditions d'une possibilité de chevauchement d'une tâche donnée avec l'un de ses ancêtres (figure du haut) ou l'un de ses descendants (figure du milieu) ou, enfin (figure du bas), simultanément avec l'un de ses ancêtres et l'un de ses descendants. Dans cette [figure 93](#), le chemin critique passe, après chevauchement, par une autre tâche (ancêtre ou descendant de la tâche j) qui n'est pas mentionnée sur le graphique.

III-4.2 Diminution de la durée de tâches critiques

Dans certains cas, il est possible d'obtenir une diminution de la durée d'une tâche sans accroissement de coût (ou en limitant l'accroissement de coût), par une modification du contenu de la tâche en appliquant des techniques classiques qui forcent à s'interroger sur les contenus (« quoi ? », « pourquoi ? », « quelles alternatives ? »), la localisation (« où ? », « pourquoi là ? ») et la gamme (« comment ? », « pourquoi ? », « quelles alternatives ? »). De telles révisions approfondies nécessitent du temps, alors que la situation est déjà tendue de ce côté-là, et conduisent à des coûts d'études qui peuvent être importants. Il n'est donc pas très étonnant que l'on privilégie le plus souvent la solution de mobilisation d'autres ressources :

- appel à des ressources additionnelles (heures supplémentaires, personnel ou équipements additionnels prélevés à d'autres services ou projets ou provenant d'intérim, de location ou de sous-traitance),
- remplacement de ressources initialement prévues par des ressources plus performantes.

Dans les deux cas, ces décisions se traduisent par des coûts supplémentaires.

III-4.2.1 Le problème posé

A priori, un nombre restreint de tâches est concerné par cette recherche d'une diminution de temps opératoires, ce qui s'explique par :

- l'existence de contraintes techniques (séchage, traitement thermique ou chimique, par exemple),
- la gêne dans le travail, occasionnée par une surabondance de facteurs productifs (une équipe de 10 couvreurs peut être moins efficace qu'une équipe de 5 couvreurs),
- l'inutilité de facteurs productifs supplémentaires (la présence d'un troisième ouvrier pour réparer un moteur automobile a peu de chances de raccourcir le temps de réparation de ce moteur),
- l'impossibilité d'accroître les facteurs productifs mis en œuvre (spécialistes en nombre limité, pas d'appel possible à la sous-traitance ou à l'intérim en raison du particularisme du procédé de fabrication ou de sa confidentialité).

À ces différentes raisons techniques, s'ajouteront, on le verra, des considérations liées au chemin critique qui limiteront cette liste de tâches candidates à un éventuel raccourcissement.

Le temps d'exécution d'une tâche varie, lorsque cette variation est possible, entre une durée maximale que l'on considérera comme sa *durée normale*, et une durée minimale que l'on appelle *durée accélérée* ; le coût de réalisation de cette tâche dépend alors de sa durée d'exécution. Ici, seul l'accroissement de coût associé à la diminution du délai d'achèvement du projet doit être pris en compte dans l'analyse. En effet, la décision de réaliser le projet en mettant en œuvre les

FIGURE 92

Exemple de diminution de la date de fin du projet par décomposition d'une tâche critique

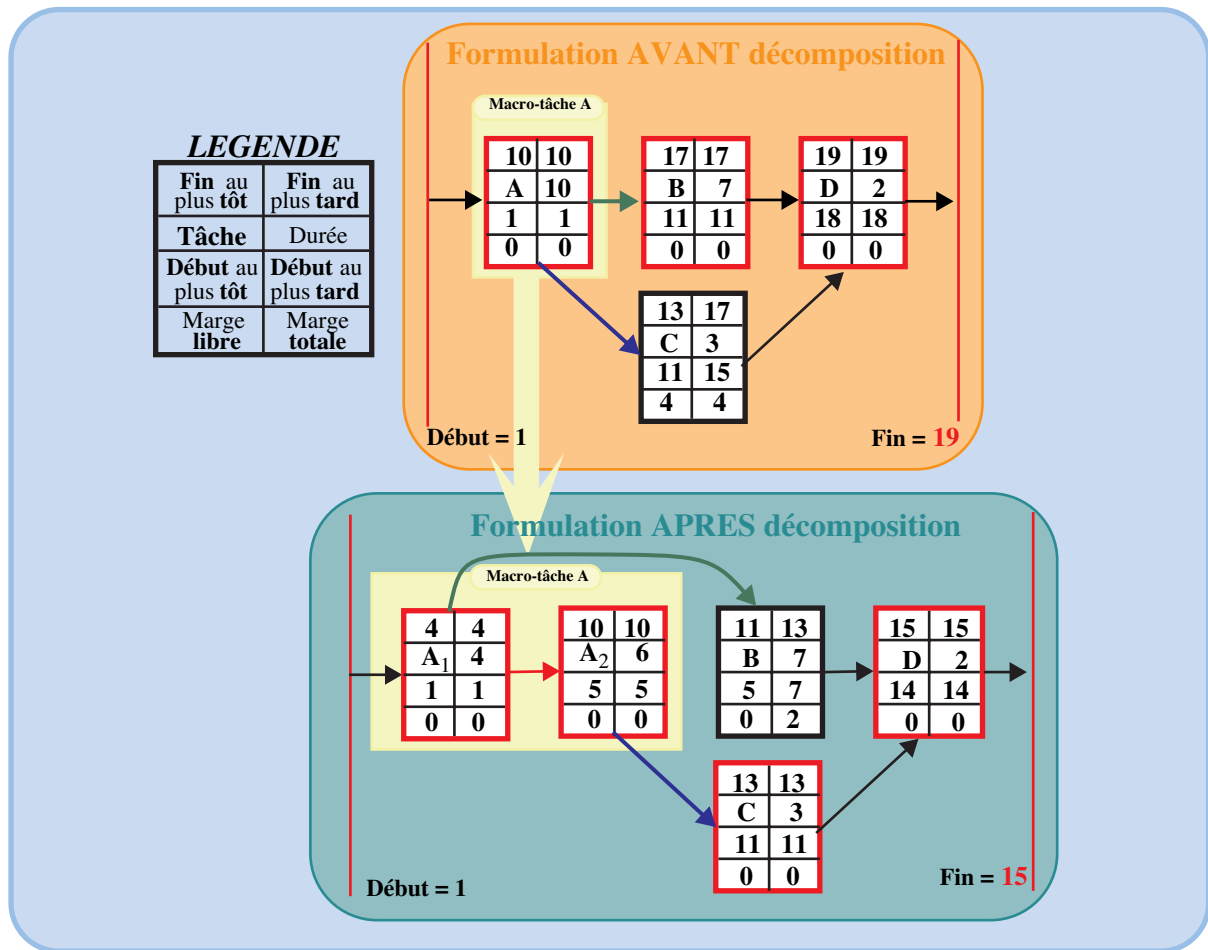
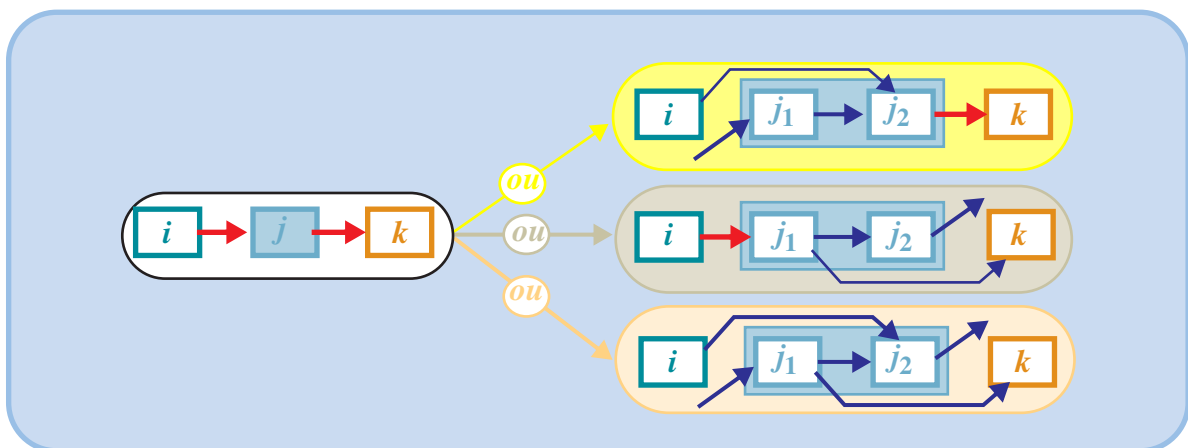


Table des matières

Index thématique

FIGURE 93

Conditions de possibilité de chevauchement de tâches critiques



moyens nécessaires pour l'exécuter dans un certain délai a déjà été prise et ce dont il est question ici, c'est d'étudier une variante par rapport à une solution de référence. En pareil cas, c'est une analyse différentielle qu'il faut conduire par rapport à la solution de référence, aussi bien en termes de coûts, que d'avantages escomptés.

On dispose donc, au départ, d'une liste de tâches dont la durée d'exécution peut être raccourcie, ainsi que des coûts supplémentaires associés à chaque journée gagnée sur la durée de ces tâches. Dans certains cas, la mise en œuvre d'une nouvelle ressource implique que le gain de temps ne puisse porter que *globalement* sur plusieurs jours (durée minimale d'un intérim ou d'une location, par exemple). Dans ce cas, il ne faudra surtout pas associer, à chaque jour gagné, un coût marginal unitaire égal au quotient de la charge additionnelle par le nombre total de jours gagnés: le gain du premier jour implique de dépenser cette charge additionnelle en totalité et l'utilisation des jours suivants doit être considérée comme « gratuite », parce que n'occasionnant aucune charge nouvelle.

Le problème posé est celui de la sélection, au moindre coût, de l'ensemble des tâches qui permet de baisser la durée d'exécution totale de K jours. Pour le résoudre, on peut, dans une approche manuelle de problèmes ne comportant pas trop de tâches (quelques dizaines), chercher à gagner d'abord un premier jour, puis un deuxième jour, puis..., jusqu'aux K jours demandés. La solution de ce problème, qui constituait l'une des originalités de l'approche CPM dans les années soixante, mais est maintenant largement répandue, peut être trouvée manuellement sans trop de difficulté, si le problème combinatoire à résoudre reste simple. C'est ce que l'on va faire maintenant sur un exemple d'application, avant tout pour montrer les difficultés que pose cette classe de problèmes.

III-4.2.2 Exemple d'application

Reprenons notre exemple simplifié du [tableau 54, page 276](#), et supposons maintenant qu'il est possible de raccourcir les durées d'exécution de quelques tâches (voir [tableau 61](#) correspondant à des données recueillies auprès des responsables de l'exécution des tâches) et supposons que le problème soit maintenant d'obtenir, au moindre coût, un projet exécuté en 32 jours.

Table des matières

Index thématique

TABLEAU 61
Possibilités de diminution des durées d'exécution de tâche

Tâche	Durée normale – Durée accélérée (en jours)	Coût marginal de la journée gagnée (en dollars liduriens)
L	5	100
E	1	120
I	1	200
H	1	180
F	3	150

Dans cette analyse, il ne faut prêter attention qu'aux seules tâches critiques. En effet, dans notre exemple, diminuer le temps d'exécution de la tâche L ne présente aucun intérêt, même si elle a le coût marginal le plus faible, puisque ce gain de temps ne se répercute pas sur la durée totale d'exécution du projet. Il en est de même pour la tâche H. Mais cette remarque doit être immédiatement complétée par les remarques suivantes:

- La réduction de la durée d'exécution du projet *peut* conduire à ce que des tâches « non critiques » deviennent critiques. La liste des tâches critiques ne peut donc que s'accroître au fur et à mesure que la durée totale d'exécution

du projet diminue; il s'ensuit qu'une tâche écartée à une étape de calcul, parce que «non critique», peut fort bien être retenue à une étape ultérieure, parce que devenue critique entre temps;

- aucune tâche «non critique» dont la marge totale est supérieure au nombre de jours à gagner ne peut devenir critique et donc être susceptible de devenir candidate dans le processus de recherche; ceci implique qu'une tâche «non critique» dont la marge totale est positive et inférieure ou égale au nombre de jours à gagner peut (*et non doit*¹) devenir critique; la tâche H écartée précédemment dans la recherche de gain d'une journée (marge totale de 1 jour, pour une durée d'exécution du projet de 35 jours), peut donc être candidate dans la recherche du gain de plusieurs journées.

Au départ donc, pour passer de 35 jours à 34 jours, les seules tâches candidates, parce que critiques, sont les tâches F et I. On décidera donc de diminuer la durée d'exécution de F de 1 jour puisque cette décision est la moins coûteuse (150 dollars liduriens). Ce faisant:

- on diminue de 1 jour les dates de fin au plus tôt et au plus tard des tâches critiques postérieures à F, c'est-à-dire les tâches I, J et K;
- la tâche I débute au plus tard maintenant le seizième jour; la date de fin au plus tard de la tâche H n'est alors plus 16 mais 15 et la marge totale de cette tâche devient nulle; il en est de même «par ricochet», pour celle de la tâche G, ancêtre de H;
- la marge de la tâche E reste inchangée parce que ses dates au plus tôt et au plus tard étaient, chacune, conditionnées par une tâche critique (respectivement F et J) et qu'une réduction de la durée de F conduit à une translation d'une journée des dates au plus tôt de ses descendants (critiques ou non, et donc de E et J) et des dates au plus tard de ses descendants critiques (et donc de J et donc, par ricochet, de E).

Le nouveau graphe (voir [figure 94](#)) montre qu'il y a maintenant deux chemins critiques ($A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow F \rightarrow I \rightarrow J \rightarrow K$ et $A \rightarrow B \rightarrow G \rightarrow H \rightarrow I \rightarrow J \rightarrow K$), lesquels ont d'ailleurs en commun plusieurs tâches critiques (A, B, I, J et K).

Pour diminuer encore de 1 jour la durée totale d'exécution du projet, il faut maintenant tenir compte de l'existence de ces deux chemins critiques, dans l'analyse des tâches candidates n'appartenant pas simultanément à ces 2 chemins critiques. Le choix doit être effectué entre la tâche I (coût marginal de 200 dollars liduriens) et les tâches de F et H ($150 + 180 = 330$); on retient donc la tâche I. Un coût supplémentaire de $150 + 200 = 350$ dollars liduriens est donc associé au gain de 2 jours par rapport à la solution initiale. La tâche E devient alors critique (voir [figure 95, page 339](#)) et l'on observe maintenant un nouveau chemin critique ($A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow F \rightarrow E \rightarrow J \rightarrow K$), venant s'ajouter aux deux précédents.

Pour diminuer encore de 1 jour la durée totale d'exécution du projet, on sélectionnera les tâches F (commune à 2 des 3 chemins critiques) et H, situés sur le dernier chemin critique, un coût de $350 + 150 + 180 = 680$ dollars liduriens étant maintenant associé au gain de trois jours par rapport à la solution initiale (voir [figure 96, page 340](#)).

1. Ce point sera illustré par le fait que la tâche E restera «non critique» lorsque l'on passera de 35 à 34 jours.

FIGURE 94
Gain du 1^o jour

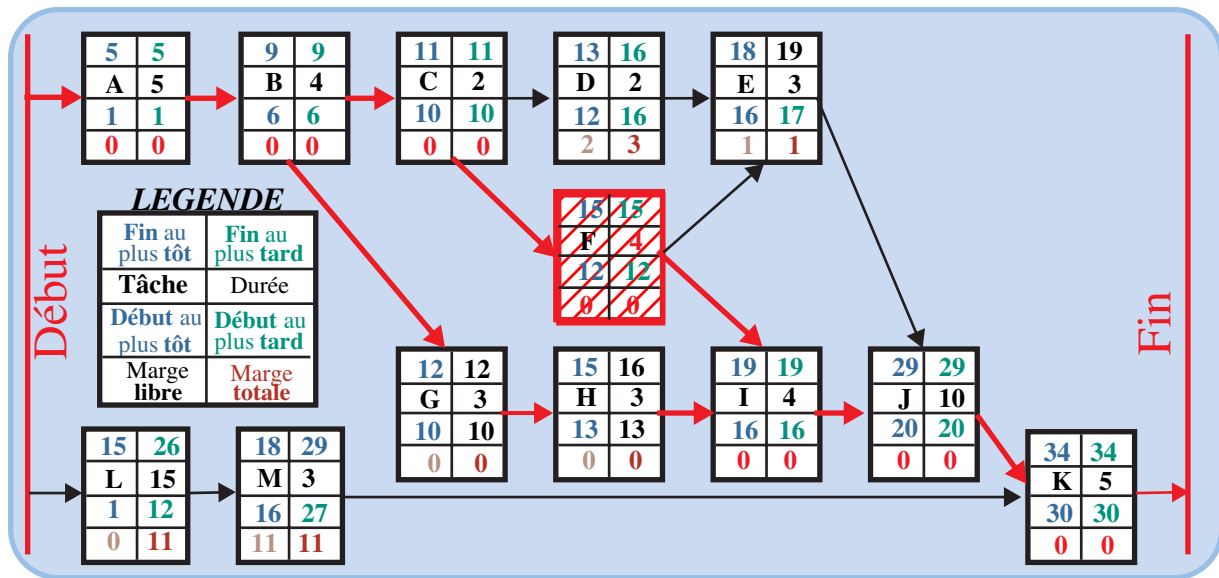
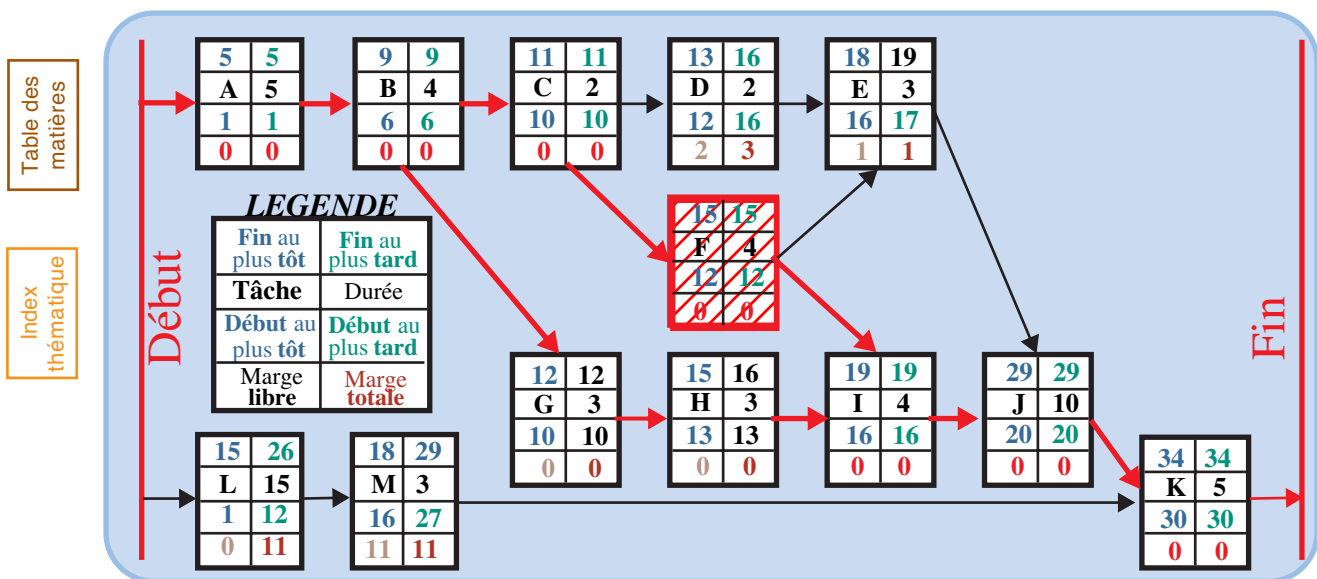


FIGURE 95
Gain du 2^o jour



Il n'est alors plus possible de diminuer encore la durée totale d'exécution du projet puisque, si l'on décidait de diminuer F de 1 jour encore, on «achèterait» alors de la marge libre, car il n'y aurait plus qu'un chemin critique (A→B→G→H→I→J→K) et ce dernier maintiendrait la durée totale d'exécution du projet à 32 jours. Les résultats de ce processus de décision sont consignés dans le [tableau 62 de la page 340](#).

FIGURE 96
Gain du 3^o jour

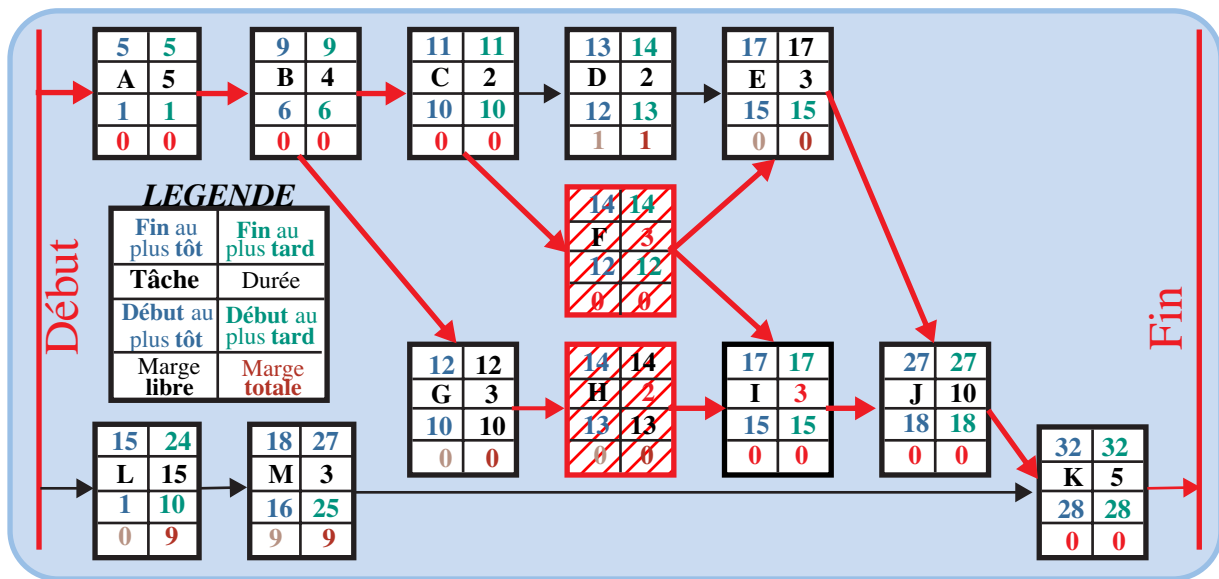


TABLEAU 62
Solution optimale

Nombre de jours gagnés	Accroissement de coût à supporter	Tâches dont la durée est modifiée	
		Désignation	Diminution de la durée totale de la tâche
1	150	F	1
2	350	F I	1 1
3	680	F I H	2 1 1

Table des matières

Index thématique

III-4.2.3 Algorithme de résolution dans le cadre d'une démarche «manuelle»

En systématisant la démarche suivie sur l'exemple précédent, on arrive à un algorithme relativement simple. À une étape quelconque de ce processus, la démarche à suivre est la suivante:

- On restreint la liste des tâches susceptibles d'avoir leur temps opératoire encore diminué en retirant (momentanément) les tâches non critiques.
- S'il n'y a qu'un seul chemin critique, on sélectionne la tâche pour laquelle le coût marginal le plus faible est associé.
- S'il y a deux chemins critiques, il convient de comparer les solutions suivantes: soit on retient une tâche appartenant simultanément aux deux chemins critiques, soit on retient une tâche pour chacune des parties non communes. Par exemple, si dans un problème donné le premier chemin critique est A→B→C→D→E et le second, A→B→F→E et si toutes ces tâches sont candidates, on peut choisir ou A ou B ou E ou «F et C» ou «F et D».

- S'il y a plus de deux chemins critiques, on généralise le raisonnement précédent en s'assurant que l'on gagne bien une journée quel que soit l'itinéraire critique emprunté.

III-4.2.4 Remarques pratiques

La démarche « progressive » que l'on vient de décrire doit être adaptée lorsque le gain de temps réalisable sur une tâche non encore sélectionnée ne peut que porter simultanément sur plusieurs jours (ou unités de temps). En effet, le coût de cette tâche peut être amputé du coût marginal des tâches précédemment retenues qui pourront être écartées, si la tâche à laquelle on s'intéresse est sélectionnée (remise en cause de décisions antérieurement prises).

L'étude manuelle du problème devient vite difficile lorsque l'étude porte sur plusieurs dizaines de tâches¹. On ne s'étendra pas sur ce point car ces solutions ne prennent pas en compte les contraintes cumulatives.

Ce que nous avons appelé durée normale d'exécution d'une tâche est en réalité un temps estimé en fonction de moyens « normalement » mis en œuvre. Dans la pratique, le responsable du projet peut avoir demandé des estimations de temps en faisant savoir qu'il importait de réaliser rapidement le projet. Dans ces conditions, les responsables des tâches peuvent avoir fourni des temps d'exécution qui incluent, par exemple, des heures supplémentaires. Une fois connues les tâches non critiques, l'allongement de leurs durées d'exécution, dans le respect des principes de programmation évoqués en page 305, permet des économies. Cette action risque d'accroître sensiblement le nombre des tâches critiques et donc les risques de non-respect du délai minimal de réalisation du projet.

Si l'on est en mesure de calculer le manque à gagner associé à tout retard pris par rapport à la solution d'une durée minimale, on peut calculer une durée optimale de réalisation du projet en cherchant à minimiser la somme du coût d'accélération du projet et de la pénalité financière représentée par le manque à gagner².

III-4.3 Impact de l'approche hiérarchique de l'ordonnement de projet

L'approche hiérarchique (ou désagrégative) des projets complexes est recommandée pour des raisons d'efficacité. Cet argument est difficilement contestable et ne fait que traduire une certaine vision organisationnelle de décentralisation des décisions et de leur coordination. Cette approche hiérarchique a deux implications pratiques, l'une est relative à des règles de transformation du graphe Potentiel-Tâches dans le processus d'agrégation et l'autre est relative à quelques effets indésirables se produisant dans ce processus d'agrégation.

1. On montre que le problème peut se formuler comme un programme linéaire paramétré (le paramètre étant la durée totale d'exécution du projet) qui, compte tenu de ses caractéristiques, peut se résoudre en faisant appel à l'algorithme de Fulkerson (1961, [162]), beaucoup plus rapide dans ce cas que l'algorithme général du simplexe.

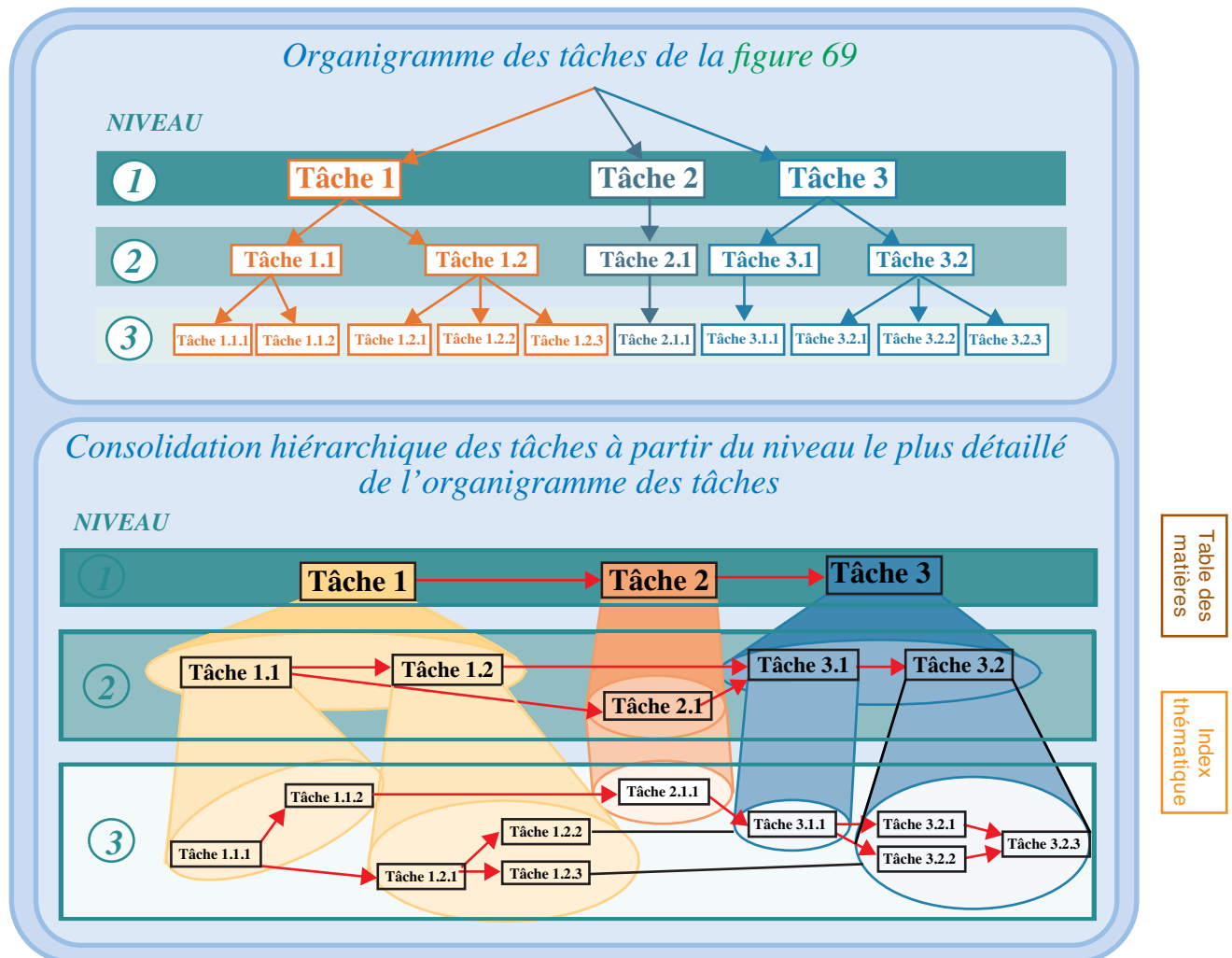
2. Voir Maurel, Roux & Dupont (1977, [295]), p. 177-202

III-4.3.1 La transformation du graphe Potentiel-Tâches dans le processus d'agrégation

Reprenons l'exemple de l'organigramme des tâches de la [figure 69 de la page 278](#) et supposons que les tâches de niveau 3 entretiennent des relations d'antériorité décrites par le graphe du bas de la [figure 97, page 342](#).

FIGURE 97

Impact du niveau d'agrégation sur l'analyse des relations d'antériorité



En on déduit le graphe Potentiel-Tâches du niveau 2 (selon le regroupement de l'OT), puis celui de niveau 1, en appliquant les règles évidentes suivantes :

- Lorsque deux micro-tâches appartenant à la même macro-tâche sont liées par des relations d'antériorité (par exemple, les tâches 1.1.1 et 1.1.2 qui fusionnent dans la tâche 1.1), les relations d'antériorité disparaissent.
- Lorsque deux micro-tâches appartenant à deux macro-tâches sont liées par des relations d'antériorité (par exemple, les tâches 1.1.1 et 1.2.1 qui appartiennent respectivement aux tâches 1.1 et 1.2), les macro-tâches concernées héritent des relations d'antériorité, sous réserve que la relation d'antériorité reste directe. Par exemple, la relation d'antériorité entre les micro-tâches 1.2 et 3.1 n'est pas maintenue entre les macro-tâches 1 et 3 parce que cette relation d'antériorité se déduit de celle qui lie les macro-tâches 1 et 2 (du fait de la relation d'antériorité entre les tâches 1.1 et 2.1), d'une part, et, les macro-

tâches 2 et 3, de l'autre (du fait de la relation d'antériorité entre les tâches 2.1 et 3.1).

On peut remarquer que ce processus d'agrégation tend à considérer un projet comme une séquence de phases, au niveau le plus agrégé. C'est sans doute l'une des raisons de la persistance d'une logique séquentielle en phases séparées par des jalons, dans la gestion de projets retenues encore dans de nombreuses entreprises.

III-4.3.2 Les effets pervers de l'approche hiérarchique

Du point de vue de l'ordonnancement, il n'y a pas d'équivalence stricte entre les approches hiérarchisée et non-hiérarchisée. En effet, on peut montrer facilement (voir exemple de la [figure 98, page 344](#)) que :

- si, dans la définition du projet considéré comme un ensemble de sous-projets, on a une mauvaise définition des recouvrements, l'approche hiérarchique conduit à un *allongement de la durée d'exécution du projet*; la difficulté tient au fait qu'une bonne définition des recouvrements nécessite de repartir de la définition détaillée du problème initial (c'est-à-dire pour le niveau de détail auquel on cherche justement à éviter de travailler); on peut noter que ce problème est symétrique de celui évoqué [§ III-4.1, page 334](#);
- indépendamment de la qualité des recouvrements, l'approche hiérarchique conduit à rendre *inutilement critiques certaines micro-tâches*; pour éviter ce second effet pervers de l'approche hiérarchique, il faut, là encore, repartir de l'analyse détaillée.

Table des
matières

SECTION IV LE SUIVI DU PROJET

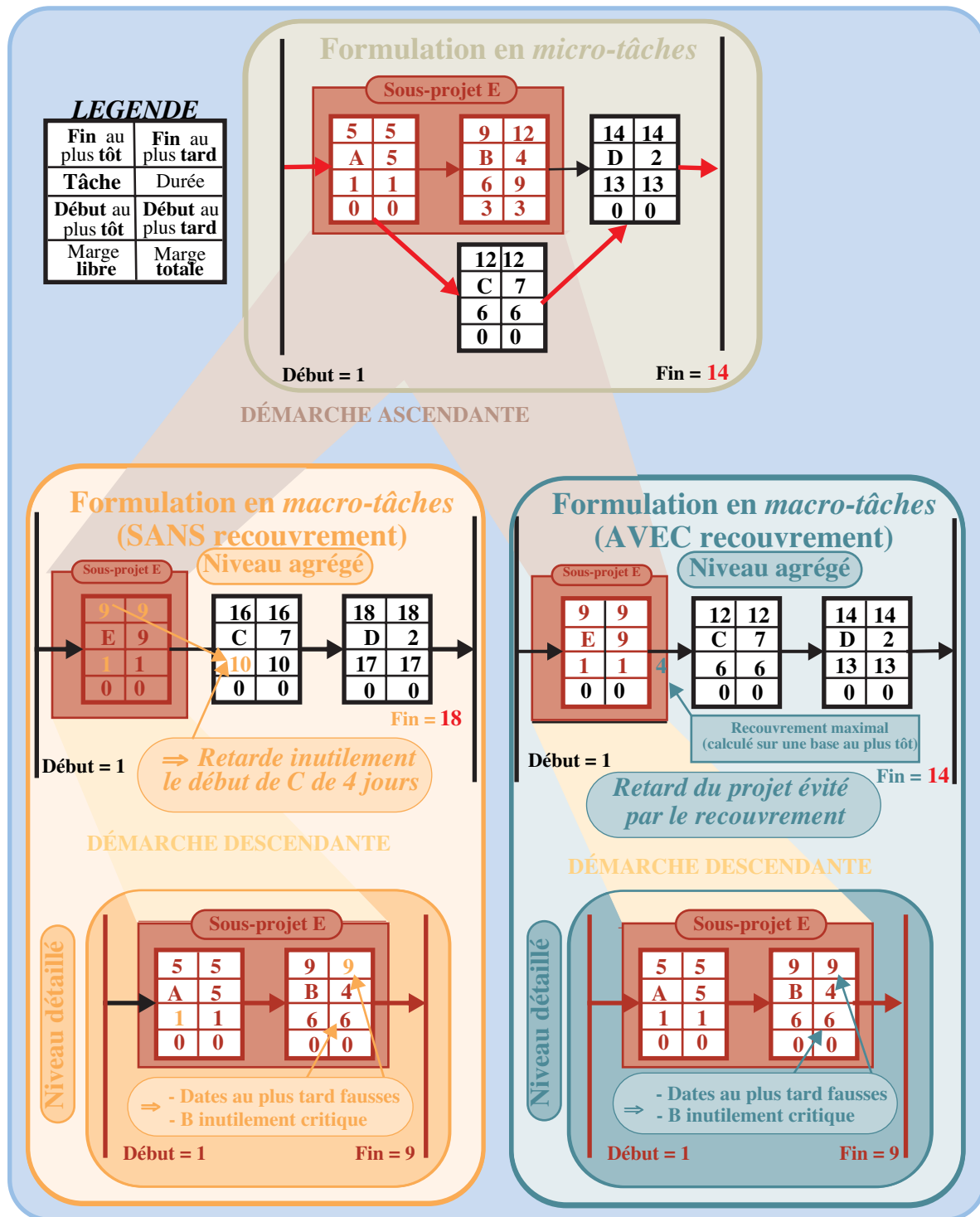
Index
thématique

Le suivi du projet fait l'objet d'instrumentations utilisables de manière plus ou moins autonome. Il convient de rappeler que la gestion de projet se décline sous trois dimensions : celle du temps, celle des coûts et celle des spécifications techniques. Nous avons indiqué ([page 260](#)) qu'un troc est toujours possible entre du temps, des ressources et des spécifications, ce qui implique que le contrôle autonome sur chacune de ces trois dimensions ne peut que fournir une vision partielle et éventuellement biaisée de l'avancement. Cela étant, pour des raisons pédagogiques, nous traiterons successivement le suivi du temps ([§ IV-1](#)) et celui des coûts ([§ IV-1, page 344](#)). Nous ne traiterons pas celui des spécifications techniques qui ne relève pas de problématiques de gestion.

L'interdépendance des objectifs ne doit pas masquer le *primat de l'économie*. En effet, ce sont presque toujours des enjeux économiques qui sont à l'origine des objectifs de délai et de spécifications techniques :

- si le projet est associé à un contrat, le client est en droit d'exiger le respect des délais et de l'ensemble des spécifications techniques figurant au contrat et, en cas de défaillance, de demander les pénalités contractuelles prévues;
- si le projet est interne (lancement d'un nouveau produit, investissement...), un retard « significatif » ou le non-respect de certaines spécifications se traduisent presque toujours par la contraction d'un marché potentiel ou par un surcroît de charges; dans les deux cas, il y a sanction économique.

FIGURE 98
Les effets pervers de la démarche hiérarchique



IV-1 Le suivi des délais

Une fois l'analyse du projet faite et la programmation établie (cf. § III-1.1.5, page 303) et communiquée aux différents acteurs, on peut passer à l'exécution du projet. Il est vivement recommandé, au fur et à mesure que des tâches commencent ou sont achevées, que ces informations soient saisies dans le logiciel de gestion de projet, pour permettre une détection rapide de risques de dérive. En effet, les logiciels s'appuient sur les réalisations et les informations disponibles sur les tâches

inachevées ou non commencées, pour réévaluer le reste à faire, à fur et à mesure de la saisie d'une nouvelle information.

Reprenons notre exemple et plaçons-nous au 25 janvier 2002, notre projet ayant commencé le mercredi 2 janvier. L'avancement constaté est décrit par le **tableau 63 de la page 345** et la **figure 99**, dans laquelle la programmation initiale est rappelée par des barres vertes, le réalisé par des barres en bleu foncé, et le reste à faire en barres de couleur rouge pâle ou bleu pâle selon que la tâche considérée est critique ou non. Les logiciels permettent de choisir les conventions graphiques qui semblent les plus efficaces aux utilisateurs. On notera sur cet exemple que les pourcentages de réalisation des tâches sont portés sur le graphique, que la tâche B a pris du retard, ce qui a décalé en cascade la programmation de ses descendants. Par ailleurs, la tâche F a une durée allongée d'un jour.

FIGURE 99
Avancement du projet au 25 janvier 2002

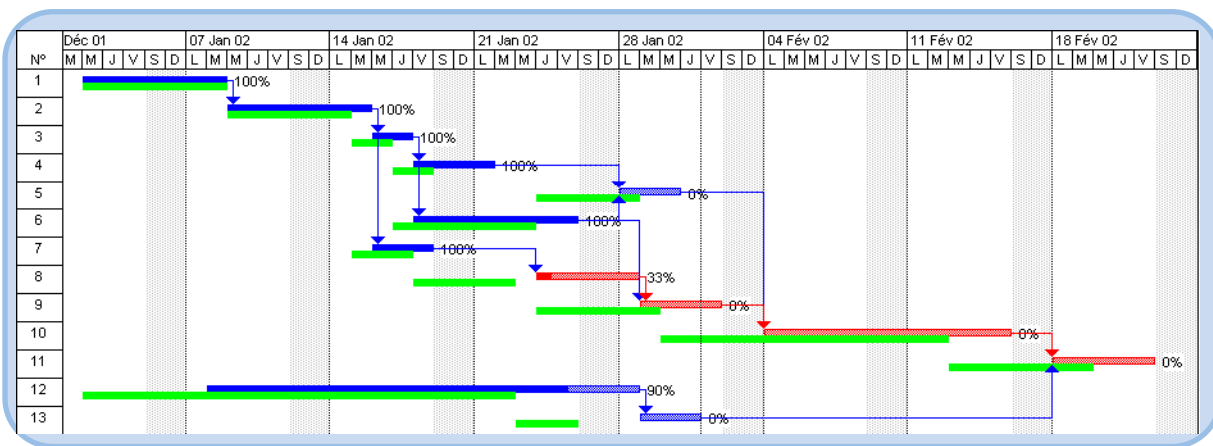


Table des matières

Index thématique

TABLEAU 63
Avancement du projet au 25 janvier 2002

Tâche	Réalisé			Durée		Planification		Variation de	
	Début	Fin	% achevé	réelle	restante	Début	Fin	date de début	date de fin
A-Terrassement	Mer 02/01	Mar 08/01	100%	5j	0j	Mer 02/01	Mar 08/01	0 jour	0 jour
B-Fondations	Mer 09/01	Mar 15/01	100%	5j	0j	Mer 09/01	Lun 14/01	0 jour	1 jour
C-Charpente verticale	Mer 16/01	Jeu 17/01	100%	2j	0j	Mar 15/01	Mer 16/01	1 jour	1 jour
D-Charpente toiture	Ven 18/01	Lun 21/01	100%	2j	0j	Jeu 17/01	Ven 18/01	1 jour	1 jour
E-Couverture	NC	NC	0%	0j	3j	Jeu 24/01	Lun 28/01	2 jours	2 jours
F-Maçonnerie	Ven 18/01	Ven 25/01	100%	6j	0j	Jeu 17/01	Mer 23/01	1 jour	2 jours
G-GO plomb. / élect.	Mer 16/01	Ven 18/01	100%	3j	0j	Mar 15/01	Jeu 17/01	1 jour	1 jour
H-Dalle béton	Jeu 24/01	NC	33%	0,99j	2,01j	Ven 18/01	Mar 22/01	4 jours	4 jours
I-Chauffage	NC	NC	0%	0j	4j	Jeu 24/01	Mar 29/01	3 jours	3 jours
J-Plâtre	NC	NC	0%	0j	10j	Mer 30/01	Mar 12/02	3 jours	3 jours
K-Finitions	NC	NC	0%	0j	5j	Mer 13/02	Mar 19/02	3 jours	3 jours
L-Achat machine	Mar 08/01	NC	90%	13,5j	1,5j	Mer 02/01	Mar 22/01	4 jours	4 jours
M-Réception essais	NC	NC	0%	0j	3j	Mer 23/01	Ven 25/01	4 jours	4 jours

Le retard de tâches critiques entraîne mécaniquement un retard dans la date de fin du projet, ce que les logiciels calculent automatiquement en révisant la programmation du reste-à-faire (comme c'est le cas dans la **figure 99**). D'une manière générale, au moment où l'on fait l'analyse, on constate que certaines

tâches ont du retard et que d'autres ont de l'avance; on verra avec l'écart de planning (page 351), comment synthétiser ces informations.

IV-2 Le suivi des coûts – contrôle de gestion d'un projet

On se focalisera ici sur l'instrumentation mise au point pour les projets à coûts contrôlés¹, instrumentation disponible de manière standard dans les principaux logiciels de gestion de projet, en utilisant la terminologie normalisée dans ce domaine (AFNOR, 1998, [4]). Les projets à rentabilité contrôlée utilisent peu les techniques présentées ici, ou après adaptation et en conjonction avec d'autres instrumentations (décrites au chapitre II).

L'un des principaux fondements du contrôle de gestion classique est de comparer des réalisations à un référentiel. Le premier problème à résoudre est donc la création du référentiel et l'établissement du budget consommé (§ IV-2.1). On examinera ensuite comment analyser les écarts, ce qui fonde le contrôle de gestion d'un projet (§ IV-2.2, page 348).

IV-2.1 Création du référentiel et détermination de la consommation budgétaire

La création d'un référentiel de coût s'appuie nécessairement sur l'ordonnance-ment qui a été retenu pour le projet et sur les estimations de consommations de ressources par les différentes tâches à exécuter, valorisées conventionnellement (usage de coûts standard) ou aux coûts du marché (appel d'offre, etc.).

Tous les logiciels de gestion de projet donnent la possibilité d'attacher à la réalisation de chaque tâche du projet une quantité de ressource, ce que l'on a appelé l'énergie (voir pages 280 et 317), et d'associer à cette utilisation un coût fixe et un coût variable direct, étant entendu qu'une tâche peut consommer plusieurs ressources. Le budget du projet se calcule donc en sommant ces différents coûts et en y ajoutant des provisions pour contrer les risques.

Le contrôle de gestion d'un projet est sans grand intérêt s'il s'agit simplement de comparer ex post, une fois le projet achevé, le budget initialement prévu et celui qui a été consommé. L'objectif visé est celui de maîtriser les dépenses au cours de la réalisation du projet, en mettant le plus rapidement possible en évidence les dérives qui se produisent sur le plan financier pour permettre de réagir. Ces actions porteront essentiellement sur le reste à faire dont on cherchera à adapter les spécifications, les modes opératoires et, parfois même, les délais. Les provisions constituées sont destinées à couvrir des écarts qu'il ne semble pas possible de combler par l'une des adaptations évoquées ci-dessus.

Dans ces conditions, le référentiel est un échéancier cumulé de charges prévisionnelles. Sachant que l'on a établi une programmation précise de l'exécution de chaque tâche et établi son coût, il est possible de bâtir cet échéancier. Le problème restant à résoudre est celui de savoir si l'accroissement de consommation budgétaire qu'engendre l'exécution d'une tâche est à prendre ponctuellement au début de l'exécution de cette tâche ou à sa fin ou répartie au cours de cette exécution. La réponse est en grande partie arbitraire car, pour l'entreprise, les

1. Pour approfondir, voir Joly, Le Bissonnais & Muller (1993, [250]).

décaissements effectifs ne suivent pas exactement cette programmation, qu'il s'agisse de consommation de ressources internes ou externes et les points de vue retenus sont révélateurs du « style » de contrôle de gestion voulu. Ce qui importera, par contre, c'est d'adopter les mêmes conventions pour construire le référentiel et pour valoriser l'avancement du projet. Plusieurs solutions sont possibles :

- On peut décider de répartir uniformément le coût de la tâche sur chaque période élémentaire (journée, le plus souvent) durant laquelle la tâche est exécutée, sachant que la dépense effective et la durée réelle ne seront connues qu'une fois la tâche achevée. Au début d'exécution de la tâche, on incrémente la consommation budgétaire selon le même mode de calcul. En cas de dépassement de durée, on continue à ajouter la même charge périodique que pour les périodes élémentaires précédentes. Une fois la tâche achevée, on ajoute la différence algébrique entre le coût constaté et le cumul des « provisions » qui ont été retenues pour cette tâche.
- On peut décider de répartir la dépense globale sur chaque période élémentaire durant laquelle la tâche considérée est exécutée, au prorata de la consommation d'une ressource donnée (ce qui conduit à un résultat différent de celui obtenu avec la méthode précédente en cas de consommation non constante de cette ressource sur la durée prévue d'exécution du projet). Des variantes de cette convention, s'appuyant sur des conversions plus ou moins complexes en unité d'œuvre sont parfois utilisées.
- On peut décider d'imputer la moitié du coût de la tâche au début de son exécution et le solde à sa fin. Cette solution, souvent utilisée, est acceptable s'il y a beaucoup de tâches et pour des tâches de durée relativement courte. Elle conduit à des courbes plus « heurtées ». Au début d'exécution de la tâche, on incrémente la consommation budgétaire du montant initialement prévu. À la date d'achèvement constatée de la tâche, la consommation budgétaire s'incrémente de la différence entre son coût constaté et la provision faite au début de son exécution.

Table des
matièresIndex
thématique

Au lancement du projet, on dispose donc d'un référentiel, schématisé à la [figure 100](#), qui décrit l'évolution de la consommation¹ du **budget initial** entre la date de début de projet que l'on désignera par τ_d , jusqu'à la fin du projet prévue pour la date $\tau_{f,d}$. On y ajoute, en général, une provision pour imprévus gérée par le directeur du projet et destinée à faire face aux aléas et accidents. Cette solution d'une « assurance groupée » est plus judicieuse que celle d'assurances individuelles obtenues par « saupoudrage » de la provision, dans la mesure où les reliquats sont rarement remis à disposition et où l'on démontre facilement que l'assurance groupée assure une meilleure protection, à coût identique.

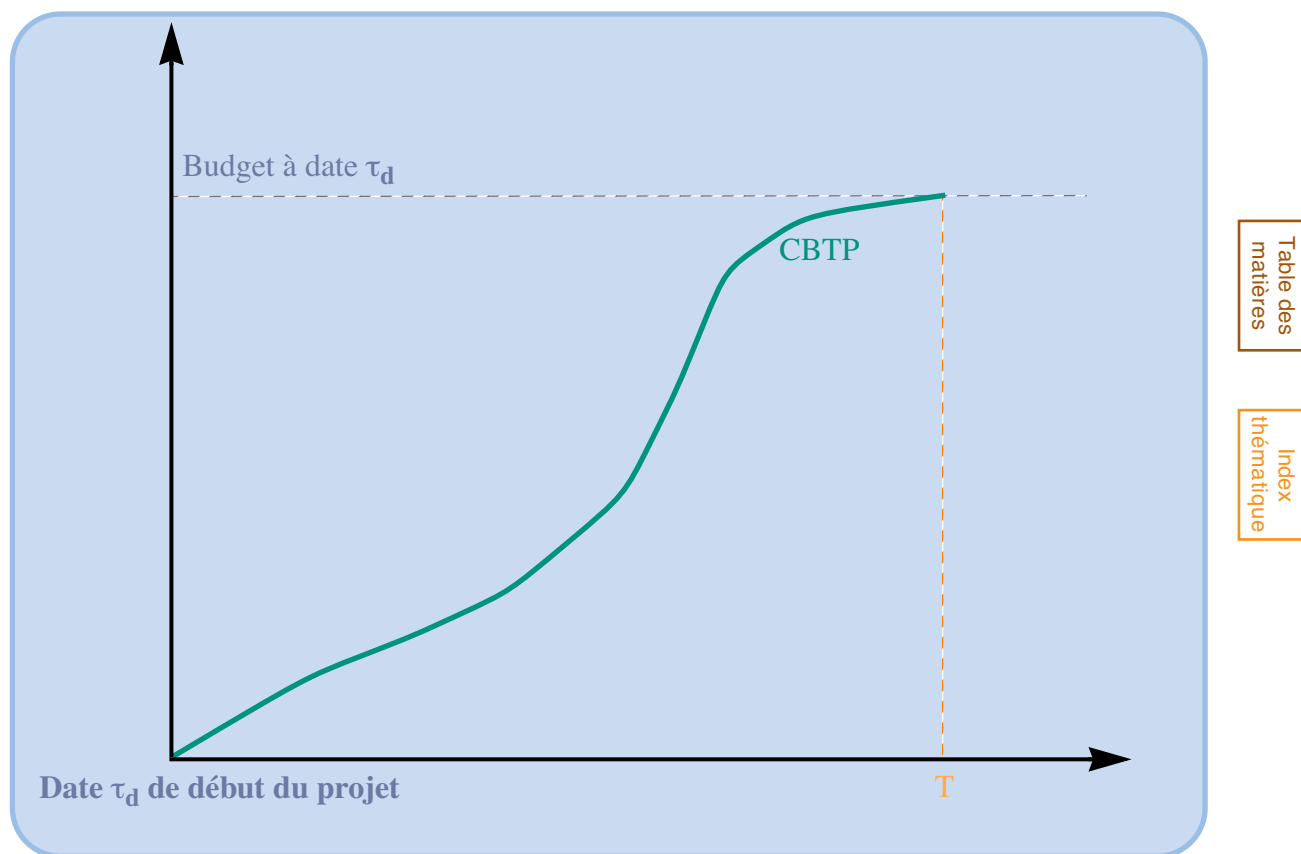
Avant d'aborder le contrôle de gestion du projet, il faut ajouter qu'à une date t ultérieure ($\tau_d < t < \tau_{f,d}$), l'évolution de la demande et un certain nombre d'événements peuvent conduire à des dérives telles que le directeur de projet, en accord avec sa hiérarchie, est amené à réviser officiellement certains objectifs et / ou moyens mis en œuvre, et donc le budget du projet. Cette révision, à la date courante t , modifie le référentiel avec lequel les acteurs du projet travaillent :

1. Dans certains projets, l'échéancier combine charges et recettes.

- à la date $\tau_{f,d}$ de fin du projet établie initialement, se substitue la date révisée $\tau_{f,t}$ que l'on considère à la date courante t , comme un objectif techniquement réaliste (cette date de fin du projet $\tau_{f,t}$ ayant pu déjà être révisée avant cette date courante t);
- au budget initial, se substitue le **budget à date**¹ qui intègre les décisions modificatives intervenues pour tenir compte des difficultés ou opportunités rencontrées;
- les informations disponibles à la date courante t peuvent conduire à une estimation de coût du projet, appelée **coût prévisionnel réestimé** à la date t , qui est supérieure (ou, plus rarement, inférieure) à celle du budget à date, parce que des éléments nouveaux sont intervenus depuis la dernière révision du budget ou parce que, lors de cette révision il a été décidé d'être optimiste ou de mettre sous tension les équipes pour contenir les dérives et tenir les délais.

FIGURE 100

Détermination du référentiel du contrôle de gestion d'un projet à coûts contrôlés



La comparaison du réalisé avec le prévu est maintenant possible, mais elle pose un redoutable problème méthodologique.

IV-2.2 Analyse des écarts

On examinera la démarche d'analyse (§ IV-2.2.1) avant de faire quelques remarques sur les différences qui existent entre le contrôle de gestion de projet présenté ici et le contrôle de gestion «classique» (§ IV-2.2.1, page 349).

1. que les Anglo-Saxons appellent *budget to date* ou *current budget*.

IV-2.2.1 La démarche d'analyse

À la date courante t , un ensemble de tâches a été en totalité ou en partie achevé, ce qui se traduit par un **coût encouru**¹ (ou **Coût Réel du Travail Effectué** ou **CRTE**) correspondant au coût réel des travaux réalisés à la date t et imputés au projet. Si l'on avait travaillé en conformité avec le budget à date, les travaux qui auraient dû être réalisés à la date courante auraient conduit normalement à supporter un **Coût Budgété du Travail Prévu** ou **CBTP**, appelé encore **budget encouru**².

La différence observée à la date t entre ce qui est prévu (budget encouru) et ce qui est réalisé (coût encouru) a pour origine :

- le fait qu'à la date t certaines tâches sont :
 - en avance (achevées plus tôt que prévues ou réalisées avec un pourcentage d'avancement supérieur à celui initialement prévu pour cette date)
 - ou en retard (pas encore commencées ou réalisées avec un pourcentage d'avancement inférieur à celui initialement prévu pour cette date) ;
- un effet prix, c'est-à-dire des écarts sur les valeurs de facteurs consommés qui sont imputables à :
 - des différences de quantités utilisées (amélioration ou dégradation de la productivité),
 - et des différences de prix unitaires valorisant ces quantités (prix supérieurs ou inférieurs par rapport aux prévisions).

La comparaison directe du budget encouru et du coût encouru n'a donc pas grand sens puisque l'on est incapable de faire un diagnostic des causes de l'écart constaté. Pour résoudre ce problème, on a repris l'idée qui a conduit à la création de l'indice de Laspeyre des quantités³ qui compare une dépense effectuée au cours d'une période t_1 à une dépense fictive réalisée au cours de la période t_2 , en valorisant les quantités achetées au cours de cette période, par les prix observés au cours d'une période t_1 .

Le principe retenu consiste à comparer respectivement ce qui est **prévu** (**coût budgété du travail prévu** ou **CBTP**) et ce qui est **réalisé** (**coût encouru** ou **CRTE**) à une troisième grandeur correspondant à une valeur *théorique* de travaux exécutés qui doit être :

- comparable au coût encouru, parce qu'elle adopte la *même hypothèse d'avancement du planning* (mêmes tâches achevées ou en cours),
- et comparable au budget encouru, parce qu'elle adopte la *même hypothèse de valeurs de ressources consommées* (absence totale de dérive de coût pour les tâches achevées ou en cours).

Cette **valeur théorique** de travaux exécutés, que l'on appelle **coût budgété du travail effectué**⁴ (ou **CBTE** ou **Valeur Budgétaire du Réalisé** ou **Valeur Acquise**), s'obtient tout simplement en valorisant les tâches effectuées par leurs

1. que les Anglo-Saxons appellent *incurred expenditure* ou *actual cost of work performed*.

2. que les Anglo-Saxons appellent *incurred budget*.

3. Voir Giard (1995, [182], chapitre I).

4. que les Anglo-Saxons appellent *budgeted cost of work performed* ou *BCWP* ou *earned value*.

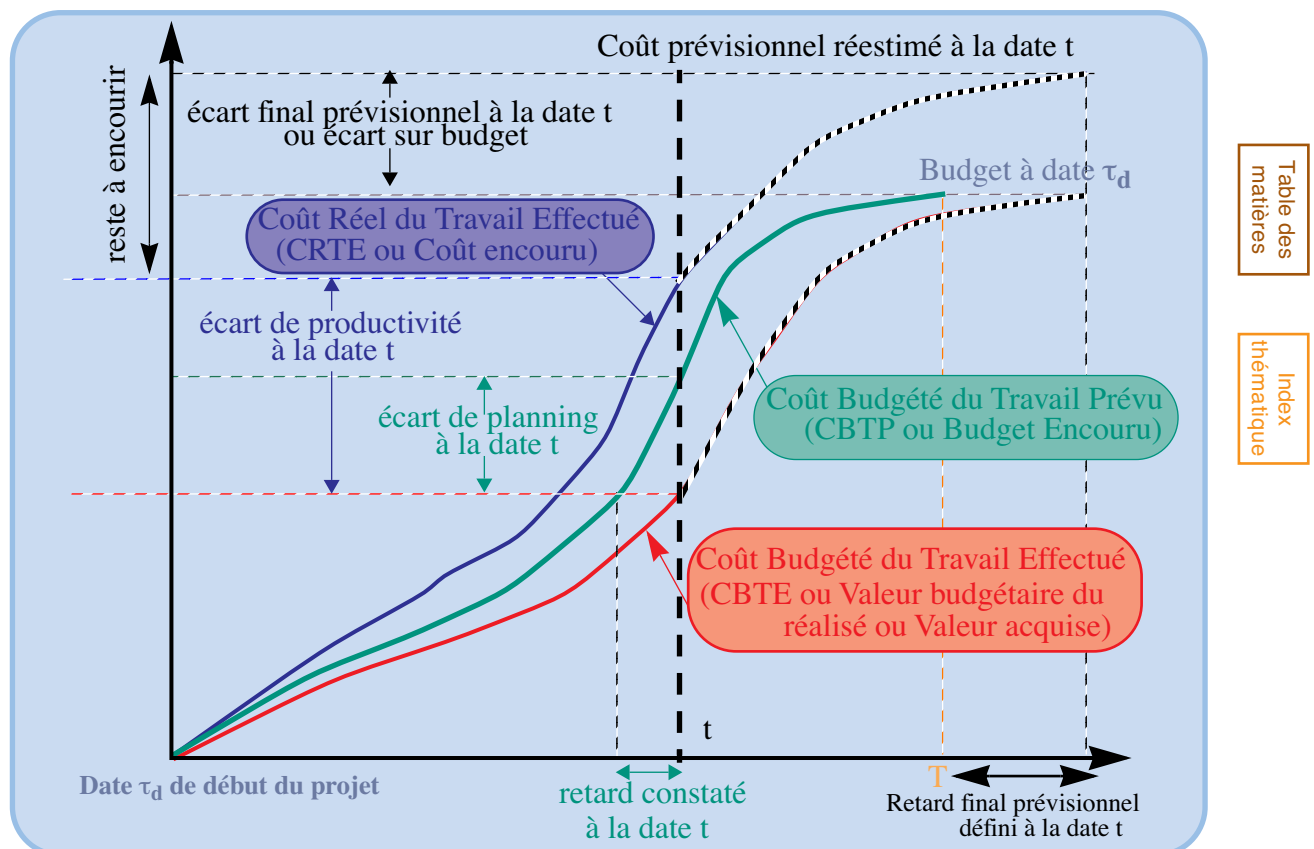
coûts prévisionnels définis dans le budget à date (on parle encore de valorisation «à prix budget»). Ces différentes conventions sont résumées dans le [tableau 64](#).

TABLEAU 64
Les hypothèses de calcul définissant les grandeurs à comparer

Hypothèses		Coût Encouru (CE ou CRTE)	Budget Encouru (BE ou CBTP)	Valeur Acquise (CBTE)
Avancement	Prévu		X	
	Réalisé	X		X
Coût	Prévu		X	X
	Réalisé	X		

Ces éléments de comparaison sont portés sur la [figure 101](#) qui reprend en la complétant la [figure 100 de la page 348](#) et présente les éléments de l'analyse d'écart que nous allons examiner.

FIGURE 101
Analyse des écarts en contrôle de gestion de projet



En deçà de la date t , les valeurs de coût encouru et de valeur budgétaire du réalisé portées sur la [figure 101](#) sont des constats ; au delà, il s'agit de prévisions (d'où l'usage de pointillés) définies à la date courante t et donc révisables ultérieurement. Les échéanciers prévisionnels du coût encouru et ceux de consommation de budget à date définis à la date t (qui constituent une «prévision de la valeur budgétaire du réalisé») ne sont pas toujours calculés, les gestionnaires se contentant souvent des valeurs finales (budget à date et coût prévisionnel réestimé à la date t).

IV-2.2.1.1 Écart de planning

La comparaison du **coût budgété du travail effectué (CBTE)** au **coût budgété du travail prévu (CBTP)** porte sur des consommations de budget valorisées aux **mêmes coûts** d'utilisation de ressources. Toute distorsion introduite par des coûts différents entre ces deux grandeurs est donc éliminée. La différence entre ces deux grandeurs correspond donc uniquement à une différence de planning, d'où son appellation d'**écart de planning**¹ que l'on définit conventionnellement comme :
Écart de Planning = Coût Budgété du Travail Effectué - Coût Budgété du Travail Prévu

On peut noter que les tâches qu'il était prévu d'exécuter avant la date t et qui sont achevées à cette date, interviennent pour la même valeur dans le **coût budgété du travail effectué (CBTE)** et dans le **coût budgété du travail prévu**, ce qui revient à dire qu'elles n'interviennent pas dans l'écart de planning. L'analyse de ces informations est simple :

- si le **coût budgété du travail effectué** est **supérieur** au **coût budgété du travail prévu** (écart de planning positif), les réalisations du projet sont en avance par rapport aux prévisions, et ce « globalement » (il convient, en effet, d'analyser plus en détail le planning pour vérifier si certaines tâches critiques n'ont pas pris de retard, ce que ne permet pas de déceler l'indicateur synthétique proposé);
- si le **coût budgété du travail effectué** est **inférieur** au **coût budgété du travail prévu** (écart de planning négatif), les réalisations du projet sont « globalement » en retard par rapport aux prévisions.

L'écart de planning est un indicateur exprimé en valeur. Son signe permet d'indiquer si l'on est en avance ou en retard, mais difficilement d'en apprécier l'importance. L'usage complémentaire d'un indicateur en valeur relative permet de mieux apprécier l'importance du retard ou de l'avance diagnostiqué. Il suffit, de diviser l'écart de planning par le **budget encouru** (qui constitue la référence) pour obtenir l'**écart de planning relatif**.

Table des matières

Index thématique

IV-2.2.1.2 Écart de productivité

Le **coût réel du travail effectué (CRTE)** et le **coût budgété du travail effectué (CBTE)** ont en commun la **même hypothèse d'avancement des travaux**. Ces grandeurs devraient donc être identiques si, pour chaque tâche achevée ou en cours, le coût réel coïncidait avec le coût prévu. Il n'en est rien et l'on observe un **écart de coût** défini comme :

Écart de Coût = Coût Budgété du Travail Effectué - Coût Réel du Travail Effectué

Cette différence a pour origine des variations de coût de réalisation des tâches. La variation de coût de réalisation d'une tâche s'explique :

- par des variations de consommations de ressources utilisées (variation du travail requis, variation des pertes de matières...) et donc une productivité des ressources moins forte à l'exécution que celle prévue
- et des variations de coût de ces ressources (variation de l'importance relative des heures supplémentaires, variation de conditions d'achat de matières,

1. que les Anglo-Saxons appellent *planning variance*.

changement de sous-traitance...) mais celle-ci reste, généralement, très marginale.

Le résultat de ces variations est imputable à une amélioration ou une dégradation de performances techniques, organisationnelles et de gestion que les acteurs du projet maîtrisent en grande partie. Cette appellation d'écart de coût est d'une certaine façon trompeuse et traduit mal l'interprétation qu'il convient d'en donner. Aussi utilise-t-on plus volontiers d'autres appellations, **écart de performance** ou encore **écart de productivité**:

Écart de productivité = Coût Budgété du Travail Effectué - Coût Réel du Travail Effectué

L'analyse de ces informations est simple :

- si le **coût budgété du travail effectué** est *inférieur* au **coût réel du travail effectué** (écart de coût négatif), on est en présence de dépenses supplémentaires qu'il faudra compenser par des économies ultérieures ou, à défaut, par une augmentation de budget; on est donc en présence d'un *risque de dépassement budgétaire*;
- si le **coût budgété du travail effectué** est *supérieur* au **coût réel du travail effectué** (écart de coût positif), les réalisations du projet ont coûté moins cher que prévu, ce qui accroît les chances de tenir dans l'enveloppe budgétaire initiale.

Cette information doit être relativisée par l'analyse de l'écart de planning. Par exemple, un dépassement budgétaire peut avoir pour origine la volonté d'obtenir un écart de planning positif (d'où, par exemple, un usage plus important d'heures supplémentaires) ou, autre cas de figure, une économie budgétaire peut être liée à l'utilisation de ressources moins coûteuses et moins performantes, ce qui aura généré un retard de planning. Une rapide analyse montre que treize cas de figure sont possibles :

CRTE = CBTP = CBTE; CRTE = CBTP > CBTE; CBTE > CRTE = CBTP
 CRTE = CBTE > CBTP; CBTP > CRTE = CBTE; CBTE = CBTP > CRTE;
 CRTE > CBTE = CBTP; CRTE > CBTP > CBTE; CRTE > CBTE > CBTP;
 CBTP > CRTE > CBTE; CBTP > CBTE > CRTE; CBTE > CBTP > CRTE;
 CBTE > CRTE > CBTP

ce qui montre que le diagnostic doit être adapté à la diversité des situations et qu'il convient d'éviter tout jugement basé sur l'analyse d'un seul indicateur.

L'indicateur de l'écart de coût mesure la dérive budgétaire (positive ou négative); on complète généralement cette information par un indicateur en valeur relative qui permet de mieux apprécier l'importance de l'enjeu par rapport au projet. Il suffit de diviser l'écart de coût par la valeur budgétaire du réalisé (qui constitue la référence en matière de dépenses), pour obtenir l'**écart de coût relatif** que l'on appellera encore **écart de performance relatif**.

Le **tableau 65** résume cette analyse d'écart de planning et de productivité.

TABLEAU 65
Diagnostic porté sur les écarts de planning et de productivité

Hypothèses		Coût Encouru (CE ou CRTE)	Budget Encouru (BE ou CBTP)	Valeur Acquise (CBTE)
Avancement	Prévu		X	
	Réalisé	X		X
Coût	Prévu		X	X
	Réalisé	X		
Écart de planning : CBTE - CBTP			< 0 ⇒ retard	> 0 ⇒ avance
Écart de coûts : CBTE - CRTE		< 0 ⇒ dépassement		> 0 ⇒ économie

IV-2.2.1.3 Remarques

Ces analyses d'écart de coût et de planning ne permettent de diagnostics fins qu'à la condition que ce type d'analyse soit conduit non seulement au niveau de projets mais également à des niveaux plus bas (sous-projets ou de tout groupe de tâches retenu dans l'analyse hiérarchique du projet). En effet, un écart de coût négatif pour un projet peut être le résultat de plusieurs écarts négatifs de coûts de sous-projets et d'écarts positifs (et donc défavorables) des sous-projets restants qu'il convient de surveiller de près, si tant est qu'ils ne sont pas achevés. L'analyse des écarts de planning conduit à des remarques similaires mais cette analyse doit nécessairement être complétée par une analyse de l'avancement détaillé des tâches car les conséquences ne sont pas les mêmes si les retards ou avances concernent ou non des tâches critiques.

Table des matières

Il convient, par ailleurs, de garder à l'esprit qu'une prévision a d'autant moins de chances d'être respectée qu'elle est de qualité médiocre. Cette remarque, qui milite en faveur d'une révision périodique des prévisions, est à prendre en considération lors du jugement des performances: il n'est pas très difficile d'être en avance ou d'avoir consommé moins que prévu des ressources si, par précaution, les prévisions fournies étaient pessimistes et, à l'inverse, il est méritoire de contenir les délais et coûts si les prévisions étaient optimistes. Cela étant, ces informations sont obtenues souvent auprès des responsables de l'exécution des tâches et le jugement est à porter aussi bien sur la qualité de la prévision (en fonction des données alors disponibles) que sur celle de l'exécution.

Index thématique

Il ne faut pas oublier les effets pervers induits par le contrôle de gestion préconisé. Dans la mesure où le système exerce une tension assez forte pour tenir les coûts et les délais, on peut insidieusement sacrifier le long terme au court terme en dégradant, sciemment ou non, le contenu de certaines tâches. C'est ainsi que l'on pourra maintenir des coûts et délais de tâches de conception en faisant des impasses techniques sur des problèmes détectés que l'on reporte sur la fabrication ou l'entretien. Ces effets pervers pourront donc jouer sur des objectifs de performances techniques, que ce contrôle de gestion méconnaît puisqu'il ne s'attache qu'aux objectifs de délais et de coûts, ou des augmentations de dépenses survenant après la fin du projet et donc non prises en compte par ce contrôle de gestion de projet à coûts contrôlés (coûts de maintenance et de chauffage d'un bâtiment, par exemple).

Ajoutons enfin que des informations complémentaires intéressantes pourront être obtenues par l'usage de techniques de simulation utilisant la méthode de Monte-Carlo pour évaluer aussi bien le risque de dépassement des délais impartis au projet que celui de dépassement du budget, puisque les logiciels disponibles permettent de définir des distributions de probabilités de coûts aussi facilement que pour les délais. Cela étant, cette approche du risque de dépassement de budget est encore peu diffusée (elle l'est moins dans la conception à coût objectif) et reste culturellement éloignée de celles qui prévalent en contrôle de gestion.

IV-2.2.2 Comparaison du contrôle de gestion de projet et le contrôle de gestion classique

Plusieurs différences importantes doivent être soulignées que l'on évoquera rapidement ici¹ : une prise en compte différente du temps (§ IV-2.2.2.1), une construction différente du référentiel (§ IV-2.2.2.2, page 355), des périmètres de responsabilité différents (§ IV-2.2.2.3, page 355). On terminera par quelques considérations sur les problèmes méthodologiques posés par la coexistence entre les deux formes de contrôle de gestion dans les entreprises qui cherchent à gérer par projet l'ensemble de leurs activités (§ IV-2.2.2.4, page 356).

IV-2.2.2.1 Une prise en compte différente du temps

Dans beaucoup d'entreprises, le pilotage économique s'appuie sur une *approche hiérarchique* :

- la *planification stratégique* détermine sur le long terme le portefeuille d'activités que souhaite et peut retenir l'entreprise ainsi que le portefeuille cohérent de ressources qui seront nécessaires à cette fin ;
- le *contrôle de gestion* met en place sur le court terme une projection détaillée en volume et en valeur de l'activité de l'entreprise, laquelle, conçue de manière récurrente sur un horizon glissant, doit être cohérente avec les décisions de la planification stratégique ; il cherche à suivre la réalisation de l'activité et à mesurer des dérives, afin d'orienter la préparation de mesures correctives devant permettre, si possible, d'atteindre les objectifs quantifiés préalablement définis.

Cette conception de la mise sous tension de l'organisation s'explique par la perception d'une certaine *répétitivité* et *stabilité* des activités², s'inscrivant dans une perspective d'adaptation de l'organisme pour assurer sa survie sur le long terme.

Dans la mesure où la *mort* du projet est annoncée dès sa naissance, le pilotage économique du projet sera de nature différente :

- le clivage entre la planification stratégique, confiée à des cadres d'état major (staff), et le contrôle opérationnel, confié à des cadres opérationnels (line), s'estompe non seulement parce que ce seront les mêmes acteurs-projets qui interviendront dans la définition du projet et sa gestion ;

1. Une discussion plus approfondie de ces différences peut être trouvée dans Giard et Fray (1993, [195] et [135]).

2. Voir Giard & Lagroue (2001, [196]).

- les horizons de contrôle seront variables selon les phases du projet et selon la nature des travaux et des objectifs suivis dans la réalisation des tâches rattachées à la phase en cours d'exécution (qui est celle qui fait l'objet d'un contrôle).

Il s'ensuit que les écarts analysés ne portent pas sur la même période :

- en contrôle de gestion «classique», ils sont définis sur une période d'amplitude fixe (souvent le mois) et des analyses relativement indépendantes sont exécutées d'une période à l'autre ;
- en contrôle de gestion de projet, les écarts sont définis sur une période variable qui est délimitée par la date courante et celle de début de projet (ou celle de sa dernière révision) ; cette définition :
 - marque la volonté de maîtriser un processus sur sa durée avec, d'une part en filigrane l'idée que se construit progressivement un écart sur le budget du projet, ce qui est cohérent avec l'idée de fin annoncée du projet et, d'autre part, l'idée de possibilité de rattrapage en cas de dépassement et donc d'une certaine réversibilité,
 - renforce la responsabilisation de l'équipe de direction du projet qui, habituellement, jouit d'une certaine stabilité, ce qui permet d'éviter certains effets pervers, maintenant bien connus en contrôle de gestion, liés à une rotation rapide de l'encadrement,
 - essaye implicitement de prendre en compte l'interdépendance temporelle des décisions dans tous ses aspects, puisqu'une mauvaise exécution d'une tâche, due au désir de respecter à tout prix des contraintes de coût et de délai, pourra ultérieurement avoir des incidences sur le contenu d'autres tâches conduisant à payer chèrement certaines économies antérieurement réalisées.

IV-2.2.2.2 Une construction différente du référentiel

La construction du référentiel du contrôle de gestion de projet s'effectue de manière différente de celle du contrôle de gestion classique, en grande partie, parce que les activités sous contrôle n'ont pas la même récurrence. La gestion de projet oblige à expliciter, au moins grossièrement, la gamme associée au projet en obligeant à une certaine décomposition des tâches et à une définition des ressources nécessaires à leur exécution. La visibilité du physique qui sous-tend les valeurs manipulées est plus forte et plus réaliste que celle obtenue habituellement en contrôle de gestion qui repose sur des mécanismes linéaires simples. Le contrôle de gestion du projet oblige à un retour au réel d'une tout autre nature que celui observé en contrôle de gestion «classique», ce qui limite les risques de comportement, observé chez certains gestionnaires, de n'accepter que la représentation en valeur de la réalité, avec tous les effets pervers qui en découlent.

IV-2.2.2.3 Des périmètres de responsabilité différents

La nature «transversale» du projet implique que la responsabilité de ses gestionnaires s'accommode mal des découpages par services ou départements. Toutefois, le type d'organisation retenu pour le projet influe sur le degré de responsabilité des gestionnaires du projet ; en tout état de cause, les structures «coordinateur de projet» et «directeur de projet» obligent à dépasser les clivages

classiques des services (le « projet sorti » se comportant comme une entité autonome).

La gestion de projet oblige à une intégration plus forte des conséquences temporelles de certaines décisions. C'est ainsi que certaines entreprises travaillant par affaire non seulement « facturent » au projet toutes les charges induites par le projet (pénalités de retard, par exemple) mais en plus, elles vont jusqu'à rendre responsables leurs ingénieurs d'affaires de la qualité des échéanciers de flux nets de trésorerie que leurs décisions engendrent, en débitant le projet d'intérêts intercalaires calculés sur les montants « prêtés » par l'entreprise au projet.

IV-2.2.2.4 La difficile coexistence de plusieurs contrôles de gestion

Signalons, pour commencer, que, dans les projets à coûts contrôlés d'une grande importance, il n'est pas rare que des impératifs de maîtrise des risques encourus conduisent les clients à imposer contractuellement leurs propres techniques de contrôle (usage de normes internes ou de normes plus générales d'origine administrative). On peut alors observer une juxtaposition de techniques de contrôle pas toujours entièrement compatibles, notamment en ce qui concerne les procédures formelles à suivre et le vocabulaire utilisé. Les situations conflictuelles qui peuvent en résulter sont tout à fait dommageables car les entreprises concernées doivent investir en termes de documentation et de formation dans plusieurs approches, tout en sachant que cet investissement ne sera pas forcément amorti sur plusieurs grandes opérations.

A priori, les entreprises travaillant par projet avec la structure du « projet sorti » peuvent se contenter d'utiliser les techniques de contrôle de gestion du projet. Dans les projets s'appuyant sur une organisation de « coordinateur de projet » ou de « directeur de projet », on a souvent une coexistence d'un contrôle de gestion classique destiné à mettre sous tension les services fonctionnels et d'un contrôle de gestion de projet. Compte tenu des nombreuses différences qui ont été pointées ci-dessus, cette coexistence peut poser des problèmes et ceci sera d'autant plus vrai que l'on s'approche d'une affectation aux projets, de la totalité des moyens des services. En effet, s'il est normal qu'un service fonctionnel soit évalué à partir du rapprochement de sa production sur une période et des moyens dont il dispose, il convient de noter que la demande de ressources par les projets n'a aucune raison d'être régulière dans le temps. Il en résulte, selon les périodes, des conflits entre projets voulant mobiliser en même temps certaines ressources, avec éventuellement la nécessité d'utiliser des ressources externes plus coûteuses, ou un sous-emploi de ressources sur lequel les marges de manœuvre du responsable de service sont faibles. Dès lors, le rapprochement « ressources disponibles - production » peut conduire à formuler un diagnostic défavorable (par comparaison dans le temps ou dans l'espace), sans que la qualité de gestion de ce service puisse être mise en cause. Cette observation relativise l'usage de ce type d'évaluation.

Le lien entre les deux contrôles de gestion passe également par l'utilisation de coûts standards. Ces derniers sont élaborés dans le cadre de la comptabilité de gestion des services fonctionnels et leur définition est nécessairement influencée par la régularité des plans de charge sur le passé et leur pertinence est affectée par l'usage de règles d'affectation et de répartition qui ne prennent pas correctement en compte des inducteurs de coûts devenus essentiels, comme la complexité et la

variété. Ces coûts peuvent modifier les comportements, selon l'usage qui en est fait. S'ils sont considérés comme des prix de cession de ressources qu'il est possible d'acquérir autrement, il faut s'attendre à ce que des prix élevés incitent les responsables de projet à faire appel à des ressources externes. À l'inverse, des coûts internes nettement plus faibles que les prix du marché peuvent induire une attention moindre portée à l'usage rationnel de ces ressources. D'une certaine manière, on est en présence de décisions de type «faire ou acheter» qui sont ponctuelles, parce que prises indépendamment pour chaque projet, mais qui peuvent perturber les calculs des standards et avoir rapidement des effets irréversibles, dans le cas de renchérissement progressif. Le pilotage des comportements par les coûts revêt donc une importance stratégique car il conduit à maintenir ou à externaliser certaines activités. Il importe donc qu'une décision de ce type ne soit pas trop conditionnée par l'existence d'à-coups conjoncturels.

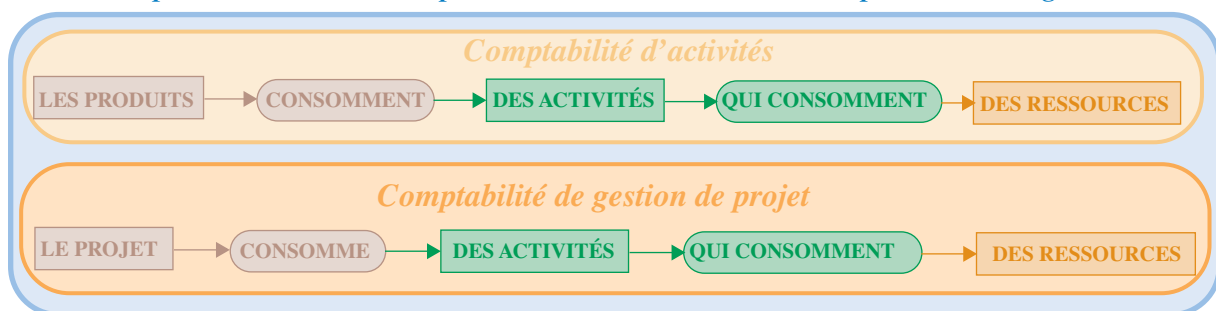
Les réflexions menées depuis une quinzaine d'années sur la transformation de la comptabilité de gestion et le renouveau du contrôle de gestion¹ ont nécessairement des incidences sur celles que l'on peut conduire sur le contrôle de gestion de projet. Le renouveau de la comptabilité de gestion par la comptabilité par les activités repose sur le mécanisme traduit graphiquement par Mévellec (1990, [298]), dans la partie haute de la figure 102. Ce schéma est familier depuis longtemps aux gestionnaires de projets puisque l'analyse d'un projet s'effectue suivant un processus voisin où «le projet» remplace «les produits», ce qu'illustre la partie basse de la figure 102. D'une certaine manière, le renouveau actuel de la comptabilité de gestion est une réhabilitation de l'analyse des processus physiques, que la gestion de projet ne pouvait en aucun cas ignorer puisque la phase d'analyse préalable du projet correspond, en grande partie, à une explicitation de gammes opératoires. On peut dès lors penser que la nécessaire convergence du contrôle de gestion classique et du contrôle de gestion de projet passera par les outils de la comptabilité par activités.

Table des matières

Index thématique

FIGURE 102

Comparaison de la comptabilité d'activité et la comptabilité de gestion



1. Ce renouveau a fait en France l'objet de plusieurs ouvrages au début des années quatre-vingt-dix : l'ouvrage collectif d'Ecosip [134], celui de P. Mévellec (1990, [298]), celui de P. Lorino (1991, [287]), celui de J. Laverty & R. Demeestère (1990, [273]) et A. Burlaud & C. Simon (1981, [76]). Ces travaux s'inspirent en partie des travaux du CAM-I (voir Berliner & Brimson (1988, [47])).

Chapitre V

ORDONNANCEMENT EN ATELIERS SPÉCIALISÉS

La version CD-Rom de ce chapitre permet d'accéder directement à des logiciels exploitant les principales techniques ou approches décrites dans ce chapitre. La présence d'une icône en marge du texte (comme celle figurant dans cette page) indique la possibilité d'utilisation de la technique décrite dans le texte et le lien hypertextuel placé sur cette icône permet d'accéder à l'exemple numérique utilisé dans le texte. Certaines figures et tableaux de ce chapitre ont été établis à partir de ce logiciel mais n'ont pas été repris sous leur forme originale pour des raisons de lisibilité. Vous avez la possibilité de créer vos propres exemples pour exploiter les possibilités offertes¹.



Les problèmes d'**ordonnancement**², c'est-à-dire de la **détermination conjointe des dates d'exécution d'un ensemble d'opérations et des ressources mobilisées dans cette exécution**, ont été introduits au chapitre précédent relatif à la gestion des projets. Ces problèmes d'ordonnancement se retrouvent dans toutes les formes d'organisation de la production et la qualité des solutions proposées conditionne largement la performance, voire la survie, de l'organisation.

Table des
matières

Index
thématique

- Dans le cas d'une production en ligne de fabrication et / ou d'assemblage, comme on le rencontre fréquemment dans la production de masse de produits manufacturés, ces problèmes sont peu importants pour la production sur une ligne dédiée à la production d'une seule famille de produits obtenue par des combinatoires de modules interchangeables (un moteur à choisir parmi 5 possibles, un tableau de commande à choisir parmi 3 possibles, etc.). Le problème pratique posé concerne surtout le système d'information à mettre en place, dans la mesure où il s'agit de faire «converger» au bon moment les composants qui vont permettre de diversifier la production. Les problèmes sont d'une tout autre nature si le choix de certaines options fait varier le temps de travail sur certains postes de la ligne (c'est le cas, par exemple, de l'option «toit ouvrant» dans l'industrie automobile) et, alors, se pose un véritable problème d'ordonnancement, qui sera présenté au **chapitre IX**.

1. Voir avertissement de la note du bas de la [page 8](#).

2. La littérature spécialisée distingue le problème de l'ordonnancement de celui du **séquencement** qui n'est autre que celui de la détermination de l'ordre de passage d'un ensemble d'opérations devant être exécuté sur une ressource donnée. Plusieurs ordonnancements traitant un même ensemble de commandes impliquant chacune l'exécution de plusieurs opérations, dans un système productif comportant plusieurs ressources, peuvent conduire à un même séquencement d'un ensemble d'opération à exécuter sur une même ressource mais, si l'ordre de ces opérations est le même, leurs dates d'exécution changent. Pour approfondir la problématique traitée dans ce chapitre, le lecteur est invité à se reporter à Esquirol & Lopez (1999, [140]); il peut également consulter les ouvrages de Pinedo (1995, [338]), Pinedo & Chao (1999, [339]), Morton & Pentico ([309], 1993) et Carlier & Chretienne (1988, [85]). L'ouvrage collectif coordonné par Lopez & Roubellat (2001, [286]) aborde de manière intelligible les nouvelles approches de résolution de cette classe de problèmes.

- Dans le cas d'industries de process, comme la chimie et aussi dans certaines industries agroalimentaires, le problème d'ordonnancement posé est plutôt celui de la définition d'un schéma répétitif de fabrication de différents produits, pour faire face à une demande relativement stable. Ce problème est souvent assez simple pour que l'appel à des formulations classiques de la recherche opérationnelle s'avère pertinent et particulièrement rentable¹.

Dans ce chapitre, on s'attaquera au cas de l'ordonnancement d'un ensemble de commandes (ou d'ordres de fabrication), à exécuter dans un système productif organisé en ateliers spécialisés (défini au [chapitre I, § I-2.2.2, page 51](#)), chaque commande pouvant porter sur une ou plusieurs unités (dans ce dernier cas, on parle de **série**) et impliquant l'exécution de plusieurs opérations mobilisant des ressources variées. Ce problème diffère de celui traité au [chapitre IV](#) (qui pouvait concerner un portefeuille de quelques projets) sur l'horizon de planification et sur le nombre de commandes.

- Les problèmes d'ordonnancement en ateliers spécialisés se posent sur le très court terme (moins d'une semaine), peuvent porter sur un nombre élevé de commandes (plusieurs centaines) et concernent, dans le détail et à chaque instant du temps, la planification de l'utilisation des ressources disponibles en hommes et en machines, afin de mieux contrôler les coûts et de maîtriser les délais de fabrication des productions décidées.
- Les problèmes d'ordonnancement de projet s'attaquent au plus à une dizaine de projets², se posent sur un horizon allant de plusieurs semaines à plusieurs mois, et à un niveau généralement agrégé (découpage temporel, détail des ressources).

Les techniques d'ordonnancement en ateliers spécialisés relèvent de la problématique de la régulation à court terme de l'entreprise, et plus particulièrement de celle du contrôle de l'utilisation de la main-d'œuvre et des équipements productifs. Elles complètent donc les techniques de gestion des stocks, traitées au [chapitre XI](#) (gestion calendaire) et au [chapitre XII](#) (gestion de type « quantité économique de commande, point de commande ») et les techniques en Juste-À-Temps, abordées au [chapitre VII](#) et qui assurent un autre contrôle simultané des flux et des ressources, très efficace dans certains cas.

L'organisation en ateliers spécialisés est le plus répandu des modes d'organisation des systèmes productifs. C'est sans doute aussi celui qui pose les problèmes les plus compliqués, non pas en termes de formalisation de problèmes réalistes car les techniques de modélisation permettent une description satisfaisante de ces problèmes, mais en termes de résolution en raison du nombre élevé de variables de commande, de la nature discrète de ces variables et de la prise en compte des contraintes de disponibilité de ressources qui conduit à la résolution de problèmes

1. Par exemple, certains problèmes rencontrés dans la fabrication de certaines gammes de produits laitiers (yaourts...) se résolvent en faisant appel à des modèles initialement mis au point pour résoudre des problèmes de transport.

2. On observe, depuis quelques années, une tendance à une gestion par projet. Le nombre de projets à gérer peut alors être de plusieurs centaines. Dans ces conditions, les logiciels d'ordonnancement de projets sont difficilement appropriés pour prendre en compte efficacement les contraintes cumulatives. On observe souvent alors que les contraintes cumulatives sont ignorées et que se mettent en place des procédures d'ajustements mutuels pour résoudre les conflits lorsqu'ils se produisent.

combinatoires de grande taille¹ et implique l'utilisation d'heuristiques. Une **heuristique** est un algorithme de résolution d'un problème complexe, exploitant au mieux la structure du problème considéré et permettant de lui trouver rapidement une réponse numérique; des analyses comparatives permettent d'évaluer la performance d'heuristiques alternatives pour traiter une classe de problèmes; aucune garantie d'optimalité n'est donnée et on peut, en général, simplement espérer obtenir rapidement une «bonne» solution.

Les apports de la recherche opérationnelle sont cependant loin d'être négligeables, comme nous allons le voir en examinant quelques problèmes génériques simples auxquels on peut se ramener, avec deux approches radicalement différentes de cette classe de problèmes: celle des modèles statiques (**section I**) et celle des modèles dynamiques (**section II, page 409**). Ce sera l'occasion de présenter certaines méthodes efficaces de résolution de ce type de problèmes. On évoquera enfin (**section III, page 416**) les fondements retenus par certains logiciels de résolution de problèmes d'ordonnancement en ateliers spécialisés. Mais au préalable, il faut préciser la signification de quelques termes utilisés en ordonnancement.

Résoudre un problème d'ordonnancement, c'est définir où et à quel moment précis un certain nombre de **tâches**² doivent être réalisées. Une tâche peut correspondre à une fabrication d'un objet ou à la fourniture d'une prestation de service. Chaque tâche se décompose en un certain nombre d'**opérations** dans des centres de production. En ordonnancement, le niveau de détail retenu pour définir une opération est tel que deux opérations successives sont exécutées dans deux centres de production différents. Selon le problème examiné, un **centre de production** peut être aussi bien une usine, un département de production, un atelier, un groupe de machines ou une **machine**. Il peut également être tout autre chose si la tâche est une prestation de service: cabinet médical, fauteuil de dentiste, caisse de supermarché, etc. *Dans ce chapitre on utilisera le terme centre de production, de préférence à celui de machine habituellement utilisé dans la littérature spécialisée, pour bien marquer que ce problème d'ordonnancement ne concerne pas uniquement la production de biens mais aussi celle des services.* Conformément à ce qui vient d'être dit, lorsque la réalisation d'une tâche requiert successivement plusieurs centres de production, on dira que chaque centre de production réalise une opération de la tâche considérée. La **préemption** désigne la possibilité d'interrompre une opération pour en passer une autre avant de la reprendre plus tard et l'on parle de **problèmes préemptifs** et de **problèmes non préemptifs** d'ordonnancement. Les problèmes étudiés ici seront tous de type non préemptif.

Lorsque l'ordre de passage d'un ensemble de tâches sur un même ensemble de centres de production est toujours le même, la littérature spécialisée de recherche opérationnelle désigne ce cas particulier d'organisation en ateliers spécialisés par

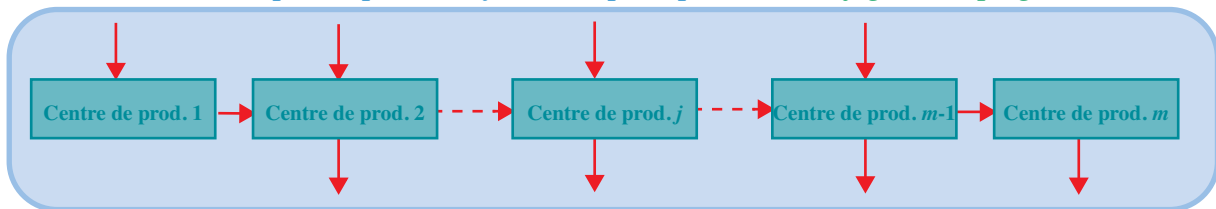
1. Les spécialistes qualifient de **NP-complets** ou **NP-difficiles** les problèmes pour lesquels on n'a pas trouvé d'algorithme de résolution en un temps limité supérieurement par une fonction de la taille N du problème; on qualifie de faciles les problèmes pour lesquels une telle fonction polynomiale existe (par exemple N^2) et de difficiles ceux pour lesquels le temps de résolution n'est limité supérieurement que par une fonction exponentielle de N (par exemple 2^N).
2. Ici, la **tâche** (*job* dans la littérature spécialisée anglo-saxonne, d'où les termes de *flow shop* et de *job shop - shop* signifiant atelier) se définit par un ensemble d'opérations associées à la fabrication d'un produit (ou d'un lot de produits) ou à la délivrance d'une prestation de service; dans le premier cas, on parle souvent d'**Ordre de Fabrication** ou OF. Cette acception du mot tâche diffère donc ici de celle retenue en analyse de projets.

le terme de *flow shop*, On parle encore de structure de type « flux unidirectionnel » en ce sens que, sur tous les centres de production, l'ordre d'exécution reste le même; on trouve encore, dans la littérature française le terme d'**atelier à cheminement unique**. Dans un *flow shop*, le temps opératoire de certaines opérations pouvant être nul, on peut alors décrire un *flow shop* quelconque à m centres de production par la **figure 103**, dans laquelle :

- les entrées directes sur un centre de production de rang supérieur à 1 s'expliquent par des temps opératoires nuls sur tous les centres de production précédents;
- les sorties directes antérieurement au dernier centre de production s'expliquent par des temps opératoires nuls sur tous les centres de production suivants;
- un temps opératoire nul entre le centre de production d'entrée et celui de sortie conduit, en pratique, à « sauter » ce centre de production.

FIGURE 103

Schéma de principe d'un flow shop (reprise de la figure 5, page 53)



Ce type de production se distingue de celui de la chaîne de production par trois caractéristiques :

- le fait qu'une tâche peut ne pas faire appel à tous les centres de production (un nombre quelconque de centres pouvant être « sautés »),
- la dispersion importante des temps opératoires des opérations exécutées sur un même poste de travail (en raison d'une absence de spécialisation étroite du poste dans l'exécution d'une même opération),
- l'existence de files d'attente, de longueur variable au cours du temps, en amont des différents postes de travail.

Le **tableau 66** fournit un exemple de données d'un problème de *flow shop* avec dix OF (ordre de fabrication) : l'OF 5 commence directement sur la machine C ; l'OF 7 sort de l'atelier après exécution de l'opération sur la machine C ; la machine B est « sautée » par les OF 9 et 10. Vous pouvez visualiser le Gantt associé au séquençement suivant des OF : 9, 10, 4, 6, 1, 8, 3, 2, 7.



On réserve le terme de *job shop* pour le cas général d'une coexistence de très nombreux cheminements des flux de production dans un même système productif (cas illustré à la **figure 3**, page 52); on trouve encore, dans la littérature française, le terme d'**atelier à cheminements multiples**. Pour en finir avec ce problème de terminologie, on rencontre des problèmes d'**atelier à cheminements libres** (connus aussi sous le nom de problèmes d'*open shop*) dans lesquels les opérations des tâches à exécuter sur un ensemble de centres de production différents peuvent l'être dans un ordre quelconque (cas, par exemple, de certains contrôles de qualité ou d'exams cliniques en milieu hospitalier).

TABLEAU 66

Exemple de problème de flow shop (temps opératoires des opérations à exécuter sur chaque machine, pour chaque ordre de fabrication)

OF	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Machine A	10	12	10	8	0	11	7	6	8	14
Machine B	9	14	17	10	0	12	14	13	0	0
Machine C	13	11	13	12	13	8	14	15	11	13
Machine D	14	17	14	14	15	12	0	8	17	11
Machine E	22	8	13	15	10	19	0	17	11	14

Les **modèles statiques d'ordonnancement** se caractérisent par la recherche de l'ordonnancement optimal d'un ensemble donné de tâches sur une période donnée, ces tâches n'étant pas forcément toutes disponibles en début de période. Les tâches autres que celles prévues initialement sont stockées en attendant une régénération de l'ordonnancement, sur la base de modèles statiques, pour l'ensemble des tâches en attente et en cours d'exécution. Les **modèles dynamiques d'ordonnancement** se caractérisent au contraire par des arrivées successives de tâches, sans référence précise à une période d'ordonnancement.

Le clivage des approches ne s'effectue pas seulement sur la base d'une opposition «statique – dynamique» : dans les modèles statiques on se situe toujours en univers certain, tandis que l'approche dynamique s'effectue le plus souvent en univers aléatoire. Le lecteur pourra se rendre compte de la complexité du problème posé, même dans un cadre de type «statique-certain», en cherchant à résoudre le cas **MÉCANO S.A.** proposé à la fin de ce chapitre.

Table des matières

Index thématique

SECTION I INTRODUCTION AUX MODÈLES STATIQUES D'ORDONNANCEMENT

On abordera successivement et succinctement deux catégories de modèles statiques d'ordonnancement : ceux où les coûts de lancement sont indépendants de l'ordonnancement retenu (§ I-1), puis ceux où le coût de lancement de chaque tâche dépend de la tâche qui la précède (§ I-2, page 388). Dans les deux cas et malgré le caractère très simpliste de ces modèles statiques, des enseignements précieux peuvent être tirés comme guide d'action dans l'approche dynamique de cette classe de problèmes. Dans un troisième paragraphe (§ I-3, page 404), on tentera de dégager les traits essentiels de cette approche statique et les approches retenues aujourd'hui pour résoudre des problèmes de dimension raisonnable.

I-1 Modèles statiques – Cas des coûts de lancement indépendants de l'ordonnancement retenu

Le problème général est à n tâches et m centres de production (§ I-1.4, page 376), mais nous examinerons tout d'abord des cas plus simples dans lesquels m sera égal à 1 (§ I-1.1) ou 2 (§ I-1.2, page 372), ou dans lequel n sera égal à 2 (§ I-1.3, page 375). On analysera ensuite le cas dans lequel m est quelconque mais avec un ordre de passage entre les centres de production, identique pour toutes les tâches (§ I-1.4, page 376). On abordera ensuite le cas des cheminements libres

(§ I-1.5, page 384) et celui du job shop pour traiter le problème des goulots d'étranglement (§ I-1.6, page 385).

Ces différents modèles ont en commun un certain nombre d'hypothèses implicites: l'ordre technique de passage des tâches sur les centres de production est intangible, les temps de transport et de lancement sont nuls, les temps opératoires sont certains, une opération ne peut commencer que si la précédente est terminée. Pour relâcher ces contraintes, il faut faire appel à une formulation générale de type programmation linéaire en nombres entiers (cf. § I-1.4.2, page 378).

I-1.1 Ordonnancement de n tâches nécessitant l'intervention d'un seul centre de production

Ce cas de figure, le plus simple de tous, est moins évident qu'on ne pourrait le croire de prime abord. En effet, la seule chose que l'on sait, c'est que, quel que soit l'ordonnancement¹ choisi, le temps nécessaire pour réaliser les n tâches est le même. On examinera donc les conséquences de plusieurs règles d'ordonnancement sur certains indicateurs permettant de juger la qualité de l'ordonnancement choisi, dans une optique donnée. Les enseignements obtenus ne manquent pas d'intérêt pratique si le centre de production auquel on s'intéresse est un centre de production constituant le goulot d'étranglement du système productif².

On examinera également, sur les exemples numériques retenus, une technique graphique de visualisation d'un ordonnancement, le graphique de Gantt.

I-1.1.1 L'ordonnancement suivant la règle du temps opératoire minimum (règle TOM)

I-1.1.1.1 Exemple introductif

Supposons que pour la période à venir, 5 tâches, toutes disponibles, soient à exécuter sur le centre de production A. On notera t_i , la durée d'exécution (y compris le temps de préparation) de la tâche i ($i = 1, 2, \dots, 5$), cette durée est encore appelée **temps opératoire**. Ces durées peuvent comporter des temps de préparation mais ceux-ci sont supposés indépendants de l'ordre de passage des tâches sur le centre de production. Le centre de production est réputé disponible le temps nécessaire. Les données du problème sont portées dans le [tableau 67](#).

TABLEAU 67
Données de base

Tâche i	1	2	3	4	5
Temps opératoire t_i (en centième d'heure)	50	150	80	200	30

Supposons que l'ordonnancement retenu soit le suivant: tâche 3, puis tâche 4, puis tâche 1, puis tâche 5, puis tâche 2. On notera j le numéro d'ordre de passage du travail (par exemple, $j = 3$ repère la troisième tâche programmée, c'est-à-dire

1. Puisqu'il n'y a qu'un seul centre de production (à machine unique), on aurait pu tout aussi bien parler de séquençement.

2. Le cas d'un pool de machines identiques ou non sur l'une desquelles chacune des n tâches doit passer est voisin mais plus complexe. Le lecteur intéressé pourra consulter Hax & Candea (1984, [224]), p. 284-288 qui résument les acquis dans ce domaine.

dans notre exemple la tâche 1). On notera T_j (avec un T majuscule et non un t minuscule) la durée d'exécution de la tâche programmée en $j^{\text{ème}}$ position et A_j , la date d'achèvement de cette tâche j . Dans notre exemple, on a donc :

TABLEAU 68
Exemple d'ordonnancement

Ordre de passage j	1	2	3	4	5
Tâche programmée j	3	4	1	5	2
Temps d'exécution T_j	80	200	50	30	150
Date A_j de fin de la tâche j	80	280	330	360	510

I-1.1.1.2 Graphique de Gantt

Cette programmation se visualise facilement sur le diagramme de Gantt de la figure 104.

FIGURE 104

Exemple de visualisation d'un ordonnancement sur un graphique de Gantt

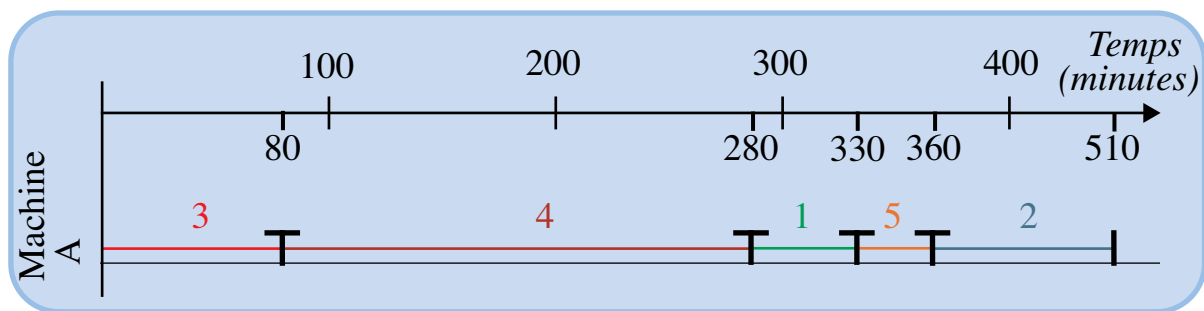


Table des matières

Index thématique

Le **graphique de Gantt** encore appelé **diagramme de Gantt**, est une technique de visualisation de l'utilisation de moyens productifs et/ou de l'avancement de l'exécution de tâches popularisée par Gantt en 1917 (mais dont on retrouve des utilisations chez les prêtres égyptiens de l'antiquité) et est classiquement utilisée en ordonnancement en atelier. Une tâche y est représentée sur un axe, habituellement horizontal¹, par un segment dont la longueur est, en principe, proportionnelle au temps d'exécution. Lorsque l'on étudie l'évolution de l'utilisation de plusieurs facteurs productifs (par exemple des machines), l'utilisation de chaque facteur productif est portée sur un axe différent; on a alors un faisceau de droites parallèles sur un même document (tableau mural par exemple).

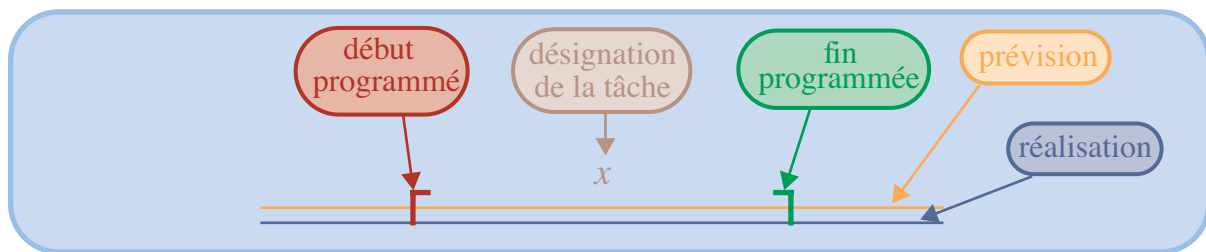
La même échelle temporelle est utilisée pour tous les axes, ce qui fait que les intersections de ces droites avec une même perpendiculaire repèrent le même instant. Pour faciliter ce repérage, un papier quadrillé est utilisé et l'échelle des temps est explicitée en haut du document. Un curseur vertical permet de visualiser un instant précis du temps, ce qui facilite l'utilisation de ce document pour le suivi d'un atelier. Au-dessus de chaque segment on porte le code d'identification de la tâche (ou ordre de fabrication), ou des quantités s'il s'agit de la production d'un article connu sans ambiguïté.

1. Les programmes informatiques disponibles sur le CD-Rom utilisent, pour des raisons de commodité, la convention d'une représentation sur un axe vertical.

Ce document est utilisé pour le lancement des travaux en ateliers, lorsque la production est organisée en ateliers spécialisés. Le plus souvent en face d'un poste de travail, on porte deux axes parallèles distants de quelques millimètres seulement. Sur l'axe supérieur on trace en trait fin les prévisions, tandis que l'axe inférieur est destiné aux réalisations, en trait gras. Cette « astuce de présentation » permet d'éviter les gommages. Conventionnellement une tâche est programmée comme à la [figure 105](#), où la longueur du segment est proportionnelle à la durée d'exécution et x est le numéro de la tâche, ou la quantité à produire.

FIGURE 105

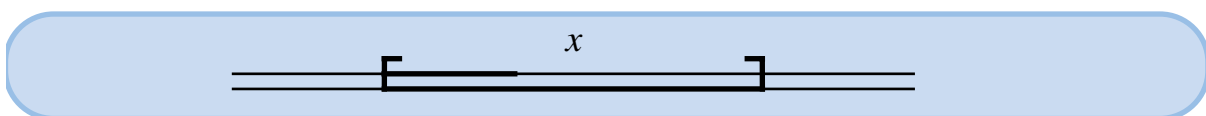
Graphique de Gantt : structure de base



À l'exécution, des écarts peuvent apparaître avec les prévisions, si la production effective est supérieure à la production prévue (parce que le rendement du poste est supérieur à celui défini dans la gamme opératoire, lorsqu'il s'agit d'une production répétitive), l'information correspondante est visualisée comme dans la [figure 106](#) (la longueur du trait supérieur étant proportionnelle au dépassement de quantités produites par rapport aux quantités prévues).

FIGURE 106

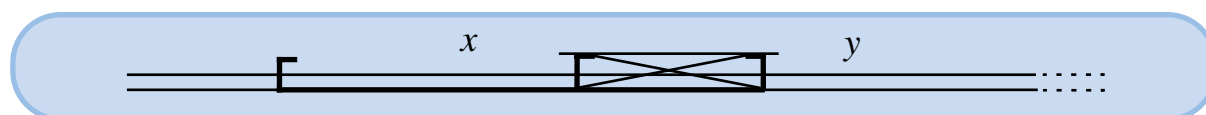
Graphique de Gantt : cas d'une production réalisée supérieure à la production prévue



En cas de dépassement prévu, on portera sur le graphique (voir [figure 107](#)) l'information suivante pour indiquer le temps supplémentaire qui a été nécessaire pour réaliser l'objectif prévisionnel (y est le code de l'opération suivante).

FIGURE 107

Graphique de Gantt : cas d'un dépassement de temps



On porte également sur le graphique les causes d'inutilisation du poste de travail, à l'aide des lettres conventionnelles suivantes : Z (aucun travail exécuté), A (exécutant absent), M (manque de matière première), R (réparation). Selon l'horizon de planification utilisé, la précision de l'échelle est plus ou moins grande, le niveau de détail des centres de production repéré par les axes est plus ou moins poussé et les nomenclatures d'articles fabriqués plus ou moins agrégées : l'ordonnancement prévisionnel doit être d'autant plus global que l'horizon de planification retenu est éloigné.

Par ailleurs, lorsque l'on ne s'intéresse qu'à l'avancement de tâches, ce qui est le cas lorsque la production est de type unitaire, on associe habituellement à chaque tâche, un axe différent, cessant alors de privilégier la notion de centre de production ou de poste de travail (voir chapitre IV, page 307).

I-1.1.1.3 La règle TOM

L'ordonnancement retenu à titre d'exemple dans le tableau 68 n'est que l'un des 5! ordonnancements possibles. Si l'exécution des 5 tâches nécessite 510 centièmes d'heures quel que soit l'ordonnancement retenu, l'ordre de passage de ces tâches a des conséquences sur le moment à partir duquel chaque tâche est terminée. Notons A_j , le moment à partir duquel la tâche programmée en $j^{\text{ème}}$ position est terminée. On a par exemple $A_4 = \sum_{h=1}^4 T_h$ et d'une façon générale:

$$A_j = \sum_{h=1}^j T_h \tag{relation 65}$$

Le calcul des différents temps d'achèvement A_j est immédiat (et a déjà été effectué en dernière ligne du tableau 68 et reporté dans la figure 104 de la page 365):

TABLEAU 69
Calcul du temps d'achèvement moyen

Ordre de passage j	1	2	3	4	5	
T_j	80	200	50	30	150	
A_j	80	280	330	360	510	$\bar{A} = 312$

Le temps d'achèvement moyen est alors:

$$\bar{A} = \frac{1}{5} \cdot \sum_{J=1}^5 A_J = \frac{80 + 280 + 330 + 360 + 510}{5} = 312$$

et peut s'écrire encore d'une façon générale:

$$\bar{A} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{j=1}^n A_j = \frac{1}{n} \cdot \sum_{j=1}^n \left(\sum_{k=1}^j T_k \right) = \frac{1}{n} \cdot \sum_{j=1}^n (n-j+1)T_j \tag{relation 66}$$

La règle d'ordonnancement qui minimise le temps d'achèvement moyen est celle du Temps Opérateur Minimum, règle que l'on notera TOM (elle est connue dans la littérature anglo-saxonne opérationnelle sous le nom de SPT rule, pour Shortest Processing Time rule, ou encore SOT rule, pour Shortest Operation Time). Elle consiste, comme son nom l'indique, à exécuter immédiatement la tâche ayant le plus faible temps opératoire. Cette règle récurrente est donc:

$$T_1 \leq T_2 \leq \dots \leq T_j \leq T_{j+1} \leq \dots \leq T_n \text{ (règle d'ordonnancement TOM } \Rightarrow \text{ minimisation du temps d'attente moyen et du retard algébrique moyen) } \tag{relation 67}$$

L'application de cette règle conduit, dans notre exemple, à l'ordonnancement décrit au tableau 70 de la page 368.

Table des matières
Index thématique



TABLEAU 70
Ordonnancement suivant la règle TOM

Ordre de passage j	1	2	3	4	5
Tâche programmée	5	1	3	2	4
T_j	30	50	80	150	200
A_j	30	80	160	310	510

$\bar{A} = 218$

Notons dès à présent que la priorité des tâches varie en sens inverse de la valeur du critère utilisé dans la règle d'ordonnancement, c'est-à-dire que la tâche que l'on considère comme la plus «urgente» est celle pour laquelle la valeur du critère retenu est la plus faible. Ce sera le cas pour toutes les règles d'ordonnancement présentées dans ce chapitre.

Cette règle d'ordonnancement ne conduit pas à la plus faible dispersion des résultats. En effet, comme vous pouvez le vérifier, l'écart-type des temps d'achèvement est de 174,06 en suivant la règle TOM, alors qu'il n'est que de 139,05 dans l'ordonnancement initialement choisi.

Par contre, on peut montrer que la règle TOM minimise le temps d'attente moyen ainsi que le retard algébrique moyen¹. Le **retard algébrique** d'une tâche se définit comme la différence positive ou négative $T_j - d_j$ entre le moment où la tâche est terminée T_j et le moment d_j où elle aurait dû l'être et qui est une donnée exogène de l'ordonnancement. Le retard algébrique ne doit pas être confondu avec le **retard vrai**, qui correspond à l'usage courant du mot retard, c'est-à-dire qu'il est nul si la tâche n'est pas achevée postérieurement à la date de livraison attendue et égale au retard algébrique dans le cas contraire: $\text{Max}(0, T_j - d_j)$. Dans la suite de ce chapitre, lorsque l'on parlera du retard sans préciser de quel type de retard il s'agit, il est sous-entendu que c'est le retard vrai qui est visé. Ajoutons enfin que l'**attente** d'une tâche se définit comme l'intervalle de temps séparant l'arrivée d'une tâche dans le système, du début de son exécution.

Si les tâches ne sont pas toutes disponibles à l'instant 0 et qu'il est possible d'interrompre une tâche en cours pour la reprendre ultérieurement au stade d'avancement où elle se trouvait (ce que l'on a défini comme étant la préemption), la règle TOM appliquée à chaque nouvelle arrivée de tâche sur l'ensemble des tâches non encore exécutées ainsi que la tâche en cours (sur la base du temps opératoire résiduel) conserve toutes les propriétés évoquées dans ce paragraphe. L'application de la règle peut donc s'effectuer de manière «myope», c'est-à-dire que lorsqu'une tâche est terminée, on ne se préoccupe que de la détermination de la première tâche à exécuter dans l'ensemble des tâches disponibles, sans tenir compte des dates d'arrivée.

I-1.1.2 La règle TOM pondéré

Dans la pratique, les travaux à effectuer peuvent ne pas tous présenter le même intérêt (articles en rupture de stock, commandes urgentes, etc.). On peut alors introduire un coefficient u_i ($u_i \geq 1$) traduisant la plus ou moins grande priorité accordée à la tâche i , par exemple à partir de l'inverse de la marge (notion intro-

1. Voir Baker (1978, [30]), p. 24-25.

duite au chapitre IV, page 301, que l'on utilisera au § I-1.1.4, page 371) ou d'un indicateur en valeur comme la marge financière associée à la commande à exécuter ou la valeur de ses composants¹. On cherche alors à minimiser le temps d'attente moyen pondéré.

$$\bar{A} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{j=1}^n u_j A_j \quad (\text{Temps d'attente moyen pondéré}) \quad \text{relation 68}$$

On démontre² que le temps d'attente moyen pondéré est obtenu en donnant la priorité la plus forte à la tâche qui a le plus faible quotient du temps opératoire au coefficient de pondération. Cette règle récurrente, que l'on désignera sous le nom de **règle TOM pondéré**, (connue aussi sous le nom de **règle de Smith**) est donc :

$$\frac{T_1}{u_1} \leq \frac{T_2}{u_2} \leq \dots \leq \frac{T_j}{u_j} \leq \frac{T_{j+1}}{u_{j+1}} \leq \dots \leq \frac{T_n}{u_n} \quad (\text{règle TOM pondérée}) \quad \text{relation 69}$$

Illustrons cette règle par une modification de notre exemple. Supposons maintenant que les tâches ont les priorités suivantes: 1, 2, 1, 2, 3. L'ordonnement optimal est alors 5, 1, 2, 3, 4 (voir tableau 71).

TABLEAU 71
Ordonnement suivant la règle TOM pondérée



Table des matières

Index thématique

Tâche <i>i</i>	1	2	3	4	5
Temps opératoire <i>t_i</i>	50	150	80	200	30
Pondération <i>u_i</i>	1	2	1	2	3
<i>t_i/u_i</i>	50	75	80	100	10
Ordre de passage de la tâche <i>i</i>	2	3	4	5	1
Ordre de passage <i>j</i>	1	2	3	4	5
Tâche programmée	5	1	2	3	4
<i>T_h/u_h</i>	10	50	75	80	100
<i>T_h · u_h</i>	90	50	300	80	400
$\sum_{h=1}^j T_h \cdot u_h$	90	140	440	520	920

$\bar{A} = 422$

I-1.1.3 Ordonnement suivant la règle de la date de livraison minimale

Dans notre exemple, nous avons supposé implicitement qu'a priori n'importe quelle tâche pouvait être la dernière, c'est-à-dire que les 5 tâches devaient être

1. Dans ce dernier cas, on retrouve, à une constante multiplicative près, la valeur des encours générée par l'ordonnement, hors valorisation du passage sur le centre de production. Économiquement, un coût de possession, lié au passage dans cet atelier, peut se déduire de cette valeur.
 2. Voir Conway, Maxwell & Miller (1967, [104], p. 43-44). L'interprétation des coefficients de pondération pourrait conduire, dans cette relation, à remplacer *n* par la somme des coefficients de pondération. Cette transformation n'a pas d'incidence sur la solution; la date d'achèvement moyenne pondérée passe alors de 422 à 234,4.

terminées 5,1 heures après la livraison simultanée des 5 travaux à effectuer sur le centre de production considéré. Un cas fréquent dans la pratique est celui d'une date maximale souhaitée pour la fin de l'exécution d'une ou de plusieurs tâches. Le plus souvent, aucun ordonnancement ne permet de satisfaire simultanément toutes ces dates de livraison et un arbitrage doit être effectué. Nous allons examiner maintenant les implications de règles de priorité fréquemment utilisées, mais il nous faut préalablement modifier notre exemple et introduire dans le **tableau 72** des dates de livraison d_i (l'origine du temps se situant au moment de la remise des différents travaux à effectuer, ce qui fait que d_i peut fort bien être négatif). On calculera également la **marge** de chaque tâche, que l'on définit comme la différence entre la date de livraison souhaitée et le temps opératoire et qui mesure la marge de manœuvre dont on dispose pour une tâche si l'on ne se préoccupe pas des autres tâches (ce qui correspond au concept de marge totale en ordonnancement de projet).

TABLEAU 72
Introduction des dates de livraison

Tâche i	1	2	3	4	5
Date de livraison d_i souhaitée (en centième d'heures)	100	300	410	400	200
Temps opératoire t_i (en centième d'heures)	50	150	80	200	30
Marge $d_i - t_i$	50	150	330	200	170

Calculons les conséquences de l'ordonnancement TOM sur les retards de livraison, avant de présenter d'autres règles d'ordonnancement (**tableau 73**).

TABLEAU 73
Conséquences de l'ordonnancement TOM

Ordre de passage j (règle TOM)	1	2	3	4	5
Tâche programmée	5	1	3	2	4
A_j	30	80	160	310	510
Date de livraison d_j souhaitée	200	100	410	300	400
Retard vrai: $\max(0, A_j - d_j)$	0	0	0	10	110

Retard minimal: 0
Retard maximal: 110
Retard moyen: 24

On montre¹ que le retard vrai maximum est minimisé (et donc le retard algébrique aussi) si l'on adopte l'ordonnancement programmant les tâches selon les dates croissantes de livraison (connu sous le nom de **règle de Jackson**). Ceci implique que l'on ait (j repérant toujours l'ordre de passage) :

$$d_1 \leq d_2 \leq \dots \leq d_j \leq d_{j+1} \leq \dots \leq d_n \quad (\text{règle de la date de livraison minimale} \Rightarrow \text{minimisation du retard maximum}) \quad \text{relation 70}$$

Appliquons cette règle sur notre exemple dans le **tableau 74**.

1. Voir Conway, Maxwell & Miller (1967, [104]) p. 30-71 (*non decreasing due-date rule*), ou Baker (1974, [30]), p. 24-25. On peut ajouter que cette règle minimise le nombre de tâches en retard si l'ordonnancement trouvé comporte moins de 2 tâches en retard (voir Baker, [30], p. 26-27 et 36). Dans le cas contraire, il faut faire appel à l'algorithme de Hodgson pour obtenir ce résultat (voir Baker, [30], p. 27-28).

TABLEAU 74
Ordonnancement selon la règle de la date de livraison minimale

Ordre de passage j	1	2	3	4	5
Date de livraison d_j souhaitée	100	200	300	400	410
Tâche programmée	1	5	2	4	3
Temps opératoire T_j	50	30	150	200	80
A_j	50	80	230	430	510
Retard vrai maximal	0	0	0	30	100

Retard minimal: 0
Retard maximal: 100
Retard moyen: 26
 $\bar{A} = 260$
 $\sigma = 183,74$



Cet ordonnancement *minimise le plus grand retard possible*, mais il ne minimise pas le retard moyen: l'application de la règle TOM avait donné par exemple un retard moyen de 24 centièmes d'heures, contre 26 ici. On n'a pas trouvé de règle simple d'ordonnancement permettant de minimiser le retard moyen, le retard d'une tâche étant maintenant nul si la date de livraison est postérieure à sa date de fin¹. Dans notre exemple, on peut assez facilement le trouver par tâtonnement, il s'agit de l'ordonnancement 1 - 5 - 2 - 3 - 4.

En cas de non disponibilité de toutes les tâches à l'instant 0 et de préemption, la démarche à utiliser pour minimiser le plus grand retard possible est analogue à celle évoquée pour la règle TOM.

Table des matières

I-1.1.4 Ordonnancement suivant la règle de la marge minimale

Une autre technique d'ordonnancement est parfois envisagée. Elle consiste à programmer les tâches par valeurs croissantes de leurs marges ($d_i - t_i$), les tâches ayant la plus faible marge étant supposées offrir le plus grand risque d'être en retard. Ce raisonnement est spécieux, car un tel ordonnancement ne conduit ni à une minimisation du retard moyen ni à une minimisation du retard maximum. On montre en effet que l'ordonnancement qui programme les tâches par valeurs croissantes de leur marge conduit au résultat suivant (intuitivement très peu évident) : cet ordonnancement *maximise le retard le plus faible possible*.

$$d_1 - T_1 \leq d_2 - T_2 \leq \dots \leq d_j - T_j \leq d_{j+1} - T_{j+1} \leq \dots \leq d_n - T_n \text{ (règle de la marge minimale)} \Rightarrow \text{minimisation du retard le plus faible} \quad \text{relation 71}$$

Dans notre exemple, le plus grand retard minimum possible est nul quel que soit l'ordonnancement choisi, comme on peut le voir en appliquant cette règle d'ordonnancement (tableau 75, page 372).

I-1.1.5 Modélisation générale

Pour trouver la solution de ce problème d'optimisation pour lequel aucune règle simple n'a été trouvée, on peut passer par la programmation linéaire en variables mixtes (voir chapitre XVI) qui permet de décrire, par une double contrainte, l'interdiction d'un chevauchement dans la programmation de 2 tâches quelconques². Le lecteur intéressé est invité à se reporter au chapitre IV de l'ouvrage d'Esquirol et Lopez (1999, [140]) qui illustre en détail cette formalisation pour traiter le cas d'une minimisation de la somme des retards pondérés.

1. L'un des algorithmes les plus efficaces semble être proposé par Schrage & Baker (1978, [375]).

TABLEAU 75
Ordonnancement selon la règle de la marge minimale

Ordre de passage j	1	2	3	4	5
$d_j - T_j$	50	150	170	200	330
Tâche programmée	1	2	5	4	3
Temps d'exécution T_j	50	150	30	200	80
A_j	50	200	230	430	510
d_j	100	300	200	400	410
Retard vrai maximal	0	0	30	30	100

Retard minimal: 0
Retard maximal: 100
Retard moyen: 32
 $\bar{A} = 284$
 $\sigma = 165,6$

I-1.2 Ordonnancement de n tâches nécessitant l'intervention de 2 centres de production

Chaque tâche comporte maintenant deux opérations distinctes effectuées par 2 centres de production différents. On suppose que la préemption est interdite. Pour simplifier l'exposé, on conviendra que ces 2 centres de production sont les centres de production A et B. On notera t_{iA} et t_{iB} les temps d'exécution de la tâche i dans chacun des centres de production. Il faut distinguer deux cas de figure: celui où l'ordre de passage des tâches est le même sur les 2 centres de production, c'est-à-dire que la tâche doit d'abord s'effectuer sur le centre de production A puis sur le centre de production B pour tous les travaux à effectuer, et celui où l'ordre technologique diffère selon les travaux. Dans un cas comme dans l'autre, *le seul critère que l'on retiendra*¹ pour juger de la performance de l'ordonnancement est celui de la *minimisation du temps total d'exécution de tous les travaux* (et qui inclut les temps d'attente devant le centre de production occupé). Deux cas de figure doivent être distingués, selon que l'ordre de passage sur les centres de production A et B est identique ou non, pour toutes les tâches.

I-1.2.1 Cas du même ordre de passage sur les centres de production A et B

Le problème traité ici est un problème de *flow shop* à 2 centres de production. Supposons que cinq tâches soient à exécuter successivement sur les centres de production A et B (les données sont celles du [tableau 76 de la page 373](#), où les temps sont exprimés en centièmes d'heure).

L'ordonnancement qui minimise le temps d'exécution de tous les travaux se trouve en utilisant l'**algorithme de Johnson** (publié en 1954) et dont on ne démontrera pas l'optimalité², et qui remplit progressivement le tableau d'affectation comme suit:

2. *Note de la page précédente.* Si la tâche j est programmée comme l'une des tâches suivant la tâche i , on doit avoir $A_j \geq A_i + T_j$; si elle est programmée comme l'une des tâches qui la précède, on doit avoir au contraire $A_i \geq A_j + T_i$. Pour exprimer le fait que la tâche j suit la tâche i , on introduit la variable indicatrice δ_{ij} qui vaut 1 dans ce cas et 0 dans le cas contraire et l'on introduit le double jeu de contraintes pour exprimer qu'une seule des contraintes précédentes soit à satisfaire: $A_j \geq A_i + T_j - (1 - \delta_{ij})M$ et $A_i \geq A_j + T_i - \delta_{ij}M$, où M est une valeur positive supérieure aux valeurs que peuvent prendre A_j et A_i (ceci correspond au cas traité dans la note de la [page 1140](#)).

1. Il s'agit en réalité du seul critère pour lequel quelques résultats significatifs ont été trouvés.

2. Voir Conway, Maxwell & Miller (1967, [104]), p. 83-89, ou Baker (1974, [30]), p. 144-146.



TABLEAU 76
Exemple de problème d'ordonnancement à 2 centres de production, avec même ordre de passage

Numéro de la tâche i	1	2	3	4	5
t_{iA}	50	150	80	200	30
t_{iB}	60	50	150	70	200

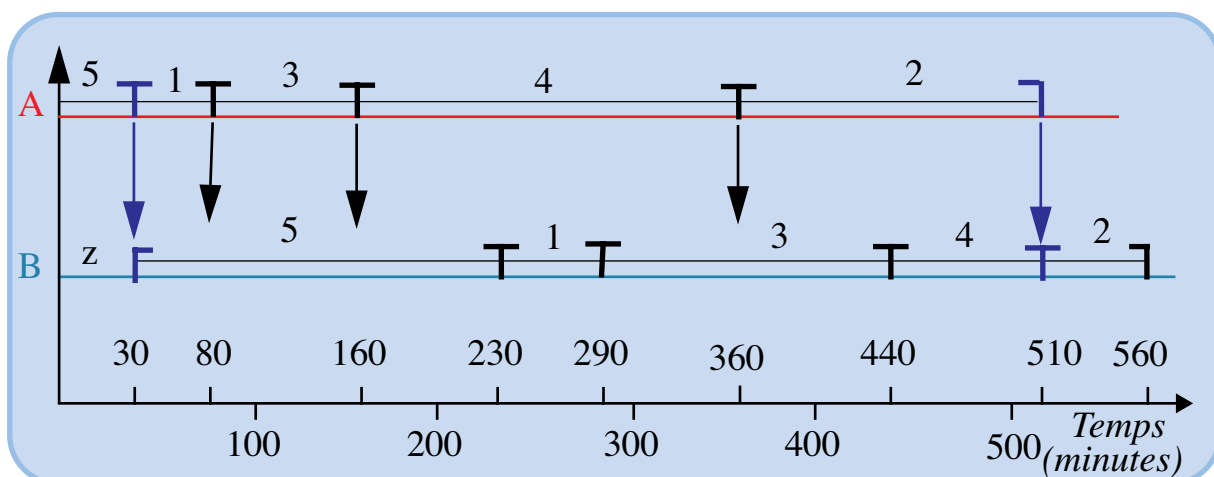
- **Étape 1** : rechercher la tâche i dont le temps d'exécution t_{ij} (avec $j = A$ ou B) est le plus faible possible.
- **Étape 2** : si $j = A$ placer cette tâche à la première place disponible en début de la séquence d'ordonnancement; si $j = B$ placer cette tâche à la dernière place disponible.
- **Étape 3** : supprimer la tâche i des tâches restant à programmer; s'il reste plus d'une tâche à programmer, revenir en étape 1 ; s'il n'en reste qu'une, sa position est imposée puisqu'il ne reste plus dans le tableau d'affectation qu'une seule place à prendre.

L'application de cet algorithme conduit à placer tout d'abord la tâche 5 en première position ($t_{5A} = 30$) puis la tâche 1 en deuxième position ($t_{1A} = 50$), puis la tâche 2 en dernière position ($j = 5, t_{2B} = 50$), puis la tâche 4 en avant-dernière position (dernière place disponible en fin de classement, $t_{2B} = 70$). Il ne reste plus pour la tâche 3 qu'une place possible, la troisième. La programmation optimale est alors la suivante: 5 – 1 – 3 – 4 – 2. Le calcul du temps total d'exécution est facilité en visualisant l'ordonnancement sur un graphique de Gantt (voir [figure 108](#)) qui permet en outre de voir rapidement les moments d'occupation et de non-occupation des centres de production.

Table des matières

Index thématique

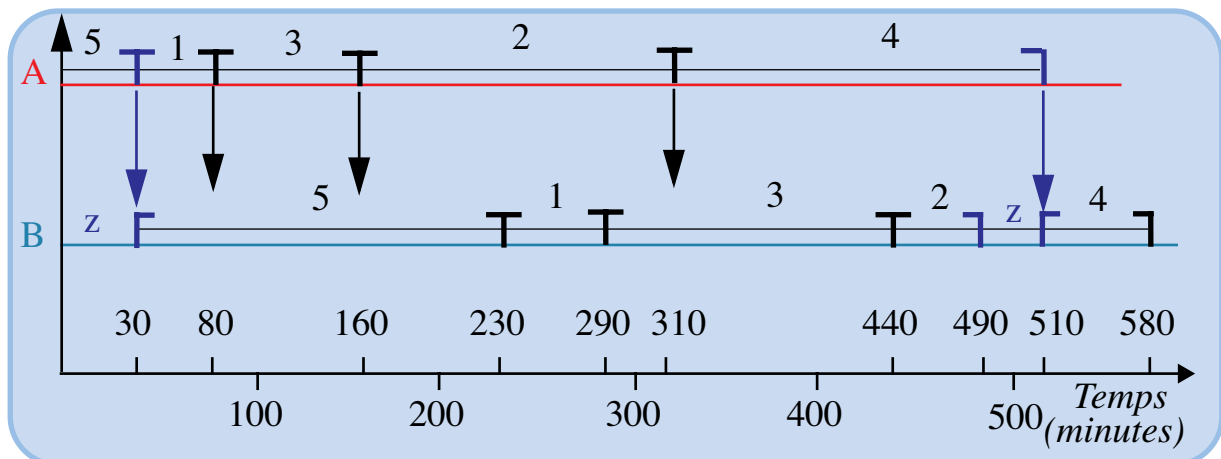
FIGURE 108
Ordonnancement selon l'algorithme de Johnson



Pour information, la [figure 109 de la page 374](#) retrace le Gantt correspondant à un ordonnancement suivant la règle TOM appliquée aux temps opératoires du centre de production A.

L'ordonnancement optimal permet de gagner 20/100 d'heure sur la date de fin d'exécution de tous les travaux, ce qui correspond à l'économie de temps réalisée

FIGURE 109
Ordonnancement suivant la règle TOM sur la machine A



sur l'utilisation du centre de production B (attente, dans la solution, de la fin de la tâche 4 sur le centre de production A, avant de pouvoir occuper le centre de production B, libre à partir de 4,9 heures).

L'utilisation de graphiques de Gantt permet, comme ces exemples l'illustrent, de visualiser le passage d'une tâche d'un centre de production à un autre, à l'aide de flèches verticales (ou obliques). Cette convention est souvent utilisée dans la représentation de **nomenclatures d'ordonnancement** qui repère différents ensembles et sous-ensembles d'un produit complexe et fournit sur un graphique de Gantt les temps opératoires correspondants ainsi que les enclenchements d'assemblage des différents composants.

I-1.2.2 Cas de la non-unicité de l'ordre de passage sur les centres de production A et B

Jackson a montré en 1957 comment adapter l'algorithme de Johnson pour tenir compte de la possibilité d'avoir des tâches ne s'effectuant pas toutes dans le même ordre (ce qui transforme le problème en un problème de *job shop*). Comme précédemment, nous ne démontrerons¹ pas l'optimalité de l'**algorithme de Jackson**, nous contentant de décrire la procédure à suivre.

Il faut tout d'abord effectuer une partition de l'ensemble initial des n tâches en quatre sous-ensembles :

- l'ensemble $\{A\}$ comprend toutes les tâches qui ne nécessitent que l'intervention du centre de production A ;
- l'ensemble $\{B\}$ comprend toutes les tâches qui ne nécessitent que l'intervention du centre de production B ;
- l'ensemble $\{AB\}$ comprend toutes les tâches qui nécessitent de passer d'abord par le centre de production A avant de passer par le centre de production B ;
- l'ensemble $\{BA\}$ comprend toutes les tâches qui nécessitent de passer d'abord par le centre de production B avant de passer par le centre de production A.

1. Voir démonstration dans Conway, Maxwell & Miller (1967, [104], p. 105-106).

On définit tout d'abord l'ordonnancement optimal sur le sous-ensemble $\{AB\}$ à l'aide de l'algorithme de Johnson. Puis on fait de même pour le sous-ensemble $\{BA\}$. Pour les sous-ensembles $\{A\}$ et $\{B\}$, l'ordre de passage des tâches n'ayant aucune importance, on sélectionne une séquence arbitraire de passage des tâches dans chaque sous-ensemble. On combine les résultats obtenus dans chaque sous-ensemble de la façon suivante :

- centre de production A: séquence optimale du sous-ensemble $\{AB\}$, puis tâches du sous-ensemble $\{A\}$, et enfin séquence optimale du sous-ensemble $\{BA\}$;
- centre de production B: séquence optimale du sous-ensemble $\{BA\}$. puis tâches du sous-ensemble $\{B\}$, puis séquence optimale du sous-ensemble $\{AB\}$.

I-1.3 Ordonnancement de 2 tâches nécessitant l'intervention de m centres de production

Une solution graphique à ce problème d'ordonnancement est connue de façon correcte depuis 1963. Elle concerne le cas de 2 tâches ne suivant pas la même séquence d'opérations (problème de *job shop*), mais utilisant le même nombre de centres de production (dans le cas contraire, on peut toujours se ramener au cas général en attribuant un temps d'exécution nul aux centres de production n'intervenant pas dans le processus productif d'une tâche). Cette procédure¹ est facile à comprendre sur un exemple. Supposons que 5 centres de production, repérés par les lettres A à E, soient nécessaires pour réaliser la tâche 1 (dans l'ordre suivant : D, B, E, A, C) et la tâche 2 (dans l'ordre technique suivant A, B, C, D, E). Les temps d'exécution, en heures, sont donnés dans le [tableau 77 de la page 376](#).

Table des
matières

On établit un graphique sur les axes duquel le montant cumulé du travail accompli de chacune des tâches (l'axe vertical pour la tâche 1 et l'axe horizontal pour la tâche 2, ou l'inverse) est repéré. On commence par placer sur ces axes les temps passés sur chaque centre de production, dans l'ordre imposé techniquement. Dans cet espace à 2 dimensions, on représente par des rectangles rouges les incompatibilités liées à la demande simultanée d'un même centre de production par les 2 tâches à effectuer. Tout point du graphique correspond à l'état d'avancement simultané des 2 tâches : le point p du graphique indique après lecture de ses coordonnées que les opérations D et B de la tâche 1 sont terminées et que l'on passe à la tâche E, tandis que les opérations A et B de la tâche 2 sont terminées, et que l'opération C est aux 2/3 terminée ; l'heure correspondant à ce point est 7 heures.

Index
thématique

Une programmation réalisable se visualise par une ligne brisée partant de l'origine 0 des axes, au point 0' (repérant la fin simultanée des 2 travaux), et ne comportant que :

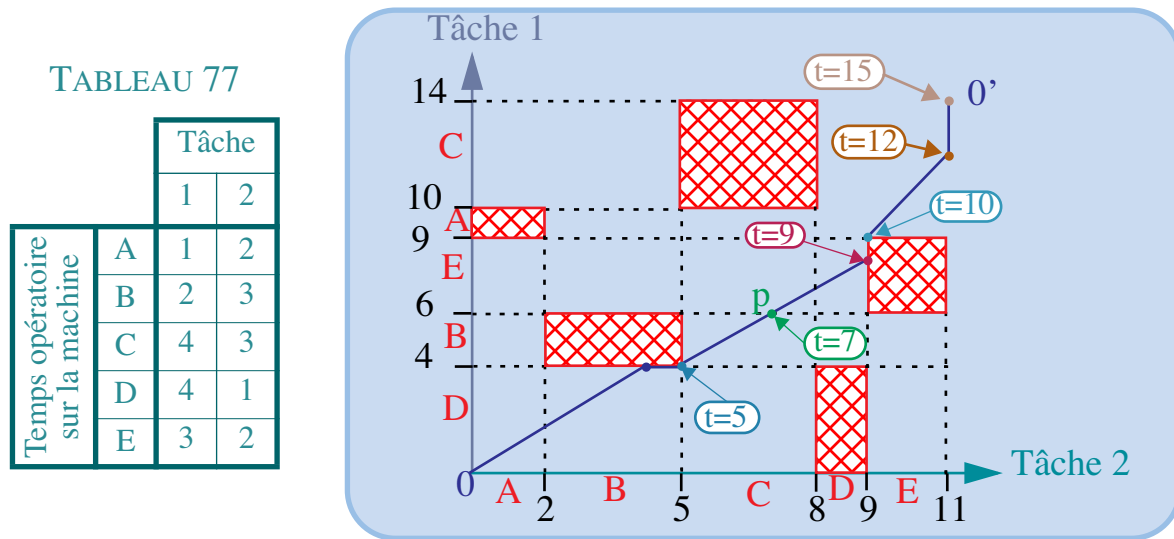
- des segments verticaux (seule la tâche 1 est en cours d'exécution),
- des segments horizontaux (seule la tâche 2 est en cours d'exécution)
- et des segments à 45° avec les axes (exécution simultanée des 2 tâches²).

1. Voir Conway, Maxwell & Miller (1967, [104]), p. 98-100 et 106-107.

2. En effet, s'il pouvait exister des segments faisant une autre pente, cela signifierait que la durée d'exécution d'une des tâches sur la machine correspondant à ce segment serait supérieure à celle annoncée.

FIGURE 110

Résolution graphique du problème d'ordonnancement des deux tâches



Le minimum du temps total d'exécution de 2 tâches (y compris donc les temps d'attente devant un centre de production occupé) est obtenu par l'ordonnancement dont la représentation sur ce graphe minimise la somme des segments horizontaux et verticaux. Cette solution optimale s'obtient généralement très vite après quelques tâtonnements.

I-1.4 Ordonnancement de n tâches nécessitant l'intervention de m centres de production

On examinera tout d'abord le cas de 3 centres de production avec un même ordre de passage (§ I-1.4.1) avant d'aborder le cas à m centres de production, avec une prise en compte d'hypothèses de fonctionnement plus générales (§ I-1.4.2, page 378).

I-1.4.1 Ordonnancement de n tâches nécessitant l'intervention de 3 centres de production (ordre identique de passage)

Johnson, dans l'article présentant sa méthode, fait remarquer que dans certains cas particuliers un problème d'ordonnancement sur 3 centres de production se ramène à un problème d'ordonnancement sur 2 centres de production. C'est le cas où le centre de production B, qui, techniquement, doit intervenir avant le centre de production C et après le centre de production A, est complètement dominé par l'un ou l'autre de ces 2 centres de production, c'est-à-dire que le plus grand temps d'exécution t_{iB} est plus faible (ou égal) que le plus petit temps d'exécution observé sur le centre de production qui le domine (étant entendu qu'il est possible que le centre de production B soit dominé par les deux centres de production).

Lorsque ce cas se produit, on reformule le problème en un problème à 2 centres fictifs de production, le premier groupant les centres de production A et B en un centre de production virtuel noté $\{AB\}$ (avec un temps opératoire $t_{iAB} = t_{iA} + t_{iB}$) et le second groupant les centres de production B et C en un centre de production virtuel noté $\{BC\}$ (avec un temps opératoire $t_{iBC} = t_{iB} + t_{iC}$). Par exemple, le

problème d'ordonnancement posé dans le [tableau 78](#) se ramène à celui du [tableau 79](#).

TABLEAU 78
Exemple de problème de flow shop à 3 centres de production

Tâche i	t_{iA}	t_{iB}	t_{iC}
1	7	1	6
2	4	3	2
3	3	2	4
4	8	2	1
5	5	1	3
	$\min t_{iA} = 3$	$\min t_{iB} = 3$	$\min t_{iC} = 1$



TABLEAU 79
Définition du problème fictif à 2 centres de production obtenu par regroupement des 2 premiers et des 2 derniers centres de production du [tableau 78](#)

Tâche i	t_{iAB}	t_{iBC}
1	8	7
2	7	5
3	5	6
4	10	3
5	6	4

Table des
matières

Index
thématique

L'application de l'algorithme de Johnson sur les données du [tableau 79](#) permet de déterminer l'ordonnancement optimal sur les 3 centres de production: tâches 3, 1, 2, 5 et 4 (voir [figure 111, page 378](#)).

Certains auteurs¹ ont remarqué que lorsque les conditions imposées pour se ramener au cas de 2 centres de production n'étaient pas exactement satisfaites, la solution optimale ou une solution à performance voisine était néanmoins trouvée en utilisant cette procédure. Il a été montré² que l'algorithme de Johnson reste optimal si quelle que soit la tâche i , on a $t_{iB} \leq t_{iA}$ et $t_{iB} \leq t_{iC}$.

Le cas général du problème à 3 centres de production a toutefois une solution optimale en appliquant l'un des algorithmes utilisés en programmation linéaire en nombres entiers, et qui est connu sous le nom de *branch and bound* ; cependant la présentation de la solution «correcte» du problème à 3 centres de production dépasse le propos introductif que l'on s'est fixé ici³.

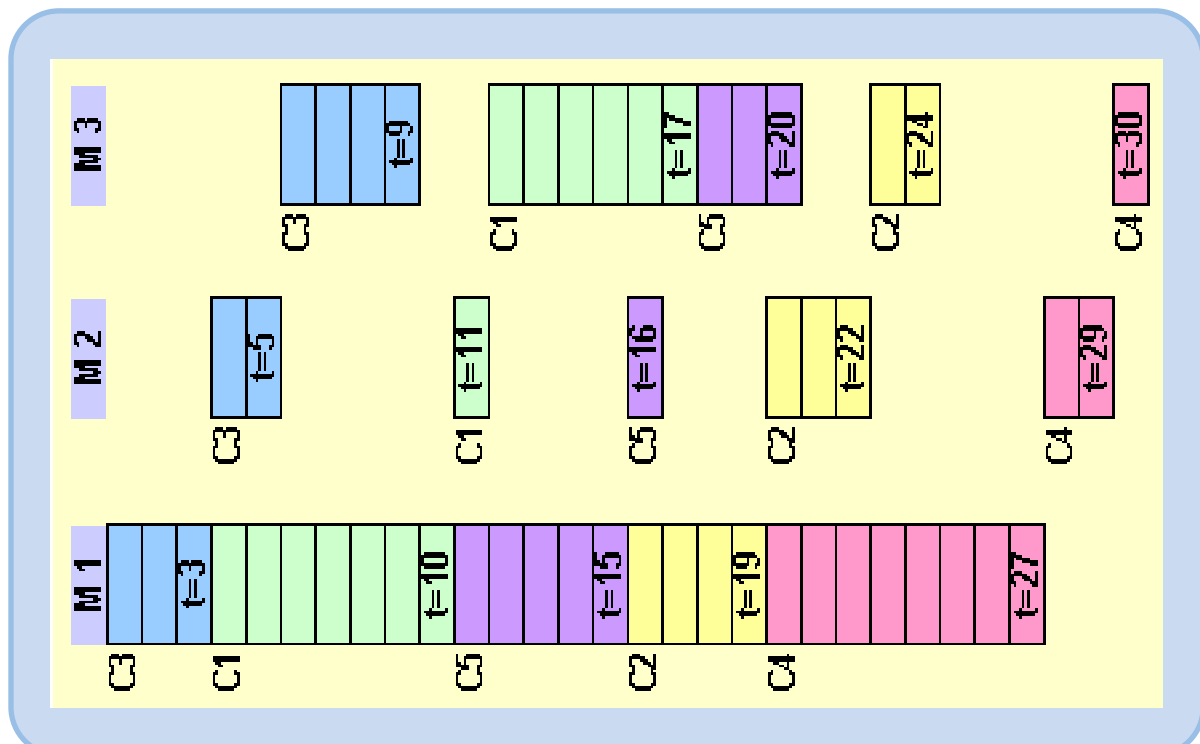
1. Giglio & Wagner (1964, [203]).

2. Burns et Rooker (1978, [79]).

3. Sur ce point, voir Johnson & Montgomery (1974, [245], p. 329-336) qui présentent la méthode et l'illustrent d'un exemple numérique traité de bout en bout; voir également Baker (1974, [30], p. 149-156 et p. 178-210).

FIGURE 111

Résolution graphique du problème d'ordonnancement à 3 centres de production (ordre identique de passage)



I-1.4.2 Ordonnancement de n tâches nécessitant l'intervention de m centres de production (ordre identique de passage)

Après avoir examiné le modèle de base dans lequel chaque centre ne possède qu'une machine (§ I-1.4.2.1), on examinera successivement des variantes de ce problème pour tenir compte des temps de montage/démontage d'outillage (§ I-1.4.2.2, page 380), de contraintes de continuité dans l'exécution des opérations d'une même tâche (§ I-1.4.2.3, page 381) et de la possibilité qu'un centre de production dispose de plusieurs machines (§ I-1.4.2.4, page 383).

I-1.4.2.1 Le modèle de base

Le problème combinatoire posé est formidable, il y a en effet $(n!)^m$ ordonnancements possibles, dans le cas (simplifié) où une même tâche ne passe qu'une fois sur chaque poste de travail. Le problème général a été formalisé en termes de programmation dynamique et en termes de programme linéaire en nombres entiers¹. La formulation générale permet d'intégrer des contraintes supplémentaires (date de livraison, capacité variable de production) et de choisir plusieurs formulations différentes de la fonction-objectif (minimisation du temps d'achèvement total, minimisation du cumul des retards par rapport aux dates de livraison souhaitées, minimisation de l'appel à des ressources supplémentaires...). Par contre, elle devient difficilement exploitable au-delà d'une trentaine de tâches ou de postes de travail.

1. Voir Conway, Maxwell & Miller (1967, [104], p. 107-108), Holloway & Nelson (1979, [234]) et Baker (1974, [30], p. 206-208 et 277-278).

Lorsque l'ordre de passage des tâches est identique et que le nombre de centres de production ne dépasse pas quelques dizaines, une solution souvent proche de la solution optimale peut être trouvée en utilisant l'algorithme de Johnson sur des groupements de centres de production successifs, connu sous le nom de l'**algorithme CDS**¹. La procédure à suivre est plus facile à comprendre à partir d'un exemple qu'à partir de sa description formelle. Prenons le cas de 5 centres de production repérés dans leur ordre d'intervention par les lettres A à E, il faut résoudre les 4 problèmes suivants (en reprenant les notations de regroupement de centres de production introduites au § I-1.4.1):

$$\{A\} - \{E\}; \{AB\} - \{DE\}; \{ABC\} - \{CDE\}; \{ABCD\} - \{BCDE\}$$

et d'une façon générale, pour m centres, on aura à résoudre m - 1 problèmes.

Illustrons cette procédure par un exemple numérique ne comportant que 4 centres de production (tableau 80). La solution obtenue (3 - 4 - 6 - 2 - 5 - 1) est

TABLEAU 80
Exemple de problème de flow shop à 4 centres de production

Tâche <i>i</i>	Temps d'exécution en 1/10ème d'heure			
	t_{iA}	t_{iB}	t_{iC}	t_{iD}
1	50	43	15	4
2	89	99	95	77
3	7	47	20	98
4	8	64	12	94
5	61	19	65	14
6	1	80	66	78

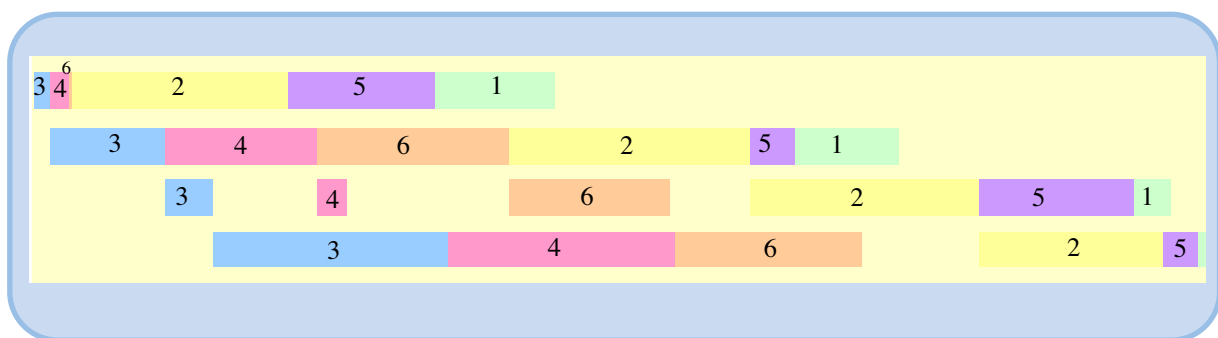


Table des matières

Index thématique

est proche (48,7 heures) de la solution optimale (trouvée par dénombrement) qui donne un temps minimal de 48,5 heures avec l'ordonnancement suivant 6 - 3 - 4 - 2 - 5 - 1. Le premier problème fictif (machines A et D) conduit à un temps de 51,2 heures, pour l'ordre 6 - 3 - 4 - 2 - 5 - 1. Les deux autres problèmes fictifs sont analysés dans les tableaux 81 et 82.

FIGURE 112
Ordonnancement proposé par l'algorithme CDS au problème de Flow Shop proposé au tableau 80



1. Cette méthode heuristique, due à Campbell, Dudek et Smith (1970, [84]), semble être l'une des plus performantes. Voir sur ce point Baker (1974, [30]), p. 163-165, ainsi que D.G. Dannenbring (1977, [118]).

TABLEAU 81
Deuxième problème fictif de l'algorithme CDS

Tâche i	$t_{i, A+B}$	$t_{i, C+D}$
1	93	19
2	188	172
3	54	118
4	72	106
5	80	79
6	81	144

Ce deuxième problème ($\{AB\} - \{CD\}$) donne la solution suivante: 3 – 4 – 6 – 2 – 5 – 1
Avec cet ordonnancement, l'ensemble des travaux sera terminé au bout de 48,7 heures.

TABLEAU 82
Troisième problème fictif de l'algorithme CDS

Tâche i	$t_{i, A+B+C}$	$t_{i, B+C+D}$
1	108	62
2	283	271
3	74	165
4	84	170
5	145	98
6	147	224

Ce dernier problème ($\{ABC\} - \{BCD\}$) donne la même solution que le deuxième problème

Cette solution approchée peut constituer une bonne réponse à un problème périodiquement posé: par exemple celui de l'ordonnancement du jour ouvrable suivant, avec indépendance des ordonnancements successifs. Les efforts faits au niveau de l'ordonnancement sont généralement très payants au niveau de l'utilisation des moyens productifs (on a déjà dit qu'il n'est pas rare de voir ces moyens utilisés à moins de 70% de leur capacité pour des raisons d'organisation et, au premier chef, d'ordonnancement). Mais une autre démarche peut être suivie et consiste à utiliser des règles de priorité dans l'affectation des tâches aux centres de production (*dispatching rules*) qui permettent de décider simplement pour chaque centre de production, celle des tâches en attente qu'il convient d'exécuter lorsque le centre de production sera disponible. Cette approche diffère fondamentalement de celle étudiée jusqu'ici en ce sens que les décisions sont prises «au fil de l'eau» et non en une fois pour tout un ensemble de tâches. Nous examinerons ces techniques au § III-1, page 418.

Table des matières

Index thématique

I-1.4.2.2 Prise en compte des temps de montage / démontage dépendants de l'ordre de passage des tâches

Dans la pratique, le problème d'ordonnancement du *flow shop* à m centres de production ne peut pas ne pas tenir compte de l'existence de **temps de montage** s_{ij} d'outillages pour permettre l'exécution de la tâche i sur la machine du centre de production j et de son temps de démontage r_{ij} , sachant que la tâche passe au centre de production suivant en même temps que commence l'opération de démontage. Pour résoudre ce problème, Proust, Drogou, Foucher & Foucheyrand (1988, [353]) proposent¹ un algorithme particulièrement efficace en se ramenant à

1. Voir également Proust, Gupta & Deschamps (1991, [353]).

l'heuristique CDS que nous venons d'examiner en définissant les temps des groupements fictifs de k centres de production pour se ramener à l'algorithme de Johnson comme suit :

- temps du premier centre de production fictive = somme des temps opératoires de i sur les k premiers centres de production augmenté du temps de montage s_{i1} et diminué du temps de montage du premier centre de production du second groupement fictif $s_{i, m-k+1}$;
- temps du second centre de production fictive = somme des temps opératoires de i sur les k derniers centres de production augmenté du temps de démontage sur le dernier centre de production r_{im} et diminué du temps de démontage du dernier centre de production du premier groupement fictif r_{ik} .

On peut ajouter que l'on peut modifier légèrement la formulation du problème pour prendre en compte les dates de livraison. Il suffit d'ajouter un centre de production fictive en fin du processus et de définir le temps opératoire de chaque tâche sur ce centre de production fictive comme étant la différence entre la plus tardive des dates de livraison et la date de livraison de cette tâche.

I-1.4.2.3 Ordonnancement de n tâches nécessitant l'intervention de m centres de production (ordre identique de passage – sans attente)

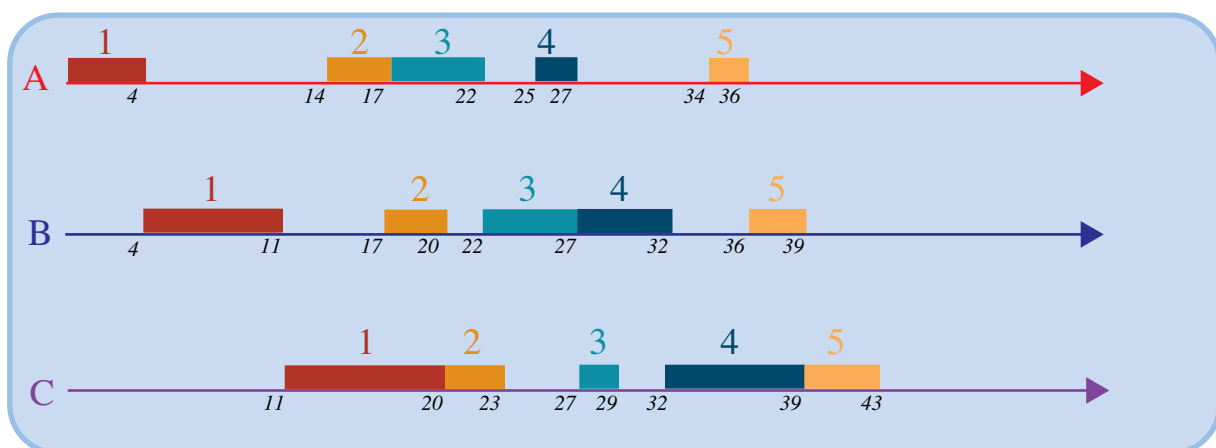
Dans certaines industries (industries alimentaires notamment), les opérations de chaque tâche doivent s'enchaîner sans attente et tous les centres de production sont utilisés¹ (autrement dit, il n'y a pas de temps opératoire nul). Illustrons ce problème par un exemple faisant intervenir 5 tâches comportant chacune 3 opérations, chacune d'entre elles étant réalisée successivement sur les centres de production A, B et C; les temps opératoires sont donnés dans le [tableau 83 de la page 382](#) et une programmation possible (suivant l'ordre des numéros de tâches) est donnée dans la [figure 113](#).

Table des matières

Index thématique

FIGURE 113

Exemple d'ordonnancement acceptable pour l'exemple de problème de Flow shop sans attente



Si l'on considère deux tâches i et j programmées l'une après l'autre au plus tôt, il est évident qu'une fois programmé i de telle sorte que ses opérations s'enchaînent sans attente, il convient, pour que toutes les opérations de la tâche j s'enchaî-

1. Voir Esquirol & Lopez (1999, [140]), p. 74. Une généralisation de la démarche est proposée ici.

TABLEAU 83
Temps opératoire du problème de flowshop sans attente

	Tâche 1	Tâche 2	Tâche 3	Tâche 4	Tâche 5
Machine A	4	3	5	2	2
Machine B	7	3	5	5	3
Machine C	9	3	2	7	4

nent également sans attente et que cette tâche s'achève au plus tôt, de retarder le début de j d'un certain temps, noté δ_{ij} (δ_{ij} n'ayant aucune raison d'être égal à δ_{ji}). On notera c_{ij} , somme du temps opératoire de la première opération de la tâche i et de δ_{ij} , le **décalage minimal** qui sépare le début de la première opération de la tâche i , du début de la première opération de la tâche j supposée programmée immédiatement après la tâche i (dans notre exemple, $c_{12} = 4 + 10 = 14$).

Il est facile de comprendre, à partir de notre exemple numérique, que la durée d'exécution totale des tâches dans une programmation au plus tôt sans attente (= 43, dans l'exemple ci-dessus) est la somme des opérations ($2 + 3 + 4 = 9$) de la dernière tâche (tâche 5) et des décalages successifs de la séquence de tâches antérieurement programmées ($\{4 + 10\} + \{3 + 0\} + \{5 + 3\} + \{2 + 7\} = 34$).

Si l'on est en présence d'un problème de définition d'une séquence répétitive, conduisant, dans notre exemple, à recommencer la programmation d'une tâche 1, sitôt terminée l'exécution de la séquence $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 5$, la durée du cycle répétitif est $c_{12} + c_{23} + c_{34} + c_{45} + c_{51}$ et c'est la durée la plus faible qui assure le débit le plus élevé. Ce type de problème est alors formellement identique à celui que l'on va examiner au § I-2 et qui trouve une solution avec l'algorithme de Little.

S'il s'agit simplement d'un problème d'ordonnancement unique (par opposition à périodique) d'un ensemble de tâches, la recherche d'une solution est un peu plus complexe. Dans le cas précédent, le problème d'ordonnancement posé pouvait être considéré comme équivalent à un problème de création d'une tournée de voyageur de commerce qui doit visiter chaque ville d'un ensemble, une fois et une seule, et revenir dans la ville de départ, qui peut être quelconque; dans l'analogie, la visite d'une ville correspond à l'exécution d'une tâche et le transport d'une ville i à une ville j , au décalage minimum c_{ij} . Dans le cas du problème d'ordonnancement unique, l'analogie à utiliser est celle de la tournée filaire (introduite au § II-1.3, page 918, du chapitre XIII, qui est une tournée partant d'une ville qui non prédéterminée et, après la visite unique de toutes les autres villes, ne se préoccupe pas d'un éventuel retour à la ville de départ). Il faut alors, en gardant cette analogie:

- créer une ville fictive de départ Alpha avec une distance nulle avec chacune des villes j et une interdiction de se rendre dans la ville Alpha; ceci correspond à la création d'une tâche fictive α avec les décalages minimaux suivants avec les autres tâches: $c_{\alpha j} = 0, \forall j \neq \omega$ et $c_{i\alpha} = \infty, \forall j \neq \omega$;
- créer une ville fictive Oméga de destination finale, distante de chaque ville i mais avec interdiction de partir d'Oméga vers une ville autre qu'Alpha; ceci correspond à la création d'une tâche fictive ω avec un décalage minimal avec une tâche i , autre que la tâche α , égal au cumul des temps opératoires de i

dans les m centres de production : $c_{i\omega} = \sum_{h=1}^m t_{ih}$, $\forall i \neq \alpha$ avec $c_{\omega j} = \infty$,

$\forall j \neq \alpha$, $c_{\omega\alpha} = 0$ et $c_{\alpha\omega} = \infty$;

- la distance entre deux villes quelconques autres qu'Alpha et Oméga est égale au décalage minimal c_{ij} .

Dans ces conditions, on se ramène au problème classique de la tournée du voyageur de commerce: en partant d'Alpha, on passe successivement dans toutes les villes, sans savoir par laquelle on commence, puis on arrive à Oméga avant de repartir nécessairement sur Alpha. Dans l'analogie, on traite toutes les tâches, sauf la dernière, en cumulant les décalages minimaux et on ajoute le cumul des temps opératoires de la dernière tâche. Reprenons notre exemple, la matrice des coûts est, dans le cas d'ordonnancement non répétitif, celle du **tableau 84**, la solution optimale étant $\alpha \rightarrow 4 \rightarrow 1 \rightarrow 3 \rightarrow 2 \rightarrow 5 \rightarrow \omega$, pour une durée totale de 33.



TABLEAU 84
Tableau des décalages minimaux, avec tâches fictives

		Successeur						
		α	1	2	3	4	5	ω
Prédéceseur	α	∞	0	0	0	0	0	∞
	1	∞	∞	14	10	13	15	52
	2	∞	3	∞	3	4	4	14
	3	∞	6	7	∞	8	8	29
	4	∞	3	8	4	∞	9	24
	5	∞	2	2	2	3	∞	9
	ω	0	∞	∞	∞	∞	∞	∞

Table des matières

Index thématique

I-1.4.2.4 Le flow shop hybride

Cette classe de problèmes se caractérise par le fait que chaque centre de production peut disposer de plusieurs machines substituables, ce nombre pouvant varier d'un centre de production à l'autre. Une solution empirique satisfaisante consiste à travailler en deux temps¹ :

- On commence par déterminer un ordre de passage des tâches dans les centres de production (problème de séquençement), par exemple en utilisant l'algorithme CDS.
- On affecte ensuite les opérations aux machines. On commence par les opérations à réaliser sur l'une des machines du premier centre, selon des règles définies ci-après ; il en découle des dates d'arrivée des tâches devant les machines du deuxième centre. On affecte ensuite les tâches aux machines du deuxième centre, en fonction de leurs dates d'arrivée, des disponibilités des machines et de règles. On recommence ensuite ce processus jusqu'au dernier centre de production. L'affectation s'effectue à l'aide de l'une des règles de priorité suivante :

1. Ce problème est traité en détail dans Lopez & Roubellat (2001, [286], chap. X) ; voir également Vignier, Billaut & Proust (1999, [432]).

- La **règle FAM** (*First Available Machine*), argement utilisée, affecte la tâche à la machine qui se libère le plus tôt.
- La **règle LSM** (*Latest Start Machine*) choisit la machine libre le plus tard parmi les machines libres quand l'opération est disponible ou la machine libre le plus tôt si aucune machine n'est libre lorsque l'opération est disponible. Cette règle tend à minimiser le temps d'inactivité des machines utilisées et donc à n'utiliser que celles qui sont nécessaires.
- La **règle ECT** (*Earliest Completion Time*), utilisée si la durée de l'opération varie en fonction de la machine retenue, affecte la tâche à la machine qui permet l'exécution la plus rapide. Cette règle tend à maximiser l'utilisation des machines les plus performantes.

I-1.5 Ordonnement de n tâches nécessitant l'intervention de m centres de production (cheminement libre – *open shop*)

Très peu de résultats analytiques existent¹. Si deux centres de production seulement sont mobilisés, on démontre que l'ordonnement minimisant la durée d'achèvement de l'ensemble des tâches est obtenu en appliquant la **règle LAPT** (*Longest Alternate Processing Time first*) qui consiste à sélectionner, sur le centre de production libre, l'opération de plus grande durée sur l'autre centre. Dans l'application de cette règle, les tâches dont une opération a été réalisée ont la même priorité, la plus faible, et, lorsque ces dernières sont considérées, elles le sont de manière arbitraire. Cette règle reste optimale dans le cas préemptif.

Illustrons par un exemple l'application de cette règle, en partant des données du **tableau 85**.

TABLEAU 85
Exemple de problème d'ordonnement à cheminement libre dans 2 centres de production

Numéro de la tâche i	1	2	3	4
t_{iA}	50	150	80	200
t_{iB}	60	50	100	70

L'application de la règle LAPT conduit aux étapes suivantes:

- en $t = 0$, l'opération la plus longue est l'opération A de la tâche 4, on charge donc l'opération de la tâche 4 à exécuter sur B (date d'achèvement en $t = 70$) (choisie arbitrairement parmi les 2 centre libres);
- en $t = 0$, le centre A étant libre, les opérations des tâches 1, 2 et 3 sont donc candidates; l'opération la plus longue sur le centre B parmi ces candidats est celle de la tâche 3 (100), ce qui conduit à charger l'opération A de la tâche 3 (date d'achèvement en $t = 80$);
- en $t = 70$, le centre B se libère, les opérations des tâches 1 et 2 sont donc candidates (3 étant en cours); l'opération la plus longue sur A de ces candi-

1. Voir Esquirol & Lopez (1999, [140], chap. IV) et le chapitre de Prins dans Lopez & Roubellat (2001, [286], chap. XI).

- ats est celle de la tâche 2 (150); on charge donc l'opération B de la tâche 2 (date d'achèvement en $t = 70 + 50 = 120$);
- en $t = 80$, le centre A se libère, les opérations des tâches 1 et 4 sont donc candidates; l'opération de la tâche 1 (qui n'a encore aucune réalisation de tâche) est plus prioritaire que celle de la tâche 4 (qui a déjà une opération réalisée); on charge donc l'opération A de la tâche 1 (date d'achèvement en $t = 80 + 50 = 130$);
 - en $t = 120$, le centre B se libère, l'opération de la tâche 3 est candidate unique (1 étant en cours); on charge donc l'opération B de la tâche 3 (date d'achèvement en $t = 120 + 100 = 220$);
 - en $t = 130$, le centre A se libère, sont donc candidates les opérations des tâches 2 et 4 qui ont déjà toutes deux une opération exécutée sur B; elles sont équivalentes et on charge arbitrairement l'opération A de la tâche 2 (date d'achèvement en $t = 130 + 150 = 280$), puis l'opération A de la tâche 4 (date d'achèvement en $t = 280 + 200 = 480$) qui est la dernière opération à exécuter sur ce centre;
 - en $t = 220$, le centre B se libère, on charge donc l'opération B de la tâche 1 (date d'achèvement en $t = 220 + 60 = 280$) qui est la dernière à réaliser.

Le travail est donc achevé en $t = 480$.

Lorsqu'il y a plus de 2 centres de production, on peut utiliser des heuristiques, lesquelles ne garantissent pas l'optimum. Les travaux effectués montrent qu'en général la meilleure règle est la **règle MWR** (*Most Work Remaining*) qui privilégie la tâche candidate dont la durée cumulée des opérations non encore traitées est maximale.

Table des
matières

I-1.6 Ordonnancement de n tâches nécessitant l'intervention de m centres de production (ordre de passage quelconque)

Index
thématique

Ce cas général que l'on a qualifié de problème de *job shop* (voir page 362), se caractérise par le fait que l'ordre de passage entre les centres de production varie d'une tâche à l'autre et que, pour une même tâche, certains centres de production peuvent être utilisés plusieurs fois et d'autres pas. On verra ultérieurement (§ I-3, page 404) comment caractériser plus complètement cette classe de problèmes. Aucun résultat analytique n'est disponible pour résoudre cette classe de problèmes. On peut toujours trouver une formulation d'un problème concret par la programmation mathématique, mais la résolution numérique optimale de problèmes d'une certaine dimension, est le plus souvent hors de portée (voir le § I-2.2.4, page 404). On cherchera à les résoudre plutôt à l'aide d'approches simulatoires s'appuyant sur des méthodes heuristiques (voir § II-2, page 410).

On examinera cependant ici le problème statique de l'ordonnancement en cas d'existence d'un **goulot d'étranglement**, c'est-à-dire de centre de production plus sollicité que les autres au point de conditionner le débit global de production du système productif étudié. La démarche suivie depuis très longtemps – et formalisée à partir de la fin des années soixante-dix – consiste à piloter le système en s'appuyant sur un ordonnancement défini pour ce goulot d'étranglement et qui sert de pivot pour l'ordonnancement global et à faire en sorte qu'il ne puisse être affecté par une quelconque rupture de charge (en particulier grâce à un stock-tampon), parce que l'heure de travail perdu dans un goulot d'étranglement est

perdue pour l'ensemble du système productif. De nombreuses approches ont été proposées¹ ; on présentera ici une démarche heuristique donnant de bons résultats qui connaît de nombreuses sophistications, la démarche utilisée ici n'étant que l'une des démarches possibles. Elle s'appuie sur cinq étapes. Elle sera illustrée par l'exemple du [tableau 87](#).

TABLEAU 86
Problème de job shop

1		2		3		4		5	
Machine	durée	Machine	durée	Machine	durée	Machine	durée	Machine	durée
A	5	A	3	C	8	B	5	D	7
C	7	B	5	A	4	D	4	C	15
D	9	C	10	B	3	C	6	A	4
-	-	D	4	-	-	B	7	-	-

- On commence par détecter le centre de production qui constitue un goulot d'étranglement. On peut, par exemple, retenir celui qui a la plus forte charge de travail (dans notre exemple, c'est la machine C), mais les choses ne sont pas toujours aussi simples et des approches plus sophistiquées peuvent être utilisées (voir [page 433](#)). En cas de doute sur l'identité du centre qui rythme la production du système productif, on peut toujours recommencer la démarche décrite ci-après pour chacun des goulots possibles et retenir la meilleure des solutions trouvées.
- On considère qu'en amont et en aval de ce goulot, on est à capacité infinie, ce qui revient à dire que les opérations de chacune des tâches peuvent s'exécuter au plus tôt, aucun conflit dans l'utilisation d'une même machine n'étant censé arriver. Ceci revient à considérer que :
 - avant le goulot, le travail s'effectue sur une machine fictive sur laquelle sont réalisées toutes les opérations antérieures, pour une durée égale à la somme des durées (par exemple, pour la tâche 2, on cumule les durées des opérations effectuées sur les machines A et B), ces durées sont considérées ensuite comme les dates d'arrivées (au plus tôt) dans le centre considéré comme goulot d'étranglement ; les tâches qui n'utilisent pas ce centre critique peuvent être fusionnées dans cet ensemble ou traitées à part, une fois réalisé l'ordonnancement des tâches utilisant ce goulot d'étranglement ;

1. Voir en particulier Morton & Pentico ([309], 1993) qui consacrent de longs développements à ces approches heuristiques (en particulier aux chapitres IX et X) ; voir également Narasimhan, McLeavey & Billington (1995, [314], chap. XVI). Cette approche du goulot d'étranglement a été popularisée par la méthode OPT, proposée par Goldratt et Fox (1984, [206] et 1986, [207]) et qui fait appel à la **théorie des contraintes**. Ce logiciel OPT, qui a connu son heure de gloire, a connu des difficultés aux États-Unis en raison de la confidentialité des algorithmes utilisés. Il semblerait que l'usage raisonné d'heuristiques donne des résultats de qualité similaires (Morton & Pentico ([309], 1993, chap. X). L'idée que Goldratt et Fox ont popularisée est celle d'une synchronisation des flux, rythmés par la production du goulot d'étranglement, puisque toute accélération de débit en amont du goulot ne peut que conduire à la création inutile d'encours et que l'accélération en aval conduit seulement à créer des périodes sans sortie de production, le débit moyen du système productif restant inchangé ; par ailleurs, l'introduction d'un stock-tampon (*time buffer*) en amont du goulot permet d'éviter toute rupture de charge à ce niveau, sachant que celle-ci conduit à une sous-activité de l'ensemble du système productif.

- après le goulot, le travail s'effectue sur une machine fictive sur laquelle sont réalisées toutes les opérations postérieures, pour une durée égale à la somme des durées (par exemple, pour la tâche 3, on cumule les durées des opérations effectuées sur les machines A et B); si des dates de livraison sont assignées aux tâches, on retranche à ces dates ces durées pour déterminer des dates de livraison (au plus tard) à retenir pour le goulot d'étranglement; si la tâche 3 avait comme date de livraison 20, la date de livraison pour la machine C serait alors $20 - 7 = 13$.

Le résultat de ce travail est consigné dans le [tableau 88](#).

TABLEAU 87
Transformation du problème de job shop autour de la machine critique C

Tâche 1		Tâche 2		Tâche 3		Tâche 4		Tâche 5	
Machine	durée	Machine	durée	Machine	durée	Machine	durée	Machine	durée
Avant C	5	Avant C	8	Avant C	0	Avant C	9	Avant C	7
C	7	C	10	C	8	C	6	C	15
Après C	9	Après C	4	Après C	7	Après C	7	Après C	4

- On cherche alors à résoudre le problème du goulot d'étranglement, en partant des dates d'arrivées qui viennent d'être calculées et, le cas échéant, en tenant compte des dates de livraison rectifiées comme on vient de l'indiquer. Ce problème à résoudre porte sur une machine unique et est connu dans la littérature spécialisée comme le *simple embeded one-resource problem*. L'une des règles introduites au § I-1.1, page 364, peut être utilisée; dans notre exemple, c'est la règle TOM qui a été utilisée dynamiquement, sur la base des seules opérations exécutables et sans préemption:
 - en $T = 0$: chargement de la tâche 3 immédiatement disponible (durée 8);
 - en $T = 5$: arrivée de la tâche 1 (durée 7);
 - en $T = 7$: arrivée de la tâche 5 (durée 15);
 - en $T = 8$: fin de la tâche 3, libération de la machine C; arrivée de 2 (durée 10); chargement de 1 (en application de la règle TOM, les tâches 1 et 5 étant candidates);
 - en $T = 9$: arrivée de 4 (durée 6);
 - en $T = 15$: fin de la tâche 1, libération de la machine C; chargement de la tâche 4 (en application de la règle TOM, les tâches 4 et 5 étant candidates);
 - en $T = 21$: fin de 4, libération de la machine C; chargement de la tâche 2 (en application de la règle TOM, les tâches 2 et 5 étant candidates);
 - en $T = 31$: fin de la tâche 2, libération de la machine C; chargement de la tâche 5 (candidat unique);
 - en $T = 46$: fin de la tâche 5.
- On cherche ensuite à résoudre le problème des centres situés en amont du goulot, en prenant comme dates de livraison celles retenues pour définir les arrivées dans le goulot (autrement dit, celles reposant sur l'hypothèse de la capacité infinie du «système productif amont»). Là encore, plusieurs règles sont possibles (notamment la règle S/OPN qui sera introduite à la [page 413](#)); on a utilisé ici, en cas de conflit dans la mobilisation d'une ressource, la tâche devant débiter le plus tôt sur le goulot (critère de la date de livraison minimale introduit à la [page 370](#) et utilisé sur le groupe restreint des opérations immédiatement exécutables). Il en résulte généralement une modification des dates d'arrivées au goulot d'étranglement que l'on considère comme sans grande importance si la date de fin d'exécution du travail sur le goulot n'est

- pas retardée mais qui peut conduire à recommencer l'étape précédente (réordonnancement sur le goulot, en partant des nouvelles dates d'arrivées).
- Les dates de fin des tâches sur le goulot sont ensuite considérées comme les dates d'arrivées dans le système-aval; un ordonnancement est alors calculé en utilisant des règles de priorité. Si certaines machines se retrouvent simultanément en amont et en aval du goulot (dans notre exemple, c'est le cas de la machine B, à cause de la tâche 4), il convient de considérer comme non révisable la programmation décidée en amont du goulot (sauf acceptation d'une nouvelle itération).

L'ordonnancement obtenu à l'issue de cette démarche dans notre exemple est consigné à la [figure 114](#).

FIGURE 114
Ordonnancement du problème de job shop

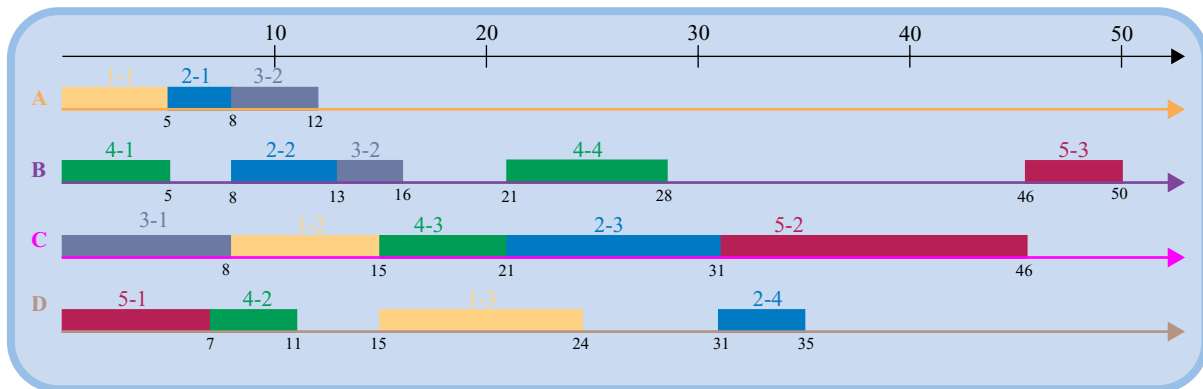


Table des matières

I-2 Modèles statiques: cas du coût de lancement total variable avec l'ordonnancement retenu

Nous n'examinerons ici que le cas de n tâches nécessitant l'intervention d'un seul centre de production ($m = 1$) et pour lequel l'ordre de passage influe sur les coûts de lancement. Prenons l'exemple d'une usine de peinture: différentes couleurs de peinture sont produites en séquence sur le même équipement, lequel doit être soigneusement nettoyé lorsque l'on change de couleur. Le temps total de nettoyage (en heures) passé par l'équipe chargée du nettoyage est le suivant (en limitant ici le problème à 4 couleurs) :

TABLEAU 88
Temps de nettoyage pour passer d'une couleur à l'autre

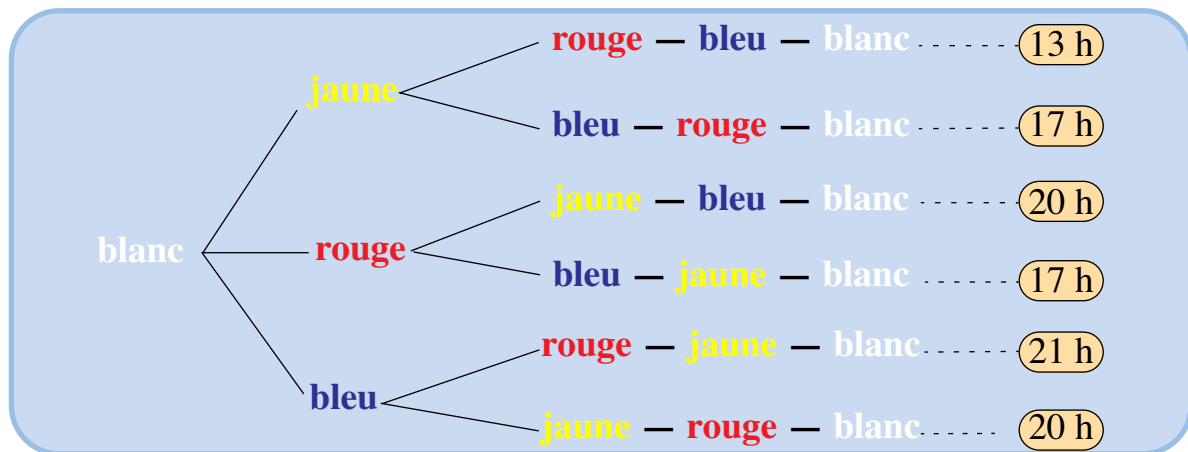
		Nouvelle couleur			
		blanc	jaune	rouge	bleu
Couleur initiale	blanc	0	1	2	3
	jaune	6	0	1	2
	rouge	8	6	0	1
	bleu	10	8	6	0

Index thématique

Le problème posé revient à trouver l'ordre de passage qui minimise le temps total de nettoyage. On peut, bien sûr, trouver une solution à ce problème en explicitant toutes les combinaisons possibles au nombre de $(n - 1)! = 3! = 6$, ce qu'illustre la [figure 115](#).

FIGURE 115

Explicitation de tous les ordres de changement de couleurs du [tableau 88](#)



Mais cette technique n'est envisageable que si le nombre m de tâches est faible : pour 6 couleurs seulement, le dénombrement conduit à 120 comparaisons du résultat de 6 additions, c'est-à-dire que cette solution d'énumération exhaustive est rapidement inapplicable. Aussi a-t-on recours, pour résoudre ce problème, à l'analogie que ce problème présente avec celui du voyageur de commerce pour lequel un algorithme de résolution efficace a été trouvé. Dans ce problème, le voyageur de commerce quitte une ville de départ et doit visiter au cours d'une tournée, $m - 1$ villes différentes, en n'y passant qu'une fois, avant de retourner à la ville de départ, et cherche à minimiser son coût de transport. Ce coût de transport c_{ij} entre une ville i et une ville j est de même nature que le coût de lancement de la tâche j lorsque celle-ci succède à la tâche i .

Table des matières

Index thématique

Pour résoudre le problème du voyageur de commerce, on peut faire appel à la programmation dynamique (que l'on étudiera en [section II, page 562](#), du [chapitre VIII](#)), mais si les performances de celle-ci sont légèrement meilleures que celles de l'explicitation de toutes les solutions possibles¹, elles restent cependant mauvaises par rapport à l'utilisation de l'algorithme que l'on va étudier. On reviendra en détail sur ces problèmes de transport au [chapitre XIII](#).

Sur le plan formel, le problème du voyageur de commerce peut se formuler sous la forme du programme linéaire suivant, où x_{ij} est une variable susceptible de prendre seulement les valeurs 0 ou 1, la valeur 0 signifiant que le voyageur de commerce ne part pas de la ville i pour se rendre à la ville j , la valeur 1 ayant la signification contraire.

1. Voir Conway, Maxwell & Miller (1967, [104], p. 61-65) pour la formulation du problème du voyageur de commerce sous la forme d'un programme dynamique et les performances comparées de cette méthode avec celles de l'énumération et de l'algorithme de *branch and bound*. Voir également l'article de Crowder et Padberg (1980, [113]).

- Minimiser $\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m c_{ij} \cdot x_{ij}$ (minimisation du coût total de transport)
- sous contrainte $\sum_{i=1}^m x_{ij} = 1$ pour $j = 1, \dots, m$ et $\sum_{j=1}^m x_{ij} = 1$ pour $i = 1, \dots, m$.

Les premières contraintes s'interprètent comme le fait qu'il ne saurait y avoir qu'une seule ville i dans laquelle se trouvait le voyageur de commerce avant de se rendre dans la ville j et les secondes contraintes s'interprètent comme le fait qu'en quittant la ville i le voyageur de commerce ne peut se rendre que dans une seule ville j .

L'algorithme de résolution d'un programme linéaire en nombres entiers le plus utilisé pour cette classe de problèmes est sans aucun doute celui connu du *branch and bound*, qui est une méthode de recherche par tâtonnements de la solution optimale entière, en s'aidant des solutions trouvées par un algorithme classique de programme linéaire du type simplex. Nous ne présenterons pas cette technique¹ car en réalité lorsque les valeurs que les variables sont susceptibles de prendre sont 0 ou 1, cet algorithme général se simplifie. Nous présenterons au § I-2.1 l'adaptation de cette méthode², en nous appuyant sur un exemple numérique. Indiquons tout de suite que la description détaillée de l'algorithme sera longue car chaque calcul sera au départ amplement expliqué, mais qu'en pratique l'utilisation de cet algorithme est très rapide pour des problèmes comportant quelques dizaines de villes. Le logiciel disponible sur le CD-Rom détaille les calculs. Nous ferons ensuite quelques remarques complémentaires (§ I-2.2, page 401).

I-2.1 Présentation de l'algorithme de Little, Marty, Sweeney & Karel

Supposons que notre voyageur de commerce ait à visiter successivement chacune des 6 villes suivantes: A, B, C, D, E, F, en partant de l'une quelconque d'entre elles, puis retourne à son point de départ. On conviendra ici d'appeler trajet, noté $i \rightarrow j$, l'acheminement direct entre les villes i et j . Pour des raisons diverses, le coût de transport de la ville i à la ville j n'est pas égal au coût de transport de la ville j à la ville i (mais s'il en était ainsi, l'algorithme que l'on va présenter resterait toujours applicable). L'unité dans laquelle ces coûts, portés dans le [tableau 89](#) de gauche, sont exprimés importe peu ici, car notre propos est d'illustrer une démarche. Les coûts portés dans la diagonale du [tableau 89](#) sont infinis. D'une manière générale, la convention $c_{ij} = \infty$ a pour objet d'empêcher (coût prohibitif) le voyage direct de i vers j ; l'application de cette convention au trajet $i \rightarrow j$ revient à dire que lorsque l'on quitte la ville i , c'est pour se rendre dans une ville différente.

1. Voir Wagner (1975, [435], p. 484-490) qui a une présentation très claire de la démarche suivie avec cette méthode et s'appuie sur un exemple numérique traité de bout en bout.

2. Trouvée par Little, Murty, Sweeney & Karel en 1963; voir Conway, Maxwell & Miller (1967, [104], p. 56-61), l'exemple numérique donné ici est tiré de cet ouvrage (il n'est pas évident en effet de bâtir un exemple numérique simple permettant d'illustrer toutes les implications de l'algorithme); voir également Johnson & Montgomery (1974, [245], p. 340-345).

La recherche de la tournée optimale retenue dans cet algorithme est de type **Procédure par Séparation et Évaluation** (PSE), procédure connue également sous le nom de **branch and bound**. Elle passe par la résolution successive d'un certain nombre de problèmes partiels à l'issue desquels on prend la décision d'inclure ou d'exclure de la solution finale (ici la tournée du voyageur de commerce) une solution partielle (ici la décision de partir de la ville i pour se rendre dans la ville j). Cette procédure que l'on va décrire en détail à partir de cet exemple s'effectue en un certain nombre d'itérations au cours desquelles on restreint le domaine de recherche en adoptant une solution partielle (étape de séparation) et on évalue la performance de la concaténation des solutions partielles adoptées (étape d'évaluation) pour vérifier s'il faut ou non poursuivre la recherche dans le sous-ensemble de solution auquel on est arrivé. Examinons l'application de ces principes au problème du voyageur de commerce proposé¹ par Little, Marty, Sweeney & Karel (1963, [282]).

TABLEAU 89



Données du problème du voyageur de commerce

Tableau intermédiaire du processus de réduction

		Ville d'arrivée						minimum
		A	B	C	D	E	F	
ville de départ	A	∞	1	7	3	14	2	1
	B	3	∞	6	9	1	24	1
	C	6	14	∞	3	7	3	3
	D	2	3	5	∞	9	11	2
	E	15	7	11	2	∞	4	2
	F	20	5	13	4	18	∞	4
		minimum	0	0	3	0	0	0

Table des matières

Index thématique

Avant toute chose, il faut procéder à la *réduction de la matrice*. Cette opération consiste tout d'abord à soustraire de chaque ligne du tableau de gauche le plus petit des éléments de la ligne (porté en marge de la dernière colonne du **tableau 89** de gauche, [page 391](#)) des autres éléments de cette ligne. Dans ce nouveau tableau (**tableau 89** de droite), on soustrait ensuite le plus petit des éléments d'une colonne (ce minimum, porté en marge de la dernière ligne du **tableau 89** de droite, sera le plus souvent nul) des autres éléments de la colonne. On obtient alors la **matrice réduite** (**tableau 90**), qui se caractérise par la présence d'un zéro au moins dans chaque ligne et dans chaque colonne.

L'interprétation de la première étape de la réduction de la matrice est simple: on a remplacé chaque coût de transport entre une ville i et une ville j par la différence entre ce coût de transport et le coût de transport le plus faible pour quitter cette ville i . La somme de ces coûts minimaux ($1 + 1 + 3 + 2 + 2 + 4 = 13$) corres-

1. Pour une étude complète de cette classe de problèmes, voir Lawler, Lenstra, Rinnooy Kan & Shmoys (1992, [274]).

TABLEAU 90
Résultat du processus de réduction de la matrice des coûts

		Ville d'arrivée					
		A	B	C	D	E	F
ville de départ	A	∞	0	3	2	13	1
	B	2	∞	2	8	0	23
	C	3	11	∞	0	4	0
	D	0	1	0	∞	7	9
	E	13	5	6	0	∞	2
	F	16	1	6	0	14	∞

pond au coût minimal qui sera à la charge du voyageur de commerce lorsqu'il aura quitté chacune des 6 villes.

La matrice obtenue à la fin de la première étape de réduction (tableau 89 de droite) s'analyse donc comme une matrice de coûts de transports qui s'ajoutent au coût de 13. L'examen de ce tableau montre que, pour se rendre dans la ville C, il faudra encore dépenser au moins 3 : la seconde étape de la réduction de la matrice vise à obtenir des coûts d'arrivée calculés par différence avec le coût d'arrivée minimal. Le tableau 90 s'interprète donc comme le tableau de coûts de transport à ajouter à une dépense minimale de base $x = 13 + 3 = 16$ (c'est-à-dire la somme des valeurs minimales des lignes du tableau initial et de celle des valeurs minimales des colonnes du tableau obtenu après la première étape de réduction) en dessous de laquelle on ne saurait descendre, puisque le voyageur de commerce dans sa tournée quittera toutes les villes, et se rendra dans toutes les villes.

C'est sur cette matrice réduite que s'effectue la recherche de la tournée idéale. Le branchement (le *branch*, du *branch and bound*) consiste à décider quel trajet $i \rightarrow j$ doit être ajouté à un ensemble de trajets déjà sélectionnés¹, les décisions successives pouvant se visualiser par un arbre de décision, comme on le verra rapidement. Chaque décision de sélection ou de rejet d'un trajet correspond à la résolution d'un problème partiel. Dans cet exemple, on devra résoudre successivement six problèmes partiels pour trouver une solution optimale par cet algorithme, ce que nous allons examiner maintenant.

I-2.1.1 Résolution du problème de la première itération

Au départ, aucun trajet n'est sélectionné, et il semble raisonnable de restreindre le choix aux seuls trajets qui n'accroissent pas le coût minimal de 16. Seuls les trajets qui ont des zéros dans la matrice réduite répondent à ce critère. Le raisonnement est simple, *on retiendra le trajet qui, s'il n'était pas retenu, accroîtrait le plus la dépense minimale x.*

Examinons les implications de ce que l'on vient de dire, sur l'un quelconque de ces trajets, le trajet $A \rightarrow B$. Si l'on n'inclut pas $A \rightarrow B$, il faudra ajouter à x :

- au moins 1 pour se rendre en B, qui est le plus faible coût pour se rendre en B sans partir de A,

1. Cette étape est celle de la séparation dans la terminologie, moins imagée, retenue en France (approche PSE).

- et au moins 1, qui est le plus faible coût pour partir de A et se rendre dans une ville autre que B.

La pénalité a_{AB} associée à la décision de ne pas retenir $A \rightarrow B$, décision que l'on notera $A \nrightarrow B$, est donc de $a_{AB} = 1 + 1 = 2$, ce qui revient à dire que le coût d'une tournée qui n'inclurait pas (A, B) ne saurait être inférieur à $16 + 2 = 18$. On peut systématiser le raisonnement qui nous a permis de calculer la pénalité a_{ij} associée à la décision $i \nrightarrow j$ comme suit :

$$a_{ij} = \underset{k \neq j}{\text{Min}(c_{ik})} + \underset{h \neq i}{\text{Min}(c_{hj})} \quad \text{relation 72}$$

Le calcul de ces pénalités est rapide. Le plus simple est de le porter, entre parenthèses, à côté des zéros du tableau de la matrice réduite (tableau 90 de droite), ce qui donne le tableau 91 de gauche. On retiendra le trajet auquel est associé la plus

TABLEAU 91
Résolution du problème de la première itération dans l'utilisation de l'algorithme de Little et al.

Étape 1 de la résolution du problème de l'itération 1

		Ville d'arrivée					
		A	B	C	D	E	F
ville de départ	A	∞	0 (2)	3	2	13	1
	B	2	∞	2	8	0 (6)	23
	C	3	11	∞	0 (0)	4	0 (1)
	D	0 (2)	1	0 (2)	∞	7	9
	E	13	5	6	0 (2)	∞	2
	F	16	1	6	0 (1)	14	∞

Étape 2 de la résolution du problème de l'itération 1

		Ville d'arrivée					
		A	B	C	D	E	F
ville de départ	A	∞	0	3	2	∞	1
	B	∞	∞	∞	∞	∞	∞
	C	3	11	∞	0	∞	0
	D	0	1	0	∞	∞	9
	E	13	∞	6	0	∞	2
	F	16	1	6	0	∞	∞

Table des matières
Index thématique

forte pénalité, décision intuitivement évidente, mais que l'on pourra toujours remettre en cause si, au cours des étapes ultérieures, on trouve un coût minimal supérieur à celui de la solution qu'on écarte. La plus grande pénalité trouvée est 6, on retiendra donc une tournée qui fera partir le voyageur de commerce vers la ville E, après qu'il est arrivé dans la ville B. Le coût minimal des tournées qui n'incluent pas $B \rightarrow E$ est donc $x = 16 + 6 = 22$. Nous verrons ultérieurement (dans la résolution du quatrième problème partiel au § I-2.1.4, page 398), comment modifier la matrice de coûts conformément à une décision $i \nrightarrow j$, mais pour l'instant ce travail est inutile, et seule importe l'information du coût minimum de 22 pour toutes les tournées qui n'incluent pas $B \rightarrow E$.

Se pose maintenant la question de savoir si le coût des tournées qui incluent $B \rightarrow E$ est toujours 16 (c'est l'étape du «bound» dans le *branch and bound* ou de l'évaluation dans le SPE). La réponse n'est pas immédiate. Pour continuer l'exploration des solutions qui incluent $B \rightarrow E$, on modifie le tableau en supprimant la ligne correspondant à B (informations de coûts relatifs au départ de B) et la colonne correspondant à E (informations de coûts relatifs à l'arrivée en E), afin de ne pas remettre en cause cette décision. L'autre solution, retenue ici dans les illustrations numériques, consiste à rendre infinis ces coûts, pour éviter de repartir de

B, ou d'arriver de nouveau en E. Ces modifications correspondent à une procédure dite d'**élimination**.

Une dernière modification s'impose: rendre infini le coût c_{EB} de transport de E vers B pour éviter au voyageur de commerce un trajet maintenant interdit. On peut dès à présent indiquer que si, ultérieurement, on sélectionne les trajets $i \rightarrow j$ et $j \rightarrow k$, c'est le coût c_{ki} qu'il faudra rendre infini pour rendre impossible tout «bouclage». Dans ces conditions, la matrice des coûts de transport supplémentaires est le **tableau 91** (étape 2). Ce tableau de coûts comporte au moins un zéro dans chaque ligne et dans chaque colonne, c'est une matrice réduite. On est donc assuré que le coût minimal des tournées qui incluent $B \rightarrow E$ est $x = 16$. On peut ajouter que, sur les $5! = 120$ tournées initialement envisageables, l'exploration ne se poursuit que sur $4! = 24$ d'entre elles (celles qui incluent la décision de se rendre directement en E après avoir quitté B); les $5! - 4! = 96$ tournées délaissées sont toutes celles qui font partir de B pour se rendre ailleurs qu'en E. La réduction ainsi opérée est particulièrement sensible. À ce stade de l'analyse, l'arbre des choix et la description de la décomposition de l'ensemble des solutions sont donnés à la **figure 116**.

FIGURE 116

Analyse des décisions prises à la première itération

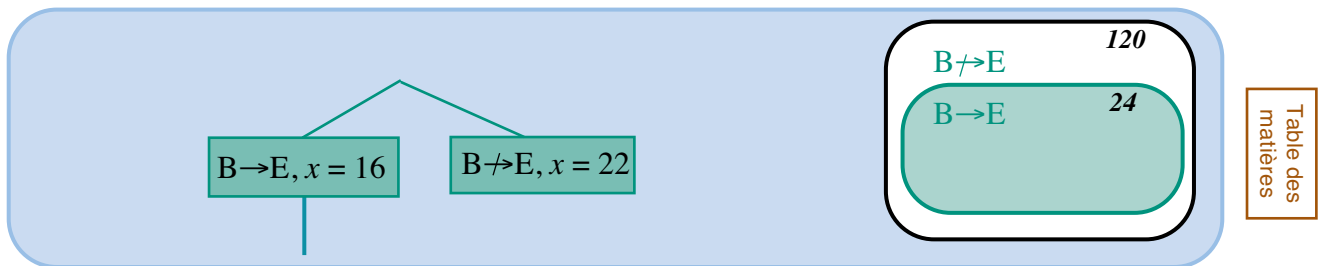


Table des matières

Index thématique

I-2.1.2 Résolution du problème de la deuxième itération

Il faut maintenant choisir un nouveau trajet parmi ceux possibles, ce qui exclut ceux qui arrivent en E et ceux qui partent de B. Pour savoir quelle décision antagoniste $i \rightarrow j$ et $i \not\rightarrow j$ on a intérêt à «brancher» sur le «nœud» $B \rightarrow E$, que l'on privilégie parce que le coût le plus faible lui est associé, on cherche de nouveau quel est le trajet $i \rightarrow j$ pour lequel le coût de transport est nul, et auquel la plus forte pénalité a_{ij} est associée. Cette procédure est dite de **séparation** (ou encore de partition), parce qu'elle remplace un problème considéré comme trop difficile à résoudre directement, par deux problèmes complémentaires. Ce second problème partiel consiste donc à explorer un sous-ensemble de 24 solutions possibles, celui qui contient toutes les tournées qui partent de B pour aller ensuite en E.

Le calcul des pénalités est porté entre parenthèses dans le **tableau 92** (itération 1). Deux trajets ont la même pénalité s'ils ne sont pas retenus: les trajets $D \rightarrow A$ et $D \rightarrow C$. Retenons arbitrairement le premier d'entre eux. Le coût minimal associé à la séquence de décisions $B \rightarrow E$ et $D \rightarrow A$ est $16 + 3 = 19$, valeur inférieure à l'ensemble des tournées qui n'incluent pas $B \rightarrow E$. Calculons maintenant le coût minimal associé à la séquence de décision $B \rightarrow E$ et $D \rightarrow A$. Comme précédemment, il faut empêcher tout départ de la nouvelle ville de départ retenue D, ainsi que toute arrivée dans la nouvelle ville d'arrivée retenue A. Il faut en outre éviter de

repartir de A pour se rendre en D. La modification du tableau de coûts donne le **tableau 92** (itération 2), d'où l'on tire la matrice réduite du **tableau 93**.

TABLEAU 92
Résolution du problème de la deuxième itération dans l'utilisation de l'algorithme de Little et al.

		Ville d'arrivée					
		A	B	C	D	E	F
ville de départ	A	∞	0 (2)	3	2		1
	B						
	C	3	11	∞	0 (0)		0
	D	0 (3)	1	0 (3)	∞		9
	E	13	∞	6	0 (2)		2
	F	16	1	6	0 (1)		∞

		Ville d'arrivée					
		A	B	C	D	E	F
ville de départ	A	∞	0	3	∞	∞	1
	B	∞	∞	∞	∞	∞	∞
	C	∞	11	∞	0	∞	0
	D	∞	∞	∞	∞	∞	∞
	E	∞	∞	6	0	∞	2
	F	∞	1	6	0	∞	∞

Minimum 0 3 0 0

TABLEAU 93
Résolution du problème de la deuxième itération dans l'utilisation de l'algorithme de Little et al. (suite)

Étape 3 de la résolution du problème de l'itération 2

		Ville d'arrivée					
		A	B	C	D	E	F
ville de départ	A	∞	0	0	∞	∞	1
	B	∞	∞	∞	∞	∞	∞
	C	∞	11	∞	0	∞	0
	D	∞	∞	∞	∞	∞	∞
	E	∞	∞	3	0	∞	2
	F	∞	1	3	0	∞	∞

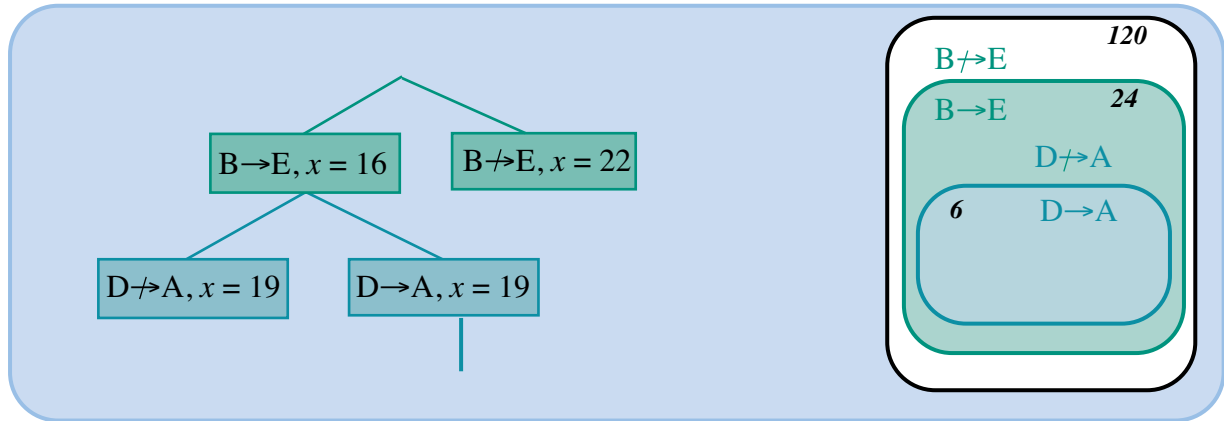
Le coût minimal associé à la séquence de décisions B→E et D→A est donc 16 + 3 = 19, c'est-à-dire qu'elle a le même coût que la séquence B→E et D→A. On peut donc poursuivre l'exploration à l'un ou l'autre nœud, retenons la première de ces deux séquences, qui est celle qui a sélectionné le plus de trajets. En poursuivant après le nœud D→A de notre arbre, il ne reste plus que 3 ! = 6 tournées possibles sur les 24 initialement envisagées (après le nœud B→E) ; 4 ! - 3 ! = 24 - 6 = 18 tournées délaissées se retrouvent toutes après le nœud D→A. Pour l'instant, on a donc effectué une partition de 120 tournées en 3 sous-ensembles : le premier comporte les 96 tournées qui évitent de partir de B pour se rendre en E, le deuxième comporte les 18 tournées qui imposent de partir de B pour se rendre en E et qui interdisent de partir de D pour se rendre en A et le dernier sous-ensemble qui incluent les tournées qui font partir le voyageur de commerce de B pour se

Table des matières

Index thématique

rendre en E et de D pour se rendre en A. L'arbre des décisions prises est celui de la figure 117.

FIGURE 117
Analyse des décisions prises à la deuxième itération



I-2.1.3 Résolution du problème de la troisième itération

L'étape 1 de la résolution de ce troisième problème consiste à calculer les pénalités, ce qui conduit au tableau 94 de gauche. La pénalité maximale de ce troisième

TABLEAU 94
Résolution du problème de la troisième itération dans l'utilisation de l'algorithme de Little et al.

Étape 1 de la résolution du problème de l'itération 3

		Ville d'arrivée					
		A	B	C	D	E	F
ville de départ	A	∞	0 (1)	0 (3)	∞	∞	1
	B	∞	∞	∞	∞	∞	∞
	C	∞	11	∞	0 (0)	∞	0 (1)
	D	∞	∞	∞	∞	∞	
	E	∞	∞	3	0 (2)	∞	2
	F	∞	1	3	0 (1)	∞	∞

Étape 2 de la résolution du problème de l'itération 3

		Ville d'arrivée					
		A	B	C	D	E	F
ville de départ	A	∞	∞	∞	∞	∞	∞
	B	∞	∞	∞	∞	∞	∞
	C	∞	11	∞	∞	∞	0
	D	∞		∞	∞	∞	∞
	E	∞	∞	∞	0	∞	2
	F	∞	1	∞	0	∞	∞

Minimum 1 0 0

Table des matières

Index thématique

problème partiel est associée au trajet $A \rightarrow C$ qui accroît de 3 le coût de transport s'il n'est pas retenu, ce qui conduit dans ce cas à un coût de $19 + 3 = 22$. Pour connaître le coût minimal de la séquence $B \rightarrow E, D \rightarrow A$ et $A \rightarrow C$, il faut utiliser la procédure d'élimination de A comme ville de départ, et de C comme ville d'arrivée. Il faut en outre interdire de pouvoir aller de C à D, puisque l'on a déjà retenu la séquence $D \rightarrow A$ et que l'adjonction de $A \rightarrow C$ conduit à la tournée partielle $D \rightarrow A \rightarrow C$, on posera donc $c_{DC} = \infty$. On aboutit alors au tableau 94 de droite qui ne correspond pas à une matrice réduite, mais cette dernière s'obtient immédiatement au prix d'un accroissement du coût minimal de 1 (d'où le tableau 95).

TABLEAU 95
Résolution du problème de la troisième itération dans l'utilisation de l'algorithme de Little et al (suite)

Étape 3 de la résolution du problème de l'itération 3

		Ville d'arrivée					
		A	B	C	D	E	F
ville de départ	A	∞	∞	∞	∞	∞	∞
	B	∞	∞	∞	∞	∞	∞
	C	∞	10	∞	∞	∞	0
	D	∞		∞	∞	∞	∞
	E	∞	∞	∞	0	∞	2
	F	∞	0	∞	0	∞	∞

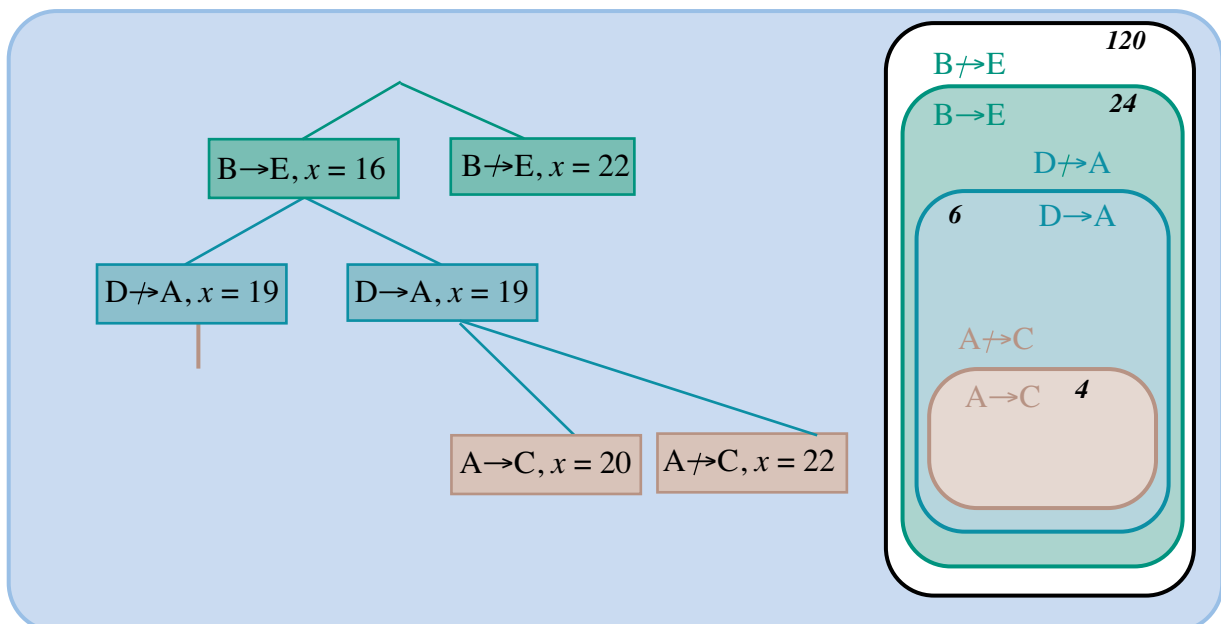
Le coût minimal de la séquence décisionnelle (B→E, D→A→C) est donc de 20. Ce coût est supérieur à celui de la séquence (B→E, D↔A qui n'est que de 19. Il faut donc poursuivre l'exploration au-delà du nœud D↔A. Remarquons que nous mettons ici en cause une décision antérieure (celle de ne pas continuer au-delà d'un nœud) parce que la borne inférieure de coût, associée à l'un des nœuds que l'on a décidé de ne pas explorer, devient plus intéressante que le coût des deux branches de la dernière alternative explorée; le terme de *bound* (= limite) de l'expression *branch and bound* désigne la plus faible des valeurs limites du critère des nœuds dont l'exploration est jugée « sans intérêt » jusqu'à preuve du contraire. On notera qu'en aval du nœud D↔A, le nombre de tournées possibles est de $24 - 6 = 18$, qu'en aval du nœud (A, C) il est de $2! = 2$ tournées et qu'en aval du nœud A↔C, il est de $3! - 2! = 6 - 2 = 4$ possibilités. À cette étape du raisonnement, l'arbre des décisions prises est celui donné à la figure 118.

Table des matières

Index thématique

FIGURE 118

Analyse des décisions prises à la troisième itération



I-2.1.4 Résolution du problème de la quatrième itération

Le quatrième problème partiel que l'on doit examiner maintenant doit partir d'une matrice de coûts tenant compte des décisions déjà prises, à savoir retenir (B, E) et ne pas retenir (D, A). Il faut donc modifier la matrice obtenue à la fin de la résolution du premier problème partiel (tableau 91 de la page 393 - étape 2) en rendant infini le coût pour se rendre de D à A. On obtient alors le tableau 96 de gauche, page 398, qui ne correspond pas à une matrice réduite. On procède donc à sa réduction¹ et on calcule les pénalités (tableau 96 de droite).

TABLEAU 96

Résolution du problème de la quatrième itération dans l'utilisation de l'algorithme de Little et al.

Création du tableau initial du problème de l'itération 4 et réduction de ce tableau

		Ville d'arrivée					
		A	B	C	D	E	F
ville de départ	A	∞	0	3	2	∞	1
	B	∞	∞	∞	∞	∞	∞
	C	3	11	∞	0	∞	0
	D	∞	1	0	∞	∞	9
	E	13	∞	6	0	∞	2
	F	16	1	6	0	∞	∞
Minimum		3	0	0	0	0	0

Étape 1 de la résolution du problème de l'itération 4

		Ville d'arrivée					
		A	B	C	D	E	F
ville de départ	A	∞	0 (2)	3	2	∞	1
	B	∞	∞	∞	∞	∞	∞
	C	0 (10)	11	∞	0 (0)	∞	0 (1)
	D	∞	1	0 (4)	∞	∞	9
	E	10	∞	6	0 (2)	∞	2
	F	13	1	6	0 (1)	∞	∞

Table des matières

La pénalité maximale est obtenue en ne retenant pas le trajet $C \rightarrow A$ ($a_{CA} = 10$), ce qui conduit à un coût minimal $x = 29$, associé aux décisions « $B \rightarrow E$, $D \not\rightarrow A$, $C \not\rightarrow A$ ». Pour calculer le coût associé à la sélection complémentaire de ce trajet, il faut «éliminer» les lignes C et A de cette dernière matrice et interdire le retour de A vers C. On obtient alors le tableau 97. En cherchant à le réduire, on voit immédiatement que le coût minimal associé à l'ensemble des solutions compatibles avec les décisions «(B, E), $D \not\rightarrow A$, (C, A)» s'élève à $x = 19 + 1 = 20$. Ce coût est identique à celui obtenu à la fin de l'itération 3. Pour déterminer sur quel sous-ensemble de solutions il convient de poursuivre, il faut calculer le nombre de trajets retenus. En poursuivant avec le sous-ensemble le plus riche en trajets, obtenu à la fin du quatrième problème, on part d'une solution partielle comportant 2 trajets «(B, E), (C, A)». En poursuivant avec le sous-ensemble le plus riche en trajets, obtenu à la fin du troisième problème, on part d'une solution partielle comportant 3 trajets (B \rightarrow E, D \rightarrow A, C \rightarrow A), ce qui milite en faveur d'une exploration du sous-ensemble de 4 solutions restant à examiner. L'arbre des décisions prises est alors celui de la figure 119.

Index thématique

1. On retrouve alors l'accroissement de coût de 3, que l'on avait associé à la décision supplémentaire ($\overline{D, A}$).

FIGURE 119

Analyse des décisions prises à la quatrième itération

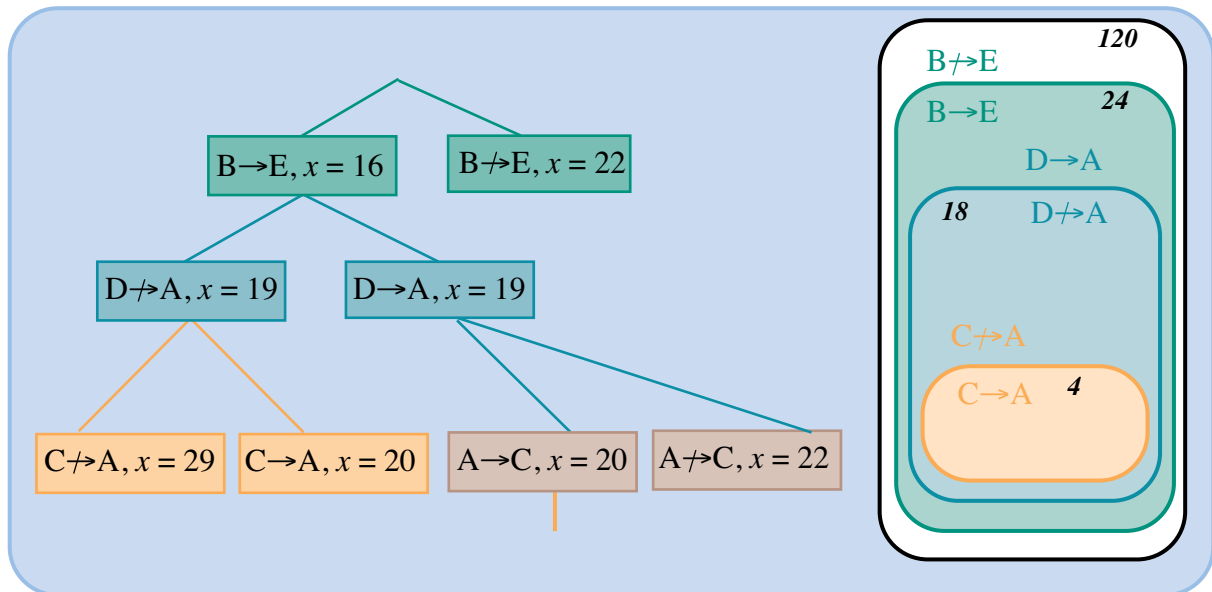


TABLEAU 97

Résolution du problème de la quatrième itération dans l'utilisation de l'algorithme de Little et al.

Étape 2 de la résolution du problème de l'itération 4

		Ville d'arrivée					
		A	B	C	D	E	F
ville de départ	A	∞	0	∞	2	∞	1
	B	∞	∞	∞	∞	∞	∞
	C	∞	∞	∞	∞	∞	∞
	D	∞	1	0	∞	∞	9
	E	∞	∞	6	0	∞	2
	F	∞	1	6	0	∞	∞
Minimum			0	0	0		1

Table des matières

Index thématique

I-2.1.5 Résolution du problème de la cinquième itération

Le cinquième problème partiel s'étudie à partir de la matrice réduite obtenue à la fin de la résolution du problème partiel de la troisième itération (tableau 95 de la page 397). Le calcul des pénalités est effectué dans le tableau 98 de la page 400 (étape 1). La pénalité la plus forte (12) est associée au trajet $C \rightarrow F$. La procédure d'élimination conduit non seulement à éliminer la ligne C et la colonne F du tableau, mais également à rendre infini le coût c_{FD} pour rendre impossible le retour de F à D (la solution retenue comportant la tournée partielle $D \rightarrow A \rightarrow C \rightarrow F$). On obtient alors la matrice réduite du tableau 98 (étape 2).

TABLEAU 98
Résolution du problème de la cinquième itération dans l'utilisation de l'algorithme de Little et al.

		Ville d'arrivée					
		A	B	C	D	E	F
ville de départ	A	∞	∞	∞	∞	∞	∞
	B	∞	∞	∞	∞	∞	∞
	C	∞	10	∞	∞	∞	0 (12)
	D	∞		∞	∞	∞	∞
	E	∞	∞	∞	0 (2)	∞	2
	F	∞	0 (10)	∞	0 (0)	∞	∞

		Ville d'arrivée					
		A	B	C	D	E	F
ville de départ	A	∞	∞	∞	∞	∞	∞
	B	∞	∞	∞	∞	∞	∞
	C	∞	∞	∞	∞	∞	∞
	D	∞		∞	∞	∞	∞
	E	∞	∞	∞	0	∞	∞
	F	∞	0	∞	0	∞	∞

Minimum 0 0

I-2.1.6 Résolution du problème de la sixième itération

La matrice de coûts étant réduite, le coût de 20 reste toujours valable et on peut alors sélectionner les deux derniers trajets possibles E→D et F→B. L'arbre des décisions prises est alors celui de la figure 120.

FIGURE 120
Analyse des décisions prises à la cinquième itération

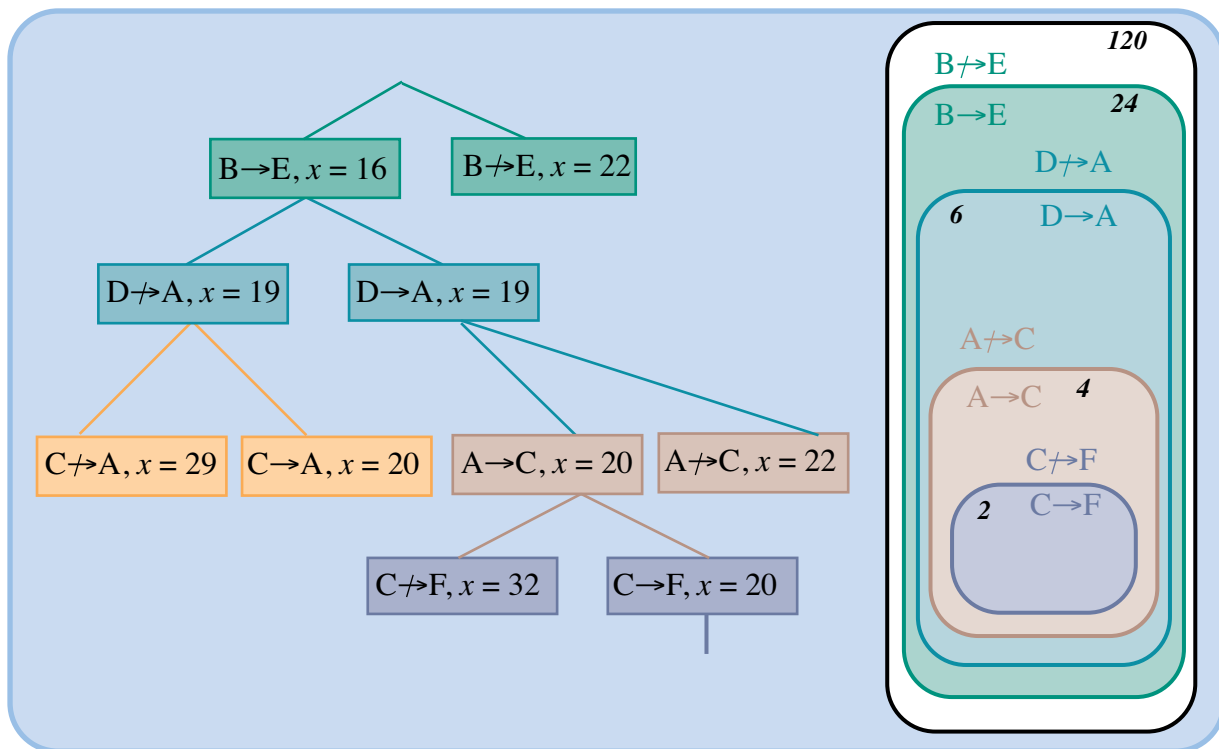


Table des matières

Index thématique

La tournée optimale pour notre voyageur de commerce est donc : F→B→E→D→A→C→F, pour un coût minimum de 20, comme on peut le vérifier

directement sur le tableau de coûts initial $5 + 1 + 2 + 2 + 7 + 3$. L'ensemble des décisions étudiées est représenté à la figure 121.

FIGURE 121

Analyse des décisions prises à la sixième itération

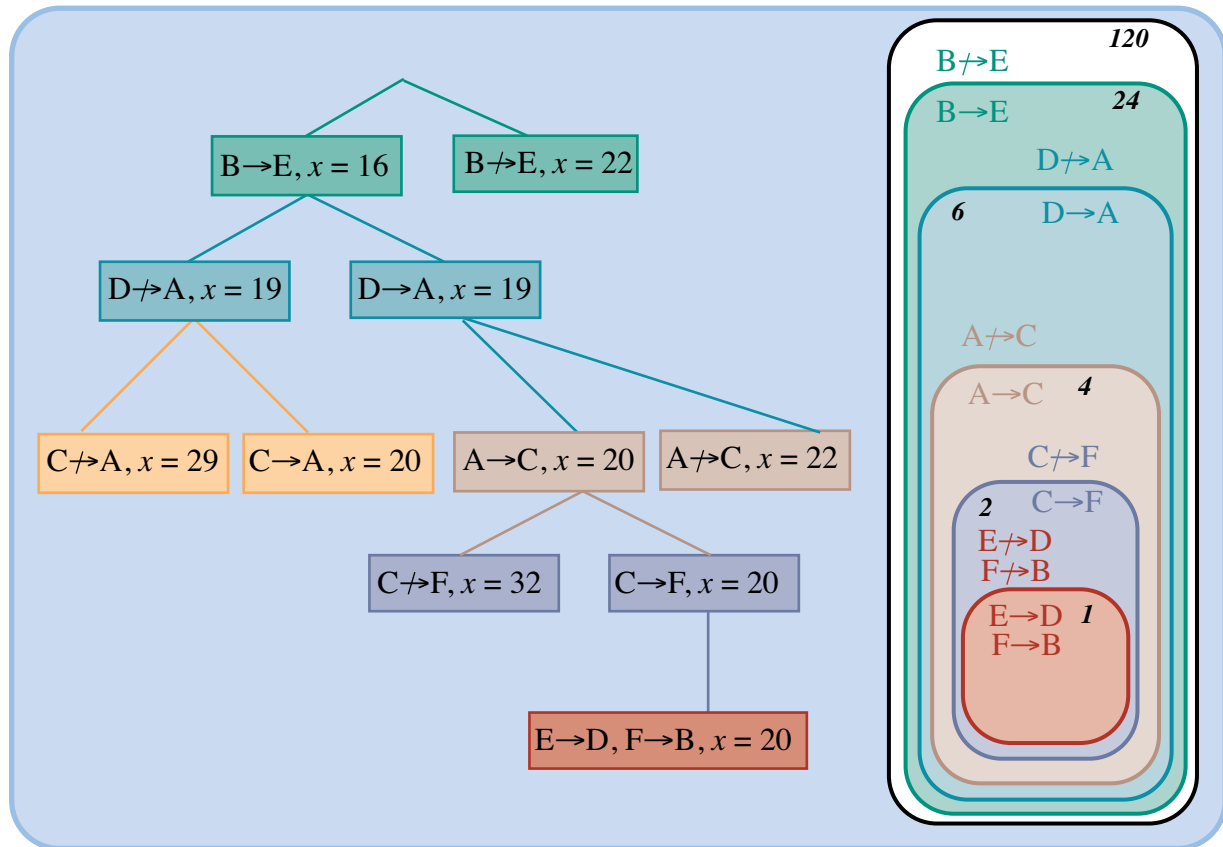


Table des matières

Index thématique

I-2.2 Remarques complémentaires

Quatre remarques complémentaires méritent d'être faites. Elles reposent toutes sur l'analyse d'un problème de tournée, mais les trois premières restent valables pour le problème d'ordonnement de tâches avec prise en compte du temps de lancement dépendant de l'ordre de passage des tâches.

I-2.2.1 Détermination empirique de la tournée

On a testé¹ la performance du comportement empirique observé chez le voyageur de commerce et qui consiste à choisir comme prochaine étape la ville la plus proche. On obtient alors des solutions souvent acceptables, c'est-à-dire suffisamment voisines de la solution optimale, à condition de systématiser le raisonnement, c'est-à-dire en essayant comme ville de départ toutes les villes de la tournée et en retenant la tournée ayant le coût le plus faible. L'application de ce principe donne ici une solution de 10% plus coûteuse que la solution optimale. Cette procédure donne de meilleurs résultats (25% de plus en moyenne, par rapport au coût minimum) si la distribution des coûts de transport est suffisamment voisine d'une

1. Travaux de Gavett, cités par Conway, Maxwell & Miller (1967, [104], p. 66-68). Cet algorithme est connu sous le nom de *Closest Unvisited-city Algorithm*.

distribution normale, que dans le cas d'une distribution proche d'une distribution uniforme (40 % de plus en moyenne).

I-2.2.2 Détermination optimale de tournées multiples

On peut également traiter à l'aide de l'algorithme de Little le problème de la détermination des tournées optimales de m voyageurs de commerce partant tous de la même ville de départ, chaque ville n'étant visitée que par un seul voyageur de commerce et toutes les villes étant visitées. Il suffit¹ de créer $m - 1$ villes supplémentaires, toutes représentatives de la ville de départ et de dupliquer $m - 1$ fois la ligne et la colonne associée à la ville de départ; les distances entre les m villes représentatives de la ville de départ sont considérées comme infinies pour empêcher de «passer d'une tournée à l'autre». On verra au § II-1.2, page 911, du chapitre XIII, une formulation plus générale par la programmation mathématique qui présente un avantage sur la solution proposée ici si l'on souhaite tenir compte de contraintes (capacité, fenêtre de temps) dans l'organisation de ces tournées.

I-2.2.3 Problème stochastique du voyageur de commerce

Dans la réalité, le problème du voyageur de commerce se pose souvent plus en termes de temps que de coûts. La formulation retenue ici repose sur des valeurs moyennes pour pouvoir traiter ce problème en univers certain; or il est évident que le temps de transport est aléatoire. On examinera succinctement ce problème maintenant bien que ce développement se situe dans une section consacrée à l'analyse de problèmes de type «statique-certain».

Si l'on peut définir les distributions de probabilité de ces temps de transport, il est possible de résoudre le problème stochastique du voyageur de commerce en s'appuyant sur l'utilisation conjointe de la méthode de Monte-Carlo et des algorithmes génétiques, selon la démarche décrite en détail au § II-3.4, page 196, du chapitre III. De surcroît:

- la fonction de coût à optimiser peut être plus complexe qu'une simple fonction linéaire du temps mais on peut aussi rester sur un critère de minimisation de l'espérance mathématique de la tournée ou sur un critère de minimisation de la probabilité qu'une tournée s'effectue en plus de x heures ou...
- on peut imposer des contraintes supplémentaires du type «le temps de transport de la tournée ne doit pas dépasser x heures» ou «l'écart-type du temps de transport de la tournée ne doit pas dépasser 30 minutes» ou...

Illustrons cette approche², à partir des données du tableau 99 qui reprennent le mode de celles du tableau 89 de la page 391 pour faciliter la comparaison des résultats. La distribution triangulaire a été retenue.

La tournée optimale trouvée est: $F \rightarrow C \rightarrow A \rightarrow D \rightarrow E \rightarrow B \rightarrow F$, pour un coût minimum de 21,43³ (espérance mathématique⁴, écart-type du coût = 1,28); la

1. Voir Christofides (1976, [94]) et Watson et Foulds (1981, [437]).

2. L'exemple proposé ici s'appuie sur l'add-in *Risk Optimizer*[®] de Palisade, utilisable sous Excel[®], en complément de @Risk (autre add-in de Palisade); plusieurs algorithmes génétiques sont disponibles, dont un spécialisé dans les problèmes de séquençement.

3. Cette espérance mathématique est supérieure à la valeur obtenue en univers certain sur la base des modes (qui, d'une manière générale, dans le jeu de données utilisées, sont inférieures aux espérances mathématiques des coûts de transports).

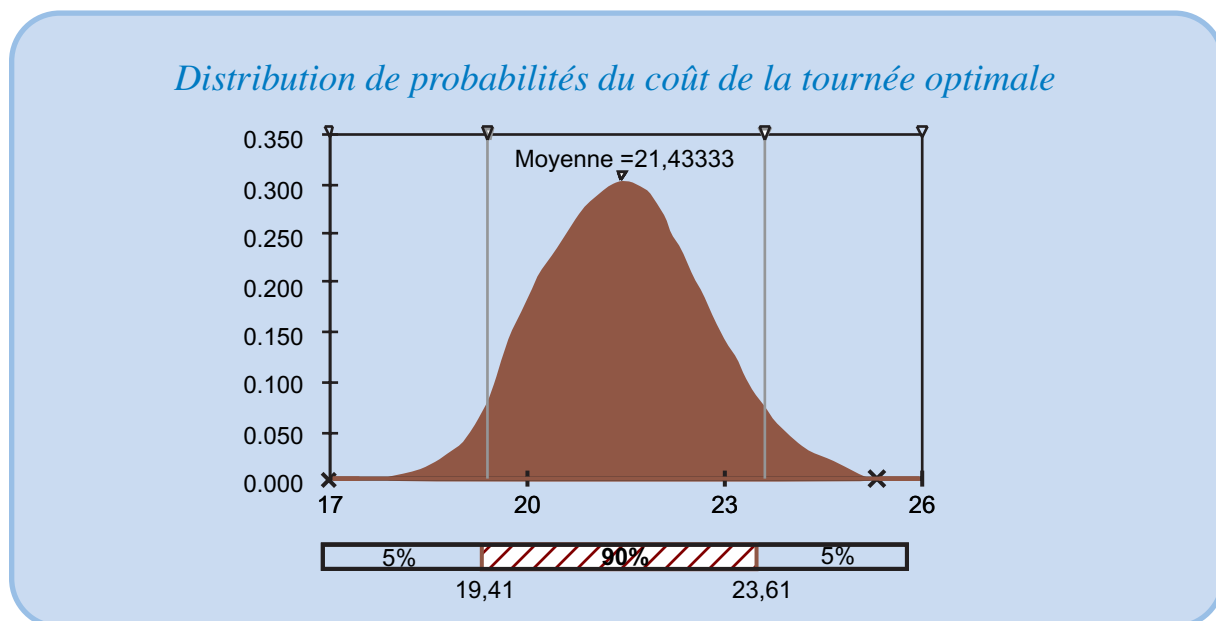
TABLEAU 99
Paramètres (Minimum – Mode – Maximum) des distributions de probabilités triangulaires des coûts de la tournée du voyageur de commerce

		Ville d'arrivée					
		A	B	C	D	E	F
ville de départ	A	∞	0,9 – 1 – 1,5	6 – 7 – 9	2,5 – 3 – 4,4	12 – 14 – 18	1,3 – 2 – 4
	B	1 – 3 – 4,5	∞	5 – 6 – 8	5 – 9 – 20	0,6 – 1 – 1,5	20 – 24 – 30
	C	5,5 – 6 – 8	12 – 14 – 19	∞	2,2 – 3 – 3,9	5,5 – 7 – 10,6	2 – 3 – 5
	D	1,5 – 2 – 3	2 – 3 – 4,7	3,5 – 5 – 7,4	∞	7 – 9 – 12	10 – 11 – 15
	E	12 – 15 – 20	5 – 7 – 10	10 – 11 – 15	1 – 2 – 4	∞	3 – 4 – 6
	F	13 – 20 – 30	4 – 5 – 6,7	9 – 13 – 18	2,8 – 4 – 5,3	12 – 18 – 20	∞

distribution de probabilité de cette tournée est donnée à la figure 122, avec les éléments d'analyse de sensibilité (voir les explications sur la méthodologie utilisée, au chapitre III, page 193). Pour illustrer la puissance de cette approche,

FIGURE 122

Distribution de probabilités du coût de la tournée optimale et analyse de sensibilité



on peut ajouter que :

- la tournée qui minimise l'écart-type du coût de la tournée est toujours F→C→A→D→E→B→F; c'est aussi celle qui minimise le coût qui n'a que 5% de chances d'être dépassé;
- si la solution trouvée n'avait pas été dominante sur les différents critères d'optimisation utilisés, on aurait pu chercher à résoudre un problème du type «trouver la tournée qui minimise le coût et possède un fractile à 95% inférieur à x».

4. Note de la page précédente. Estimation faite sur la base de 1000 itérations par simulation d'une tournée.

I-2.2.4 Complexité des problèmes concrets

La *complexité des problèmes concrets de transport* est habituellement plus grande que ne le laisse supposer cet exemple. Dans la pratique on dispose d'une flotte hétérogène de camions ment, le problème est alors non seulement celui de tournées optimales mais également celui (non indépendant du précédent) d'une affectation optimale de camions aux ponts de desserte, avec prise en compte du passage chez des clients sur des fenêtres de temps précises et, dans le cas de tournées multiples s'accompagnant de livraison, avec prise en compte de contraintes de capacité de transport. La complexité du problème est telle qu'il est souvent préférable d'utiliser, en conversationnel, des systèmes d'aide à la décision s'appuyant sur des algorithmes optimaux pour résoudre des problèmes simplifiés, ce que l'on verra à la [section II, page 904](#), du [chapitre XIII](#).

I-3 Tentative de caractérisation de l'approche statique

Plusieurs milliers d'articles ont été écrits depuis cinquante ans dans ce domaine, ce qui est sans doute beaucoup par rapport aux retombées opérationnelles qu'ils ont suscitées. Pour comprendre pourquoi il en est ainsi et être en mesure d'extraire de cette masse de travaux les éléments susceptibles d'aider à la résolution de problèmes concrets, il est nécessaire de présenter une grille d'analyse de cette approche statique¹. Celle-ci se fonde sur l'utilisation de modèles d'optimisation plus ou moins représentatifs de tout ou partie de situations concrètes. Cette simplification de la réalité s'impose dans le cadre d'une démarche déductive susceptible de résoudre des problèmes d'une complexité croissante. Une typologie de cette classe de travaux peut être faite sur la triple base du critère d'optimisation (§ I-3.1), de la liste des hypothèses du modèle (§ I-3.2, [page 405](#)) et de la méthode de résolution (§ I-3.3, [page 406](#)).

I-3.1 Critère d'optimisation

Celui-ci est presque toujours de nature organisationnelle, c'est-à-dire que la performance de l'ordonnancement n'est pas jugée sur la base de ses conséquences économiques (et peut du reste difficilement l'être si l'on s'attache au très court terme), mais sur celle d'un indicateur physique. Son unité est habituellement le temps (date moyenne d'achèvement des tâches, retard moyen, retard maximum...) ou la tâche (nombre de tâches terminées en retard...) et il est censé être en relation avec la performance économique de l'ordonnancement dans la mesure où il varie dans le même sens (ou en sens inverse, selon l'indicateur retenu) que l'un des coûts partiels du système productif, qu'il soit lié à la saturation du potentiel productif ou à l'insatisfaction de la demande.

Le choix de critère organisationnel se justifie par le fait que l'utilisation d'indicateurs économiques dans le cadre d'un ordonnancement sur une période unique ne pose pas de problèmes de formulation mathématique, mais des problèmes de définition de coefficients de valorisation, nécessairement arbitraire sur un tel horizon. Cela étant, l'utilisation de critère organisationnel connaît d'autres

1. Voir l'analyse faite par Riou-Long (1986, [364]). Une typologie généralement utilisée est celle proposée par Rinnooy Kan (1976, [361]) qui caractérise les problèmes d'ordonnancement par quatre critères: le nombre de tâches, le nombre de centres de production, le critère d'évaluation de l'ordonnancement et une liste d'hypothèses caractérisant le problème posé.

limites, car il est évident que ces coûts partiels auxquels ils sont liés peuvent varier en sens inverse et qu'en conséquence, les conclusions auxquelles on parvient doivent être évaluées avec prudence.

I-3.2 Liste des hypothèses décrivant le système productif

Ces hypothèses, souvent implicites dans la présentation d'un modèle statique, décrivent le système productif et les tâches à exécuter.

Le système productif se caractérise par un certain nombre de centres de production.

- Chaque centre de production est composé d'un ou plusieurs postes de travail. Dans ce dernier cas, ces postes sont identiques ou non identiques (en particulier au niveau de la rapidité d'exécution d'une opération).
- L'exécution d'une opération sur un poste de travail peut nécessiter des réglages préalables de la machine et, dans ce cas, le temps de réglage peut ou non dépendre du réglage antérieur.
- L'opération (ou une séquence d'opérations) peut ou non être exécutée sur des centres de production de nature différente (centre d'usinage contre séquences de machines classiques spécialisées), ce qui revient à prendre en compte des gammes alternatives.
- Un poste de travail peut exécuter une seule opération à la fois, mais dans certains cas, une certaine simultanéité peut être autorisée (par exemple, traitement thermique ou chimique), pour des opérations débutant en même temps ou non.
- Les temps de transport d'un centre de production à un autre centre de production sont considérés comme nuls, ou sont inclus dans le temps de lancement, ou sont isolés (en particulier si le modèle tient compte de l'existence d'un centre de production «manutention»).
- Il est possible ou non (contrainte de stockage ou contrainte technique) d'avoir des tâches en attente devant un poste de travail occupé.
- Un ouvrier (ou un groupe d'ouvriers) n'est affecté ou non qu'à un seul centre de production. Dans ce dernier cas l'ordonnancement est nettement plus complexe parce qu'il porte à la fois sur des machines et sur des hommes (lesquels constituent souvent la ressource rare en matière d'ordonnancement).

En ce qui concerne les tâches :

- Les tâches à exécuter peuvent être ou non simultanément disponibles en début de période.
- Une tâche peut correspondre à la fabrication d'un article unique ou à celle d'un lot d'articles identiques.
- Les temps opératoires sont certains.
- L'ordre d'exécution des opérations d'une tâche est intangible et une opération ne peut débuter avant le début des opérations précédentes (ce qui exclut le cas de gammes arborescentes), sauf spécification contraire¹.
- Une opération peut ou non débuter avant la fin de l'opération précédente (recouvrement portant sur les temps de réglage et rendu possible du fait d'une libération antérieure de la machine à régler et/ou recouvrement lié au

fractionnement de lots définissant une tâche). On retrouve là des implications de la mise en œuvre de démarche SMED¹.

- Des dates-limites d'achèvement des tâches peuvent ou non être introduites.
- Les tâches sont indépendantes (et donc exécutables dans un ordre quelconque) ou non.
- L'exécution d'une opération peut ou non être suspendue sur un poste de travail au profit d'une opération d'une autre tâche (préemption).

Il faut souligner qu'en règle générale les modèles retenus habituellement se définissent par une combinaison des hypothèses les plus restrictives, quelques-unes d'entre elles seulement étant levées. Rappelons enfin que l'on raisonne sur une période unique et donc en supposant implicitement que la mise en œuvre de la solution trouvée reste possible (possibilité d'interrompre en fin de journée une opération en cours et de la reprendre le lendemain au même point).

I-3.3 Méthodes de résolution

Tout d'abord, pour quelques problèmes simples (cheminement unique et deux centres de production, par exemple) et certains critères (minimisation de la date d'achèvement de toutes les tâches, par exemple), il est possible de démontrer analytiquement qu'un ordonnancement suivant la valeur croissante d'un indicateur, ce qui a été abondamment illustré dans les pages qui précèdent.

Pour le problème général, même s'il est restreint au cas du cheminement unique, on n'a pas trouvé de règles simples permettant d'obtenir un ordonnancement optimal. On peut cependant réduire la dimension combinatoire du problème posé et démontrer que si le critère que l'on cherche à minimiser est un **critère régulier**, c'est-à-dire si sa valeur n'augmente que si la date d'achèvement de l'une des tâches s'accroît, l'optimum ne peut se trouver que dans un sous-ensemble de l'ensemble des ordonnancements possibles *a priori*². Cette limitation de l'énumération peut être utilisée pour résoudre le problème par une technique de type *branch and bound*³, présentée au § I-2.1, page 390, mais pour des structures simplifiées du problème et certains critères, on peut encore réduire le champ des possibles en mettant en évidence que le respect de certaines propriétés est une condition nécessaire à l'obtention d'un optimum, ce qui accroît encore l'efficacité potentielle de l'approche de type *branch and bound*.

Néanmoins, le plus souvent, le problème combinatoire posé reste redoutable, même dans le cas simplifié de flux unidirectionnels. C'est pourquoi, dans le cadre de problèmes simplifiés (et plus particulièrement dans le cas du cheminement unique⁴) des heuristiques ont été proposées et testées : elles permettent une

1. Note de la page précédente. On parle dans ce cas de stocks multi-échelons ou encore de stock à étages, mais les travaux de recherche s'intéressant à ce cas de figure sont largement déconnectés de ceux ayant trait à l'ordonnancement en ateliers spécialisés (en particulier au niveau des critères). Voir Williams (1981, [443]).

1. Voir le chapitre VII, page 511.

2. Voir Baker (1974, [30], p. 13 et p. 181) et Esquirol et Lopez (1999, [140], chapitre II) sur la typologie des objectifs et critères d'évaluation. Voir également Lopez et Roubellat (2001, [286], chapitre V) pour une présentation complète sur les problèmes de satisfaction de contraintes et de propagation de contraintes.

3. Voir Baker (1974, [30], p. 55-65, p. 148-156).

4. Voir les synthèses de Gupta (1979, [211]), Dannenbring (1977, [118]) et celle de King et Spachis (1980; [265]).

économie considérable de calculs et ne garantissent pas l'obtention d'une solution optimale mais d'une solution dont les performances sont bonnes en général.

Nous avons indiqué au § I-1.4.2, page 378, que le problème général a été formalisé en termes de programmation dynamique et en termes de programme linéaire en nombres entiers et que s'il est montré que cette dernière approche est la plus performante, il n'en reste pas moins qu'aujourd'hui, elle reste difficilement exploitable au-delà de quelques dizaines de tâches ou de postes de travail par des méthodes exactes (comme celle du *branch and bound*). Pour trouver des solutions satisfaisantes à des problèmes combinatoires d'une certaine dimension, on utilise de nos jours des **méta-heuristiques**¹ qui sont des démarches générales de résolution de ces classes de problèmes permettant d'obtenir assez rapidement des solutions sans pouvoir toutefois en garantir l'optimalité. On présentera les trois principales d'entre elles: la méthode Tabou, le recuit simulé et les algorithmes génétiques (§ I-3.3.2), cette dernière approche étant introduite de manière plus complète (§ I-3.3.2, page 408). Ces approches sont assez performantes pour la résolution de problèmes d'ordonnement mais elles nécessitent encore une expertise faiblement répandue.

I-3.3.1 La méthode Tabou et le Recuit Simulé

Ces deux méthodes s'appuient sur des algorithmes itératifs qui explorent l'espace des solutions en se déplaçant pas à pas d'une solution à une autre. Le risque que l'on court en explorant les solutions proches est celui de se trouver au voisinage d'un optimum local. Pour contrer ce risque, on a donc développé en particulier deux méthodes efficaces qui acceptent des solutions voisines moins bonnes.

- La **méthode du Recuit Simulé** s'appuie sur des travaux amorcés dans les années cinquante pour simuler l'évolution d'un système physique instable vers un état d'équilibre thermique à une température θ fixée. Au cours d'une itération donnée, on passe à l'une des solutions admissibles voisines de la solution courante, qui est acceptée si elle est meilleure et, dans le cas contraire, avec une certaine probabilité qui est fonction de l'importance de la détérioration constatée dans le critère à optimiser et d'un paramètre θ . Le changement de ce paramètre (analogie avec la température) s'effectue en général chaque fois qu'un nombre donné d'itérations a été effectué et l'algorithme s'arrête lorsqu'aucune solution meilleure n'a été trouvée au cours d'un cycle d'itération. La performance de cet algorithme est étroitement liée au schéma de refroidissement retenu (mécanisme de changement de θ). Un exemple d'utilisation très performante de cette approche pour résoudre le problème de l'ordonnement d'un projet sous contrainte de ressources non stockables et existence de gammes alternatives d'exécution d'une tâche peut être trouvé dans Boctor (1996, [57]).
- La **méthode Tabou** remonte aux années quatre-vingt. Pour éviter de risquer de s'enfermer dans un minimum local, lorsque celui-ci est atteint (pas de solution admissible voisine meilleure), cette méthode garde en mémoire les dernières solutions visitées et interdit le retour arrière vers celles-ci avant un

1. Pour en savoir plus, le lecteur est invité à lire le texte écrit par Widmer, Hertz et Costa dans l'ouvrage coordonné par Lopez et Roubellat (2001, [286], chap. III).

nombre fixé d'itérations, ce qui permet alors de repartir en arrière pour explorer une solution moins bonne mais permettant peut-être de s'acheminer vers l'optimum. Dans la mesure où le passage de la solution courante à la solution nouvelle peut être entaché d'arbitraire, plusieurs candidats ayant la même performance, l'interdit de retour arrière peut être levé plus tôt sous certaines conditions (définies par une « fonction d'aspiration »).

I-3.3.2 Les algorithmes génétiques

Les **algorithmes génétiques**¹, imaginés par des biologistes dans les années cinquante pour simuler l'évolution des espèces, cherchent une solution optimale en simulant l'évolution naturelle d'une population d'individus, génération après génération, en reproduisant des mécanismes d'hérédité et de sélection, en partant du principe que ce sont les individus les plus forts qui tendent à survivre et à donner une descendance, les enfants héritant stochastiquement des caractéristiques génétiques (bonnes ou mauvaises) de leurs parents.

Dans cette approche, le génome d'un individu correspond à une solution du problème d'optimisation posé² et la **force** (*fitness*) de cet individu est mesurée par la valeur du critère à optimiser prise par cette solution (ou une valeur dérivée). L'algorithme génétique deux mécanismes de base :

- Le **mécanisme de croisement** (*cross-over*) apparie deux individus de la population choisis aléatoirement avec une probabilité proportionnelle à leurs forces respectives (ce qui laisse à aux individus faibles des chances d'être choisis), pour donner naissance à un nouvel individu dont le génome est constitué à partir du génome de chaque parent. Ce mécanisme de croisement est conçu de telle sorte qu'il ait des chances d'augmenter la force de l'enfant³, sachant qu'en régime de croisière, on remplace un couple de parents par couple d'enfants de caractéristiques nouvelles (ou, avec une probabilité fixée, par un couple d'enfants identiques aux parents). Ce mécanisme de croisement est généralement mis en œuvre sur la moitié de la population (tirage aléatoire sans remise) avant de passer au mécanisme suivant.
- Le **mécanisme de mutation** est destiné à éviter le risque de dégénérescence, en introduisant de la variété. Chaque individu est passé en revue et subit ou non avec une probabilité fixée à l'avance, une mutation altérant son génome⁴.

1. Pour en savoir plus, le lecteur est invité à lire le texte écrit par Portmann et Vignier dans l'ouvrage coordonné par Lopez et Roubellat (2001, [286], chap. IV), qui illustre la démarche sur un exemple détaillé d'ordonnancement.

2. Par exemple, le séquençement, pour un problème de voyageur de commerce devant explorer un ensemble de n villes, sans revenir à la ville de départ, pour reprendre une adaptation d'un problème déjà traité (avec l'algorithme de Little) et qui sera étudié plus en détail au [chapitre XIII](#), § II-1.3, page 918.

3. Dans l'exemple retenu, on peut imaginer de retenir les k premières villes du séquençement (génome) du père et les $n - k$ dernières villes du séquençement (génome) de la mère, le nombre k étant choisi aléatoirement entre 2 et $n - 2$. Ce mécanisme de création d'une nouvelle solution est connu sous le nom d'opérateur à un point mais d'autres mécanismes existent (le choix du mécanisme étant un point central de la démarche puisqu'il conditionne la possibilité d'amélioration de la solution). La concaténation de ces parties de séquençements a de fortes chances de ne pas comporter toutes les villes et donc d'inclure des doublons (autant que de villes manquantes); on élimine alors une ville de chacun des doublons et on complète la séquence avec les villes manquantes à la césure ou en fin de chaîne. Comme ce mécanisme peut donner naissance à plusieurs enfants différents (en raison de la substitution possible du rôle du père et de la mère mais aussi des mécanismes de recombinaison de la séquence en cas de doublon), on peut choisir de ne garder que les deux enfants ayant les deux meilleurs génomes.

Ces deux mécanismes sont utilisés successivement sur un certain nombre d'itérations fixé à l'avance ou par un test d'arrêt (temps de calcul, stabilité de la meilleure force trouvée depuis un nombre prédéterminé d'opération...). L'un des problèmes à résoudre initialement est celui de la constitution d'une population initiale et donc celui de la recherche de solutions possibles.

Cette approche qui est utilisée depuis plusieurs années avec succès repose sur la pertinence des opérateurs de croisement et de mutation utilisés. Les logiciels commerciaux disponibles (comme celui utilisé dans ce chapitre et le [chapitre III](#)) proposent normalement de rattacher le problème à traiter à une classe de problèmes pour lesquels des opérateurs s'avèrent habituellement efficaces. Il n'en reste pas moins que cette efficacité peut être assez limitée si le problème posé s'éloigne des problèmes type de la classe de problèmes auxquels il est rattaché.

SECTION II L'APPROCHE ALÉATOIRE DYNAMIQUE

Cette approche se caractérise par le double refus de se placer dans un cadre déterministe et de travailler sur un ensemble fini de tâches à exécuter au cours d'une période déterminée. Si le problème posé est décrit par un ensemble de variables aléatoires de caractéristiques stables, le comportement du système étudié est induit par un ensemble de règles de décisions définissant une politique d'ordonnement administrée systématiquement. Son évaluation repose sur une (ou plusieurs) variable(s) d'état caractérisant le « régime de croisière », ayant le statut d'une espérance mathématique. Deux démarches de résolution de ces problèmes sont alors envisageables : l'utilisation de la théorie des files d'attente (§ II-1) et la simulation (§ II-2, page 410).

Table des
matières

II-1 L'approche par la théorie des files d'attente

Index
thématique

D'une manière générale, dans cette approche, les arrivées des tâches dans le système productif ne sont pas simultanées, mais espacées dans le temps. On définit une distribution de probabilités de l'intervalle de temps séparant deux arrivées successives, cette distribution étant immuable au cours du temps. Le système productif est généralement décrit par un ou plusieurs postes de travail, fonctionnant en parallèle ou en série; les durées d'exécution d'une opération sont spécifiées de façon certaine ou en probabilité (on parle de **loi de service**) et ce pour chaque poste de travail. Le bon fonctionnement du système est jugé à travers un ou plusieurs critères, comme dans le cas statique. Plusieurs règles d'ordonnement (dans ce type de « littérature » on parle plutôt de **discipline de file d'attente**) sont possibles. L'objet de cette approche est de fournir des résultats analytiques des valeurs prises par les variables d'état choisies pour évaluer le fonctionnement d'un système géré par une certaine discipline de file d'attente. Ces résultats analytiques sont des espérances mathématiques calculées sur une durée de fonctionnement infinie; ils caractérisent ce que l'on appelle le **régime stationnaire**.

Cette approche nécessiterait de larges développements pour être abordée correctement¹, ce qui mènerait nettement au-delà de l'objectif de sensibilisation à

4. Dans notre exemple, un opérateur de mutation possible consiste à choisir aléatoirement deux villes consécutives du séquençement associé au génome et à les permuter.

cette problématique poursuivi ici. Une seconde raison, plus péremptoire, conforte ce choix : les résultats obtenus dans cette approche ne sont pas d'une portée très générale. En effet, si l'analyse est «relativement» facile dans le cas d'un seul centre de production, ou de plusieurs centres de production mis en parallèle et fournissant la même prestation (caisses d'un supermarché par exemple), il n'en est plus de même lorsque les centres de production sont en série, et à plus forte raison lorsqu'ils forment un réseau quelconque et que des limitations sont introduites dans la longueur des files d'attente ou les durées maximales d'attente admissibles. Dans ces conditions un problème classique de centres de production spécialisés, se caractérisant par des cheminements entre centres de production, variables selon les produits à fabriquer, n'a aucune chance de trouver de solution analytique, du moins dans l'état actuel des connaissances.

II-2 L'approche simulatoire

Lorsqu'il est difficile de trouver la solution analytique d'un problème probabiliste, bien défini sur le plan formel, l'utilisation des méthodes de Monte-Carlo rend les mêmes services que cette solution analytique, c'est-à-dire permet d'évaluer les conséquences des règles de fonctionnement du système étudié. Cette approche a déjà été décrite en détail au [chapitre III, § I-2, page 147](#), et utilisée pour simuler le fonctionnement de systèmes réels. Ici, les distributions de probabilités des différentes variables d'état, retenues pour caractériser la qualité de fonctionnement du système, sont empiriquement obtenues après de nombreuses simulations au lieu d'être calculées analytiquement. En outre, les paramètres de tendance centrale et de dispersion sont calculés numériquement à partir des données de la simulation au lieu de résulter d'un calcul en application d'une formule analytique. Il ne faut donc pas s'étonner que l'extension des facilités informatiques ait entraîné depuis les années soixante, des utilisations croissantes de ce type d'approche. Les travaux se sont orientés dans deux directions : la simulation de systèmes réels (§ II-2.1) et celle de systèmes fictifs (§ II-2.2, page 411).

II-2.1 La simulation de systèmes réels

La première approche vise à trouver la solution d'un problème complexe réel, c'est-à-dire existant physiquement. La recherche de règles de décision s'effectue, après modélisation du système réel :

- soit une fois pour toutes, pour définir des tables de décisions dont la pertinence sera remise en cause lorsque les données structurelles du problème (caractéristiques des flux et/ou des ressources) auront significativement changé ; ces tables de décisions peuvent, le cas échéant, se ramener à une règle simple, comme une formule de calcul de la priorité d'une tâche arrivant dans le système, compte tenu de l'état du système à cet instant (état caractérisé par différents paramètres) ;
- soit périodiquement pour proposer un ordonnancement destiné à résoudre un problème réel, la simulation étant reprise à chaque modification jugée significative du problème (arrivée de nouvelles commandes, modification de la

1. Voir Conway, Maxwell & Miller (1967, [104]), p. 141 à 218, pour un exposé des principaux résultats connus ; voir également l'exposé très didactique de cette problématique des files d'attente dans Wagner (1975, [435]), p. 851 à 901 et 977 à 994. Une présentation des résultats récents peut être trouvée dans Kelly, [259].

disponibilité de certaines ressources, problème d'approvisionnement, déviation significative des réalisations par rapport aux prévisions).

La simulation des systèmes réels a longtemps été d'un coût prohibitif (dû à la puissance de calcul et au volume de données important à manipuler). L'évolution informatique permet maintenant une généralisation de ce type d'approche, à des coûts acceptables¹, pour une mise en œuvre aisée aboutissant à des résultats facilement exploitables. La simulation, se substituant à l'approche de type «essai – erreur», permet d'anticiper des problèmes au lieu de les subir. D'un point de vue opérationnel, l'amélioration des procédures permet une meilleure utilisation du système productif qui diminue les coûts et recule les limites de capacité productive. D'un point de vue stratégique, l'usage de simulations met en évidence l'existence de «goulots d'étranglement» et facilite l'étude de l'amélioration du système productif par adjonctions ou transformations de ressources productives mais aussi par modification des procédures. Cela étant, les conclusions que l'on peut tirer de ce type d'expérimentation n'ont pas forcément de portée générale, la prédominance de certaines règles pouvant être liée aux caractéristiques particulières du système productif étudié. Tel n'est pas le cas de la seconde utilisation de la simulation que nous allons examiner (§ III-2.2), parce qu'elle fournit des enseignements utiles pour aborder la simulation de systèmes réels, sur laquelle, nous reviendrons au § III, page 416.

II-2.2 La simulation de systèmes fictifs

Table des matières

Index thématique

Cette approche poursuit d'une certaine façon la démarche utilisée dans les modèles statiques étudiés au début de ce chapitre, à ceci près que la résolution numérique (par des méthodes simulateurs) se substitue à la résolution analytique. Les conditions de fonctionnement du système sont strictement définies: nombre de centres de production utilisés par une tâche, contraintes techniques de passage entre ces centres (ordre de passage pouvant être généré aléatoirement), lois des arrivées des tâches (loi de Poisson le plus souvent), lois des durées d'exécution d'opérations dans un centre de production (durée constante ou loi exponentielle négative, par exemple), temps de transferts entre centres de production (souvent considérés comme nuls), spécifications techniques ayant une incidence sur l'ordonnancement (par exemple, absence de chevauchement entre tâches), fonctionnement perpétuel du système (pas de panne, pas de fractionnement du temps en journées...) ou autre modalité de fonctionnement, etc.

Les investigations ont été conduites dans deux directions: l'ordonnancement dans un ensemble de centres de production indépendants (§ II-2.2.1) ou non (§ II-2.2.2, page 416).

II-2.2.1 Le cas des ateliers spécialisés indépendants

Les travaux particulièrement importants de Conway, Maxwell et Miller², s'appuient sur un même jeu de 8 700 tâches devant être exécutées dans un système fictif de 9 centres de production qui a été utilisé pour tester 25 types différents de

1. On trouve plusieurs logiciels de moins de 1000 € tournant sur micro-ordinateur, dotés de descripteurs du système productifs, de gammes et de règles de fonctionnement, ainsi que de générateurs aléatoires d'arrivées dans le système, de temps opératoires et de choix de gammes. Une description sophistiquée d'un système complexe requiert des moyens plus conséquents.

règles de priorité. Dans ce jeu de données, on avait généré aléatoirement pour chacune de ces commandes, mais une fois pour toutes :

- l'ordre de passage des opérations d'une commande entre les différents centres de production,
- les dates d'arrivées des commandes dans le système (utilisation d'un processus de Poisson¹),
- la durée constante des opérations d'une commande dans les différents centres (cette durée était générée aléatoirement à partir d'une loi exponentielle négative, de moyenne égale à 1).

L'utilisation des règles de priorité testées ne reposait bien entendu que sur l'information de l'état du système au moment où une commande se présente et non sur les prévisions d'arrivées de commandes.

La définition du Temps d'Achèvement Moyen \bar{A} que nous avons présentée dans le cadre du modèle statique (§ I-1.1.1.2, page 365) doit être adaptée, puisque le calcul ne s'effectue plus sur un ensemble fini de travaux à exécuter pendant une période et tous disponibles en début de période, mais sur un échantillon aléatoire de 8700 commandes arrivant à des dates différentes dans le système. Le calcul de la moyenne des temps de séjour dans le système s'analyse comme une espérance mathématique, puisque les arrivées dans le système et les temps opératoires sont des variables aléatoires. On peut ajouter que le critère de temps de présence dans le système est conforme aux préoccupations de bon nombre de responsables se réclamant ou non de la philosophie du juste à temps (voir chapitre VII).

On évoquera ci-après les principales règles de priorité testées²:

- La règle d'ordonnancement aléatoire (**RANDOM**) consiste à choisir au hasard parmi les commandes qui sont en attente devant un centre de production. Son intérêt pratique est de permettre un étalonnage³ non ambigu dans la comparaison des performances relatives des règles de décision (éventuellement entre travaux de simulation assez différents).
- La règle du **PAPS** (pour **Premier-Arrivé, Premier-Servi** ou son équivalent anglo-saxon FCFS, pour *First Come First Served*) est un décalque du célèbre FIFO; cette règle d'ordonnancement, largement répandue en pratique, est

2. Note de la page précédente. Conway, Maxwell & Miller (1967, [104]), p. 220 à 247 et 261 à 290, ces travaux ont été conduits en partie à la Rand Corporation. On peut citer également la thèse (non publiée) de Nanot, *An Experimental Investigation and Comparative Evaluation of Priority Discipline in Job-Shop Like Quening Network*, à laquelle il est très fréquemment fait mention et qui est présentée avec un certain détail dans Buffa & Miller (1979, [74]), p. 494 à 499.

1. Ce processus implique que le processus d'arrivée est sans mémoire et que la probabilité d'arrivée d'une nouvelle commande au cours d'un bref intervalle de temps est totalement indépendante du nombre de commandes déjà présentes dans le système.

2. Les sigles anglo-saxons retenus sont ceux donnés dans le compte rendu des travaux de Conway, Maxwell et Miller.

3. Lorsque l'on est en univers certain, la référence utilisée pour juger la performance d'heuristiques (c'est-à-dire de règles de résolution numérique permettant d'obtenir rapidement une solution dont on ne peut garantir le caractère optimal) est, chaque fois que cela est possible, la solution optimale du problème posé. En univers aléatoire, la résolution d'un problème dynamique s'effectue progressivement sur la base d'un problème nécessairement incomplet (dans notre exemple, on n'attend pas d'avoir les 8700 commandes avant de commencer à les exécuter), sauf à postuler une inacceptable connaissance de l'avenir. Il s'ensuit que la solution de référence ne peut être la solution optimale.

indépendante du temps d'exécution, il ne faut pas s'étonner qu'elle ait des performances moyennes voisines de celles obtenues par la règle aléatoire.

- La règle d'ordonnancement **Temps Opérateur Minimum** (connue aussi sous son sigle **TOM** ou son équivalent anglo-saxon SPT, pour *Shortest Processing Time*) sélectionne celle des commandes en attente d'exécution devant un centre de production qui a le plus faible temps opératoire pour l'opération qui doit être exécutée dans ce centre de production.
- La règle d'ordonnancement de la plus faible durée de travail restant à accomplir dans l'ensemble des centres de production (règle **LWKR**, pour *Least Work Remaining*) est une variante de la règle précédente; elle prend en compte, pour chaque commande en compétition, le cumul des temps opératoires restant à exécuter sur le centre de production étudié et sur les centres suivants.
- La règle d'ordonnancement du quotient de la **marge** (= temps restant avant la livraison, diminué du cumul des temps opératoires restant à réaliser) par le nombre d'opérations restant à exécuter, est plus connue sous son sigle anglo-saxon **S/OPN** (pour *Slack/Operation*); elle préconise de sélectionner la commande ayant la valeur la plus faible de ce ratio.
- La règle **WINQ** (pour *Work in Next Queue*) se fonde sur la remarque qu'il n'est peut-être pas astucieux de privilégier une tâche dans un centre de production si, une fois terminée l'opération de cette tâche dans ce centre, la tâche part dans le centre de production où son opération suivante doit être exécutée, sachant que cette décision a pour conséquence d'allonger une file d'attente déjà importante. Cette règle calcule la priorité d'une tâche comme la somme des durées des opérations des tâches déjà en attente¹ au moment de la prise de décision, dans le centre de production dans lequel l'opération *suivante* de la tâche considérée sera exécutée; ce cumul est conventionnellement nul si cette opération est la dernière de la tâche. Pour cette règle, comme pour les précédentes (à l'exception des deux premières), la priorité la plus forte est donnée à la tâche qui a la valeur la plus faible de l'indicateur défini.

Table des matières

Index thématique

L'usage de ces différentes règles définit dynamiquement les priorités qui sont réévaluées à chaque décision de chargement de machine et non sur la base d'un calcul initial effectué en début de simulation et jamais remis en cause ultérieurement². Par ailleurs, elles n'imposent pas les mêmes contraintes en matière de systèmes d'information, selon qu'elles sont utilisées pour une prise de décisions opérationnelles ou dans le cadre de simulations:

- des règles, comme les règles S/OPN ou LWKR, s'appuient sur une connaissance correcte de ce qui se passe dans tout le système productif au moment où l'on prend la décision; elles supposent donc que l'entreprise fonctionne avec un système d'information en bases de données centralisées ou réparties avec mises à jour en temps réel;
- des règles, comme les règles PAPS ou TOM, ne reposent que sur des informations disponibles localement à l'endroit même où un choix est à opérer; elles

1. Si le système d'information le permet, il est judicieux d'inclure à ce cumul le temps résiduel de l'opération en cours.

2. On parle alors de: **règles dynamiques** et de **règles statiques**. Certains logiciels d'ordonnancement s'appuient sur des règles; leurs performances sont meilleures lorsqu'ils utilisent des règles dynamiques.

constituent, au contraire, des procédures de gestion décentralisées faciles à implanter.

En résumé, moins une règle est «myope» dans l'espace du système productif (connaissance précise de l'état du système productif, au moment de la prise de décision) et dans le temps (prévision de l'évolution de l'état du système productif sur le très court terme et sur des bases «assez mécaniques»), plus la décision requiert d'informations et de capacités de stockage et de calculs.

Illustrons par un exemple (tableau 100) l'utilisation de ces règles, avec quatre commandes, notées *a*, *b*, *c* et *d*, qui sont candidates pour être exécutées sur la machine A qui se libère à l'instant $t = 90$ minutes.

TABLEAU 100
Jeu de données du problème d'ordonnancement en ateliers spécialisés
(durées et dates exprimées en minutes)

Tâches	Temps opératoire sur la machine A	Opération suivante		Cumul de tous les temps opératoires restant à exécuter à l'instant $t = 90$	Date de livraison demandée	Nombre d'opérations restant à exécuter
		à exécuter sur la machine	temps opératoire			
a	10	K	22	100	$t = 270$	4
b	20	K	10	37	$t = 170$	3
c	17	F	9	41	$t = 270$	2
d	15	G	4	29	$t = 170$	4

Au moment où se pose le problème, la charge totale de travail (travail en cours résiduel et travail en file d'attente) des centres de production F, G et K est: 65 minutes pour la machine F; 100 minutes pour la machine G; 0 minute pour la machine K. La tâche à exécuter sur la machine A est:

- la tâche a si l'on utilise la règle TOM;
- la tâche a ou la tâche b si l'on utilise la règle Winq puisque l'opération suivante de ces deux tâches s'effectue sur la machine K qui est celle qui a le volume de travail en cours et en attente le plus faible (ici 0);
- la tâche b si l'on utilise la règle de la marge (a: $270 - 100 - 90 = 80$; b: $170 - 37 - 90 = 43$; c: $270 - 41 - 90 = 139$; d: $170 - 29 - 90 = 51$);
- la tâche d si l'on utilise la règle S/OPN (a: $80/4 = 20$; b: $43/3 = 14,33$; c: $139/2 = 69,5$; d: $51/4 = 12,25$).

Les résultats fondateurs de cette approche amorcée en 1964 et 1965, sont donnés dans le [tableau 101 de la page 415](#). On peut y noter que la règle TOM conduit au temps d'achèvement moyen le plus faible mais qu'il n'en est pas de même pour la dispersion de ce temps. Une analyse complémentaire de ces données, s'appuyant sur le fait que le temps moyen total de la fabrication proprement dite est de 9 (puisque par hypothèse le temps moyen d'une opération dans un centre de production est de 1), conduit à un temps moyen d'attente devant chaque centre de production de 2,78 avec la règle TOM et 7,27 avec une règle du type FCFS, soit une durée d'attente multipliée par 2,6. Trois remarques complémentaires sont utiles à faire dans l'optique d'une implantation de la règle TOM:

- Une approximation à $\pm 10\%$ près des temps opératoires utilisés dans la décision, par rapport aux temps réels utilisés dans la simulation, n'accroît pas le

- nombre moyen instantané de tâches en attente. Si l'on pousse l'erreur jusqu'à $\pm 100\%$, on n'accroît que faiblement ce nombre moyen (qui passe à 27,13).
- On peut sans problème séparer les travaux en 2 classes, la première regroupant les tâches urgentes et la seconde, les autres tâches, et adopter la règle TOM dans chacune des classes ainsi que celle d'une priorité absolue des tâches de la classe urgente sur celles de l'autre classe. Dans ces conditions le nombre moyen instantané de tâches en attente ne s'accroît que faiblement (il passe à environ 27 pour un partage à 30% / 70% des tâches en urgent / normal); ces deux premières remarques attestent une certaine robustesse des performances de la règle TOM lorsqu'elle est utilisée dans des conditions dégradées (mais fort réalistes).
 - L'application stricte de la règle TOM peut avoir pour effet de retarder considérablement certaines opérations longues. Une solution efficace, semble-t-il, est alors de basculer périodiquement sur la règle FCFS; cela dit, la prise en compte explicite de la date de livraison constitue une alternative intéressante, comme nous allons le voir ci-après.

TABLEAU 101
Comparaison des performances des règles de priorité [104]

Règles	RANDOM	FCFS	TOM (SPT)	LWKR	WINQ	SOPN
Nombre moyen instantané de tâches en attente dans le système	59,42	58,87	23,25	47,52	40,43	Données non disponibles
Temps d'achèvement total d'une tâche	\bar{x}	74,70	74,43	34,02	Données non disponibles	66,10
	σ	Données non disponibles	41,06	53,65		16,31

Table des matières

Index thématique

Souvent le problème posé se complique par la nécessité de respecter, autant que faire se peut, des dates de livraison. La règle qui a les meilleures performances dans le respect des dates de livraison est la règle S/OPN. En contrepartie, elle accroît sensiblement le temps moyen d'achèvement d'une tâche mais elle réduit au maximum la dispersion de ces temps d'achèvement. Cela étant, dès que le taux d'utilisation du système productif devient élevé (disons supérieur à 90%, pour fixer les idées), cette règle conduit à un pourcentage moyen de tâches terminées avec retard qui est supérieur à celui que l'on a en utilisant la règle TOM. Dans ces conditions, si l'objectif prioritaire est celui du respect des délais de livraison, la procédure préconisée consiste à utiliser la règle TOM en cas de forte «congestion» du système productif et, autrement, de faire appel à la règle S/OPN.

Ces travaux de Conway, Maxwell et Miller sont à l'origine d'un courant de recherche important qui a exploré la performance d'autres heuristiques de résolution de classes de problèmes d'ordonnement extraordinairement variées. De nos jours, il est extrêmement facile (voir, [chapitre III, § I-2.1, page 148](#)) de déterminer la performance de règles

II-2.2.2 Cas d'une dépendance entre les centres de production

L'ordonnancement se complique, d'une part, par l'existence d'une certaine polyvalence de centres de production qui sont substituables dans l'exécution d'une opération, sans avoir pour autant les mêmes performances, et, d'autre part, par la possibilité d'inverser l'ordre de réalisation de certaines opérations (*open shop*, voir § I-1.5, page 384). Les investigations décrites dans Conway, Maxwell et Miller, montrent que le nombre moyen de tâches en attente est une fonction décroissante du nombre de centres de production polyvalents et que la règle TOM est plus performante que la règle FCFS, mais que sa supériorité relative décroît très sensiblement quand la polyvalence s'accroît. La possibilité d'inverser l'ordre de certaines opérations a des conséquences moins sensibles que dans le cas de la polyvalence; là encore, la règle TOM est plus performante que la règle FCFS. On peut indiquer, pour terminer, que cette étude aborde également le cas de la possibilité d'une structuration arborescente des différents centres de production, le premier nœud de l'arbre correspondant à la dernière étape du processus productif (assemblage par exemple).

SECTION III PERSPECTIVES ACTUELLES DE L'ORDONNANCEMENT EN ATELIERS SPÉCIALISÉS

Les entreprises industrielles qui ne sont pas orientées vers la série unitaire ou la fabrication en continu sont structurées en ateliers spécialisés, en îlots de fabrication, ou en lignes d'assemblage et/ou de fabrication. On ne s'intéressera ici qu'aux structures en ateliers spécialisés ou îlots de fabrication, largement prépondérantes dans les entreprises occidentales.

Les conditions requises pour passer en flux tirés et donc pouvoir gérer les flux sans préparation du travail par un ordonnancement «en bonne et due forme», font que le problème de l'ordonnancement se pose concrètement dans une majorité d'entreprises. Il est toujours possible de nier le problème et de se passer de toute préparation du travail (suppression de l'ordonnancement) en lançant les ordres de fabrication dès que ceux-ci arrivent dans le système productif et en gérant indépendamment les différents postes de travail avec l'aide de règles empiriques de décision. Cette absence de préparation du travail n'est pas sans inconvénients importants car:

- elle retarde inutilement certaines adaptations temporaires du système productif (appel momentané aux heures supplémentaires ou modifications du programme de maintenance, par exemple) ou des règles de pilotage de la production (d'où une modification des priorités des ordres de fabrication); elle conduit à supporter des problèmes au lieu de les anticiper, faute d'avoir détecté à temps certains dysfonctionnements (saturation excessive de certains postes de travail, retard dans les livraisons...);
- elle accentue le découplage entre la régulation à court terme et la régulation à moyen terme, ce qui peut rendre plus difficile la prise de certaines décisions (acceptation de marchés importants et contraignants, décision de sous-traitance...);
- elle laisse entier le problème de l'approvisionnement des composants et matières utilisés au cours de certaines opérations; celui-ci peut être

déclenché lors de l'introduction d'un ordre de fabrication dans le système productif mais tout défaut d'approvisionnement contribuera à engorger le système productif par des OF dont l'exécution est arrêtée, faute de composants ;

- elle pose le problème du contrôle d'un système productif fonctionnant sans prévision : l'absence de référentiel rend difficile l'appréciation de la pertinence des décisions prises.

Pour la majorité des gestionnaires, ces arguments militent en faveur du maintien d'une préparation du travail en ateliers. Dans ces entreprises, la qualité de l'ordonnancement est considérée comme un facteur important de compétitivité et les procédures manuelles laissent très progressivement place à des systèmes informatisés destinés à concevoir rapidement une proposition d'ordonnancement et, pour les plus sophistiqués d'entre eux, à réagir en temps réel aux inévitables aléas et perturbations qui caractérisent la production. L'investissement organisationnel que représentent de tels systèmes est encore peu répandu, pour deux raisons :

- de tels systèmes requièrent une formalisation préalable de ce que le système productif peut traiter (gammes, nomenclatures...), laquelle est loin d'être systématique et fiable dans les entreprises ; ils exigent en outre une mise à jour du système d'information qui est pratiquement de type « temps réel », ce qui est une condition encore plus restrictive ;
- de par leur formation, les ingénieurs privilégient le plus souvent la flexibilité physique (machines à commande numérique, convoyage automatique...) sur la flexibilité organisationnelle, dont l'une des formes est l'assistance informatique à l'ordonnancement¹.

Table des matières

Index thématique

Les préoccupations des établissements qui se dotent de tels systèmes d'assistance à l'ordonnancement varient selon le contexte dans lequel ils sont placés (production et/ou assemblage pour stock ou à la commande, le positionnement concurrentiel de l'entreprise en termes de coût, qualité, délai...) et la marge de manœuvre dont dispose le responsable de l'établissement.

Il est évident qu'un responsable, jugé uniquement sur le respect de dates de livraison des ordres de fabrication, n'a besoin que d'un système l'aidant à définir un ordonnancement respectant ces contraintes de livraison. Il sera conforté dans son attitude par le fait qu'en cas de difficulté majeure pour tenir ces délais, il pourra, presque toujours, assez facilement mobiliser les ressources additionnelles (heures supplémentaires, intérim, sous-traitance) qui lui permettront d'honorer ses obligations. Dans ce contexte, le problème essentiel est d'obtenir assez rapidement un ordonnancement respectant les contraintes².

Mais, dans de nombreuses entreprises, le problème est plus complexe car il s'agit à la fois de respecter, autant que faire se peut, les délais et d'obtenir une bonne utilisation du système productif, pour conserver une compétitivité par les coûts sur le long terme. Un tel contexte suppose que le respect des délais n'est plus un objectif intangible et pose un problème d'évaluation de la qualité de l'ordon-

1. Voir le § I-1.5, page 147, du chapitre III pour une discussion des relations de complémentarité entre flexibilité physique et flexibilité organisationnelle et de leurs impacts en matière de conception des systèmes productifs.

2. Dans ce type de situation, l'approche qui sera décrite au § III-2.2.1, page 437, s'avère tout à fait pertinente.

nancement, inconnu dans le cas précédent. La nécessité de ce jugement se justifie par deux observations :

- Si l'on a le choix entre deux ordonnancements respectant les contraintes de dates de livraison et mobilisant les mêmes ressources permanentes, il est difficile de considérer ces alternatives comme équivalentes lorsque l'un des deux ordonnancements permet des livraisons effectives plus précoces et donc, implicitement, une meilleure utilisation du système productif, parce que cela procure une marge de manœuvre accrue pour les commandes ultérieures qui permettra, peut-être même, d'accepter davantage de commandes.
- La décision à évaluer est très souvent compliquée par le fait que la marge de manœuvre du décideur porte non seulement sur l'ordonnement à retenir mais aussi sur une *éventuelle mobilisation de ressources additionnelles* (heures supplémentaires...). La question pratique qui se pose alors est de savoir :
 - si l'on a raison ou non de faire appel à un peu plus de ressources additionnelles, qui coûtent nécessairement de l'argent, pour effectuer un peu plus de production
 - ou s'il est plus judicieux de limiter cet appel en restreignant corrélativement la production.
- Le jugement peut s'opérer en faisant appel à une batterie d'indicateurs physiques (taux d'engagement des diverses ressources, pourcentage d'avancement des commandes, nombre de commandes en retard, dépenses de mobilisation momentanée de ressources additionnelles...) mais il est peu probable qu'entre deux solutions alternatives, tous les indicateurs soient en faveur de l'une d'entre elles. Un jugement d'ensemble passe donc par l'utilisation d'un indicateur synthétique qui doit être de nature économique, c'est-à-dire être le résultat d'un calcul faisant intervenir des grandeurs exprimées en valeur. D'autres logiques d'agrégation de points de vue existent (analyse multicritères...) mais sont difficiles à mettre en œuvre ou largement arbitraires. On reviendra concrètement sur ce problème au § III-2.5.1, page 442.

On examinera donc les approches utilisées par les logiciels pour proposer un ordonnancement (§ III-1), avant de présenter les orientations des systèmes d'aide à la décision de lancement, actuellement en émergence et qui devraient rapidement se répandre et être en mesure d'apporter des éléments de réponse au problème dans toute sa complexité, telle qu'elle vient d'être décrite (§ III-2, page 432).

III-1 Les approches possibles

Pour être aussi concret que possible, on s'appuiera sur un exemple introductif (§ III-1.1) avant de présenter les démarches de résolution utilisées (§ III-1.2, page 421).

III-1.1 Exemple introductif

Pour comprendre la complexité du problème d'ordonnement et les différentes alternatives que l'on peut utiliser pour le résoudre, on s'appuiera sur un problème d'ordonnement simplifié, celui de la société **MÉCANO**.

Le système productif de **MÉCANO** comporte seulement quatre ateliers: un atelier de tour (avec un opérateur et une machine), un atelier de rectifieuse (avec un opérateur et une machine), un atelier de fours (avec un opérateur et deux fours) et un atelier de fraiseuses (avec trois opérateurs et trois postes de travail). Ce système est décrit par la **figure 123** (qui comporte des indications de coût qui seront utilisées ultérieurement, au § III-2.5.1, page 442).

FIGURE 123

Description du système productif du cas **MÉCANO**

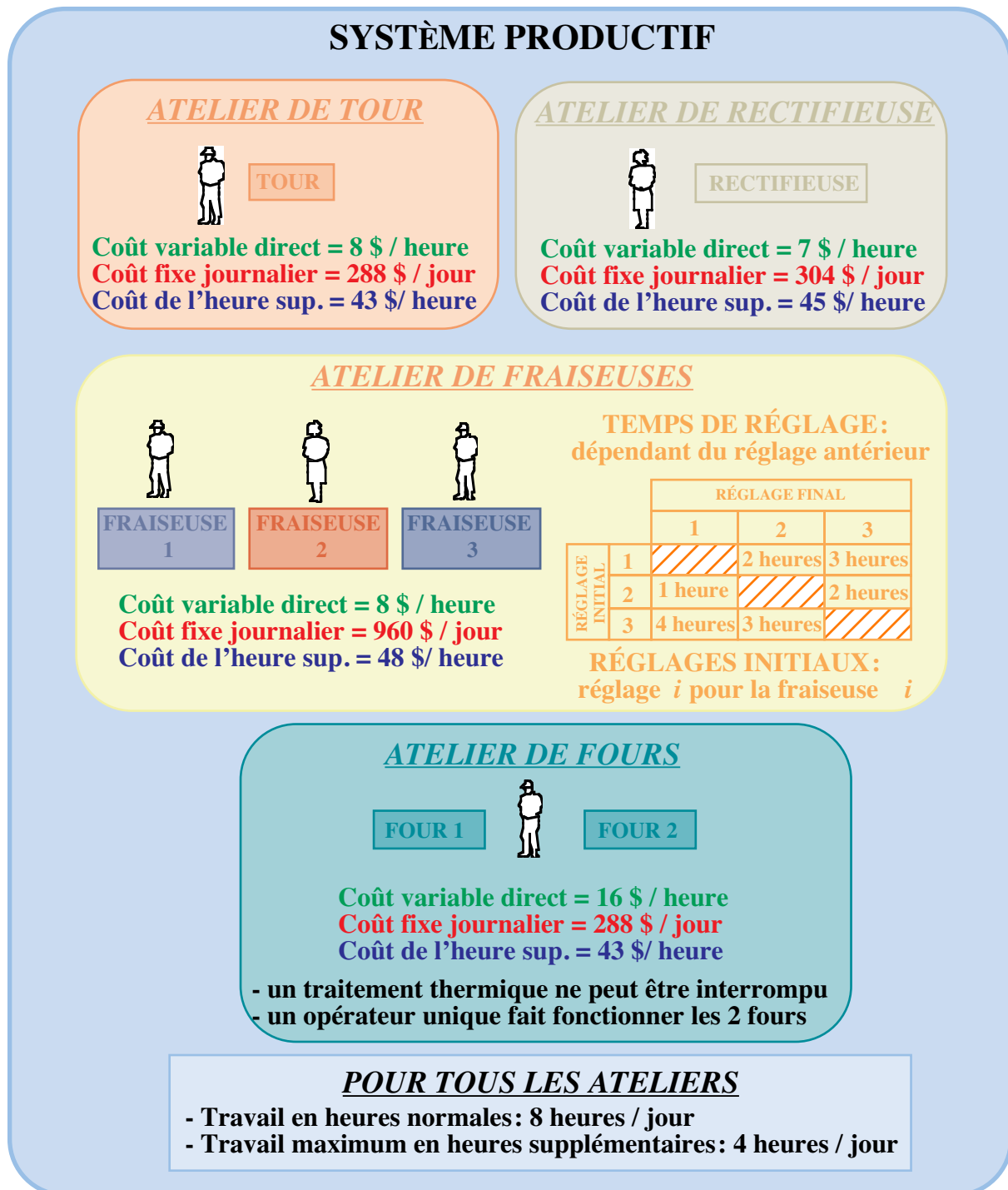
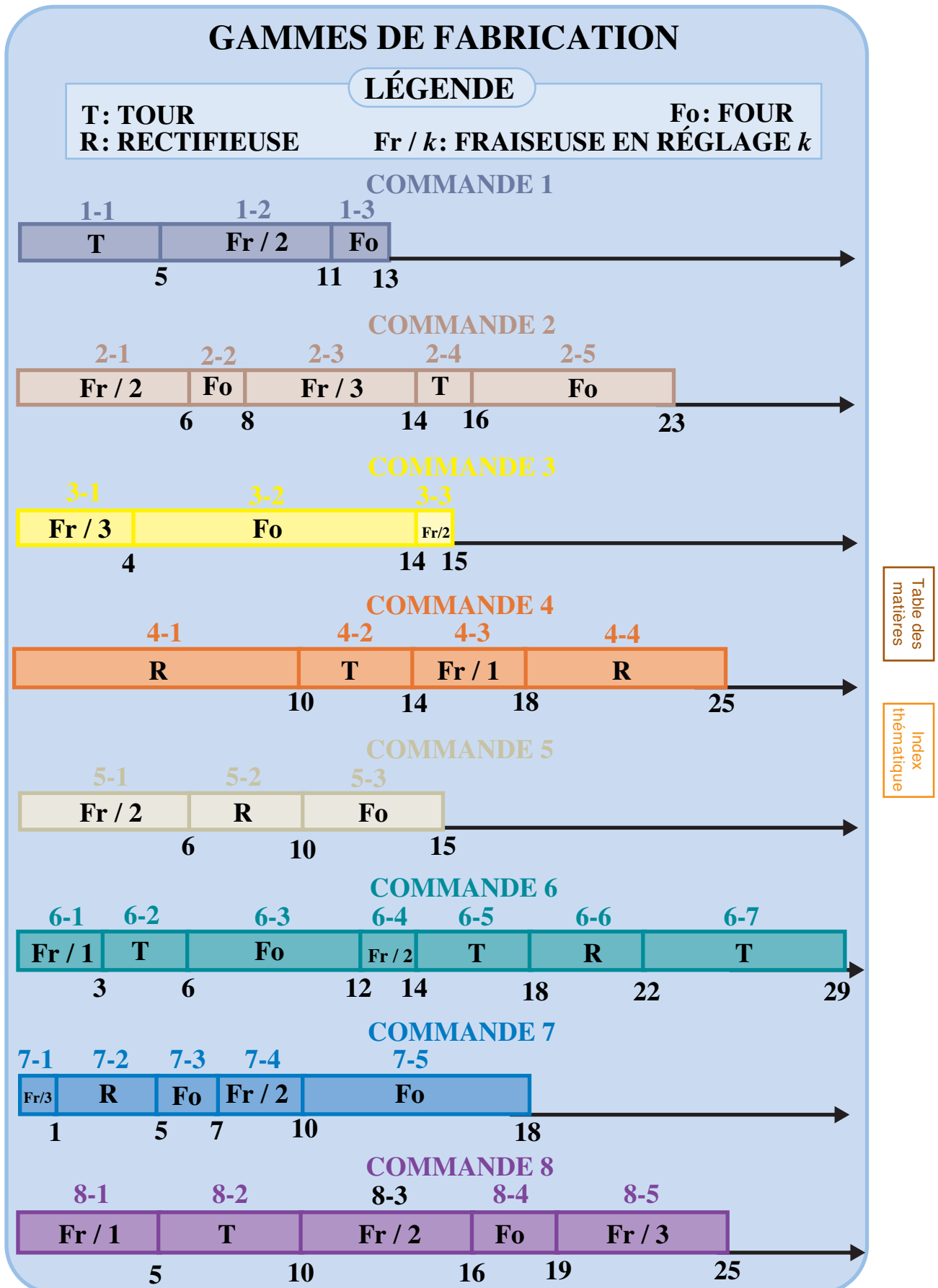


Table des matières

Index thématique

FIGURE 124

Description des gammes des ordres de fabrication du cas *MÉCANO*

L'un des ateliers, celui des fours, se caractérise par l'interdiction d'interrompre une opération commencée (préemption interdite, voir [page 361](#)); c'est généralement le cas des traitements chimiques ou thermiques. Un autre atelier, celui des fraiseuses, se caractérise par le fait que le temps de changement du réglage d'une machine n'est indépendant ni du réglage actuel, ni du réglage futur. Ce cas de figure est relativement fréquent pour les postes de travail dotés d'une certaine polyvalence. Il est évident que les temps de réglage utilisés sont fantaisistes (ils correspondent à un nombre entier d'heures, pour faciliter la présentation des résultats); en outre, pour simplifier le problème, le nombre de réglages possibles a été limité à trois¹. On notera enfin que la décision à prendre concerne non seulement la définition d'un ordonnancement mais aussi celle d'un appel momentané à des ressources additionnelles par le biais d'heures supplémentaires (sans prise en compte, ici, des contraintes imposées par la réglementation du travail).

On suppose que **MÉCANO** a huit commandes à exécuter, la première étant la seule à avoir déjà été commencée. Les gammes de ces commandes sont décrites sous forme de graphique de Gantt à la [figure 124, page 420](#). La $j^{\text{ème}}$ opération de la commande i est notée « $i-j$ »; la gamme est fournie par un graphique de Gantt où la mention de la machine requise est portée («Fo» pour un four, «R» pour la rectifieuse, «T» pour le tour et «Fr / k » pour une fraiseuse en réglage k). Ces gammes n'ont aucun réalisme: il s'agit seulement de travailler sur des gammes dans lesquelles non seulement l'ordre de passage sur les centres de production varie d'une commande à l'autre mais encore où un même poste de travail peut être utilisé plusieurs fois à des moments différents dans une même gamme. Pour la commande 1, seule la gamme des opérations restant à exécuter est portée sur la figure. Lorsqu'une opération doit être effectuée sur une fraiseuse, le numéro de réglage est indiqué sur le graphique. On supposera que ce type de réglage ne peut s'effectuer en temps masqué (c'est-à-dire pendant que s'achève l'opération précédente sur ce même poste).

Table des matières

Index thématique

III-1.2 Les solutions possibles

Deux grandes familles d'approches peuvent être rencontrées: le placement progressif d'ordres de fabrication (§ III-1.2.1) et le placement chronologiquement progressif d'opérations exécutables (§ III-1.2.2, [page 424](#)). Certains logiciels mélangent les deux approches.

III-1.2.1 Placement progressif d'ordres de fabrication

Cette approche, relativement facile à mettre en œuvre, a été utilisée manuellement par les premiers services de *planning* et est encore utilisée, malgré ses défauts, par quelques logiciels. Le principe retenu² pour le placement progressif d'ordres de fabrication est extrêmement simple pour ne pas dire simpliste:

- on commence par classer les ordres de fabrication (OF) selon un critère;

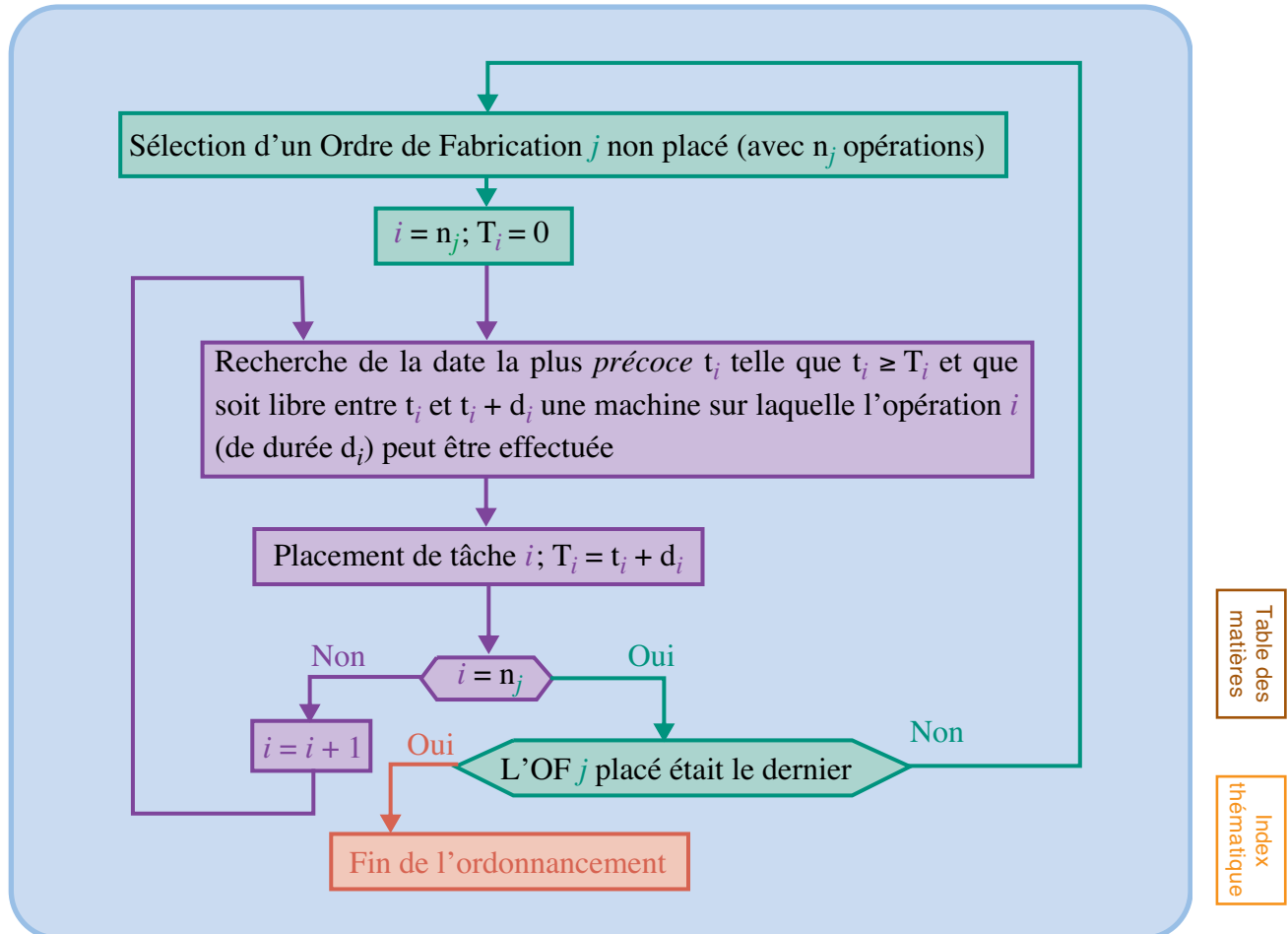
1. La spécialisation de chacune des machines à un réglage différent est une mauvaise stratégie si les demandes pour chacun des réglages ne sont pas «équilibrées». En tout état de cause, le problème des changements de réglage se pose nécessairement si le nombre de machines est différent du nombre de réglages.

2. Elle est connue sous le nom d'*horizontal loading*, dans la littérature anglo-saxonne et elle est parfois désignée comme la **procédure par placement des travaux** dans la littérature française spécialisée.

- on prend ensuite le premier OF de la liste et on place les différentes opérations de l'ordre de fabrication choisi
 - soit au plus tôt si on a retenu un placement progressif au plus tôt (voir algorithme à la [figure 125](#)),

FIGURE 125

Algorithme de placement au plus tôt des ordres de fabrication



- soit au plus tard si l'on a retenu un placement progressif au plus tard (voir algorithme à la [figure 127 de la page 425](#));
- ces placements se font en respectant la disponibilité des ressources devant être mobilisées et les contraintes d'antériorité des opérations à exécuter; une fois toutes les opérations placées, l'ordre de fabrication est rayé de la liste;
- s'il reste encore des ordres de fabrication dans la liste, on retourne à l'étape précédente, sinon, l'ordonnancement est terminé.

Le placement au plus tôt ne garantit pas le respect des dates de livraison et le placement au plus tard peut rendre impossible le placement des OF situés en queue de liste, tout en conduisant souvent à une médiocre utilisation des ressources en début de programmation.

La [figure 126](#) illustre la technique du **placement au plus tôt** – on parle encore de **jalonement au plus tôt** (*front scheduling* dans la littérature anglo-saxonne) – avec une utilisation quasi systématique des heures supplémentaires. On suppose ici que l'ordre retenu est celui des numéros associés aux différentes commandes

FIGURE 126
Placement au plus tôt des ordres de fabrication (cas **MÉCANO**)

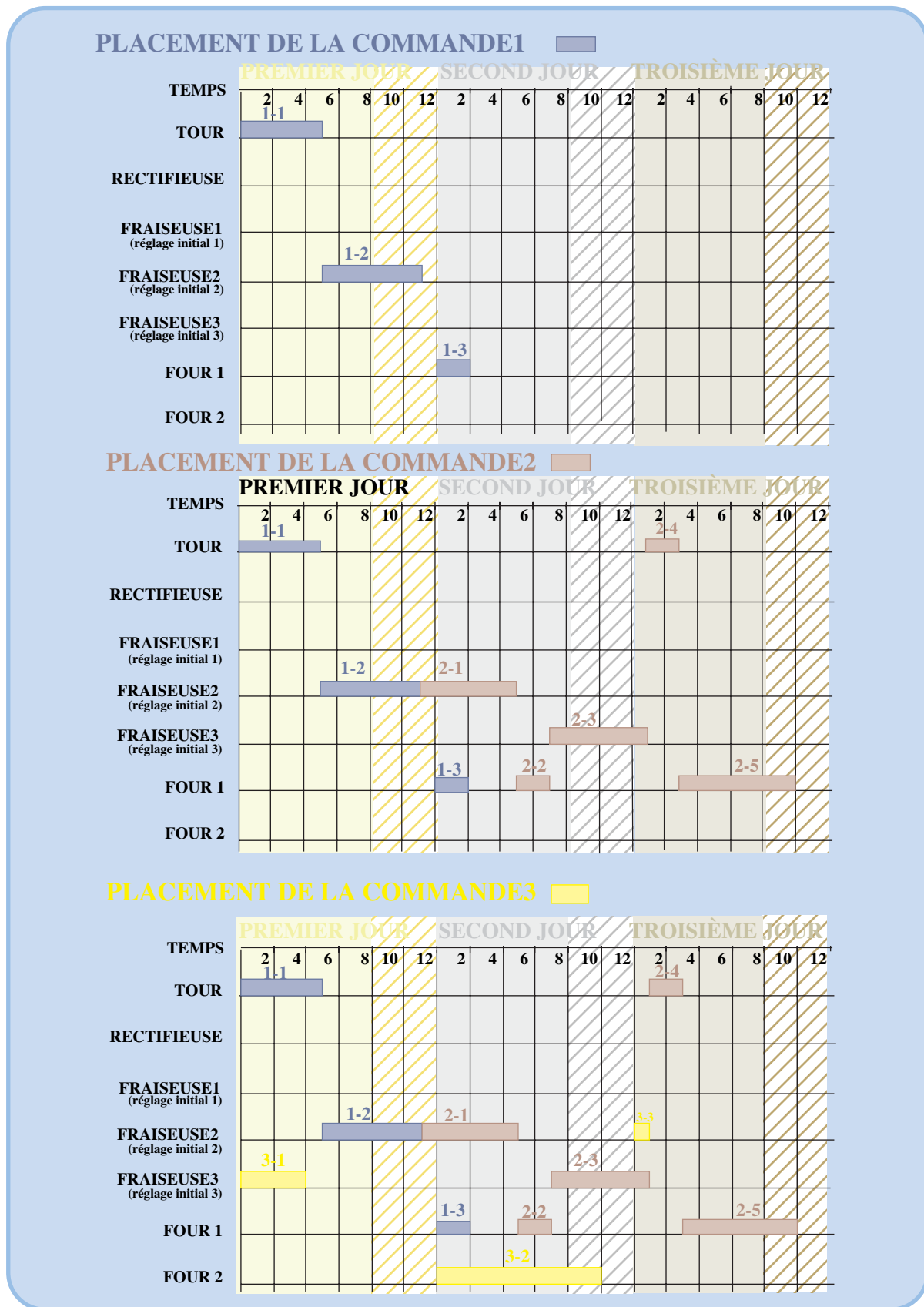


Table des matières

Index thématique

(on verra au [tableau 103](#), page 447, que ce classement correspond à celui des dates de livraison).

Cette illustration numérique permet de mettre en évidence le dilemme majeur de ce type d'approche et la très grande difficulté qu'il y a à le résoudre :

- le *problème posé* : une fois la commande 1 programmée, on procède au placement de la commande 2 qui débute par l'opération 2-1¹ de fraiseuse en réglage 2; la fraiseuse 2 qui est en réglage 2, se trouve être occupée par l'opération 1-2, à partir du début de la sixième heure du premier jour; l'opération 2-1 durant six heures, ne peut donc être exécutée avant l'opération 1-2;
- la *solution envisageable* : il serait possible de remettre en cause les décisions antérieurement prises et plus particulièrement ici, le placement de l'opération 1-2, en en retardant le début d'une heure, afin d'utiliser les cinq heures disponibles en début de journée, pour l'opération 2-1 ;
- la *difficulté de mise en œuvre* de ce type de solution : cette solution, facile à mettre en œuvre lorsque l'on est au début du processus de placement, est particulièrement difficile à utiliser dès que plusieurs ordres de fabrication ont été programmés car il faut alors veiller au respect de toutes les contraintes d'antériorité des tâches déjà programmées, dont un déplacement partiel est envisagé directement (dans notre exemple, le déplacement de l'opération 1-2 implique celui de l'opération 1-3) ou par un effet de cascade; on peut ajouter que les décalages de programmation induits peuvent annuler l'intérêt du décalage initial envisagé pour améliorer l'utilisation des ressources en début de simulation.

Cette interdépendance des décisions, rendant la remise en cause des décisions antérieurement prises à la fois difficile et d'un intérêt parfois contestable, explique que l'on s'en tienne généralement à l'algorithme initial (figure 125) et pourquoi ce type d'approches se traduit assez souvent par une utilisation médiocre des ressources disponibles.

On n'illustrera pas la logique du **placement au plus tard** (décrit par l'algorithme de la figure 127). Le principe consiste à partir de la dernière opération de l'ordre de fabrication retenu et à la programmer le plus tard possible, tout en respectant la date de livraison, puis à programmer l'opération précédente en respectant les contraintes d'antériorité et ainsi de suite. Cette seconde approche vise à limiter le montant des encours, puisque l'on attend le dernier moment possible pour programmer les opérations d'un OF. Cet objectif est imparfaitement atteint par cette méthode car, la solution retenue ne tendrait à minimiser le montant des encours que si la valeur des ordres de fabrication était prise en compte dans le classement des OF.

III-1.2.2 Placement chronologiquement progressif d'opérations exécutables

Cette seconde approche² s'inspire directement des travaux de simulation effectués à partir des années soixante. *Elle est utilisée par le logiciel de résolution du « mini-cas » proposé, avec la possibilité, à tout instant d'éclairer les décisions à prendre*

Table des matières

Index thématique



1. Le premier nombre désigne l'OF et le second, après le tiret, repère le numéro d'ordre de l'opération dans l'OF; l'opération 2-1 est donc la première opération de la commande 2.

2. Elle est connue sous le nom de *vertical loading* dans la littérature anglo-saxonne Elle est parfois désignée comme la **procédure par placement d'opérations** dans la littérature française spécialisée.

FIGURE 127

Algorithme de placement au plus tard des ordres de fabrication

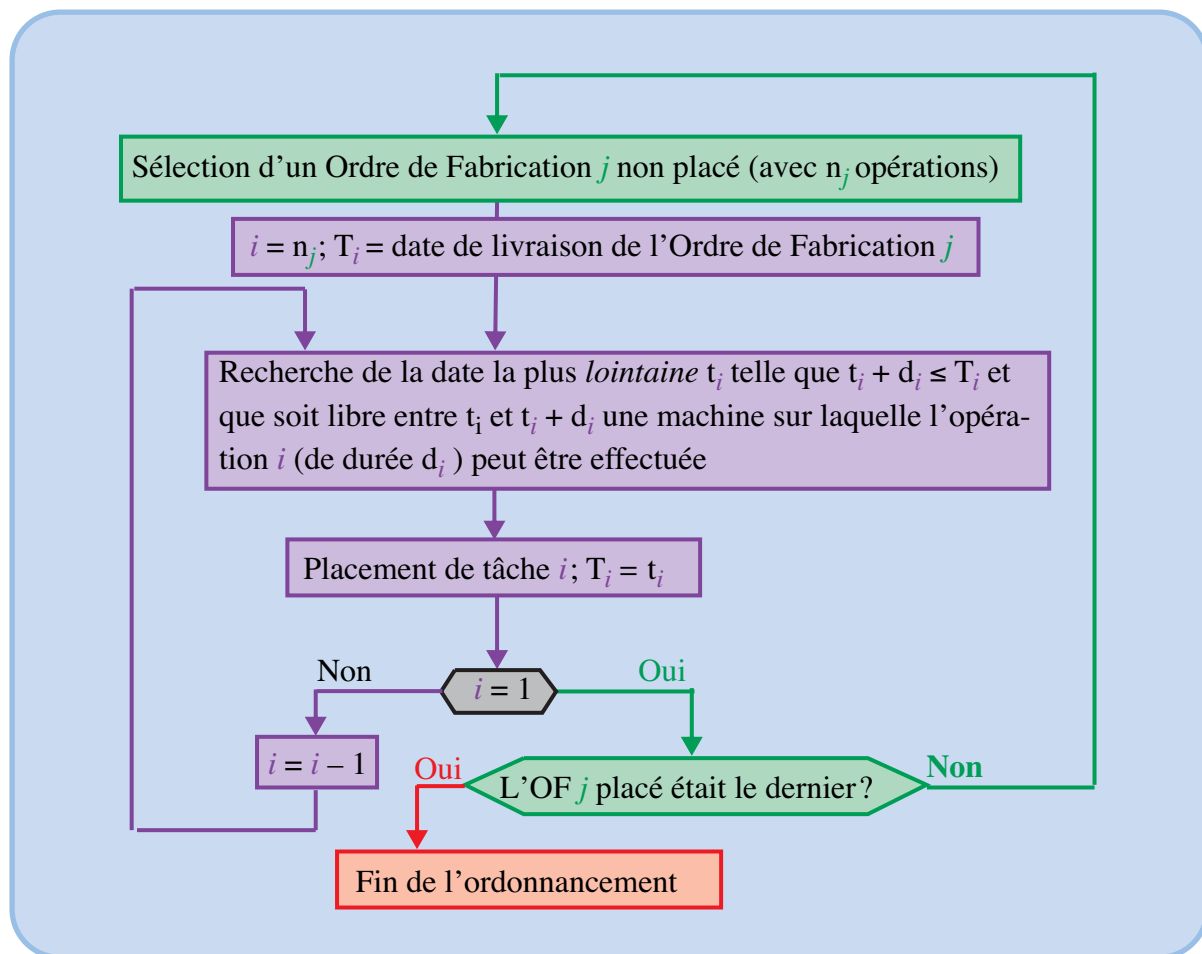


Table des matières

Index thématique

par un ensemble d'indicateurs qui seront évoqués ci-après. L'usage de ce logiciel permet de mieux comprendre les fondements des arbitrages à réaliser entre le point de vue commercial qui privilégie le respect des délais et le point de vue de la production qui cherche à utiliser de manière efficace les ressources disponibles. Il permet de revenir sur des décisions antérieurement prises, ce qui permet de mieux appréhender des mécanismes mis en œuvre dans certains SIAD¹.

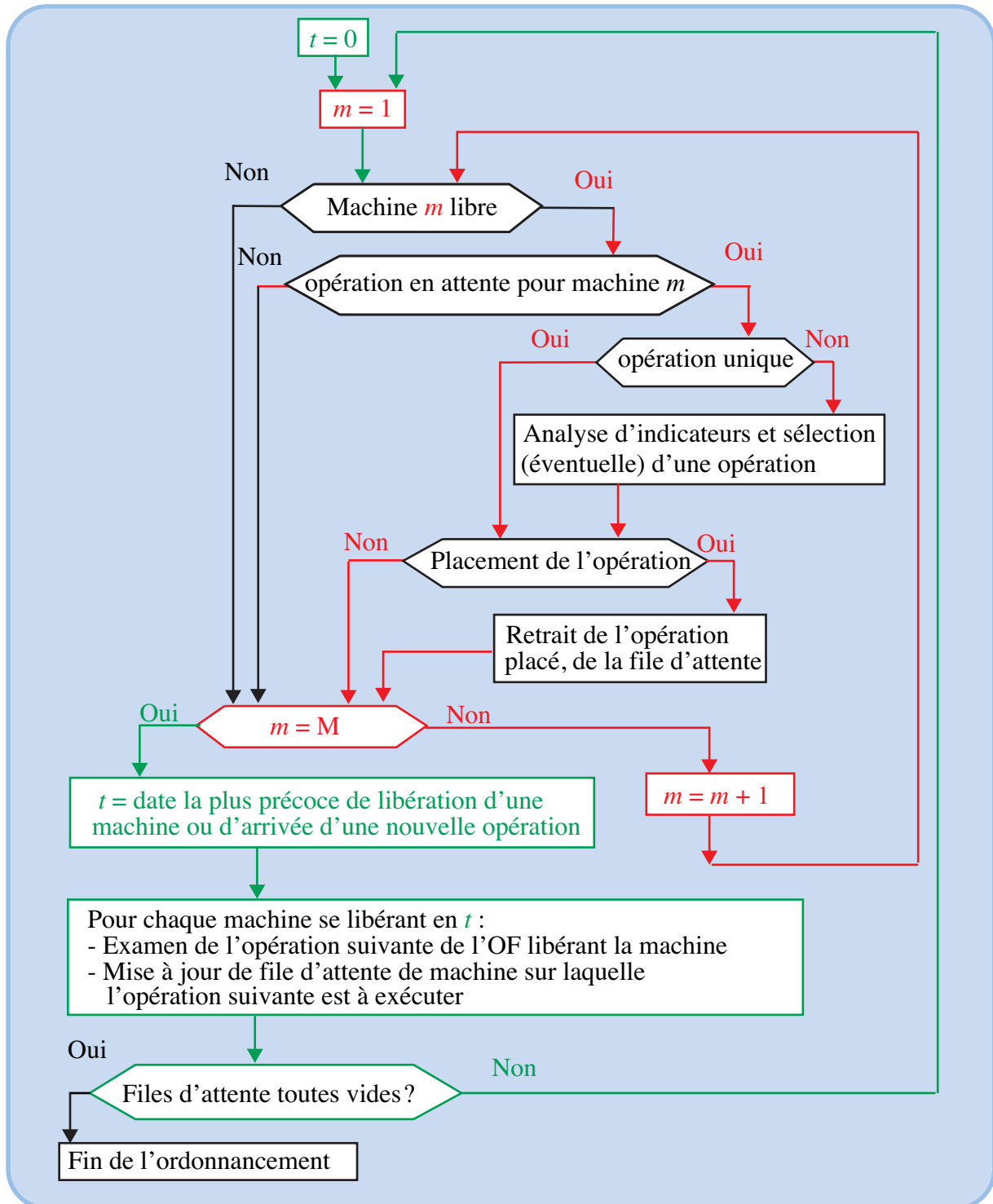
La démarche décrite par l'algorithme de la page 426, passe par deux grandes étapes que l'on va examiner. Préalablement il faut initialiser le processus en définissant, pour chaque atelier, la liste des opérations immédiatement exécutables dans cet atelier, à partir des premières opérations non encore exécutées des ordres de fabrication, ce qui donne, pour notre exemple, le premier tableau de file d'attente de la figure 129, page 428. Examinons l'application de l'algorithme.

- **Étape 1**: à une date t (initialement $t = 0$), on passe en revue successivement les différentes machines du système productif; si la machine n'est pas libre on passe à la machine suivante (initialement toutes les machines sont libres) sinon on examine s'il y a un ou plusieurs candidats pour être exécutés sur ce poste de travail:

1. Systèmes Interactifs d'Aide à la Décision (en anglais, DSS pour *Decision Support Systems*).

FIGURE 128

Algorithme de placement chronologiquement progressif d'opérations exécutables



- s'il n'y a qu'un seul candidat, celui-ci, sauf raison particulière liée à l'anticipation de l'arrivée d'une opération jugée prioritaire, est chargé sur la machine;
- s'il y a plusieurs candidats on sélectionne à l'aide d'une règle (ou d'un ensemble de règles) celui qui doit être privilégié; ces règles peuvent être celles introduites à la [page 412](#) ou être plus complexes;
- l'opération, une fois chargée, disparaît de la file d'attente.

- **Étape 2**: lorsque toutes les machines ont été passées en revue pour cette date t , on détermine la prochaine date (qui deviendra la nouvelle date courante t dans la simulation) pour laquelle se produit une modification de l'état du système; celle-ci consiste soit en une arrivée prévisionnelle d'un nouvel OF, soit par l'achèvement de l'exécution d'une (ou de plusieurs) opération(s); l'achèvement d'une opération implique que :
 - l'opération suivante de l'OF (si elle existe) est exécutable et sera donc immédiatement chargée dans la file d'attente concernée,
 - la machine libérée est disponible pour exécuter une opération se trouvant dans sa file d'attente;
- en cas de libération de plusieurs machines, il est conseillé pour être en mesure de déceler la totalité des conflits potentiels à cette nouvelle date t :
 - d'abord de commencer par libérer toutes les machines sur lesquelles des opérations s'achèvent et de mettre aussitôt à jour des files d'attente
 - et seulement ensuite de procéder au chargement des machines libres suivant la logique décrite à l'étape 1.

Le début de la simulation de notre problème introductif est illustré par la [figure 129](#), pages [428](#) et [429](#); les arbitrages effectués pour le chargement des fraiseuses ne sont pas explicités ici. Le résultat final d'une simulation opérée à l'aide d'un ensemble de règles complexes mais n'aboutissant pas à une très bonne solution (afin de conserver un intérêt opérationnel à l'usage du logiciel) est consigné dans la [figure 130](#), pages [430](#) et [431](#). La solution proposée se caractérise par un large appel aux heures supplémentaires et le fait que la commande 3 n'est pas achevée à la fin du jour 3¹. On remarquera, par ailleurs, que l'ordonnancement conduit à des changements de réglage (par exemple, la fraiseuse 1 passe du réglage 1 au réglage 3 au cours du jour 1, ce changement étant noté « $\rightarrow R3$ »).

Table des matières

Index thématique

Ce type de simulation conduit généralement à une bonne utilisation des ressources des premières périodes. La principale difficulté réside dans le choix des règles à privilégier dans la sélection d'une opération lorsque plusieurs rentrent en compétition pour l'utilisation d'une ressource libre. Il faut en effet effectuer un arbitrage entre le point de vue commercial (respect des dates de livraison) et celui de la production (meilleure utilisation des ressources productives). Les règles disponibles (dont les principales ont été présentées à la [page 412](#)) tendent à favoriser soit l'un soit l'autre point de vue. *Le logiciel du CD-Rom permet d'éclairer chaque prise de décision par un calcul préalable des indicateurs associés à ces règles (puisque ceux-ci varient dynamiquement, ce qu'illustre la [figure 131 de la page 431](#) pour la première et la dernière des décisions décrites à la [figure de la page 429](#)); il donne également des éléments permettant de mieux évaluer la saturation prévisionnelle des ressources, suivant une démarche qui sera développée à la [page 433](#) et dans les graphiques de la [figure 132 de la page 436](#).*

La principale difficulté tient au fait qu'il est très difficile de prévoir comment se comportera exactement le système lorsqu'on utilise un ensemble de règles précises. Il s'ensuit que certaines décisions se traduisant par de bonnes performances sur le court terme peuvent masquer de mauvaises performances se produisant ultérieurement. Bien entendu, la réciproque est vraie.

1. On reviendra ultérieurement (§ III-2.4, [page 441](#)) sur l'horizon de planification à retenir.

FIGURE 129
Exemple de placement chronologiquement progressif d'opérations

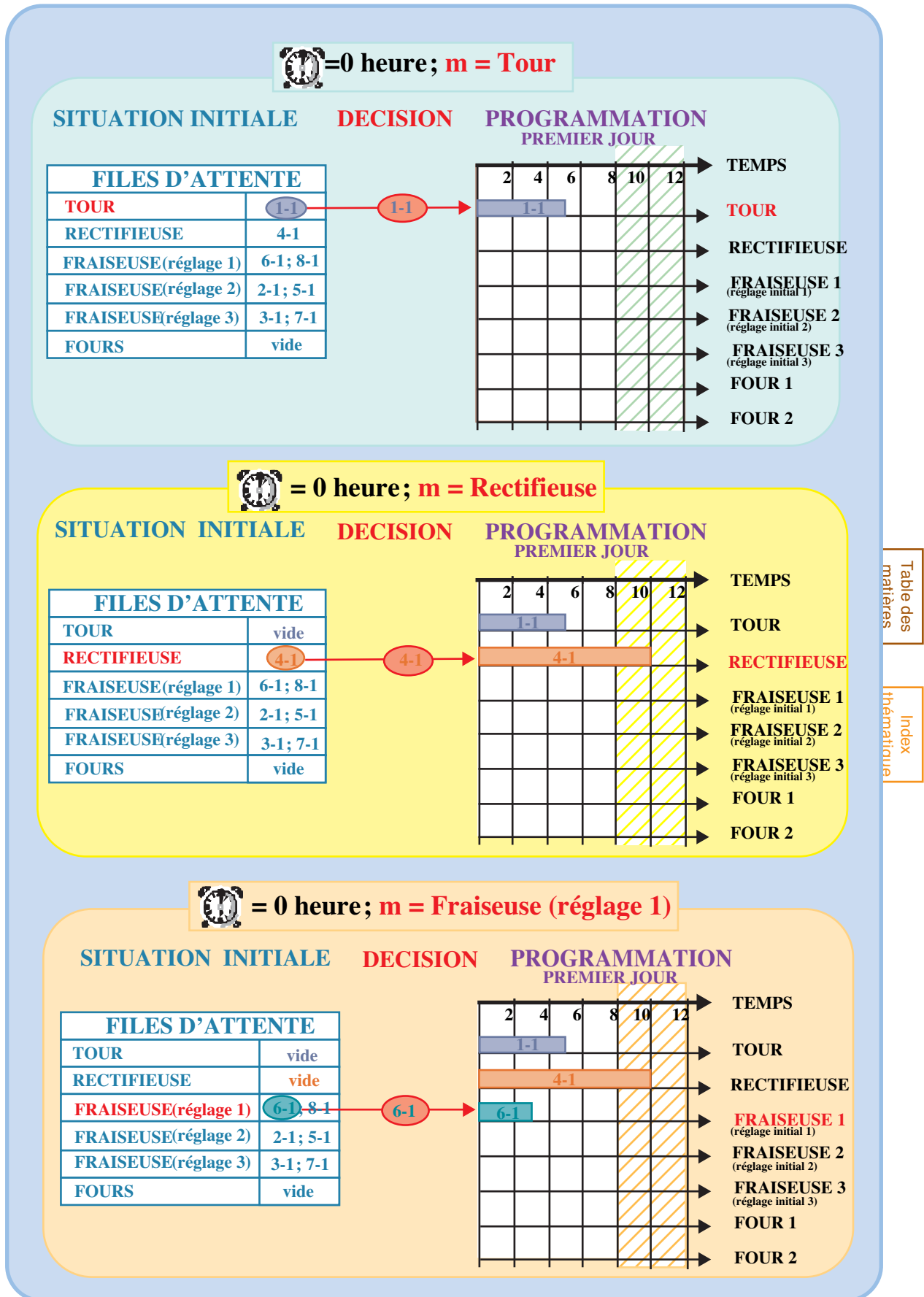


Table des matières

Index thématique

Figure 129 (suite)

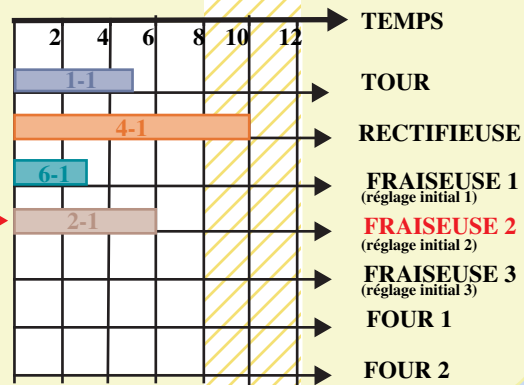


= 0 heure; m = Fraiseuse (réglage 2)

SITUATION INITIALE DECISION PROGRAMMATION
PREMIER JOUR

FILES D'ATTENTE	
TOUR	vide
RECTIFIEUSE	vide
FRAISEUSE(réglage 1)	8-1
FRAISEUSE(réglage 2)	2-1; 5-1
FRAISEUSE(réglage 3)	3-1; 7-1
FOURS	vide

2-1



= 0 heure; m = Fraiseuse (réglage 3)

SITUATION INITIALE DECISION PROGRAMMATION
PREMIER JOUR

FILES D'ATTENTE	
TOUR	vide
RECTIFIEUSE	vide
FRAISEUSE(réglage 1)	8-1
FRAISEUSE(réglage 2)	5-1
FRAISEUSE(réglage 3)	3-1; 7-1
FOURS	vide

7-1

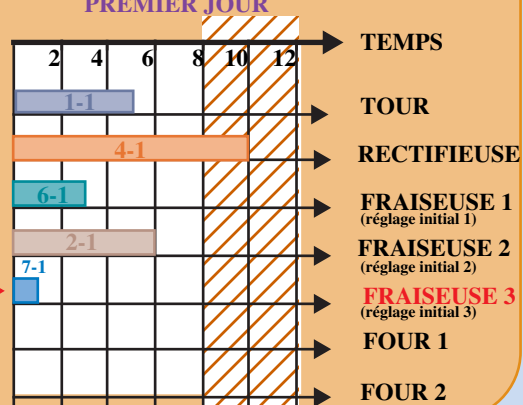


Table des matières

Index thématique



= 1 heure: *libération de la Fraiseuse (réglage 3) ⇒ Opération 7-2 exécutable ⇒ Mise en file d'attente Rectifieuse
*m = fraiseuse (réglage 3) car seule machine libre avec file d'attente

SITUATION INITIALE DECISION PROGRAMMATION
PREMIER JOUR

FILES D'ATTENTE	
TOUR	vide
RECTIFIEUSE	7-2
FRAISEUSE(réglage 1)	8-1
FRAISEUSE(réglage 2)	5-1
FRAISEUSE(réglage 3)	3-1
FOURS	vide

3-1

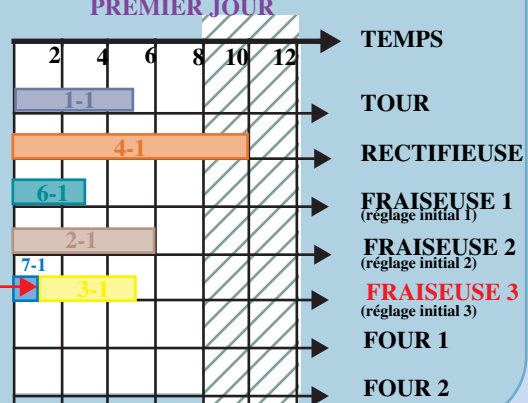


FIGURE 130
 Proposition finale d'ordonnancement (cas MÉCANO)

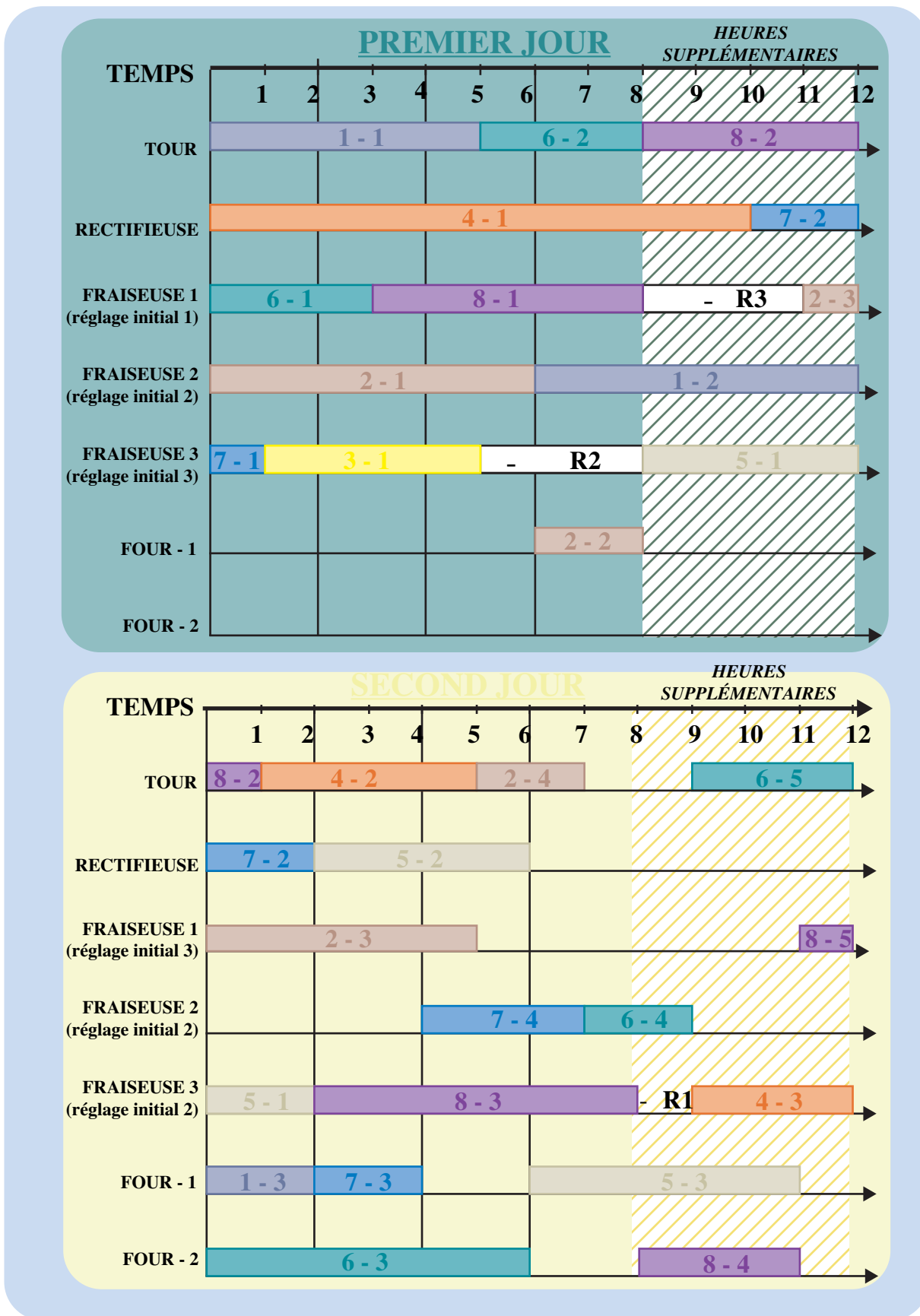


Figure 130 (suite)

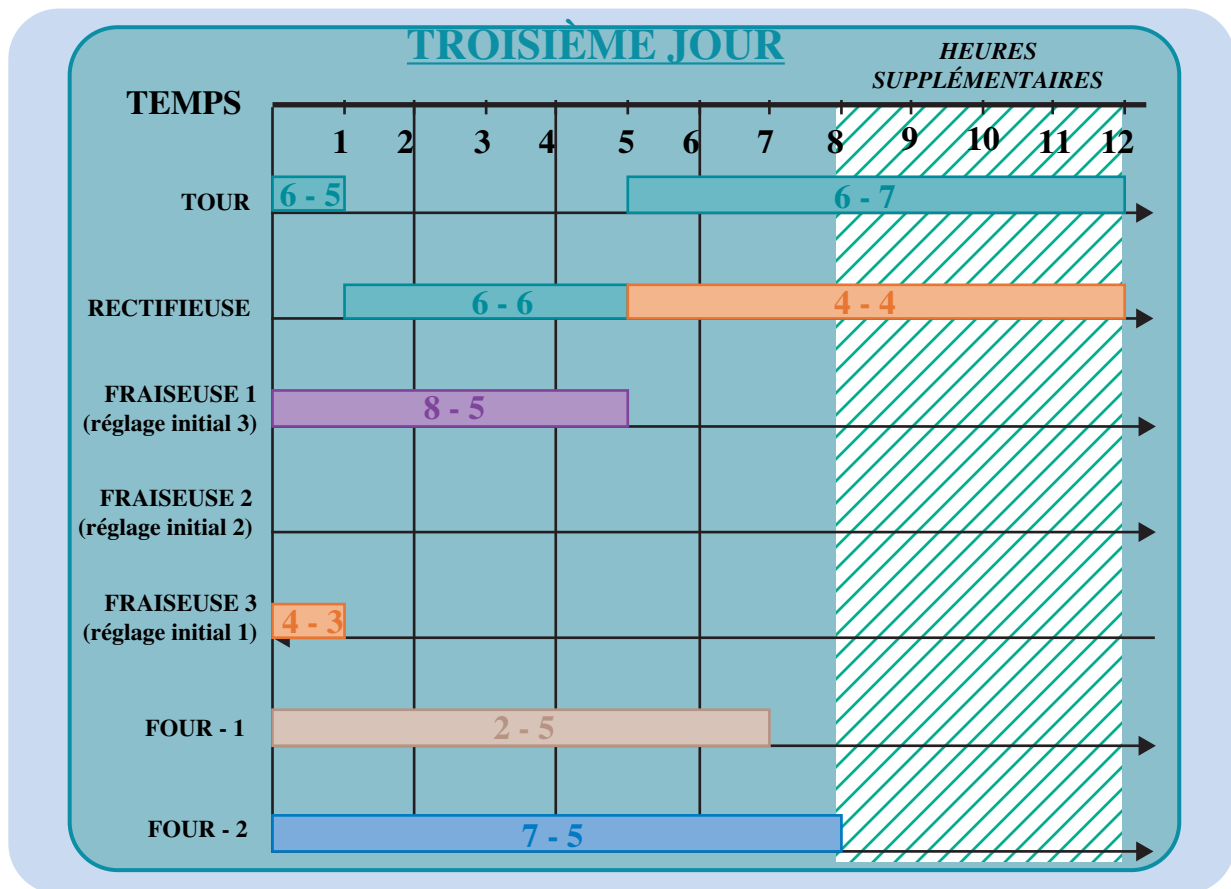


FIGURE 131

Calcul des indicateurs associés aux règles pour la file d'attente de la fraiseuse 2 à l'instant $t = 0$ et $t = 1$

$t = 0$

Tâche	PAPS Temps d'attente de la tâche en liste d'attente	TOM Temps opérateur de la tâche	Marge	S/OPN	WINQ	LWKR
3-1	0	4	9	3	0	15
7-1	0	1	14	2,8	0	18

$t = 1$

Tâche	PAPS Temps d'attente de la tâche en liste d'attente	TOM Temps opérateur de la tâche	Marge	S/OPN	WINQ	LWKR
3-1	1	4	8	2,666667	0	15

III-2 Définition d'un Système Interactif d'Aide à la Décision de Lancement (SIADL)

L'instabilité croissante de l'environnement des entreprises rend très difficile l'apprentissage des organisations par la «classique» méthode des essais et des erreurs. La recherche par tâtonnement de solutions de niveau satisfaisant exige, en effet, une stabilité suffisante des problèmes posés. Pour survivre, les entreprises sont amenées à remplacer en grande partie un *apprentissage par l'expérience* par un *apprentissage par la simulation*. C'est dans cette perspective que se situent les Systèmes Interactifs d'Aide à la Décision.

La complexité des problèmes d'ordonnancement implique une assistance informatique importante et milite en faveur de Système Interactif d'Aide à la Décision de préférence à des systèmes fermés, fournissant une solution sur laquelle l'utilisateur ne peut intervenir. De tels SIAD appliqués aux décisions de lancement doivent accomplir deux grandes fonctions :

- la première est une *capacité à fournir plusieurs solutions alternatives* caractérisées par des propositions précises d'ordonnancement et, si nécessaire, de mobilisation temporaire de ressources additionnelles; la recherche de ces solutions doit être largement automatique tout en autorisant l'intervention du responsable de l'ordonnancement pour modifier certains choix ainsi que certaines règles utilisées dans cette recherche;
- la seconde fonction est *une certaine capacité de conseil* pour guider le choix final; actuellement, cette fonction n'est au mieux satisfaite que par la fourniture d'une batterie d'indicateurs physiques relatifs à l'utilisation des ressources et à l'exécution des commandes; une réflexion complémentaire sur la création d'indicateurs synthétiques s'impose donc et sera conduite ici.

Il semblerait que la première tentative dans ce sens soit due à Godin et Jones¹, qui ont mis au point pour la Western Electric en 1969, un système permettant à un opérateur de tester l'impact de combinaisons variées d'ordonnements possibles et d'en simuler les effets avant de sélectionner un ordonnancement définitif. C'est à partir du début des années quatre-vingt que ces approches se développent vraiment, en raison des progrès réalisés dans la micro-informatique tant au niveau des performances que de celle des interfaces graphique.

Les caractéristiques communes de tels systèmes reposent sur quelques principes apportant des réponses aux principales préoccupations des utilisateurs²: prise en compte de l'instabilité des objectifs dans la formulation du problème (§ III-2.1), définition de mécanismes de proposition automatique d'une solution d'ordonnancement (§ III-2.2, page 436), organisation de l'interactivité du système (§ III-2.3, page 440), définition de la périodicité de l'ordonnancement (§ III-2.4, page 441) et définition de règles d'évaluation des solutions alternatives d'ordonnancement (§ III-2.5, page 442).

1. Décrit dans Buffa & Miller (1979, [74], p. 562 et suivantes).

2. Ces principes ont été appliqués dans la réalisation de SIADL dans de travaux de recherches contractuelles conduits sous notre direction, avec mise au point de prototypes. Il s'agit de la thèse de Riou-Long (1983, [364]) et de celle de r Raharison (1991, [356]) qui complète le travail antérieur par un couplage avec la base de données relationnelles de production présentée au chapitre XIV et avec un système-expert pilotant des règles par des méta-règles qui tiennent compte de l'état du système pour changer de stratégie d'ordonnancement et possédait une amorce de dialogue graphique.

III-2.1 Prise en compte de l'instabilité du problème d'ordonnancement

La recherche d'un ordonnancement est toujours guidée par l'objectif que l'on privilégie dans cette définition du problème (à l'exception du cas de figure étudié au § III-2.2.1, page 437) et un ensemble de contraintes. Cet objectif et ces contraintes, comme on va le voir, sont susceptibles de varier d'un jour à l'autre mais aussi au cours de la simulation.

Les interactions entre la fonction production et les autres fonctions de l'entreprise conduisent très naturellement à des modifications du point de vue à privilégier dans le pilotage du système productif: tantôt des problèmes de trésorerie conduiront à privilégier les tâches assurant les plus fortes rentrées d'argent, tantôt des préoccupations commerciales prévaudront (respect de délais...), tantôt des goulots d'étranglement se produiront sur certains postes de travail et tout sera mis en œuvre pour rétablir une situation «normale»... Entre deux ordonnancements successifs, il est normal que les objectifs et contraintes de l'ordonnancement changent. Un logiciel d'ordonnancement doit donc offrir une souplesse de formulation suffisante pour répondre à des besoins qui peuvent varier d'un jour à l'autre.

Tout aussi important, d'un point de vue opérationnel, est le fait que la hiérarchie des points de vue à prendre en compte dans le mécanisme de construction progressive d'un ordonnancement (sauf celui décrit au § III-2.2.1, page 437) repose sur une évaluation, mise à jour au cours de cette construction, d'indicateurs associés aux différents points de vue à prendre en compte. Ce mécanisme de construction progressive sera naturellement influencé par l'évolution de ces indicateurs qui pourra modifier les points de vue que l'on pouvait avoir antérieurement dans la construction de cet ordonnancement: des tâches qui n'étaient pas prioritaires, le deviennent à force de voir l'exécution de leurs opérations différées, certaines ressources deviennent ou cessent d'être des goulots d'étranglement. Si l'analyse dynamique du degré d'urgence de tâche s'effectue facilement à travers les indicateurs associés à certaines règles (Marge et S/OPN; voir l'exemple de la figure 131, page 431), il n'en est pas de même sur l'analyse de la **saturation d'un centre productif** (atelier spécialisé ou poste de travail).

Dans notre exemple, on tire des gammes décrites dans la figure 124, page 420, les charges totales de travail des différents centres productifs: 12 heures pour les fraiseuses en réglage 1, 30 heures pour les fraiseuses en réglage 2, 17 heures pour les fraiseuses en réglage 3, 45 heures pour les fours, 29 heures pour la rectifieuse et 30 heures pour le tour. Ce constat amène à penser que la spécialisation des fraiseuses sur leurs réglages d'origine n'est pas efficace¹ et qu'il faudra sans doute changer le réglage des fraiseuses en réglage 1 ou 3. Par ailleurs, les 45 heures de charge des fours sont à répartir sur deux fours, ce qui conduit à une charge, a priori, comparable à celles des autres machines. Il est cependant difficile, sur la base de ces seules informations, d'apprécier la saturation prévisionnelle du système productif étudié.

- Une première raison réside dans le fait qu'il a été choisi arbitrairement de proposer un ordonnancement sur 3 jours et il n'y a aucune raison pour que la

1. Sans compter qu'elle n'est pas possible si le nombre de réglages est supérieur au nombre de machines.

charge du travail lancé en production coïncide avec la capacité offerte sur l'horizon d'ordonnancement retenu.

- Ensuite, les arrivées de travail sur un centre productif donné peuvent n'être pas régulières dans le temps. Il s'ensuit qu'un centre productif peut sembler peu critique parce que sa charge de travail est comparativement faible mais si celle-ci arrive massivement en fin de parcours, ce poste peut s'avérer plus critique que les autres, lorsque le travail commence à lui parvenir.

Pour répondre à cette dernière remarque, il faut apprécier la saturation autrement qu'au travers d'indicateurs simples. La saturation prévisionnelle d'un centre peut s'apprécier en comparant la courbe cumulée du travail disponible, avec une courbe cumulée de travail effectué. La courbe réelle de charge de travail disponible dépend de l'ordonnancement retenu mais on peut obtenir la courbe au plus tôt en faisant l'hypothèse que toutes les opérations antérieures à une opération d'un ordre de fabrication à exécuter sur ce centre productif ont toutes pu être ordonnancées au plus tôt (ce qui revient à considérer comme infinie la capacité de production des autres centres productifs). Ce calcul est effectué dans le **tableau 102**, pour le cas **MÉCANO**. La **figure 132**, page 436, visualise l'évolution de la

TABLEAU 102
Détermination des charges cumulées disponibles au plus tôt

Machine(s)	Opération	Temps opératoire	Date t de disponibilité	Travail cumulé disponible en t	Machine(s)	Opération	Temps opératoire	Date t de disponibilité	Travail cumulé disponible en t
Fraiseuse (réglage 1)	6-1	3	0	3	Four	3-2	10	4	10
	8-1	5	0	8		7-3	2	5	12
	4-3	4	14	12		2-2	2	6	14
Fraiseuse (réglage 2)	2-1	6	0	6		6-3	6	6	20
	5-1	6	0	12		5-3	5	10	25
	1-2	6	5	18		7-5	8	10	33
	7-4	3	7	21		1-3	2	11	35
	8-3	6	10	27		2-5	7	16	42
	6-4	2	12	29		8-4	3	16	45
	3-3	1	14	30		Rectifieuse	4-1	10	0
Fraiseuse (réglage 3)	3-1	4	0	4	7-2		4	1	14
	7-1	1	0	5	5-2		4	6	18
	2-3	6	8	11	4-4		7	18	25
	8-5	6	19	17	6-6		4	18	29
Tour	1-1	5	0	5	Tour	2-4	2	14	19
	6-2	3	3	8		6-5	4	14	23
	8-2	5	5	13		6-7	7	22	30
	4-2	4	10	17					

Table des matières

Index thématique

charge de travail au plus tôt pour quelques postes de travail. L'ordonnancement réalisé ne pouvant que retarder l'arrivée de certaines tâches, amènera la courbe réelle à se déformer vers la droite. La courbe du travail cumulé au plus tôt, mise pointillés, est une ligne brisée composée de segments obliques, correspondant au fait qu'une tâche est en cours d'exécution, et (éventuellement) de segments horizontaux, correspondant à une inactivité du centre en raison d'une rupture de charge de travail¹. L'analyse conjointe de ces deux courbes permet d'affiner le concept de saturation prévisionnelle :

- l'existence de paliers implique, une possibilité de retard de certaines tâches en amont, sans provoquer de rupture de charge,
- une distance très faible entre les deux courbes à certaines dates implique que le retard de certaines tâches en amont peut amener une rupture de charge,
- l'absence totale de palier dans la courbe de production cumulée indique, si la charge de travail va jusqu'à la fin de l'horizon retenu, que la ressource considérée est un goulot d'étranglement et que l'on a intérêt à ce que les décisions d'ordonnancement ne viennent pas induire de ruptures de charge sur ce centre de production.

Ces courbes (établies automatiquement dans le logiciel) se peuvent se déformer entre deux décisions consécutives d'ordonnancement dès lors que plusieurs opérations étaient candidates pour passer sur le même centre de production².

Pour en finir avec les raisons qui peuvent conduire à une modification du problème d'ordonnancement au cours de sa résolution, il faut intégrer le fait que la formulation initiale est une simplification d'un problème complexe, ce qui implique que :

- le fait d'avoir privilégié un point de vue n'autorise pas pour autant de retenir une solution où d'autres points de vue seraient trop « malmenés » ; dès lors, il est tout à fait admissible que l'on modifie la hiérarchie des points de vue en cours de résolution du problème (le plus souvent pour la partie du problème restant à résoudre) ;
- rien ne garantit que la formulation initiale du problème soit cohérente, dans la mesure où rien ne garantit a priori qu'il existe une solution respectant l'ensemble des contraintes à prendre en compte (dates de livraison, disponibilité des ressources...) ; dès lors, il est tout à fait normal que l'on soit amené à modifier certaines contraintes (dates de livraison, par exemple) en cours de résolution du problème ;
- la solution trouvée peut satisfaire l'ensemble des contraintes explicitement retenues et s'avérer inacceptable en pratique parce qu'elle viole des contraintes (comme, par exemple, la limite physique imposée à la file d'attente devant un poste de travail) qui ont été omises dans la formulation simplifiée (on parle de **relaxation de contraintes**) parce que l'on espérait

1. On peut observer deux paliers pour la fraiseuse en réglage 3, correspondant à une rupture d'alimentation : on dispose d'une marge indépendante (au sens donné en ordonnancement de projet) de 3 heures pour les opérations 3-1 et 7-1 et d'une marge totale de $3 + 5 = 8$ heures pour l'opération 8-5.

2. En effet, la date théorique d'exécution de l'opération non retenue, qui était la même que celle de l'opération retenue (avec l'hypothèse implicite de capacité infinie pour calculer les courbes de charges cumulées au plus tôt), est retardée, avec les incidences que cela implique pour les opérations suivantes de la même tâche.

FIGURE 132
Charges cumulées au plus tôt et production cumulée au plus tôt

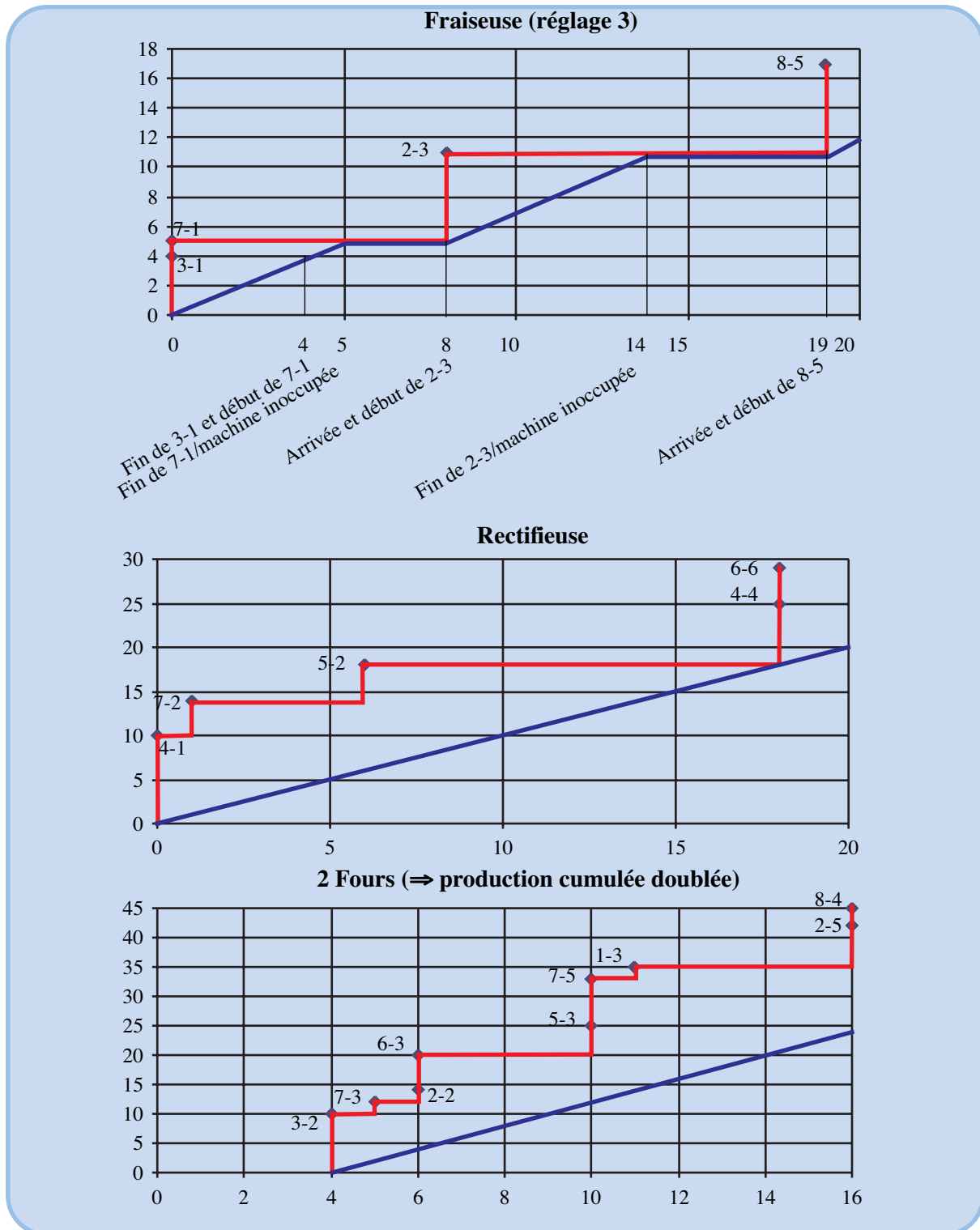


Table des matières

Index thématique

qu'elles seraient respectées par la solution obtenue; dès lors, il faudra recommencer le processus de recherche, en intégrant de nouvelles contraintes.

III-2.2 Mécanismes de proposition automatique d'un ordonnancement

Le problème à résoudre est celui de l'établissement d'une proposition d'ordonnancement (éventuellement modifiable, comme on le verra au § III-2.3, page 440)

pour exécuter un ensemble réel de tâches (ou commandes ou ordres de fabrication). Pour ce faire, trois familles d'approche sont envisageables : la première est orientée vers la recherche d'une organisation de la réactivité aux aléas par la détermination d'ensembles de solutions alternatives respectant les contraintes du problème (§ III-2.2.1), la seconde est orientée vers l'utilisation d'heuristiques (§ III-2.2.2, page 437).

III-2.2.1 Recherche d'un ensemble d'ordonnements admissibles

Une approche originale, amorcée à la fin des années soixante-dix¹ vise à organiser la réaction en temps réel aux inévitables incidents qui viendront perturber la mise en œuvre d'un ordonnancement. Il s'agit alors, non pas de rechercher de ce que l'on pourrait considérer comme étant la « bonne solution », mais de trouver un ensemble d'**ordonnements admissibles**, c'est-à-dire de solutions d'ordonnement respectant les contraintes de dates de livraison et celles de disponibilité de ressources. Cette approche ne se situe donc pas exactement dans la lignée de celle développée précédemment et qui visait à proposer un bon ordonnancement (mais avec une approche compatible avec une certaine réactivité en temps réel, aux aléas).

Concrètement, on recherche, pour chaque ressource, une **séquence de groupes d'opérations permutables** qui sont tels que les contraintes seront satisfaites quel que soit l'ordre d'exécution des opérations de chaque groupe, étant entendu que l'on n'exécute pas d'opération d'un groupe tant que toutes celles du groupe précédent n'ont pas été achevées. L'opérateur dispose donc d'indications souples qui, par rapport à un ordonnancement unique, lui permettent de faire face à des aléas en sachant qu'il respectera les contraintes initiales. Certaines perturbations importantes peuvent amener à prendre localement une décision n'appartenant pas à la séquence de groupe d'opérations permutables en cours et une aide peut être apportée pour choisir une solution permettant de retrouver rapidement un ensemble de solution admissibles, sur la base de l'état d'avancement observé sur l'ensemble du système productif au moment de la prise de décision.

Cette organisation de la réactivité est un atout très important de la démarche. Par contre, en ne visant qu'à respecter des contraintes, cette approche considère tous les ordonnancements admissibles comme équivalents. Cette position est d'autant plus acceptable que le problème est fortement contraint, c'est-à-dire que les degrés de liberté sont faibles. Si le problème est trop contraint, il n'y aura pas de solution admissible et cette approche se prêtera assez mal à une négociation des contraintes. Si le problème n'est pas assez contraint, il sera assez contestable de considérer tous les ordonnancements admissibles comme équivalents.

III-2.2.2 Utilisation d'heuristiques

La seconde approche consiste à proposer un ordonnancement en faisant appel à l'une des approches décrites au § III-1.2, page 421 (placement progressif d'ordre

1. Ces travaux de recherche ont été conduits au LAAS (Laboratoire d'Automatique et d'Analyse des Systèmes du CNRS). Les nombreux travaux qui alimentent ce courant théorique sont décrits au chapitre V (approche par propagation de contraintes) et au chapitre XIII de l'ouvrage coordonné par Lopez et Roubellat (2001, [286]). Un logiciel utilisé par plus d'une soixantaine d'entreprises exploite cette approche avec succès.

de fabrication), de préférence celles décrites au § III-1.2.2, page 424 (placement chronologiquement progressif d'opérations exécutables).

Le choix de règles à retenir peut s'appuyer, au départ, sur les enseignements généraux tirés de la simulation de systèmes fictifs (cf. § II-2.2, page 411) mais on a vu que la performance des règles dépendait de la configuration de l'atelier où le système doit être implanté, des caractéristiques des flux rentrant dans ce système et des objectifs assignés au pilotage du système. Il sera alors nécessaire, au départ, de procéder à un certain nombre de simulations pour étalonner les performances des heuristiques utilisées, soit à partir de jeux de données observées, soit à partir de données générées aléatoirement et dont les caractéristiques sont définies à partir des stabilités constatées sur le passé. Les conclusions tirées ne devront pas être définitives: il est vivement conseillé de refaire ce type d'analyse comparative de performances des règles, lorsque l'évolution de certaines caractéristiques de la demande ou du système productif risque d'invalider les performances relatives trouvées précédemment.

Une règle ayant tendance à privilégier un point de vue (le point de vue commercial ou celui de la production), des travaux visant à concilier des points de vue antagonistes ont été conduits dès la fin des années soixante. L'ordonnancement s'effectue alors sur la base d'un indicateur calculé comme une moyenne pondérée de différents indicateurs retenus dans la définition des règles élémentaires¹. La légère supériorité de cette approche se fonde sur des études rétrospectives qui ne permettent pas de garantir le maintien de cet avantage sur de nouvelles données. Cette approche a donc été abandonnée au profit d'une utilisation astucieuse d'un ensemble de règles pour résoudre des problèmes réels d'ordonnancement.

On a vu à la page 415 qu'il n'est pas forcément judicieux de travailler avec la même règle. Cette remarque faite dans les travaux pionniers des années soixante peut être généralisée dans l'espace et le temps. Il ne semble pas judicieux:

- d'utiliser les mêmes règles pour tous les postes de travail à un moment donné, parce que les problèmes ont peu de chance d'être identiques dans tout le système productif (certains postes sont plus «critiques» que d'autres parce qu'ils sont davantage sollicités comparativement et constituent, temporairement ou non, des goulots d'étranglement);
- d'utiliser la même règle au cours du temps pour un même poste de travail parce que la saturation de ce poste pourra varier au cours du temps et que les caractéristiques «moyennes» des tâches à traiter (degré d'urgence...) peuvent varier de manière significative.

Si ces remarques paraissent assez évidentes, leur traduction opérationnelle est loin d'être facile. Les premiers travaux entrepris sérieusement dans cette direction sont dus à Holloway et Nelson (1973, [233]), qui ont combiné implicitement une

1. Conway, Maxwell et Miller testent en 1963-1965 une moyenne pondérée de deux règles utilisant la même unité (le temps) et montrent que les performances obtenues sont meilleures mais que les résultats sont très sensibles au choix des coefficients de pondération. Plus tard, Hershauer et Ebert (1975, [229]) généralisent la démarche et proposent une somme pondérée d'un nombre quelconque d'indicateurs obtenus en application de règles élémentaires, où les coefficients de pondération varient entre -1 et +1 et où les valeurs prises par les différents indicateurs sont «normées» afin que l'hétérogénéité des échelles n'induisse pas de distorsion. Ultérieurement Cliffe et Mac Mannus (1980, [97]) poursuivent dans cette voie, sans apporter de preuves déterminantes de l'intérêt de ce surcroît de sophistication.

table de décision et l'utilisation de plusieurs règles sélectionnées par la table de décision. Cette approche amène les remarques suivantes :

- Si l'intérêt de cette modulation des règles dans l'espace et dans le temps semble assez évident, il reste à choisir ces règles, les moments et les endroits où elles peuvent être utilisées et à apprécier leur influence sur le comportement du système. La difficulté de la mise au point de ce pilotage fin, est atténuée s'il est possible de créer et modifier facilement une base de règles composites s'appuyant sur des indicateurs sur l'état du système au moment de la prise de décision et utilisant de manière conditionnelle plusieurs règles élémentaires¹, ce qui suppose de pouvoir tester commodément l'impact de nouvelles règles sur des jeux de données représentatifs. Un arbitrage peu évident doit être opéré ensuite entre l'application automatique de règles complexes relevant d'une approche de type système-expert (voir ci-après) et une approche dans laquelle on rend la main à un opérateur chaque fois que le problème à résoudre est considéré comme non trivial. Dans ce dernier cas, on est confronté à deux problèmes : celui de l'expertise de l'opérateur à traiter des cas complexes et celui du déclenchement judicieux de son intervention. L'introduction de cette approche dans un site productif implique un investissement qui dépasse celui de la simple acquisition d'un logiciel.
- L'usage d'heuristiques n'exclut pas la possibilité d'appliquer localement la solution optimale à un problème de dimension restreinte (centre de production doté de machines identiques, poste de production critique, flux unidirectionnels sur quelques postes de travail, non indépendance des temps de lancement des opérations sur une machine critique...). Dans cette perspective, on pourra utiliser les résultats de travaux évoqués en [section I](#).
- Une difficulté inhérente à ce type d'approche tient à l'hypothèse implicite d'indépendance des tâches à exécuter. Lorsque les tâches sont des ordres de fabrication (OF) établis dans le cadre d'un processus de MRP (voir [chapitre VI, § IV-3, page 496](#)), on ne rencontre pas de problème particulier si les dates de livraison sont respectées. Dans le cas contraire, le retard de certains OF peut empêcher l'exécution d'autres OF alors que le centre de production est disponible, en raison de l'indisponibilité de certains composants et rendre sans intérêt le respect de la date de livraison d'autres OF². S'il est assez facile de prendre en compte dans le logiciel la mise à jour de dates de livraison de certains OF consécutivement au retard d'un autre OF, il est plus difficile de prendre en compte ces interdépendances dans la gestion des heuristiques.

L'usage possible de systèmes-experts pour résoudre des problèmes d'ordonnancement mérite quelques commentaires. Les premières applications des

1. Par exemple, en supposant que l'on ait défini un indicateur synthétique de la saturation prévisionnelle d'un centre de production (sur la base des réflexions conduites en [page 433](#)), on peut imaginer d'utiliser la règle suivante qui combine des indicateurs sur l'état du système productif et des indicateurs sur les tâches à exécuter : « *si* plusieurs opérations candidates à l'utilisation d'une machine venant de se libérer et ayant une valeur positive du critère S/OPN inférieure à 2 heures, *alors si* la charge de travail sur la machine suivante est supérieure à 5 heures *alors* utiliser le critère WINQ pour départager ce sous-ensemble de candidats, *sinon* retenir l'opération suivie d'une opération à exécuter sur le centre de production ayant l'indicateur de saturation prévisionnel le plus élevé »

2. L'impossibilité de respecter une date de livraison pour un OF d'une référence de niveau i peut déclencher mécaniquement un retard pour d'autres OF de référence de niveau $i - 1$ (ou plus en cascade) et, ce faisant, rendre inutile le respect de la date de livraison d'autres OF portant sur des références de niveau i utilisées également pour les références de niveau $i - 1$ sus-visées.

systèmes-experts¹ dans la résolution de problème d'ordonnancement remontent au début des années 1980 : une équipe de la Carnegie Mellon University, sous la conduite de Fox explore l'approche « Intelligence Artificielle » dans le cadre du projet ISIS², suivi d'autres équipes de recherche un peu partout dans le monde (en France notamment avec les travaux du CERT aboutissant au logiciel OPAL). Il est préférable de considérer le système-expert comme une composante importante mais pas exclusive d'un système s'appuyant également sur une base de données (décrivant le système productif, son utilisation prévisionnelle, les gammes et nomenclatures, ainsi que les commandes à exécuter) et un programme élémentaire de simulation, chargé d'exécuter les décisions prises par le système-expert. En effet, les tentatives du « tout système-expert » ont très rapidement montré leurs limites. L'intérêt principal du système-expert est de permettre une modulation facile dans l'espace et dans le temps des heuristiques à utiliser : des règles de niveau haut (méta-règles) surveillent l'évolution de l'état du système et de l'exécution des OF et provoquent, si nécessaire, le basculement d'un ensemble de règles de décision à un autre ensemble jugé plus pertinent dans le nouveau contexte.

III-2.3 Système interactif

L'instabilité des problèmes et le pilotage des heuristiques nécessitent l'usage d'une interface graphique permettant à la fois une compréhension rapide de problèmes et de propositions de solutions alternatives et une facilité de prise en compte de décisions prises.

L'usage de tels SIAD repose sur l'idée que l'usage d'heuristiques et de systèmes-experts doit être considéré comme une amélioration des procédures de tâtonnement utilisées par les agents de planning à la recherche d'une solution de niveau satisfaisant mais qu'il n'en reste pas moins nécessaire d'éviter tout automatisme en la matière en permettant au responsable de modifier ponctuellement certains arbitrages pour améliorer la proposition d'ordonnancement (l'analyse de ces modifications pouvant, du reste, conduire à de nouvelles heuristiques). En 1978, une expérience conduite par Hurrion³ montrait que l'utilisation de simulation interactive avec aide graphique donnait des résultats meilleurs que ceux obtenus par un traitement global et en temps différé du problème par les principaux logiciels industriels. Depuis, un certain nombre de travaux ont confirmé l'intérêt de cette vision. Pour tirer partie de cette approche, de nombreuses idées

1. *Note de la page précédente*. Le principal atout de cette approche est de permettre de travailler avec une liste de règles du type « si condition satisfaite alors conclusion vraie », d'autant plus facile à mettre à jour qu'une adjonction ou une suppression de règle ne nécessite pas de modification des programmes existants. Une condition peut être relative à l'état actuel ou prévisionnel de ressource(s) ou d'ordre(s) de fabrication. Une conclusion peut être la modification de l'état actuel ou prévisionnel de ressource(s) ou d'ordre(s) de fabrication, consécutive ou non à la réalisation d'un calcul ou d'une prise de décision.
2. Voir Fox, Allen, Smith & Strohm (1983, [158]). Voir également le numéro spécial consacré à l'Intelligence Artificielle en gestion de production de la revue *International Journal of Production Research* (volume XXVI, n° 5, mai 1988).
3. Voir Hurrion (1978, [236]). Ce travail académique reposait sur une vision assez simple de la réalité : les heuristiques se limitent à quelques règles locales, système productif simple (pas de machines identiques, pas de contraintes de non-interruption de certaines tâches, temps continu...), utilisation d'un seul critère d'évaluation des performances, absence de rétroaction de la résolution sur la définition des problèmes. Par contre, le pilotage de chaque machine était indépendant de celui des autres machines et l'opérateur, qui voyait s'afficher progressivement les propositions d'ordonnancement, pouvait intervenir à tout instant pour imposer son choix.

sont exploitables pour obtenir une bonne synergie entre le système et son utilisateur :

- proposition de solutions sous forme de graphiques de Gantt, affiché sur un moniteur graphique « haute définition » de grand format avec possibilité de déplacement facile (scrolling) dans toutes les directions ;
- utilisation de la couleur pour assurer une meilleure perception des informations à privilégier à un moment donné : par exemple, utilisation d'une couleur choisie par l'opérateur lui permet de mieux visualiser la progression prévisionnelle d'une tâche donnée ou, encore, pour faciliter la détection de goulot d'étranglement, coloration automatique du graphique Gantt, différenciée en fonction de l'importance de la file d'attente, devant chaque poste de travail, à chaque période ;
- pointage par souris d'une opération programmée :
 - pour demander des informations sur l'état prévisionnel du système à ce moment (usage de graphiques et d'indicateurs de synthèse),
 - pour demander une explicitation du raisonnement ayant conduit à la programmation de cette opération de préférence aux autres,
 - pour modifier la décision et relancer la simulation,
 - etc. ;
- représentations de l'évolution prévisionnelle de caractéristique du système productif (saturation, par exemple) ou de la production (retards, par exemple)
- inclusion de mécanismes de capitalisation d'expérience pour faire évoluer la base des règles (voir les remarques faites sur ce point à la [page 439](#)) ; c'est très certainement le problème le plus difficile à résoudre et l'un des grands enjeux des années à venir.

Table des matières

Index thématique

III-2.4 Périodicité et horizon de l'ordonnancement

Si l'on n'a pas adopté la démarche consistant à organiser la réactivité par l'établissement d'un ensemble d'ordonnements admissibles (§ III-2.2.1, [page 437](#)), on est confronté au fait que les aléas rencontrés dans l'exécution d'un ordonnancement rendent peu probable son respect au-delà d'un (ou, au maximum, deux jours). Pour cette raison, il est souhaitable de régénérer la proposition tous les jours (ou, au maximum, tous les deux jours), pour tenir compte de l'exécution effective de l'ordonnancement et de l'arrivée de nouveaux OF. On obtient alors un « ordonnancement glissant » dont la philosophie est voisine de celle qui sous-tend les techniques de planification glissante de type MRP.

Cette périodicité relativement élevée du recalcul de l'ordonnancement n'implique pas qu'il soit inutile de proposer un ordonnancement au-delà de ce qui a des chances raisonnables d'être réalisé. En effet, une programmation sur plusieurs jours permet d'obtenir une visibilité de certains problèmes à venir que l'on ne peut pas déceler à temps avec un « comportement myope ». Cet éclairage de l'avenir moins immédiat permet éventuellement d'effectuer des arbitrages différents pour des décisions qui ont toutes les chances d'être exécutées et, parfois même, prendre des décisions qui ne semblent pas se justifier sur le très court terme (modification de réglage de machine, appel à des heures supplémentaires...). Cet horizon d'ordonnancement sera donc supérieur à l'intervalle de temps séparant deux régénérations successives d'ordonnancement. Cela étant, il est inutile de

l'allonger au point que le système productif soit globalement en sous-charge au cours des dernières périodes d'ordonnancement.

Cela étant, l'occurrence d'aléas pose la question de savoir ce qu'il convient de faire sur le terrain (par exemple, comment prendre en compte une nouvelle commande urgente ou faut-il inverser le séquençement de deux opérations sur une machine, en raison du retard pris par la première des deux tâches concernées). Laisser les opérationnels sans instruction, c'est courir le risque d'une amplification de l'impact d'un aléa. On peut alors recourir à une démarche proposée par Holloway, Nelson et Suraphongschai (1979, [233]). Parmi les méthodes heuristiques qu'ils ont testées, celle qui donne les meilleurs résultats consiste à créer deux listes de priorité: la première est générée lors du calcul centralisé de l'ordonnancement et la seconde est générée localement lors des arrivées des tâches nouvelles ou d'aléas. Lorsqu'une machine se libère, l'arbitrage entre les deux tâches qui ont la plus forte priorité dans chacune des deux listes, se fait sur la base de la plus faible marge disponible (différence entre le temps restant avant la date de livraison et le cumul des temps opératoires des opérations restant à faire), ce qui ne conduit pas systématiquement à une utilisation de la machine (cas d'une tâche de la première liste, non encore arrivée à la machine au moment où le calcul est fait, et ayant la plus faible marge disponible). Il ne s'agit là, bien entendu que d'un exemple de solutions utilisables pour faire face aux aléas. Cela étant, la tendance d'un suivi en temps réel de la production et les progrès des moyens informatiques mobilisés permettent de relancer beaucoup plus fréquemment les calculs d'ordonnancement.

III-2.5 Critères d'évaluation de l'ordonnancement

L'évaluation économique d'un ordonnancement s'impose à terme pour les sites de production de biens ou services où le respect des délais n'est pas le critère exclusif de jugement et qui sont dotés de systèmes offrant à leurs responsables de véritables alternatives décisionnelles. Dans les autres cas de figure, ce qui suit ne présente qu'un intérêt académique. Nous examinerons tout d'abord la problématique des critères de jugement et les fondements d'un critère économique (§ III-2.5.1), avant d'appliquer ces principes sur notre exemple numérique (§ III-2.5.2, page 447).

III-2.5.1 La problématique des critères d'évaluation

III-2.5.1.1 Les indicateurs traditionnels

On a vu que la formulation du problème d'ordonnancement était presque toujours simplifiée. Dès lors, il est indispensable que le décideur ait connaissance de toutes les conséquences des choix proposés. Cela implique qu'en plus du planning prévisionnel sous forme de Gantt et de tableaux, un certain nombre d'indicateurs soient disponibles pour faciliter la détection d'éventuels problèmes ainsi que la recherche d'améliorations de la solution.

Les indicateurs recensés dans la «littérature» ne sont pas tous suffisants pour décrire toutes les conséquences des décisions à prendre et leur pertinence dépend du type d'usage qui en est fait. Certains indicateurs ont pour vocation de mesurer des performances «globales» en régime de croisière (durée moyenne d'achèvement des tâches par exemple) et sont sans signification sur courte période. Leur

intérêt est autre : ils permettent de comparer les performances d'heuristiques dans des simulations périodiques de grande envergure. Par contre, les indicateurs associés à des ressources individuelles ou des OF particuliers (taux d'occupation des postes de travail, temps perdus en réglage, indicateur d'avancement des différentes tâches...) qui sont délaissés dans la littérature, présentent un intérêt évident pour les opérationnels.

Il est cependant insuffisant de s'en tenir là. La multiplicité des informations fournies par les indicateurs portant sur des données physiques rend difficile tout jugement synthétique. L'introduction d'un indicateur économique donne, de ce point de vue, un éclairage complémentaire dont l'intérêt est indéniable.

III-2.5.1.2 Les bases d'un indicateur d'évaluation économique

Les approches traditionnelles de la comptabilité de gestion sont inefficaces pour résoudre le problème posé. On fera appel à un mécano de quatre concepts (introduits au § II-1.1, page 74, du chapitre I) pour définir un indicateur économique d'évaluation globale d'une décision complexe d'ordonnement et de mobilisation temporaire de ressources additionnelles, qui soit utilisable de manière pertinente dans la comparaison de décisions alternatives et facilement acceptables par les gestionnaires.

III-2.5.12a) Le concept de marge

La notion de marge, différence entre un cumul de produits et un cumul de charges est ancienne¹ et a été successivement appliquée au concept de charges directes et à celui de charges variables pour mesurer la contribution d'une production à la couverture de charges non prises en compte et à la sécrétion de l'excédent brut d'exploitation. L'indicateur économique d'évaluation de la décision d'ordonnement doit être une marge reflétant les conséquences des décisions prises, tant au niveau des charges que des produits. Il s'ensuit que plus grande sera la valeur de cet indicateur, meilleure sera la décision. La légitimité de cet indicateur aux yeux des gestionnaires repose sur le fait (voir § III-2.5.12e, page 446) que si l'on se situe dans le cadre fictif d'une programmation en univers certain, couvrant un exercice budgétaire, il suffirait de retrancher à cette marge les charges non prises en compte (lesquelles sont indépendantes des décisions à évaluer) et d'effectuer quelques corrections mineures, pour retrouver l'excédent brut d'exploitation de l'exercice.

Le choix de cette caractéristique amène deux commentaires sur certains problèmes qui peuvent surgir lors de son usage.

- La détermination d'une marge implique la connaissance de recettes. De nombreux sites industriels travaillent pour d'autres entités d'un même groupe, ce qui implique qu'il n'y a pas de recette associée à l'exécution d'ordre de fabrication. Le problème posé est alors celui beaucoup plus général des prix de cession dont la solution, moyennant certaines précautions méthodologiques, permet de se ramener au problème précédent.

1. Voir Johnson & Kaplan (1987, [247]) et Berliner & Brimson (1988, [47]), pour une mise en perspective historique de ces concepts; voir également l'article de Giard, *Une comptabilité de gestion en crise*, dans l'ouvrage collectif d'ECOSIP (1993, [135]).

- Il n'est pas gênant d'intégrer dans ce calcul, des charges indépendantes de ces décisions à évaluer, à condition que ces charges soient identiques pour toutes les alternatives étudiées, puisque la comparaison d'alternatives passera par l'analyse d'une différence de marges (on reviendra sur ce point au § III-2.5.12c, page 445).

III-2.5.12b) Distinction entre charges fixes et charges variables

La distinction économique entre charges fixes (ou de structure) et charges variables (ou opérationnelles) avec le volume d'activité, remonte au XIXe siècle mais son utilisation en gestion est plus récente. La notion de variabilité se réfère au niveau d'activité. Celle de charges fixes s'apprécie à la fois en référence à une période au cours de laquelle une production doit être réalisée et à une plage d'activité.

- La référence implicite au découpage temporel retenu s'explique par le fait que plus la période de production considérée est grande, plus il est facile d'adapter le niveau des ressources (principalement hommes et machines) à celui juste requis par le volume de production désiré pour cette période de production.
- La référence implicite à une plage d'activité s'explique par le fait que les charges fixes varient de manière discontinue. Un «palier» de charges fixes permet donc une production susceptible de varier dans une certaine plage de volume d'activité (qu'il n'est du reste pas toujours aisé de déterminer avec précision).

Les applications de ce concept restent assez limitées :

- le raisonnement bien connu du point mort remonte¹ aux années 1903-1904 et constitue un premier modèle permettant d'analyser l'incidence de la séparation des charges fixes et variables sur la rentabilité de l'entreprise ;
- l'utilisation systématique de cette distinction s'est répandue à partir des années cinquante, dans le cadre de la méthode des coûts variables (ou *direct costing*).

La notion de marge, introduite dans l'approche des coûts directs, s'adapte sans difficulté à l'approche du coût variable : dans une logique de point mort généralisé, le cumul des marges sur coûts variables des différents produits contribue à la couverture des charges fixes et à la constitution d'un excédent d'exploitation. La principale difficulté rencontrée dans la mise en œuvre de la méthode du coût variable réside dans la dissociation des charges fixes et des charges variables.

Dans le problème de l'évaluation d'un ordonnancement sur un horizon de quelques jours, on peut considérer comme charges fixes les charges que l'entreprise supportera si elle décide de ne rien produire. Dans cette optique :

- le personnel présent en heures normales constitue à l'évidence une charge fixe sur l'horizon retenu (que l'on peut déterminer en faisant appel à la technique classique d'abonnement de charges) ;
- les charges dont l'importance découle directement de la programmation retenue, comme la consommation de fluides ou le coût des heures supplé-

1. Voir sur ces points, l'excellent article de Kaplan (1984, [254]).

mentaires, seront considérées comme variables puisque leur montant varie bien avec la production décidée;

- l'amortissement des équipements sera considéré comme une charge fixe de période ou comme une charge variable (ou comme un panachage des deux solutions), selon la conception retenue par les spécialistes de comptabilité de gestion de l'entreprise.

III-2.5.12c) Le concept de charge différentielle

D'autres implications du concept de charge fixe ont été analysées par Clark en 1923 [95], notamment avec l'introduction de la notion de **charge différentielle** ou **charge incrémentale**, qui associe à la mise en œuvre d'une décision, la variation de charge qui en découle. Historiquement, ce concept a présenté un intérêt tout particulier dans l'analyse des décisions relatives à l'investissement (dans l'établissement de bilans différentiels) ou de désinvestissement, ce dernier cas ayant conduit à la notion de charge écludable.

On a indiqué que l'indicateur économique retenu pour synthétiser l'ensemble des conséquences d'une décision complexe d'ordonnancement et de mobilisation temporaire de ressources additionnelles s'analysait comme une marge. La logique différentielle implique que la comparaison de deux décisions complexes alternatives passe par l'analyse de la différence de leurs marges associées et que celle-ci ne doit intégrer que les conséquences de l'usage des degrés de liberté laissés au décideur, tant au niveau des charges que des produits.

Pour qu'il en soit bien ainsi et puisque la marge est une différence entre des produits et certaines charges, il faut, d'une part, que la différence des produits reflète bien la différence effective de valeur de production sortie entre les alternatives et, d'autre part, que la différence effective de charges entre les alternatives étudiées corresponde à des variations de flux de trésorerie observables. On considérera donc comme charge associée à une décision complexe :

- le décaissement effectif qui résulte de l'appel à des heures supplémentaires ou de toute ressource supplémentaire dont on décide la mobilisation dans le cadre décisionnel étudié ici; en effet, l'accroissement de coût, par rapport à celui des heures normales, est totalement inapproprié dans la mesure où cette mobilisation de ressources additionnelles est une décision qui n'a rien de fatal et que le gestionnaire prend dans le cadre de la marge de manœuvre dont il dispose;
- les pénalités de retard qui doivent être comptabilisées dès qu'il apparaît qu'un retard est devenu inévitable (et non lorsqu'elles seront effectivement supportées).

En ce qui concerne les coûts variables directs, tels qu'ils ont été définis précédemment, l'usage du concept « différentiel » conduit aux mêmes conclusions (puisque l'on se base implicitement sur une solution de référence qui consiste à ne pas produire et donc à ne pas engager ce type de dépenses).

Deux remarques complémentaires peuvent être faites :

- L'approche par un calcul de coûts d'exécution des OF ne peut être retenue. Il faut calculer un coût global d'utilisation des ressources mobilisées par les décisions prises, toute autre solution est arbitraire et s'avère impropre à

l'évaluation de décisions complexes. On peut ajouter que le coût d'un OF ne saurait être influencé par le fait qu'il est réalisé partiellement en heures supplémentaires ou qu'il occasionne un changement de réglage de machine. Cette solution serait en effet, parfaitement arbitraire puisque ces surcoûts seraient à imputer à d'autres OF si l'on modifiait l'ordonnancement. Il faut donc considérer que l'appel à des ressources excédentaires et la non utilisation de ressources à des fins productives (réglages, arrêts par manque de travail...) sont imputables à la décision globalement prise et non à un OF particulier.

- Si la tension sur le système productif est trop grande, suite à des retards antérieurement pris ou à de mauvaises négociations des délais, il sera difficile d'éviter certaines charges, comme celles résultant de l'usage d'heures supplémentaires ou de l'application de pénalités. Cela étant, la différence des marges des alternatives étudiées ne reflétera que les conséquences de l'usage des degrés de liberté, puisque les retards inévitables conduiront aux mêmes pénalités.

III-2.5.12d) Le concept de valeur ajoutée directe

La notion de **valeur ajoutée directe** à laquelle nous faisons appel combine deux concepts. Celui de valeur ajoutée est, grosso modo pour les comptables, la différence entre la valeur de la production d'un exercice et la consommation en provenance de tiers (notamment achats de composants et matières premières) requises par cette production. Sur le court terme retenu et compte tenu de l'objectif assigné à l'indicateur, la valeur ajoutée mesurée est strictement associée à la production programmée sur l'horizon retenu et doit donc exclure des consommations qui ne sont pas liées à la décision étudiée (prestation de nettoyage par des tiers, par exemple). C'est la raison pour laquelle le qualificatif de direct a été rajouté pour signifier que ne sont prises en compte, que les consommations liées à la seule production du court terme, à l'exclusion de consommations indirectes.

Cette valeur ajoutée directe sera donc utilisée pour mesurer la valeur de la production réalisée consécutivement à la décision complexe d'ordonnancement et de mobilisation temporaire de ressources additionnelles. Le seul problème qui se pose est celui d'OF qui ne sont pas exécutés en totalité durant la période d'ordonnancement étudiée. Une partie de cette valeur ajoutée directe sera à porter au crédit de cette décision complexe mais laquelle? À ce niveau, il est impossible d'éviter une certaine part d'arbitraire. Une solution possible consiste, à retenir au titre de la période, une quote-part de la valeur ajoutée de l'OF; cette quote-part peut être le quotient du temps d'exécution de l'OF durant la période, par le temps total d'exécution de l'OF. Cette solution est contestable si le coût horaire des ressources mobilisées pour une opération diffère fortement des coûts correspondants pour les autres opérations; dans ce cas, la parade consiste à travailler avec des heures pondérées par les coûts.

III-2.5.12e) L'établissement d'un compte de résultats associé à la décision d'ordonnancement

L'utilisation de ces concepts permet d'établir un *compte de résultat prévisionnel du court terme* dont le solde est une marge qui reflète les conséquences prévisionnelles des décisions d'ordonnancement et de mobilisation

momentanée de ressources additionnelles. Son acceptation par les gestionnaires est facilitée par le fait que si l'on se situe dans le cadre fictif d'une programmation en univers certain, couvrant un exercice budgétaire, il suffirait de retrancher à cette marge les charges non prises en compte et d'effectuer quelques corrections mineures pour retrouver l'excédent brut d'exploitation.

Cela étant, l'objectif poursuivi étant de permettre la comparaison de décisions alternatives complexes, c'est donc la différence de leurs marges associées qui permet d'indiquer la meilleure alternative d'un point de vue économique (ce qui ne signifie pas que d'autres points de vue ne soient pas à prendre en compte dans la décision finale). On notera que, dans cette différence, les charges fixes disparaissent ce qui élimine les critiques que l'on pourrait faire à l'usage de certaines conventions les concernant. Par ailleurs, l'arbitraire de la solution retenue pour définir les quotes-parts de valeurs ajoutées directes imputables aux décisions prises, a une incidence d'autant plus faible que l'horizon d'ordonnancement retenu est grand (ce qui accroît le nombre de commandes exécutées en totalité). Dans le cas contraire, les «effets de bord» peuvent être importants et la valeur des encours de début et de fin de période, forte par rapport à la valeur de la production.

III-2.5.2 Exemple d'évaluation économique d'un ordonnancement

On illustrera concrètement l'application de ces principes en prenant appui sur l'exemple numérique du cas **MÉCANO**, introduit au § III-1.1, page 418, pour lequel une solution a été proposée (figure 130, pages 430 et 431). Des informations complémentaires pour permettre le calcul de la valeur ajoutée directe associée à chaque commande ainsi que les dates de livraison (implicitement définies avec une convention de fin de journée) sont fournies dans le tableau 103. Il faut ajouter que la commande 1 est la seule à avoir été commencée antérieurement et l'on supposera que 50% du travail à effectuer sur cette commande a déjà été réalisé antérieurement.

Table des matières

Index thématique

TABLEAU 103
Caractéristiques des commandes à exécuter

Commandes	Date de livraison	Coût des composants achetés	Prix de vente	Valeur ajoutée directe
Commande 1	Jour 1	20	1 380	1 360
Commande 2	Jour 3	30	1 830	1 800
Commande 3	Jour 3	25	980	955
Commande 4	Jour 3	80	2 130	2 050
Commande 5	Jour 3	25	1 380	1 355
Commande 6	Jour 3	30	2 080	2 050
Commande 7	Jour 4	25	1 515	1 490
Commande 8	Jour 5	30	1 965	1 935

Par ailleurs, la figure 123, page 419, donne pour chaque atelier:

- un montant de charges fixes quotidiennes qui correspondent au coût des heures normales disponibles et à une quote-part des amortissements,

- un taux horaire des heures supplémentaires,
- un coût horaire variable direct qui correspond à une consommation d'énergie et fluides (y compris pendant les réglages, pour les fraiseuses).

Il faut ajouter qu'une pénalité de 200 dollars lidurien est supportée par **MÉCANO** pour chaque jour de retard subi par une commande, et ce quelle que soit la commande¹.

La solution de la [figure 130](#), page 430 et 431 (que l'on a dit ne pas être le meilleur), fait un large appel aux possibilités offertes d'heures supplémentaires. L'indicateur économique est calculé dans la perspective implicite d'une comparaison avec celui d'une solution alternative (non explicitée ici mais qui, par exemple, éviterait de faire appel aux heures supplémentaires).

La détermination des *coûts variables directs* nécessite de calculer à partir de la solution de la [figure 130 de la page 430](#), le nombre d'heure de fonctionnement pour chaque machine et chaque jour. Un extrait de cette [figure 130](#) (ordonnancement du jour 2) est repris à la [figure 133](#), pour expliquer la constitution du tableau des heures de machines utilisées. La valorisation de ces heures implique l'utilisation d'un coût donné à la [figure 123 de la page 419](#) que la [figure 133](#) reprend en extrait. Cet exemple détaille le calcul des coûts variables directs de l'atelier de fours sur chacun des 3 jours constituant l'horizon d'ordonnancement.

Le calcul du coût des *heures supplémentaires* décidées, qui s'analyse comme une charge différentielle liée aux décisions analysées, nécessite de calculer sur la [figure 130](#) le nombre d'heures supplémentaires pour chaque atelier et chaque jour. Un extrait de la [figure 130](#) (ordonnancement du jour 2) est repris à la [figure 134 de la page 450](#), pour expliquer la constitution du tableau des heures supplémentaires. Un extrait de la [figure 123 de la page 419](#) (description de l'atelier de fours) est repris à la [figure 134 de la page 450](#), pour expliquer le processus de valorisation aboutissant au calcul des coûts additionnels d'heures supplémentaires de chacun des 3 jours constituant l'horizon d'ordonnancement.

L'autre poste à prendre en compte dans les charges additionnelles est la *pénalité de retard*. À la fin du premier jour, la commande 1 aura au moins un jour de retard, ce qui conduit à une pénalité de 200 au titre du jour 1. Le jour suivant, l'analyse de l'ordonnancement montre que, pour toutes les commandes devant être livrées le lendemain, il reste moins de 12 heures de travail, ce qui laisse a priori la possibilité de les achever en heures supplémentaires sans avoir à payer de pénalité. Le lendemain, la commande 3 n'est pas achevée, ce qui conduit à devoir supporter au titre de cette troisième journée, une pénalité de 200 \$ (qui aurait été évitée si le four 2 avait traité l'opération 3-2, au lieu de l'opération 7-5). Ces informations sont reprises directement dans le tableau de synthèse de la [figure 136, page 453](#).

1. L'usage de pénalités fictives peut être retenu pour permettre la prise en compte d'une incidence économique des retards de livraison; en effet, en l'absence de telles pénalités, l'intérêt économique de la mobilisation de ressources additionnelles peut devenir nul et le jugement s'effectuer sans prise en compte d'une évaluation économique; la pénalité fictive devient alors un paramètre de pilotage du système dont la valeur sanctionne plus ou moins fortement sa défaillance.

FIGURE 133
Exemple de calcul des coûts variables directs

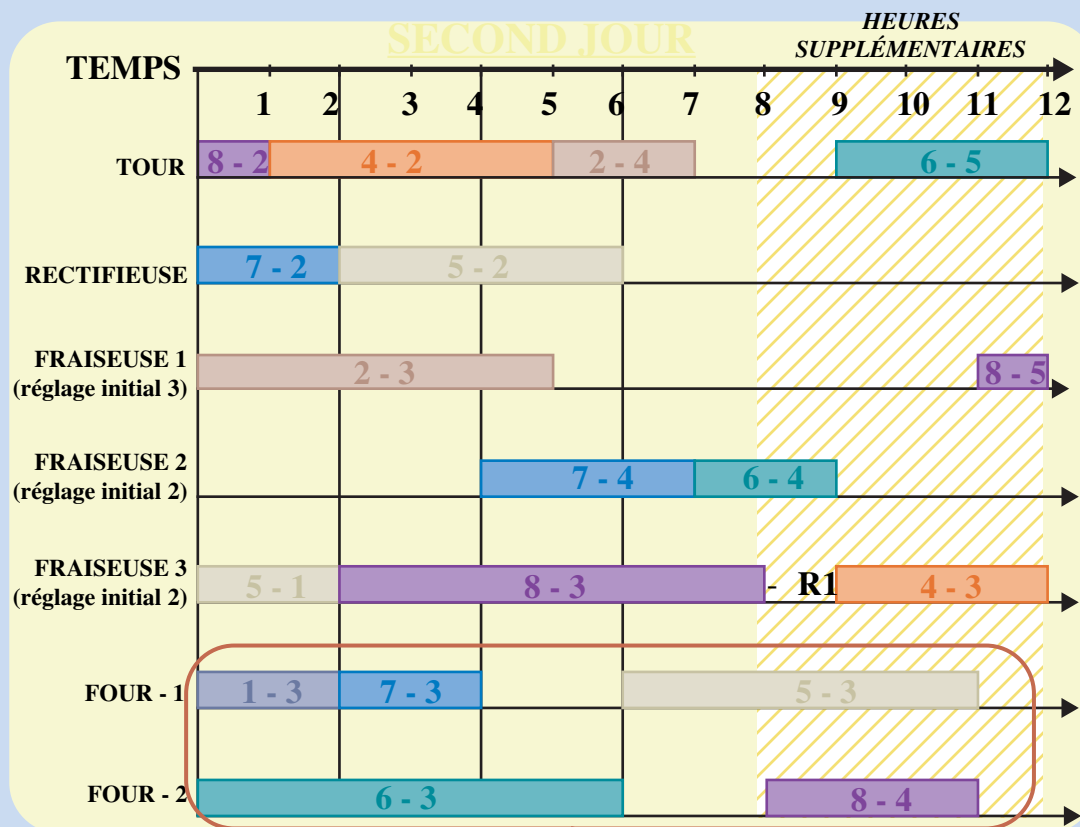


Table des matières

Index thématique

	Heures-machines utilisées			Coût variable direct		
	Jour 1	Jour 2	Jour 3	Jour 1	Jour 2	Jour 3
Tours	12	10	8	96	80	64
Rectifieuse	12	6	11	84	42	77
Fraiseuses	36 [†]	23	6	288	184	48
Fours	2	18	15	32	288	240
Total	-	-	-	500	594	429

†. y compris 6 heures de réglage

288 \$ = 18 h x 16 \$

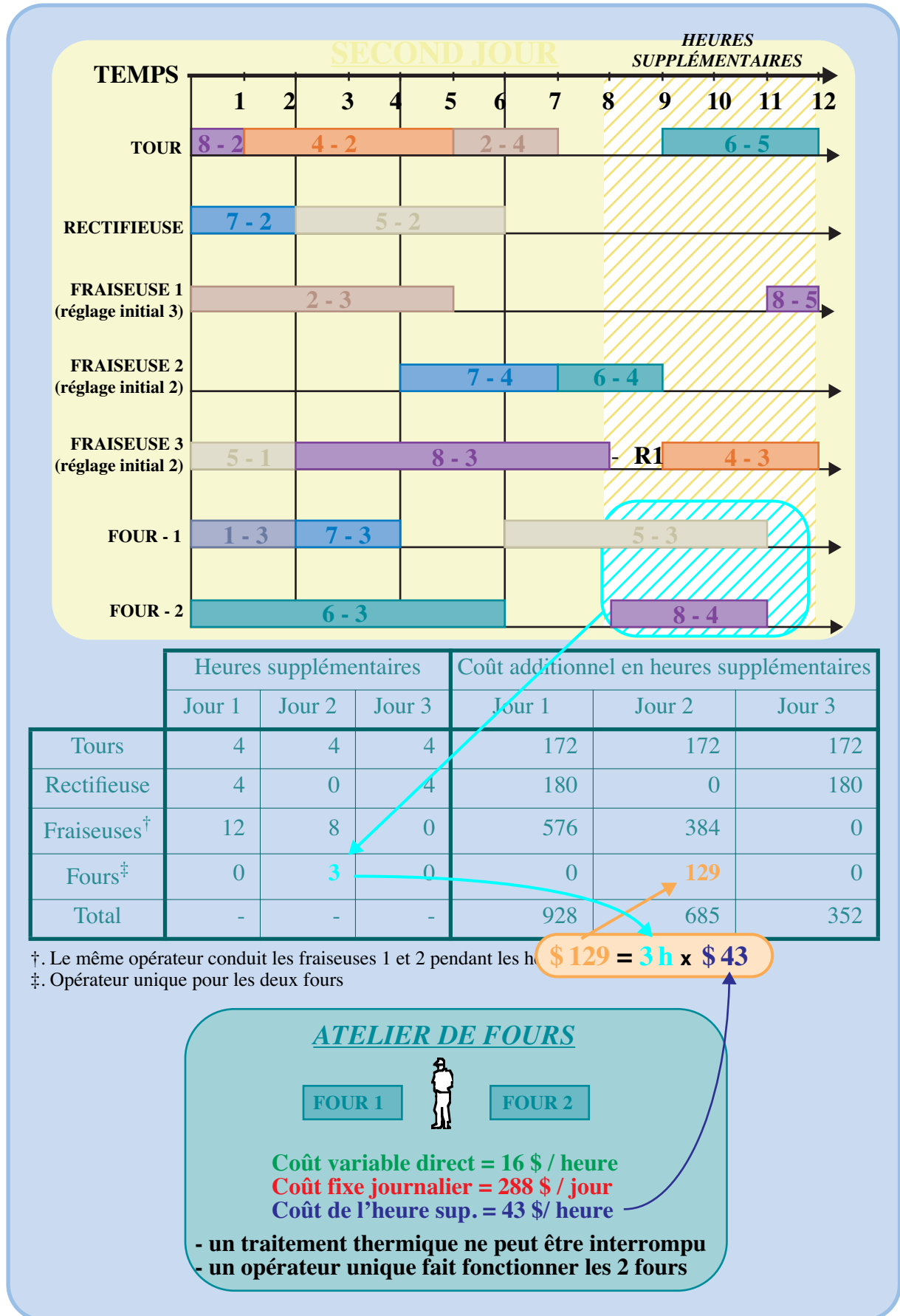
ATELIER DE FOURS

FOUR 1 FOUR 2

Coût variable direct = 16 \$ / heure
 Coût fixe journalier = 288 \$ / jour
 Coût de l'heure sup. = 43 \$ / heure

- un traitement thermique ne peut être interrompu
- un opérateur unique fait fonctionner les 2 fours

FIGURE 134
Exemple de calcul de coûts additionnels



La figure 135 de la page 452 explicite le calcul de la *valeur ajoutée directe* produite chaque jour. Il reprend dans sa partie supérieure la figure 130; le calcul est explicité pour la commande 2 qui est achevée dans les 3 jours. La répartition de la valeur ajoutée directe est calculée au prorata du temps exécuté au cours d'une journée.

L'établissement du compte de résultats prévisionnel est donné à la figure 136 de la page 453. Cette figure reprend les informations établies dans les figures 133 à 133; s'y ajoutent les charges fixes quotidiennes données dans la figure 123, page 419 (reprise partiellement dans la figure 134) et les pénalités de retard dont le calcul a été expliqué précédemment.

Le résultat n'est pas à évaluer indépendamment pour chaque jour, mais pour le premier jour ou les deux premiers jours ou les trois premiers jours (etc.) afin de tenir compte de l'interdépendance des décisions. Il convient de ne pas omettre, dans la comparaison de deux alternatives, cette modulation du jugement dans le temps pour éviter un comportement trop myope. En effet, la solution la meilleure sur le premier jour peut s'avérer la plus mauvaise sur trois jours.

Une dernière remarque mérite d'être faite sur un autre usage possible de ce type d'indicateur. Il est facile de calculer la variation de marge générée par l'introduction d'une nouvelle tâche dans le système productif. Ce calcul différentiel présente un intérêt opérationnel pour les industries travaillant à la commande qui peuvent y trouver:

- une aide précieuse dans l'élaboration des devis,
- une autre base pour le calcul de la partie variable de la rémunération des commerciaux (au lieu du chiffre d'affaires¹) qui améliore naturellement la coordination entre le Commercial et la Production; en effet, en période de surcharge il est plus intéressant pour le commercial et l'entreprise de proposer au client l'alternative «prix élevé – exécution rapide» ou «prix réduit – exécution différée», alors qu'en période de sous-charge, l'intérêt commun est alors de proposer au client si possible une prestation de type «prix élevé – exécution rapide», avant de se rabattre sur une prestation de type «prix réduit – exécution rapide».

1. qui n'induit aucune incitation à tenir compte de la charge du système

FIGURE 135
Exemple de calcul de valeur ajoutée directe

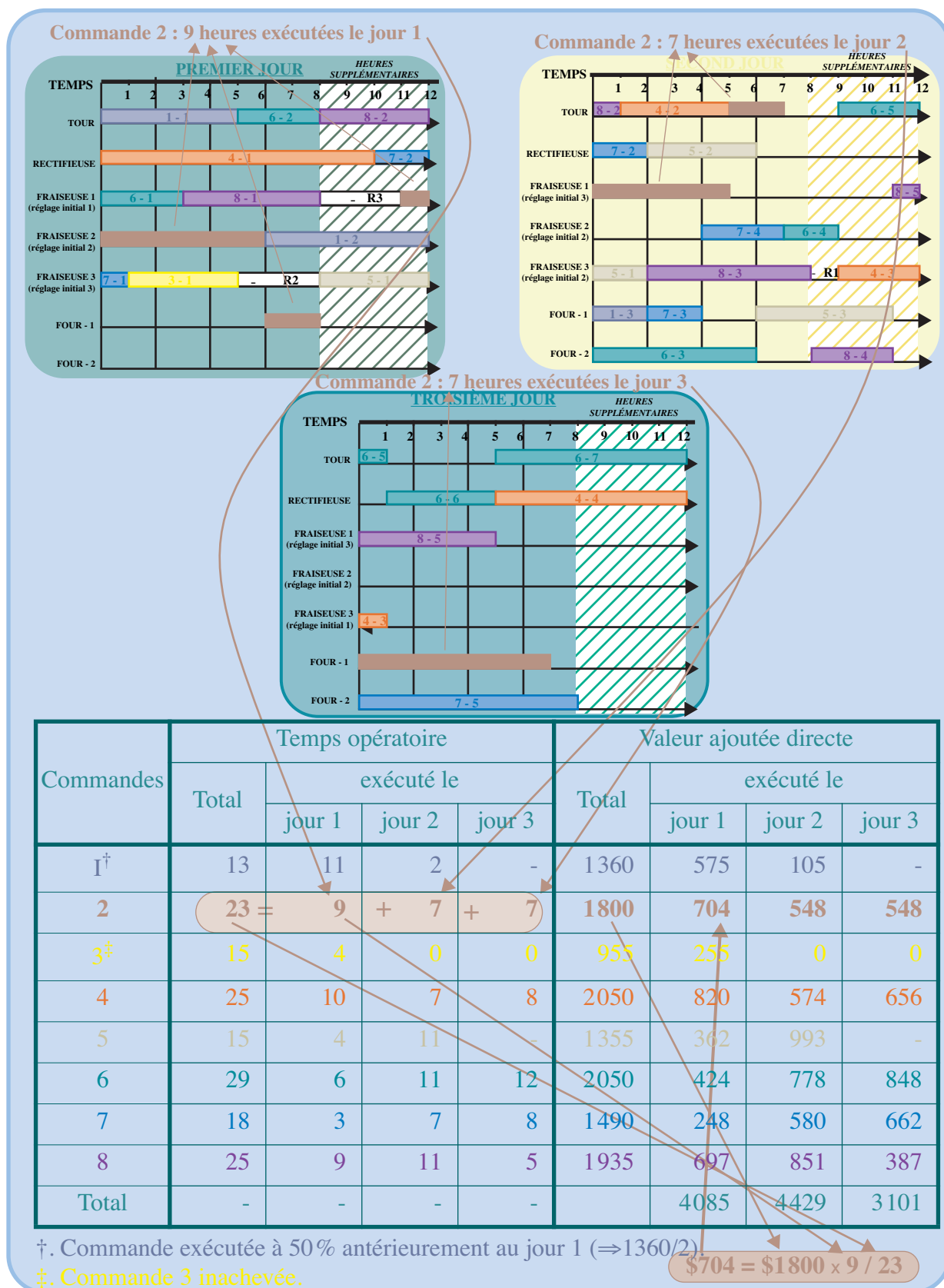


FIGURE 136

Exemple de calcul des marges associées aux décisions prises

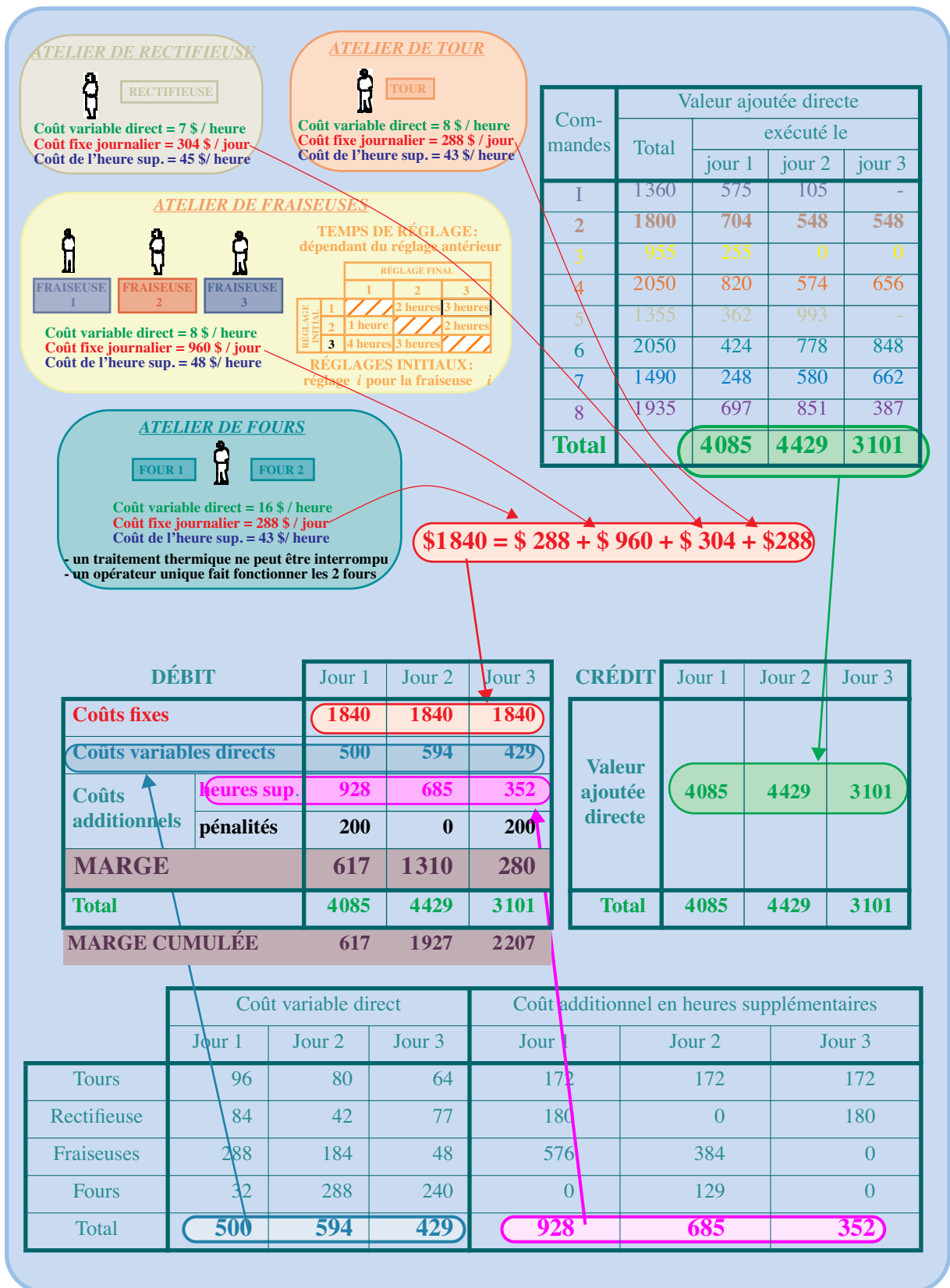


Table des matières

Index thématique

Chapitre VI

TECHNIQUES DE PLANIFICATION DE LA PRODUCTION

On a vu au [chapitre I \(page 45\)](#) que la planification de la production est une décision tactique qui répond à un souci de régulation à moyen terme de la production et qu'elle constitue un lien entre les décisions opérationnelles du court terme et les décisions stratégiques du long terme. Cette problématique se retrouve principalement dans les systèmes productifs produisant pour stock ou assemblant à la commande. La principale technique disponible, très empirique dans ses fondements, est celle de la MRP à laquelle ce chapitre est consacré, à l'exception de la dernière section (qui présente une approche peu diffusée mais intéressante dans ses fondements, celle de la planification hiérarchisée). Les approches du Juste-À-Temps qui seront analysées au [chapitre VII](#) sont utilisées à la place de celles de la MRP dans des environnements bien particuliers et en complément de la MRP dans beaucoup d'autres. Le [chapitre VIII](#) traite également de problèmes de planification mais, pour ce faire, il utilise des techniques de recherche opérationnelles qui restent difficilement généralisables pour traiter des problèmes d'une certaine complexité; les différentes modélisations de problèmes de production qui seront alors proposées présentent l'intérêt d'une formalisation rigoureuse utilisable dans quelques cas et permettant de mieux cerner l'impact de simplifications retenues dans certaines démarches empiriques.

Table des
matières

Index
thématique

Coexistent sous l'appellation **PBC** ou **MRP**, plusieurs centaines de logiciels de natures bien différentes¹, ce qui conduit à une confusion sémantique regrettable et entretient une ambiguïté préjudiciable sur la portée exacte de la méthode et des logiciels qui s'en réclament. On peut distinguer, en gros, trois familles d'approche.

- La première, connue sous le vocable de MRP (**Material Requirement Planning**), cherche à établir une programmation de la production sans se poser le problème des capacités de production effectivement disponibles, ce qui revient à considérer que les propositions faites sont réalisables, tout comme si les capacités étaient infinies. Cette approche, qui est de très loin la plus répandue et la plus ancienne (elle remonte aux années soixante), sera quali-

1. Sur le plan technique, les meilleurs ouvrages sont sans doute ceux de Toomey (1996, [422]) et de Vollmann, Berry et Whybark (1997, [433]). Le lecteur pourra aussi prendre connaissance de l'ouvrage de Petroff (1993, [335]), et l'excellent l'ouvrage collectif coordonné par Greene et l'APICS (1997, [335]), tous deux axés sur la certification de l'APICS (*American Production and Inventory Control Society*, www.apics.org). On peut aussi consulter l'ouvrage «fondateur» d'Orlicky (1975, [321]) et celui, considéré comme étant à l'origine de la MRP II, de Wight (1984, [446]). Le CXP (<http://www.cxp.fr/>) référençait en mars 2003, 53 logiciels de MRP ainsi que 248 logiciels d'ERP, disponibles en France et permet d'accéder directement aux sites de ces fournisseurs.

fiée ici de **MRP I** pour la différencier des méthodes plus élaborées qui lui ont succédé (elle est parfois notée «mrp» ou «little MRP» dans la littérature anglo-saxonne).

- La deuxième démarche, d'émergence plus récente (fin des années soixante-dix), est connue sous le nom de **MRP II**, le sigle signifiant alors **Manufacturing Resource Planning**, le 2 permettant, à la fois, de souligner la filiation avec la démarche antérieure et de noter le passage à une génération plus performante. Elle va plus loin que la précédente en cherchant à ajuster la charge souhaitée et la capacité disponible pour chaque centre de production.
- La troisième approche est la plus ambitieuse. Introduite dans les années soixante-dix par quelques entreprises de pointe, elle s'est concrétisée par des logiciels cherchant à contrôler toutes les ressources mobilisées directement ou indirectement par la production (hommes, machines, trésorerie, sous-traitance, etc.). De tels logiciels, mis au point pour résoudre les problèmes d'une entreprise, étaient difficilement réutilisables ailleurs en raison de la structuration des fichiers et de la contingence des procédures utilisées. L'arrivée des bases de données relationnelles¹ permettant une relative indépendance entre les données et les traitements a permis, depuis le début des années quatre-vingt-dix, le développement des ERP (*Enterprise Resources Planning*), appelés encore, de manière plus exacte, ERM (*Enterprise Resources Management*), qui proposent une architecture modulaire permettant de composer à la carte un système de gestion sur mesure, s'appuyant sur une base de donnée relationnelle partagée par tous. Ces ERP disposent tous de modules de MRP II. Cette intégration par les données ne constitue cependant pas, à proprement parler, une intégration fonctionnelle : chaque module permet une gestion autonome d'une fonction dans la mesure où il récupère des informations produites par les autres modules et en crée d'autres qui résultent des décisions prises dans le cadre du module utilisé. Une présentation de ces approches sera effectuée au **chapitre XIV (page 957)**.

Une fois précisée la famille à laquelle un progiciel appartient, la logique à laquelle il obéit est la même, ce qui implique qu'il est inutile de faire référence à un progiciel particulier. On représentera ici les bases de la seconde approche qui, contrairement à la première, fournit une programmation réalisable. Mais, ce faisant, on analysera implicitement la *MRP I* qui constitue la première étape de travail de la *MRP II*. La mise en œuvre de ces approches reste cependant une affaire de spécialistes, compte tenu de l'étendue des paramétrages possibles, ce qui justifie l'existence d'un poste de planificateur de MRP dans les entreprises utilisant efficacement cette classe de logiciels.

La *MRP* est une démarche simulatoire utilisant des heuristiques de résolution de problèmes que l'on anticipe au lieu de les subir, s'appuyant sur un système d'information informatisé relativement complet et visant à déterminer une programmation détaillée au plus tard de la production pour satisfaire l'ensemble des demandes finales définies sur un ensemble de périodes à venir. L'utilisation d'heuristiques (défini en **page 361**), plutôt que des méthodes optimales, s'explique

1. Une bonne présentation des fondements de ces approches, intelligible par des gestionnaires, peut être trouvée dans l'ouvrage de Flory et Laforest (1996, [152]).

par la taille du problème posé (programmation de quelques centaines à plusieurs centaines de milliers de références, le tout sur au moins une dizaine de périodes). Cette simulation porte sur une hypothèse centrale ou des variantes de celle-ci qui permettent de répondre à la question «que se passerait-il si?», lorsque l'on envisage la possibilité de modifier sensiblement l'importance des moyens productifs mis en œuvre et/ou les ventes prévisionnelles dans les mois à venir.

Cette démarche s'est largement répandue sous la triple conjonction de l'amélioration sensible du rapport coût/performances de l'outil informatique, de l'arrivée sur le marché de nombreux progiciels adaptables et commodes d'utilisation et, enfin, d'une généralisation de la compréhension des fondements de la démarche (bien qu'il y ait encore beaucoup à faire dans ce domaine!). La *MRP* part d'un constat, celui de l'inadéquation des politiques «classiques» au cas des stocks à étages de fabrication. Pour sa mise en place, elle exige la réunion d'un certain nombre de conditions (section II, page 460). La mise en œuvre de la *MRP I* (qui est également la première étape de la *MRP II*) repose sur une démarche très simple dans ses principes (section III, page 470). Nous terminerons (section IV, page 489) par quelques remarques sur le champ d'application de la *MRP* et par une présentation rapide de l'approche de planification hiérarchisée (section V, page 498).

Un programme de calcul de la planification de production de type MRP II est disponible en cliquant sur cette icône (fichier Excel MRP.xls). Il permet de traiter des problèmes de complexité limitée (moins de 4 niveaux de nomenclature, moins de 10 références, etc.) semblables à ceux traités ici. Les exemples numériques présentés feront l'objet d'une illustration à l'aide de ce programme, accessible en cliquant sur les icônes mises en marge du texte en face de ces exemples. L'aide en ligne de ce logiciel comporte des boutons qui assurent le retour sur le logiciel MRP.xls qui comporte en exemple celui du § III-3 (mais vous pouvez traiter vos propres exemples et les enregistrer). L'illustration d'autres problèmes est assurée par des fichiers de noms différents; il convient alors, en cas d'utilisation de l'aide, de ne pas utiliser ces boutons de retour.¹



Table des
matières

Index
thématique

SECTION I L'INADÉQUATION DES POLITIQUES «CLASSIQUES» DE GESTION DES STOCKS AU CAS DES STOCKS DE FABRICATION

Pour Orlicky (1975, [321]), les politiques classiques de gestion des stocks du type «quantité économique de commande – point de commande»² ou du type «période fixe de commande – niveau de recombplètement»³ ne sont pas appropriées pour traiter de façon satisfaisante le cas des stocks de fabrication (matières premières, composants de base, sous-ensembles), pour deux raisons essentielles. Tout d'abord, ces politiques postulent que les différentes références peuvent être gérées indépendamment parce que les demandes sont indépendantes (§ I-1) et d'autre part, parce qu'elles supposent que la demande est régulière (§ I-2, page 459).

1. Voir avertissement de la note du bas de la page 8.

2. Qui à la question «combien commander?» répond «toujours une même quantité fixe de commande q que l'on détermine par le calcul économique» et à la question «quand commander?» répond «lorsque la position de stock devient inférieure à un seuil appelé point de commande s »; cette politique d'approvisionnement est encore notée « q, s », c'est-à-dire par la désignation des variables de commande (voir chapitre XI).

3. Qui à la question «combien commander?» répond «en recombplétant le stock à un niveau appelé niveau de recombplètement, noté S , que l'on détermine par le calcul économique» et à la question «quand commander?» répond «avec une périodicité fixe de commande, notée T , appelée encore période calendaire de réapprovisionnement». Cette politique d'approvisionnement est encore notée « T, S » (voir chapitre XII).

I-1 Dépendance des demandes des composants dans les stocks de fabrication

Dans les stocks de distribution, la demande d'un article émane d'un nombre suffisant de demandeurs pour pouvoir être appréhendée statistiquement et, de ce fait, l'appel à des distributions statistiques pour modéliser la demande est possible. Dans le cas d'un composant, deux types de demande coexistent en général : une demande externe du composant comme pièce détachée (demande d'une boîte de vitesses, par exemple), et une demande interne de ce composant pour être monté sur un produit final (engin de manutention, par exemple) dont la mise en fabrication a été décidée antérieurement.

En règle générale, l'essentiel de la demande du composant est d'origine interne. Laissons momentanément de côté la demande externe ; la demande interne doit être considérée comme certaine si l'on raisonne dans le cadre d'un horizon inférieur à quelques mois, car elle découle directement du **Plan Directeur de Production** (*Master Production Schedule* selon la terminologie américaine en usage dans certains logiciels et que l'on notera ici **PDP**) qui fixe une programmation de la mise à disposition des produits finis, aux Services Commerciaux. Ce plan est établi en réponse à une demande prévisionnelle (les différents modèles d'une gamme d'engins de manutention, par exemple) qui peut être connue en partie avec certitude (carnet de commandes) mais ce, d'autant moins que la période considérée est éloignée.

Un même composant, par exemple la boîte de vitesses, peut être utilisé par plusieurs modèles de produits finis. La demande interne de boîtes de vitesses découle directement du plan directeur de production, il en est de même de tous les autres composants (moteurs, roues, etc.). Une prévision indépendante de la demande interne de ces composants n'a donc aucun sens.

Mais le problème de prévision ne s'arrête pas à la détermination de ces composants primaires, correspondant à des sous-ensembles utilisés dans la phase finale d'assemblage (moteur, embrayage, etc.), car eux-mêmes sont constitués de composants fabriqués ou achetés : par exemple, une boîte de vitesses comporte une boîte d'engrenages, composant que nous qualifierons de secondaire. Cette boîte d'engrenages comporte principalement un boîtier, des roues d'engrenage et des axes. Ces composants de niveau trois, tout comme ceux de niveau deux (composants secondaires), peuvent entrer dans la composition d'autres composants primaires ou secondaires. Leur demande se calcule donc «en cascade», en suivant les mêmes principes que ceux qui ont présidé aux calculs de la demande de composants primaires à partir de celle des produits finis. Elle s'effectue sans difficulté s'il est possible de structurer sous forme arborescente les composants des différents niveaux, à partir des nomenclatures et gammes d'assemblage.

La **figure 137**, illustre ce type de structuration ; la référence utilisée est suivie du nombre d'unités utilisées (par exemple la référence E-2040 utilise 2 unités de la référence E-3047). Elle illustre bien le fait que l'on est en présence de **stocks à étages**, appelés encore **stocks multi-échelons** mais on peut noter que si un composant de niveau i comporte implicitement un stock de composants de niveau supérieur à i (c'est-à-dire pour un niveau de détail plus grand), ces derniers ne sont plus directement utilisables parce qu'ils font maintenant partie intégrante de la

référence considérée du niveau i . On peut ajouter que les stocks à étages de fabrication diffèrent des stocks à étages de distribution où une même référence peut être physiquement stockée en différents endroits (nous reviendrons sur les stocks de distribution au § IV-4, page 496).

FIGURE 137
Exemple de nomenclature arborescente

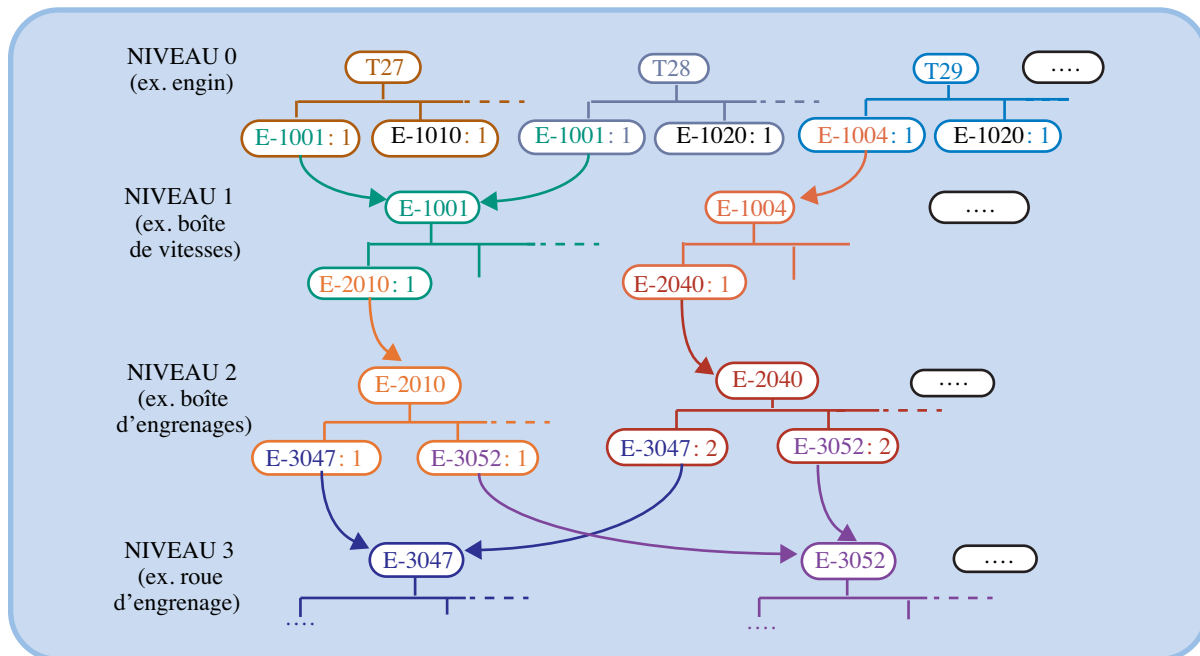


Table des matières

Index thématique

Supposons, en nous appuyant sur les nomenclatures de la figure 137, que l'on décide de produire 5 engins $T-27$, 9 engins $T-28$ et 3 engins $T-29$. Il en résultera qu'il faudra préalablement fabriquer 14 composants $E-1001$ et $E-2010$, 3 composants $E-1004$ et $E-2040$, 20 composants $E-3047$ et 20 composants $E-3052$, à moins que des stocks suffisants de ces composants ne soient disponibles.

La dépendance des demandes a une autre conséquence importante: la notion de qualité de service n'a plus de sens pour une référence donnée. En effet, le coût de rupture consécutif à l'arrêt d'une chaîne de production doit être supporté lorsque l'un quelconque des composants utilisés dans l'assemblage d'un sous-ensemble (c'est-à-dire d'un composant d'un niveau inférieur) vient à manquer. Si, par exemple, ce sous-ensemble comporte 12 composants et si chacun d'entre eux est géré de façon indépendante, afin de n'avoir qu'une probabilité de rupture de 5%, la probabilité que les 12 composants soient simultanément disponibles est de $0,95^{12} = 0,54$, c'est-à-dire qu'il y a en définitive près d'une chance sur deux pour que le sous-ensemble considéré ne puisse être fabriqué.

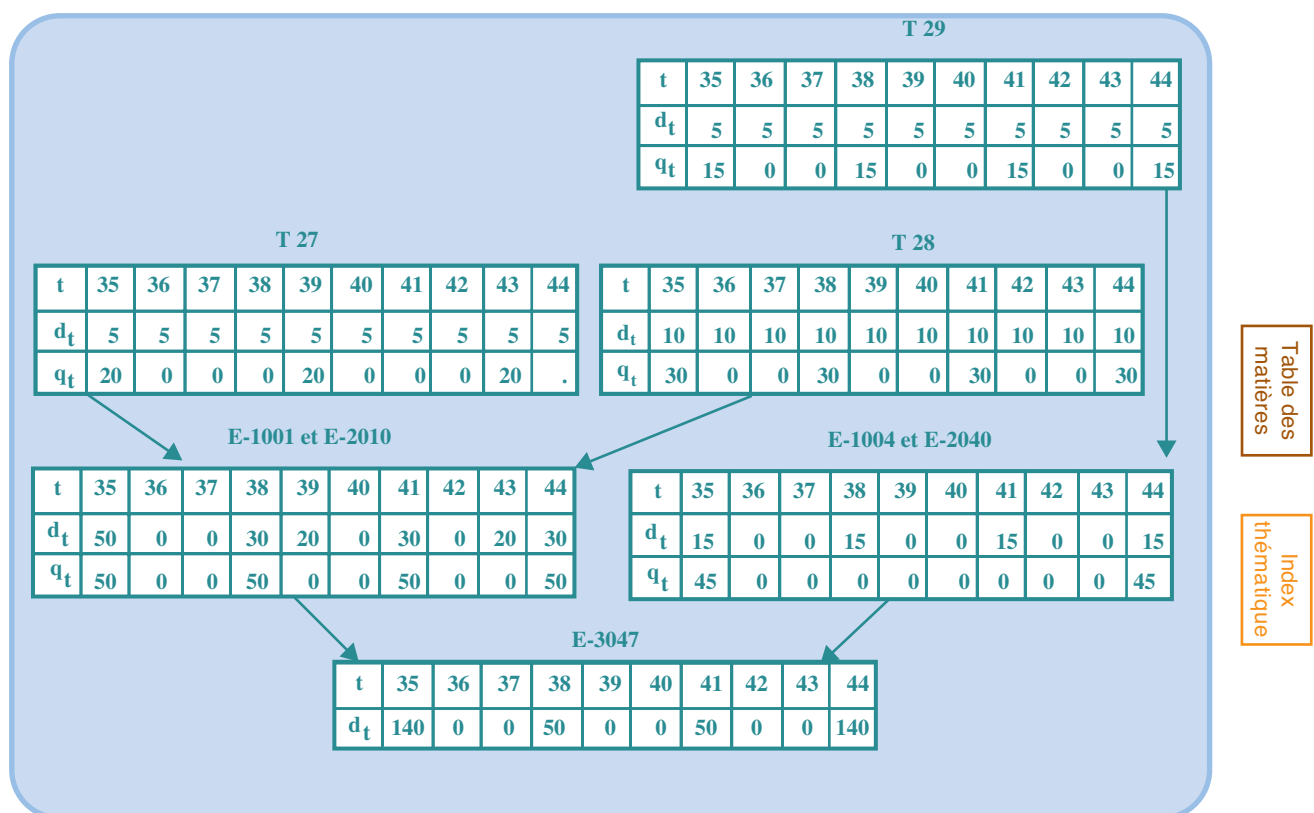
I-2 Irrégularité de la demande

Les modèles utilisés dans les politiques de gestion des approvisionnements du type «q, s» ou «T, S» supposent que la demande (qu'elle soit de nature discrète ou continue) soit relativement constante dans le temps. Cette hypothèse n'est guère acceptable dans le cas de stocks de fabrication, même si la demande finale est régulière, du fait du lancement de la fabrication des composants par lots (on parle encore de **lotissement** pour désigner le processus de définition des lots à lancer en fabrication). Illustrons ce point par les échéanciers suivants (figure 138)

où les demandes finales sont constantes pour chaque période. La détermination des lots mis en fabrication puis livrés résulte d'un arbitrage entre des coûts de lancement et de possession, que nous n'explicitons pas ici pour ne pas alourdir l'exposé (les «regroupements proposés» ici sont tous supposés résulter d'un calcul économique de taille de lot). On reviendra sur les techniques disponibles au § IV-1.2, page 491.

La période retenue pour cet exemple est la semaine et le plan directeur de production est défini pour les semaines 35 à 44. On supposera, pour simplifier ici l'exposé, que les délais d'obtention sont nuls (hypothèse qu'il sera facile de lever ultérieurement). Les demandes seront notées d_t , et les livraisons q_t , dans les tableaux de la figure 138.

FIGURE 138
Effets du lotissement



Cet exemple illustre le fait que les fluctuations de la demande d'un composant ne tiennent pas à la nature aléatoire de la demande (du moins lorsque celle-ci est exclusivement interne) mais à la programmation de lots de production décidée pour les références d'un niveau inférieur utilisant ce composant, phénomène qui se répercute en cascade depuis le niveau de produits finis. Il est évident qu'une demande irrégulière ne peut qu'amplifier ces fluctuations.

SECTION II LES CONDITIONS PRÉALABLES DE LA MISE EN PLACE D'UNE MRP

La MRP repose sur l'exploitation d'un système informatisé d'information qui, en règle générale, existe plus ou moins dans les entreprises envisageant d'implanter cette approche. Un certain nombre de tentatives se sont soldées par un

échec, faute de n'avoir pas porté une attention suffisante à ces conditions préalables d'utilisation. Les informations requises pour la *MRP I* sont de quatre types ; il faut en ajouter deux autres pour passer à la *MRP II* qui prend en compte les problèmes «charge – capacité». ***Il est conseillé de lire les parties balisées en marge par une trame claire des sections II et III, après avoir lu une première fois les parties non balisées.***

II-1 Existence d'un plan directeur de production

Nous avons rapidement défini le *PDP* (Plan Directeur de Production) au § I-1, page 458. Un certain nombre de compléments doivent être apportés.

L'établissement du *PDP* ne relève pas de la direction de la production, mais d'un groupe de travail faisant participer au moins la direction commerciale et celle de la production. Il s'agit, en effet, de définir un programme de mise à disposition de produits finis et de pièces détachées qui tient compte des souhaits du service commercial tout en restant techniquement réalisable, ce qui implique nécessairement une intervention de la Production. La définition d'un tel programme ayant des conséquences sur le plan financier et celui de la gestion du personnel, il peut être hautement souhaitable que ces directions soient également impliquées. De nos jours, le périmètre retenu est plus large et la réflexion de la définition du *PDP* s'effectue en prenant en compte toute la chaîne logistique (voir § I-2, page 895, du chapitre XIII).

Table des
matières

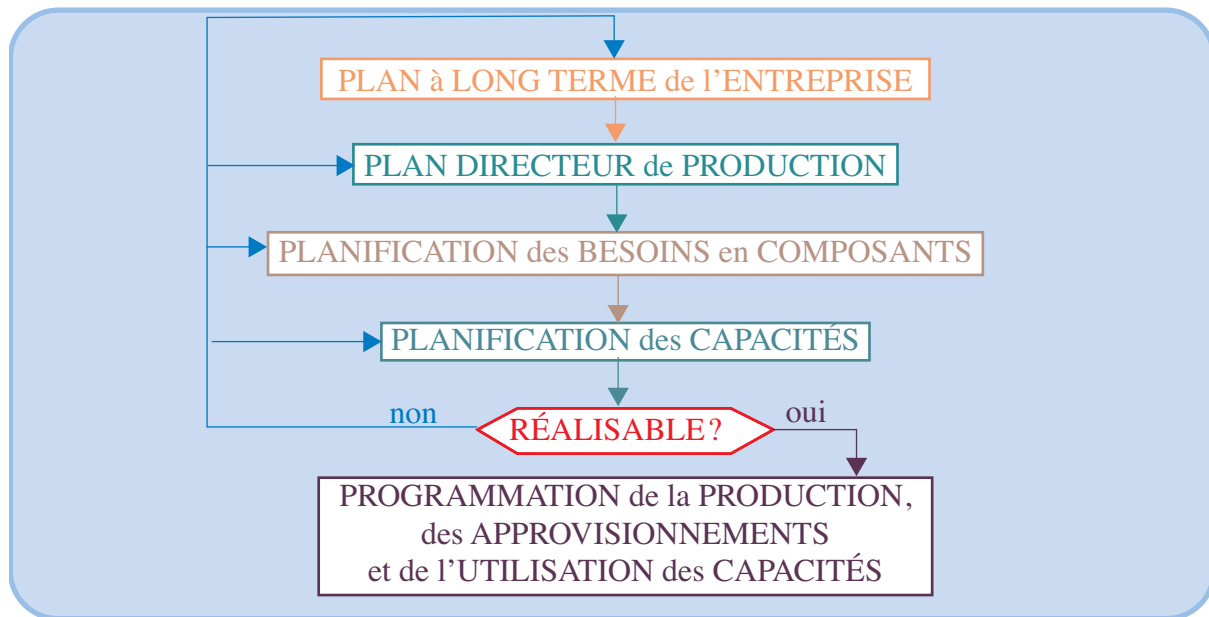
Index
thématique

Assez souvent, le *PDP* se «greffe» sur un *plan à long terme de production* (voir figure 139, page 462). Celui-ci est généralement établi sur une base mensuelle, pour les 12 à 24 mois à venir, et détermine les taux de production souhaités pour chaque famille de produits, en tenant compte des positions de stock prévisionnelles et des variations saisonnières de la demande. Ce plan à long terme est parfois établi en reprenant exactement la logique de la *MRP* mais sur une base agrégée, c'est-à-dire utilisant des macro-nomenclatures et des macro-gammes (ce qui peut se traduire par la création de profils moyens de chargement sur lesquels on reviendra en page 469); cette approche du problème étant censée faciliter les problèmes d'ajustement «charge – capacité» qui, nous le verrons, sont loin d'être triviaux. On trouve également de très nombreuses entreprises pour lesquelles le *PDP* tient lieu de plan à long terme. Enfin, les résultats obtenus sont généralement valorisés dans des états financiers de synthèse¹ sur la production, les stocks, les achats, les livraisons, etc.

Le *PDP* part du plan à long terme pour éclater la programmation par famille en une demande finale de références élémentaires, c'est-à-dire les produits finis et les pièces de rechange, lorsque l'on est en présence d'une production pour stock, ou encore de sous-ensembles destinés à l'assemblage final lorsque l'entreprise assemble à la commande des produits finis. Un grand nombre d'entreprises travaillent à la fois à la commande et pour stock. Elles sont alors amenées à utiliser

1. L'APICS distingue la «closed loop» *MRP*, qui est une approche en volume, de la *MRP II* qui complète cette dernière par une valorisation des résultats dans des états financiers. Cette distinction a plus un intérêt historique que réel car les logiciels, et l'usage qui en est fait, complètent pratiquement toujours l'approche physique de ce problème de planification par l'édition d'états financiers plus ou moins détaillés, au point que cette distinction est tombée en désuétude. Ces mécanismes de valorisation étant triviaux, ne seront pas développés dans ce chapitre.

FIGURE 139
Principe de fonctionnement de la MRP II



un panachage des deux conceptions de *PDP*. Certaines caractéristiques liées à la nomenclature utilisée seront évoquées au § II-2, page 463.

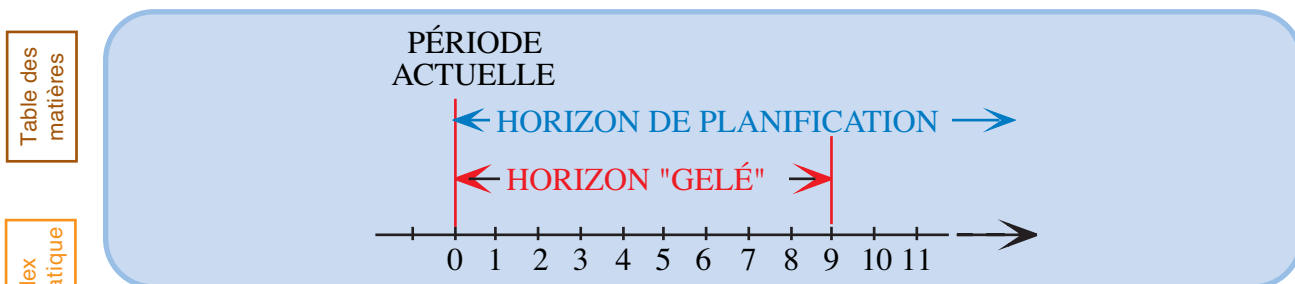
Le *PDP* inclut souvent les stocks de sécurité souhaités pour chaque référence pour la première période, ainsi que leurs variations pour les périodes suivantes. La détermination des stocks de sécurité (et leurs variations) est l'une des principales difficultés rencontrées dans la mise en œuvre des techniques de *MRP*, ce qui s'explique par l'interaction entre les règles de pilotage du système productif (et plus particulièrement celles de lotissement) et la « variabilité » des besoins à couvrir par ces stocks de sécurité (voir § IV-1.1, page 489). Par ailleurs, certains logiciels permettent de distinguer dans le *PDP* les **commandes fermes** passées par les clients, des prévisions: en règle générale, pour la première période, on retient comme besoins bruts les commandes fermes de cette période, tandis que pour les périodes suivantes, on retient les prévisions si elles sont supérieures aux commandes et, dans le cas contraire, les commandes. Il est évident que l'importance relative prise par les commandes fermes est généralement d'autant plus faible que la période considérée est éloignée.

Le *PDP* est souvent établi pour des périodes de deux semaines et révisé sur la base de cette périodicité; cela étant, un certain nombre d'entreprises travaillent sur la base de la semaine ou du mois et quelques-unes, plus ambitieuses, sur une base quotidienne. Dans ce dernier cas, la périodicité de révision ne coïncide plus avec le découpage temporel. Cette diminution de l'amplitude de la période de référence conduit progressivement à passer d'une planification basée sur un repérage temporel discret, à une planification basée sur un repérage temporel continu ou presque (qualifiée de *bucketless system* par les Anglo-Saxons), permettant de cerner plus fidèlement la réalité.

L'utilisation d'un calendrier industriel facilite le travail en permettant l'utilisation de périodes comportant le même nombre de jours ouvrables. Par ailleurs, le *PDP* est établi pour un horizon de planification au moins égal au plus grand des

cumuls des délais d'obtention des composants primaires et de leurs constituants (composants de niveaux supérieurs, jusqu'au niveau des matières premières). La détermination de ce chemin critique s'effectue en partant du graphe de la nomenclature d'un produit final: ces relations d'inclusions de composants dans une référence peuvent être interprétées aussi comme des relations d'antériorité, dans la mesure où la production de la référence est conditionnée par la production préalable des composants qu'elle intègre. En traitant chaque référence comme une tâche à laquelle on associe un délai, il suffit d'utiliser les techniques de détermination du chemin critique en ordonnancement de projet¹ (voir [chapitre IV](#), page 259). Par exemple, cet horizon minimal sera supérieur à 9 semaines pour l'engin de manutention T-27, durée égale à la somme de 2 semaines pour la phase d'assemblage des composants de niveau 1, d'une semaine pour le délai d'obtention de la boîte de vitesses, de 3 semaines pour celui de la boîte d'engrenages, de 1 semaine pour celui de la roue d'engrenage et de 2 semaines pour l'approvisionnement à l'extérieur de l'entreprise des matières premières nécessaires à la fabrication de cette roue d'engrenage (ce composant de niveau 4 n'apparaissant pas sur la [figure 137 de la page 459](#)). La [figure 140](#) illustre ce point, en supposant qu'aucun cycle de production observé pour les autres références de niveau 0, n'excède 9 semaines.

FIGURE 140
Horizons de la MRP



On verra ultérieurement ([page 488](#)) comment ce plan directeur de production peut être modifié en cas de problème de capacité de production insuffisante.

II-2 Existence d'une nomenclature complète des composants utilisés

Cette **nomenclature**² est une codification exhaustive et non ambiguë de tous les composants. L'utilisation conjointe de cette nomenclature et de gammes de fabrication et d'assemblage permet d'indiquer de façon précise les composants du niveau $i + 1$ qui rentrent dans la fabrication d'un composant de niveau i , ainsi que leur nombre, ce qui permet d'établir le schéma arborescent de la [figure 137 de la page 459](#). Il est essentiel que les mises à jour de ces informations soient immédiates.

La MRP doit s'adapter aux caractéristiques de volume et de différenciation des produits finis (production pour stock, production à la commande, assemblage à la

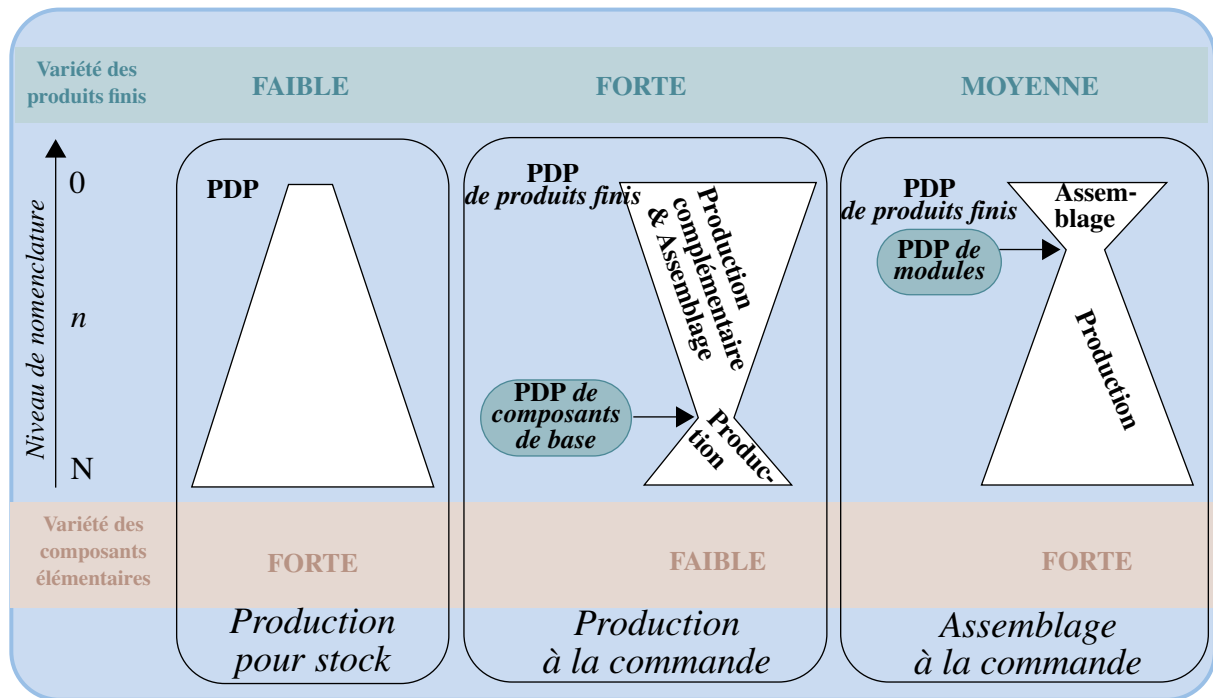
1. On peut ajouter, pour rester sur ce rapprochement avec l'ordonnancement de projet, que la MRP s'efforce d'atteindre une programmation au plus tard dans la production des composants, en s'efforçant d'éviter la constitution inutile de stocks d'encours et, lorsque cela devient inévitable, en cherchant à en minimiser la valeur.

2. Les ouvrages cités dans la note du bas de la [page 455](#) peuvent être complétés sur ce point par celui de Garwood (1997, [168]).

commande) tant dans l'organisation de sa nomenclature que dans celle de son plan directeur de production. Trois situations doivent être distinguées et sont illustrées par la figure 141.

FIGURE 141

Nomenclature de production et organisation de la production en fonction du marché



Pour les entreprises travaillant pour stock (voir chapitre I, page 47), il n'y a pas de problème particulier parce que les produits finis sont en nombre restreint et vendus en quantités importantes et que cette organisation a été retenue en raison de la possibilité d'effectuer des prévisions suffisamment fiables de la demande.

À l'inverse, les entreprises travaillant à la commande pour produire des objets très faiblement standardisés sont dans l'incapacité d'effectuer une prévision ; deux cas de figure doivent alors être distingués :

- Si la clientèle s'accommode de la longueur du cycle de production, on est dans une situation voisine de celle de la production pour stock, à ceci près que la pyramide tronquée de la figure 141, doit être inversée, la variété des produits finis étant plus grande que celles des composants de base.
- Si la clientèle ne s'accommode pas de cette longueur, en particulier parce, sur le marché, on trouve des industriels capables de faire plus vite à un coût et une qualité comparable, la solution passe par une fabrication pour stock de composants rentrant dans la majorité des produits finis, les composants spécifiques étant fabriqués au fur et à mesure des besoins. Cette situation de **production à la commande** est illustrée par le second schéma de la figure 141 ; on distingue alors :
 - un premier étage de planification de composants de base correspondant à une production pour stock (d'où un premier PDP)
 - et un second étage de planification de produits finis déterminant la fabrication de composants spécifiques et le processus d'assemblage progressif,

utilisant ces composants spécifiques et les composants de base du premier étage (d'où un second PDP).

- Enfin, les entreprises travaillant à la commande pour fabriquer une large gamme de produits finis standardisés, dont la variété résulte d'une combinaison d'options permettant de personnaliser chaque produit en fonction de la demande, ne sont pas en mesure de prévoir la demande des produits finis mais doivent néanmoins, en cas de production de masse, avoir une forte réactivité incompatible avec la longueur du cycle de fabrication. La solution est celle de l'**assemblage à la commande** qui s'appuie sur une conception modulaire de certains sous-ensembles associés à une différenciation perceptible du produit final pour le client (moteur, par exemple); chacun de ces modules fait l'objet de variantes – ou options – respectant le principe d'interchangeabilité aisée au montage¹. Le nombre de variantes d'un module est faible et c'est la combinatoire des options offertes par tous les modules qui conduit à un très grand nombre de produits finis différents généralement très supérieur à la production mensuelle, ce qui rend illusoire toute tentative de prévision à ce niveau. La parade trouvée repose sur le constat habituel d'une assez grande stabilité de la part prise par chaque variante d'un module dans la production finale. On adapte alors la démarche décrite pour les entreprises travaillant à la commande pour produire des objets très faiblement standardisés et devant avoir un cycle de production court:
 - Le premier étage de planification, correspondant à une production pour stock, porte alors sur les variantes de chaque module (et non sur des composants plus basiques comme dans le cas précédent). Le *PDP* part d'une prévision sur le produit, toutes options confondues, ce qui n'est pas trop difficile pour un produit de grande consommation. On s'appuie ensuite sur la répartition observée sur le passé, consignée dans une **nomenclature de planification**, pour calculer le *PDP* des options de chaque module. Pour en expliquer le principe, il est plus facile de s'appuyer sur un exemple: si pour les variantes du module *P* du produit *A* on a la répartition suivante: 10%, 15%, 30%, 5%, 40%, la nomenclature de planification dira que, pour fabriquer 1 unité de *A*, il faut 0,1 unité de P_1 , 0,15 unité de P_2 , etc. Il s'ensuit que pour pouvoir fabriquer 500 unités du produit fini *A*, il faut inscrire au *PDP* des modules: 50 P_1 , 75 P_2 , 150 P_3 , 25 P_4 et 200 P_5 , en application du mécanisme classique de la *MRP*. On peut ajouter que, pour éviter que l'assemblage final ne soit retardé par la fabrication des autres composants, cette nomenclature de planification comporte également, pour chaque produit fini personnalisable par combinaison d'options, une référence fictive rassemblant l'ensemble des composants communs utilisés dans l'assemblage final, avec les modules.
 - Le second étage de planification part du *PDP* de produits finis individualisés² et correspond au processus d'assemblage final qui puise dans les stocks créés par le premier étage de planification. L'articulation entre les

1. On trouve cependant quelques modules (toiture d'un véhicule, par exemple) pouvant comporter, parmi les options, l'option «pas d'option» (dans notre exemple, on peut avoir l'option «avec toit ouvrant» et l'option «sans toit ouvrant»), ce qui complique la conception de la ligne d'assemblage mais ne retire rien à la généralité du propos. Ce problème de la conception modulaire a été présenté au [chapitre II](#), page 464.

deux étages passe par la mise à jour, à chaque régénération de *MRP*, des positions de stock des options des modules (et de la référence fictive évoquée ci-dessus). Pour renforcer la fiabilité de ce « montage de planification », il faut tenir compte du caractère non certain des informations consignées dans la nomenclature de planification et introduire des stocks de sécurité pour contrer les aléas (voir § IV-1.1, page 489).

Les décisions stratégiques de standardisation (qui limite le nombre de composants et en facilite la gestion) et de conception modulaire des produits (qui permet de passer sur une approche d'assemblage à la commande) conditionnent donc très fortement la façon dont les techniques de *MRP* peuvent être utilisées ainsi que la réactivité et la flexibilité du système productif. Par ailleurs, plus le « goulot d'étranglement » de cette structure en X de la nomenclature est élevé dans le schéma de la figure 141, page 464, plus la mise en œuvre du principe de différenciation retardée¹ est forte. Ajoutons enfin que la chrono-compétition (voir page 67), conduit de nombreuses entreprises à travailler en flux poussés sur les références du premier étage de cette nomenclature, et à flux tirés sur le second étage (voir page 509).

Quatre remarques complémentaires doivent être faites pour préciser les implications de l'environnement de gestion, sur la définition de la nomenclature.

- Normalement la détermination des composants de cette *nomenclature dépend fortement des processus productifs*. Lorsque le processus productif est modifié et conduit à réaliser le composant de niveau n et celui de niveau $n - 1$ sans passer par un stock intermédiaire, on doit adapter la nomenclature en supprimant le composant de niveau n et en adaptant, si nécessaire, la liste des composants de niveau n . Parmi les exemples de ces causes de transformation, on peut citer: la fabrication d'une pièce peinte immédiatement sur place dans la couleur désirée et non ultérieurement après un passage en stock; l'exécution sur un même poste d'une opération de fabrication d'un composant et de son montage dans un sous-ensemble; la transformation de la conception de l'assemblage d'un composant de niveau $n - 1$, en partant directement de l'ensemble nécessaire des composants de niveau $n + 1$ et en supprimant les composants intermédiaires de niveau n , désormais sans objet (les composants de niveau $n + 1$ passant alors au niveau n).
- Les références de la *nomenclature* font l'objet de décisions de production ou d'approvisionnement et d'un *stockage effectif*. Ce principe général souffre de quelques exceptions:
 - On intègre à la nomenclature, des références, comme les emballages, ne faisant pas véritablement l'objet de décision de production mais qui sont intégrées au système à des fins d'approvisionnement et de calcul de coûts.
 - On exclut de la nomenclature, les articles à forte consommation et faible valeur (la visserie, par exemple). Ces références ne sont donc pas gérées par la *MRP* mais, le plus souvent, par des politiques du type «q, s», en utili-

2. *Note de la page précédente*. Dans la littérature spécialisée, on distingue le Plan Directeur d'Assemblage, connu sous l'acronyme FAS (pour *Final Assembly Schedule*) dans les logiciels de *MRP*, du Plan Directeur de Production (ou *MPS*) pour dissocier les deux étages qui obéissent à des logiques productives différentes.

1. Voir également la discussion de ce principe à la page 105 et certaines de ses implications à la page 620.

sant la *technique des deux casiers*¹. Ce choix se justifie par le fait que l'accroissement du coût de traitement des informations de cette catégorie d'articles est supérieur aux économies induites par une informatisation totale du système.

- Certaines références ne faisant jamais l'objet d'un stockage, parce que directement fabriquées dans un centre de production et techniquement utilisées immédiatement après dans un autre centre de production, peuvent être incluses dans la nomenclature, le sous-ensemble concerné étant qualifié de **nomenclature fantôme**. Cette exception se justifie par la nécessité d'une gestion distincte des capacités de ces deux centres. Pour ces références, le problème de la taille du lot ne peut pas se poser et le délai d'obtention de la référence de niveau n est, par convention, nul (parce qu'inclus dans celui la référence de niveau $n - 1$).
- Certaines entreprises travaillant à la commande doivent faire coexister plusieurs nomenclatures d'un même produit final lorsque le cycle de fabrication est long. Ceci s'explique par le fait que plusieurs unités de cette référence ont été mises en fabrication à des dates différentes, entre lesquelles des ordres de modification des gammes et/ou nomenclatures ont été donnés, sans que ces ordres puissent prendre effet sur la totalité des unités en cours de fabrication.
- Le plus souvent, les logiciels de *MPR* ne «savent» traiter que les nomenclatures de type arborescent (un composant - père possède un ou plusieurs composants - fils). Cette restriction peut être gênante pour certaines entreprises qui, travaillant à la commande, assemblent des composants (d'où une nouvelle référence), testent l'ensemble puis les «désassemblent» pour rectification ou réglage de certains composants posant un problème.

Table des matières

Index thématique

II-3 Existence d'un système d'information fiable sur l'état des stocks

La *MRP* nécessite une connaissance correcte² de l'état du stock d'un composant (stock disponible, livraisons attendues, etc.) au début ou à la fin de chacune des périodes constitutives de l'horizon de planification retenu. Si cet inventaire n'est pas permanent, il a une périodicité minimale fixée. Ce système d'informations peut difficilement être manuel car le traitement numérique qu'implique un système de *MRP* pour des applications concrètes est tel que seul un traitement informatique peut être envisagé, ce qui conduit nécessairement à une tenue informatisée de l'état des stocks. Ceci n'exclut pas, rappelons-le, qu'il soit nécessaire de procéder périodiquement à un inventaire pour rectifier les écarts entre le disponible effectif et le disponible «informatique», à la suite de problèmes divers (évoqués au [chapitre X, page 628](#)).

1. Technique utilisée pour des articles de faible valeur, comme des clous; il se traduit par l'usage de deux casiers: un casier de réserve contenant un nombre d'unités connu et qu'il est interdit d'utiliser tant qu'il reste de la marchandise dans le second casier; le prélèvement de la première unité du casier de réserve correspond au franchissement d'un point de commande d'une politique «q, s» et conduit au déclenchement d'un réapprovisionnement.

2. La littérature (et certains logiciels) regroupe les informations élémentaires relatives à une référence, utilisées dans la *MRP* (position de stock, règle de priorité, délai d'obtention, taille de lot) dans un fichier appelé *Item Master File*.

II-4 Existence d'un fichier des délais d'obtention

Ce fichier des délais d'obtention est essentiel pour définir les périodes de lancement en fabrication d'un lot de composants ou de passation d'une commande d'approvisionnement auprès d'un fournisseur.

Le **délai d'obtention** se définit comme la somme de temps opératoires (incluant le temps de lancement), et de temps inter-opératoires (temps administratif de gestion des flux, temps de transit entre les centres de production et, surtout, temps d'attente). Dans la plupart des systèmes existants, le temps opératoire retenu est un temps standard, c'est-à-dire calculé pour un lot d'une taille donnée (mais les lots effectivement lancés pourront être d'une taille différente). Les temps inter-opératoires sont également des temps standards et ne tiennent donc aucun compte de la charge réelle du centre de production. Ils représentent généralement au moins 80 % du délai d'obtention. On peut également inclure une marge de sécurité, ce **délai de sécurité** jouant un rôle similaire à celui d'un stock de sécurité¹; on peut cependant se demander comment, en pratique, dissocier celui-ci des temps inter-opératoires (surtout compte tenu de l'importance habituelle de ces derniers).

Certaines entreprises traitent ce délai d'obtention non seulement comme un paramètre nécessaire au fonctionnement de la *MRP* mais également comme une contrainte à respecter: lorsque le délai s'avère plus long que prévu, des moyens sont alors prélevés sur d'autres centres de production pour permettre un retour à l'équilibre souhaité; à l'inverse, si le délai s'avère trop court, les moyens correspondants du centre de production visé sont transférés ailleurs. Cette pratique, d'autant moins critiquable que l'amplitude de la période de référence est faible, trouve sa justification dans le désir de maîtriser le processus productif conformément aux prévisions, dans la mesure où des écarts importants par rapport à ces valeurs invalident les résultats de la simulation et conduisent progressivement à une absence d'information sur le comportement futur du système.

Table des
matières

Index
thématique

II-5 Existence de gammes et de données sur les capacités des centres de production

La mise en œuvre de procédures d'ajustement, pour chaque centre de production, entre la charge de travail souhaitée et la capacité disponible nécessite de pouvoir calculer la charge de travail impliquée par le plan de production souhaité, ce qui passe par l'utilisation de gammes, ainsi qu'une connaissance des capacités disponibles.

Les capacités sont définies pour chaque période de l'horizon de planification. Elles sont habituellement exprimées en heures de travail (et parfois dans une autre unité, le plus souvent un produit de référence ou un produit-type fictif). Habituellement l'hypothèse d'une disponibilité de la main-d'œuvre appropriée est implicitement faite, ce qui permet de définir la capacité sur les seuls équipements. En cas de problème d'ajustement «charge – capacité», il est possible d'envisager la modification de la capacité de certains centres de production (comme l'illustre la

1. Le lecteur intéressé trouvera dans Vollmann, Berry et Whybark (1997, [433]), p. 455-462, une discussion du rôle respectif du stock de sécurité et du délai de sécurité, ainsi qu'une présentation d'études expérimentales comparatives.

figure 139, page 462) par un transfert de main-d'œuvre polyvalente inutilisée dans d'autres centres, par un appel à des heures supplémentaires ou aux possibilités d'accroissement du temps de travail (en cas d'accord d'annualisation du temps de travail permettant une certaine modulation du temps de travail hebdomadaire ou quotidien), par un appel à de la main-d'œuvre intérimaire ou, enfin, par une sous-traitance partielle. La planification de ces adaptations est l'un des objectifs de la MRP. Notre présentation de la MRP se focalisera sur l'adaptation par lissage de charge qui, contrairement aux décisions d'ajustement de la capacité (qui seront rapidement analysées à la page 486), pose quelques difficultés méthodologiques; ceci ne doit pas induire le lecteur à ne considérer que cette catégorie d'ajustement.

Les gammes de fabrication et d'assemblage fournissent les temps opératoires nécessaires à la réalisation de chaque référence, sur chaque centre de production concerné. Les gammes utilisées en atelier comportent des informations supplémentaires (consignes diverses de travail telles que les réglages des machines). Les gammes utilisées en planification sont beaucoup plus grossières, elles peuvent même aller jusqu'à se résumer à un **profil moyen de chargement** associé à chaque référence du niveau 0. Un profil moyen de chargement indique, pour chaque centre de production et chaque période précédant la « mise à disposition de produits finis au service commercial », le temps moyen d'utilisation des centres impliqués par la fabrication de la référence de niveau 0 et celle de toutes les références qu'elle comporte; ces informations tiennent compte des délais d'obtention (ce qui conduira, par exemple, à indiquer que la fabrication d'une unité en période t de la référence i du niveau 0 conduit à l'utilisation de 0,7 heure du centre j au cours de la période $t - 4$ et 1,2 heure de ce même centre j , au cours de la période $t - 3$; 3,6 heures du centre k au cours de la période $t - 2$; etc.). Il est évident que cette gamme très grossière que constitue le profil moyen de chargement suppose implicitement que les problèmes de capacité ne se posent pas. De telles gammes ne peuvent donc pas être utilisées dans les procédures d'ajustement « charge – capacité ». Elles sont plutôt utilisées dans les procédures de négociation entre le souhaitable et le possible, qui président à l'élaboration du PDP. Cet ajustement grossier de la charge à la capacité (connu sous le nom de *rough cut planning*) ne permet pas de prendre en compte des mécanismes d'ajustement que seule l'approche détaillée peut prendre en compte et qui seront détaillés par la suite (voir page 481). Ajoutons enfin qu'en règle générale, les informations fournies reposent implicitement sur une longueur moyenne de série, dans la mesure où les temps utilisés intègrent une valeur standardisée de temps de lancement.

Table des matières

Index thématique

II-6 Existence de fichiers nécessaires à la détermination des priorités

Lorsque, pour une période, la charge souhaitée résultant du *PDP* excède la capacité disponible, on cherche à adapter la capacité ou à anticiper la production d'une partie de ce que l'on avait programmé pour cette période. La sélection de ce qui devra être transféré s'effectue par l'utilisation implicite ou explicite de règles de priorité.

Le choix s'effectue sur la base de règles empiriques dont la justification est bien souvent sommaire. Dans le premier cas, on calcule les règles de priorité sur la base de critères tels que celui de la minimisation de la valeur des encours constitués lors

de ce transfert. Supposons, par exemple, que pour une période donnée, il faille soulager de 100 heures un atelier produisant les références *A* et *B* qui utilisent respectivement 50 € et 10 € de composants et dont les temps unitaires de production sont 1 heure (pour *A*) et 2 heures (pour *B*); si le coût standard horaire est de 80 €, ce qui conduit à des coûts unitaires de $50 + 80 \times 1 = 130$ € pour *A* et $10 + 80 \times 2 = 170$ € pour *B*. Une heure transférée sur *A* conduit à une création d'encours de 130 €, tandis que si ce transfert s'effectue sur *B*, il n'y a que $170 / 2 = 85$ € d'encours à transférer. Pour calculer la valeur d'encours générée par l'anticipation d'une heure de production pour les différentes alternatives possibles et en déduire des priorités de transfert, il faut donc disposer, d'une part, de fichiers de coûts standards d'utilisation de chaque centre de production ainsi que des composants et matières premières achetés et, d'autre part, d'un programme de calcul des coûts standard de fabrication des références produites.

Si l'application de ces règles ne conduit pas à une solution réalisable, le plan directeur de production doit être révisé (voir [figure 139 de la page 462](#)). Cette remise en cause s'effectue par un retard de livraison de certaines références par rapport à ce qui était initialement voulu (ce retard n'affectant pas normalement les ordres fermes). Elle doit avoir pour conséquence de soulager la tension s'exerçant sur les centres de production critiques. Il faut alors «pister» les références utilisées dans un produit final ainsi que leur période de production. Ce **pistage** (connu aussi sous le nom de **traçage** ou de **couplage** ou encore sous son nom américain de **pegging**) est indispensable si l'on souhaite mettre en place des règles de priorité permettant une remise en cause «astucieuse» du *PDP*.

SECTION III LES PRINCIPES DE BASE DE FONCTIONNEMENT DE TOUTE MRP

La MRP s'appuie sur une logique élémentaire de calcul très simple (§ III-1) qui est utilisée en cascade (§ III-2, [page 474](#)) pour simuler les conséquences qui résulteraient de la mise en œuvre du plan directeur de production en faisant abstraction des problèmes de capacité. Si l'on souhaite aller plus loin, il faut alors calculer la charge résultant du programme de fabrication proposé (§ III-3, [page 475](#)). Si le progiciel utilisé suit la logique *MRP II*, il faut, le plus souvent, procéder à un ajustement «charge – capacité» pour aboutir à un programme de fabrication réalisable (§ III-4, [page 481](#)).

III-1 Description du mécanisme élémentaire de calcul de la MRP

La démarche suivie par la MRP s'appuie sur une détermination des besoins nets d'un composant (§ III-1.1) puis de la manière de les couvrir (§ III-1.2, [page 472](#)) avant de recommencer cette séquence d'opérations pour les composants de niveau supérieur (§ III-1.2, [page 472](#)).

III-1.1 Détermination des besoins nets d'un composant

Pour un composant donné, par exemple la boîte d'engrenages *E-2010*, on part d'un échéancier de **besoins bruts**¹, c'est-à-dire d'un échéancier de demandes de

1. *Gross Requirement*, dans la littérature spécialisée et les logiciels de MRP.

cette référence pour chacune des périodes constitutives de l'horizon de planification. Cette demande émane :

- soit des composants du niveau inférieur; on peut voir à la [figure 137 de la page 459](#) que la boîte d'engrenages *E-2010* est un composant de niveau 2 dont la demande émane de composants du niveau 1, ici, la seule boîte de vitesses *E-1001*;
- soit d'une demande finale au titre de pièces détachées (ce qui est le cas pour la boîte de vitesses) ou parce que l'on est en présence d'un produit fini.

Supposons, par exemple, que l'échéancier des besoins bruts de la boîte d'engrenages *E-2010* soit celui du [tableau 104](#).

TABLEAU 104
Étape 1 – détermination des besoins bruts (ici supposés connus)

Période t	15	16	17	18	19	20	21	22
Besoins Bruts (BB _{t}) du <i>E-2010</i>	-	30	10	20	26	14	20	15

Ces besoins bruts ne correspondent pas à ce qu'il est nécessaire de lancer en production, compte tenu du stock initial disponible pour cette référence et des quantités éventuellement en attente de livraison. Il faut alors passer de la notion de besoins bruts à celle de besoins nets.

La détermination des **besoins nets**¹ du composant *E-2010* s'effectue en partant de l'échéancier des demandes brutes et du stock disponible initialement (que l'on suppose, par exemple, être de 12 unités) et des **livraisons attendues**, c'est-à-dire correspondant à des commandes en cours d'exécution (respectivement 22 et 13 pour les périodes 16 et 17). On conviendra que ces livraisons seront effectuées en début de période², afin de pouvoir couvrir tout ou partie des besoins de la période.

Pour déterminer ces besoins nets, on calcule dans un premier temps la position prévisionnelle de stock puis, dans un second temps, les besoins nets. La **position de stock** à la fin d'une période donnée est égale à la position de stock à la fin de la période précédente, diminuée des demandes de la période considérée et augmentée des livraisons de cette période; on retrouvera l'usage de ce concept dans l'analyse des politiques d'approvisionnement ([page 731](#)). La position de stock des tableaux de présentation des mécanismes de la MRP (à l'exception du [tableau 107 de la page 474](#)) est établie en supposant qu'aucune nouvelle décision de production (livraisons programmées, cf. infra) n'est prise. Ajoutons qu'une position de stock négative s'analysant comme le cumul des demandes non satisfaites différées, les besoins nets d'une période correspondent à l'accroissement des demandes non satisfaites différées. Le [tableau 105 de la page 472](#), qui calcule les besoins nets, intègre la période 15, à la fin de laquelle la programmation de la production est refaite, pour pouvoir indiquer la position de stock de *début* de période 16, par définition identique à celle de la *fin* de la période 15.

Table des matières

Index thématique

1. *Net Requirement*, dans la littérature spécialisée et les logiciels de MRP.

2. Quelques rares logiciels adoptent la convention d'une livraison en fin de période. Ce changement de convention est sans incidence sur le raisonnement suivi qui s'adapte immédiatement en remarquant que l'on se ramène à la convention retenue ici puisque la disponibilité des produits livrés est la même.

TABLEAU 105
Étape 2 – détermination des besoins nets

Période t	15	16	17	18	19	20	21	22
Besoins Bruts (BB_t) du E-2010	-	30	10	20	26	14	20	15
Livraisons attendues (Q_t) du E-2010 (effectuées en début de période)	-	22	13	0	0	0	0	0
Position de Stock (PS_t) du E-2010 (définie en fin de période, en l'absence de décision de nouvelles livraisons)	12	4	7	-13	-39	-53	-73	-88
Besoins Nets (BN_t) du E-2010	-	0	0	13	26	14	20	15

Il est facile de formaliser la démarche que l'on vient de décrire (c'est, du reste, nécessaire pour une programmation informatique). Notons pour une référence donnée :

- PS_t : la position de stock à la fin de la période t (après livraison et satisfaction de la demande), cette information peut être encore considérée comme la position de stock au début de la période $t + 1$ (avant livraison),
- SD_t : le stock physiquement disponible à la fin de la période t ,
- Q_t : la livraison attendue (en début de période t),
- BB_t : les besoins bruts de la période t ,
- BN_t : les besoins nets de la période t .

En l'absence de stocks de sécurité (qui seront introduits au § IV-1.1, page 489), on peut alors écrire les *relations récurrentes générales* 73 et 74.

$$PS_1 = SD_0 + Q_1 - BB_1, \text{ pour } t = 1 \quad \text{Position de stock}^1 \quad \text{relations 73}$$

$$PS_t = PS_{t-1} + Q_t - BB_t, \text{ pour } t > 1$$

$$BN_t = 0 \text{ pour } t \leq \theta, \text{ où } \theta \text{ est la durée du délai d'obtention}$$

$$BN_t = \text{Max} [0, (BB_t - \{Q_t + \text{Max}(0, PS_{t-1})\})], \text{ pour } t > \theta \quad \text{Besoins nets}^2$$

relations 74

III-1.2 Détermination de la couverture des besoins nets

La philosophie de la MRP implique que les besoins nets d'un composant soient connus suffisamment à l'avance pour qu'une rupture de stock ne puisse pas se produire. Les besoins nets d'une période seront donc couverts soit par une

1. $t = 1$ est la première des périodes futures; dans ces conditions, la position de stock initiale est celle de la fin de la période 0.

2. La première relation ($BN_t = 0$ pour $t \leq \theta$) revient à dire qu'il est trop tard pour couvrir des besoins imprévus et implique que si PS_t est négatif sur l'une de ces θ premières périodes, la totalité des besoins bruts de ces θ premières périodes ne peut être couverte et que le PDP (ou certaines décisions de production antérieurement prises et jouant sur la détermination des besoins bruts de ces périodes) doit être révisé avant de poursuivre les calculs. $\text{Max}(0, PS_{t-1})$ correspond au stock physiquement disponible avant livraison (nul si PS_{t-1} est négatif et égal à PS_{t-1} , dans le cas contraire); $\{Q_t + \text{Max}(0, PS_{t-1})\}$ correspond alors au «disponible après livraison» et si celui-ci est inférieur aux besoins bruts BB_t , alors les besoins nets de la période correspondent à la différence à couvrir et, dans le cas contraire, les besoins nets sont nuls, les besoins bruts étant couverts par le «disponible après livraison». Ces relations ne tiennent pas compte de l'existence possible de stocks de sécurité (voir page 489).

livraison au début de la même période (on admet qu'une livraison puisse être plus tardive au cours de la période si cela ne se traduit pas par une rupture de stock), soit par une livraison antérieure calculée pour couvrir les besoins de plusieurs périodes consécutives. La technique la plus simple est la **technique du «lot pour lot»** qui consiste à livrer systématiquement en début de période de quoi couvrir les besoins nets de la période.

Supposons arbitrairement que, dans notre exemple, le calcul des tailles de lot retenu ait conduit à la programmation des livraisons du **tableau 106**. On qualifiera cette nouvelle décision de **livraison programmée** pour la distinguer de la décision prise antérieurement (et donc sur laquelle on ne peut plus revenir parce qu'elle est en cours d'exécution), que l'on a désignée par le nom de **livraison attendue**.

TABLEAU 106
Étape 3 – détermination du lotissement et des livraisons programmées

Période t	15	16	17	18	19	20	21	22
Besoins Nets (BN_t) du E-2010	-	0	0	13	26	14	20	15
Livraisons programmées du E-2010 (effectuées en début de période)	-	0	0	53	0	0	35	0

Une fois déterminées les livraisons programmées, il faut tenir compte des délais d'obtention séparant la décision de lancement d'une série (ou d'approvisionnement s'il s'agit d'un composant acheté), de la livraison. Supposons que le délai d'obtention soit de deux semaines, on obtient alors l'échéancier de **lancements** du **tableau 107**. Cette étape est souvent appelée **absorption des délais**. Trois remarques peuvent être faites :

- Seul le lancement de la *première période* (en début de période 16), ici 53, et donc la livraison programmée correspondante (en début de période 18) correspond à une *décision irréversible* ; les lancements des périodes suivantes (et les livraisons programmées correspondantes) pourront être révisés dans le cadre de la planification glissante (voir § IV-2, page 494).
- Les lancements correspondent à des ordres de fabrication (approvisionnement interne) ou à des ordres d'achat (approvisionnement externe) ; dans ce dernier cas et pour des références fortement consommées, les relations de partenariat qui prévalent souvent de nos jours conduisent à des commandes exécutées dans le cadre de contrats globaux impliquant un engagement annuel des quantités achetées contre une grande souplesse dans la définition du calendrier de livraison et des quantités livrées.
- Le mécanisme d'absorption des délais conduit mécaniquement à avoir, au niveau des lancements, un nombre de périodes égal à celui des livraisons programmées, diminué du nombre de périodes définissant le délai d'obtention (ici 2, d'où une absence d'information pour les périodes 21 et 22 imputable à une absence d'information sur les livraisons programmées des périodes 23 et 24, inconnues par hypothèse).
- On a ajouté en dernière ligne du **tableau 107 de la page 474** une ligne retraçant l'évolution prévisionnelle de la position de stock en tenant compte des décisions irréversibles (parce que prises avant la fin de la période 16) et

les décisions nouvelles proposées (dont seule la première sera mise en œuvre, conformément à la première des trois remarques).

TABLEAU 107

Étape 4 – lancement en production (absorption des délais)

Période t	15	16	17	18	19	20	21	22
Livraisons programmées du <i>E-2010</i> (effectuées en début de période)	-	0	0	53	0	0	35	0
Lancements en fabrication du <i>E 2010</i> (effectués en début de période) délai $L = 2$ semaines	-	53	0	0	35	0	-	-
Position de stock (fin de période) intégrant les livraisons programmées et les livraisons attendues	12	12 + 22 - 30 = 4	4 + 13 - 10 = 7	7 + 53 - 20 = 40	40 + 0 - 26 = 14	14 + 0 - 14 = 0	0 + 35 - 20 = 15	15 + 0 - 15 = 0

III-2 Utilisation «en cascade» du mécanisme élémentaire de calcul

Cet échancier de lancement permet de calculer l'échéancier de demandes brutes des composants de niveau supérieur (c'est-à-dire pour un niveau de détail plus grand). Par exemple, si la roue d'engrenage *E-3047*, composant de niveau 3, n'est utilisée que dans les boîtes d'engrenages *E-2010* et *E-2040*, composants de niveau 2, on obtient alors le [tableau 108](#), dans lequel on suppose connus les lancements du *E-2040* (selon un processus similaire à celui du *E-2010* développé précédemment). Ce tableau repose sur l'hypothèse qu'il n'y a aucun rebut dans la confection de cette boîte d'engrenages et tient compte de la nomenclature (voir [figure 137, page 459](#)) qui stipule qu'il faut 2 composants *E-3047* pour fabriquer 1 composant *E-2040*.

TABLEAU 108

Explosion des nomenclatures \Rightarrow définition des besoins bruts

Période t	15	16	17	18	19	20	21	22
Lancements en fabrication du <i>E-2010</i> (effectués en début de période)	-	53	0	0	35	0	-	-
Besoins Bruts du <i>E-3047</i> impliqués par le lancement du <i>E-2010</i> et la nomenclature (1 <i>E-3047</i> par <i>E-2010</i>)	-	53	0	0	35	0	-	-
Lancement en fabrication du <i>E-2040</i> (calcul effectué par ailleurs)	-	10	15	25	15	18	12	15
Besoins Bruts du <i>E-3047</i> impliqués par le lancement du <i>E-2040</i> et la nomenclature (2 <i>E-3047</i> par <i>E-2040</i>)	-	20	30	50	30	36	24	30
Besoins Bruts du <i>E-3047</i> impliqués par les lancements du <i>E-2040</i> et du <i>E-2010</i>	-	73	30	50	65	36	Calculs inutiles	

Cette détermination en cascade du programme de production, pour toutes les références du niveau 0 (produits finals), puis pour celles du niveau 1, puis pour celles de niveau 2, etc., jusqu'aux approvisionnements externes, est souvent

appelée **explosion des nomenclatures**. La figure 142 résume ce processus de base de la MRP qui sera illustré de manière plus complète au § III-3, page 475.

FIGURE 142
Le mécanisme de base de la MRP

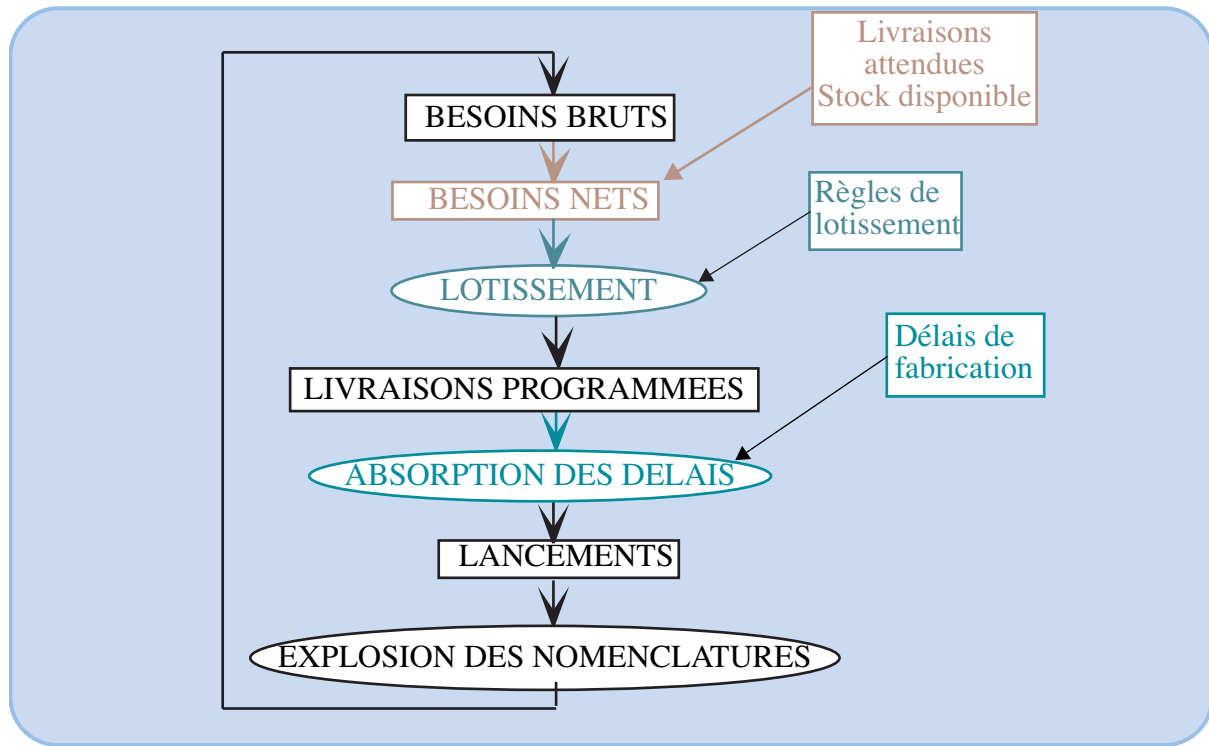


Table des matières

Index thématique

Les problèmes de qualité rencontrés en production font que l'on peut avoir une partie de la production à mettre au rebut. Supposons qu'il y ait en moyenne 5 % de roues rebutées dans le montage d'un engrenage, il faudra alors multiplier les demandes brutes de l'échéancier ci-dessus par $1/0,95$, pour retrouver, après abattement de 5 %, les roues effectivement montées dans une boîte d'engrenages. Dans ce cas, et compte tenu du caractère aléatoire des rebuts, il est préférable de coupler ce dispositif de majoration des besoins avec la création de stocks de sécurité (voir § IV-1.1, page 489).

L'incidence de la MRP sur les approvisionnements mérite d'être soulignée. En fournissant des besoins exacts de matières premières et de composants à acheter à l'extérieur, la MRP donne à la Direction de la Production une crédibilité vis-à-vis du service des approvisionnements dont elle ne jouissait pas toujours jusqu'alors. En outre, en soulageant ce service du calcul de la date de passation des commandes ainsi que des quantités à demander, les acheteurs peuvent consacrer une part plus importante de leur temps à la négociation de la qualité et à la recherche d'autres sources d'approvisionnement plus fiables et/ou moins onéreuses.

III-3 Détermination des charges découlant du programme de production

Les conséquences du programme de fabrication proposé sur la charge des divers postes de travail doivent nécessairement être abordées pour que la simulation proposée par la MRP puisse servir de guide pour l'action. Presque tous les logiciels

calculent ces charges de travail et les comparent aux capacités disponibles mais seuls les logiciels de type *MRP II* vont plus loin dans la recherche d'une programmation réalisable, avec des options d'ajustement «charge – capacité» (ce que nous ferons au § III-4, page 481). Le problème de la capacité d'un centre de production ne se pose que lorsque l'on considère toutes les références produites par ce centre. Aussi, lorsque l'on effectue les calculs de la charge induite par une seule référence, néglige-t-on le problème de la capacité et parle-t-on souvent de «calcul à capacité infinie».

Partons d'un nouvel exemple numérique (voir tableaux 109 à 111) pour illustrer la démarche de calcul suivie. Dans ce paragraphe, seul le calcul des charges des niveaux 1 et 2 de la nomenclature sera présenté car, pour simplifier ici, on supposera qu'aucun problème de capacité ne se posera dans le centre d'assemblage final où sont produites les références du niveau 0. Par contre, on verra que des problèmes de capacité se posent dans les centres d'assemblage intermédiaire où sont produites les références du niveau 1. Il est bien évident qu'*il est alors parfaitement inutile de poursuivre l'explosion des nomenclatures tant que ce problème d'insuffisance de capacité pour certaines périodes n'a pas trouvé de solution* (par une modification du programme de fabrication de ces références de niveau 1). Lorsque cet ajustement «charge – capacité» aura été achevé, le processus d'explosion de nomenclature pourra se poursuivre sur les références de niveau 2.

L'entreprise étudiée assemble 3 produits, référencés par *A*, *B* et *C*, dans un atelier d'assemblage final (références du niveau 0). Cette production s'effectue à partir de sous-ensembles référencés par *F*, *G* et *H* qui sont fabriqués dans un atelier d'assemblage intermédiaire et font appel à des composants référencés par *V*, *W*, *X* et *Y*. Le composant *X* est acheté à l'extérieur tandis que les autres sont fabriqués dans un atelier d'usinage. Par ailleurs :

- le [tableau 109](#), donne le Plan Directeur de production (les prévisions relatives aux sous-ensembles et composants correspondent à des demandes de pièces détachées);
- la nomenclature simplifiée (l'entreprise travaillant avec des milliers de références) est fournie à la [figure 143](#);

FIGURE 143
Nomenclature

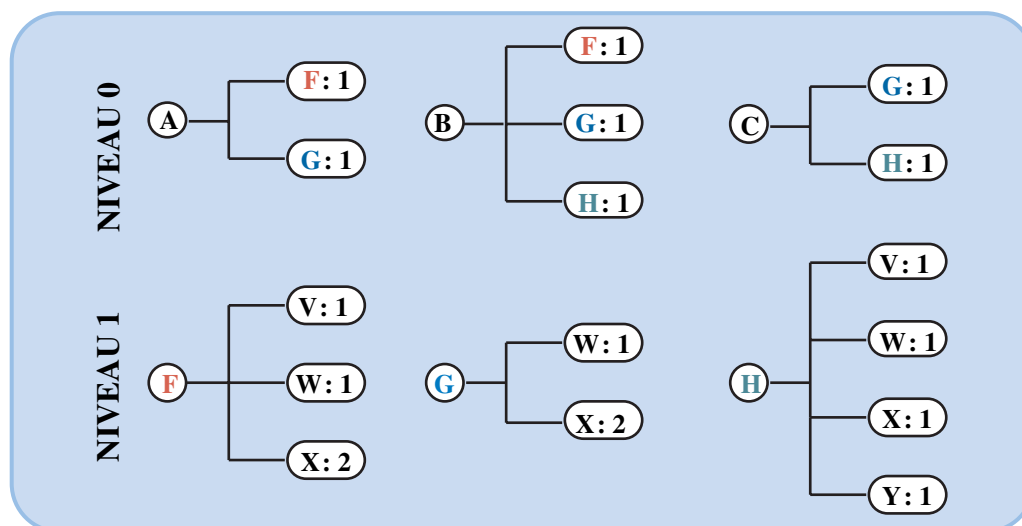


TABLEAU 109
Prévisions du plan directeur de production

Références		PÉRIODES											
		Novembre 2000	Décembre 2000	Janvier 2001	Février 2001	Mars 2001	Avril 2001	Mai 2001	Juin 2001	Juillet 2001	Août 2001	Septembre 2001	Octobre 2001
Produits finis	A	10300	12800	9700	10500	9700	10000	10600	11000	13000	10000	10000	10000
	B	12600	13400	12000	10700	10100	11500	12000	11600	11200	11000	11000	11000
	C	17400	20100	16300	17500	18000	19000	21500	20900	20100	19000	19500	19500
Sous-ensembles	F	1500	1400	1500	1600	2100	1800	1800	2000	1600	1400	1600	1600
	G	1700	1200	1700	1600	1800	1500	1400	1300	1200	1400	1800	1700
	H	2000	2300	1800	1900	2100	2000	2100	2000	2000	2000	2000	2000
Composants	V	4000	3500	3800	3100	3600	3600	3500	3400	3500	3500	3500	3500
	W	700	1000	1100	900	1100	1300	1000	1000	1000	1000	1000	1000
	X	3000	2500	2500	2500	2500	2500	2500	2500	2500	2500	2500	2500
	Y	1600	1700	1100	1500	1500	1500	1500	1500	1500	1500	1500	1500

- le [tableau 110](#) fournit les livraisons attendues, les positions de stock de fin de période, les gammes (temps opératoires), les délais d'obtention;

Table des matières

TABLEAU 110

Données diverses : livraisons attendues, positions de stock, temps opératoires, délais d'obtention, coûts unitaires des matières utilisées

Index thématique

Références		Livraison attendue (en début de mois)		Position de stock (en fin de mois)	Temps Opérateur Unitaire (en heure/unité)	Délai d'obtention (en mois)	Coût unitaire des matières utilisées (en dollars liduriens/unité)
		Novembre 2000	Décembre 2000	Octobre 2000			
Produits finis	A	10000	0	300	0,020 heure	1 mois	5,00 \$
	B	12500	0	100	0,010 heure	1 mois	6,00 \$
	C	17300	0	100	0,020 heure	1 mois	6,00 \$
Sous-ensembles	F	27400	23000	500	0,005 heure	2 mois	1,00 \$
	G	48200	0	700	0,010 heure	1 mois	2,00 \$
	H	31400	0	4800	0,020 heure	1 mois	1,00 \$
Composants	V	56600	55500	500	0,005 heure	2 mois	0,50 \$
	W	91200	0	500	0,010 heure	1 mois	0,75 \$
	X	154000	0	1000	0 heure (achat)	1 mois	2,00 \$
	Y	31800	0	300	0,010 heure	1 mois	1,00 \$

- le [tableau 111](#), [page 478](#), fournit les capacités (par hypothèse, ici, aucun problème ne se pose dans l'atelier d'assemblage final, ce qui rend inutile la

fourniture d'informations sur les capacités de cet atelier) et les coûts standards horaires d'utilisation de chaque atelier (coût variable direct); on notera que les capacités ne sont pas fournies pour les périodes pour lesquelles la charge de travail *complète* ne peut être calculée du fait des décalages engendrés par les délais d'obtention de certaines références fabriquées par le centre de production¹.

TABLEAU 111
Capacités de production (en heures) et coûts horaires d'utilisation des ateliers (en dollars liduriens)

ATELIERS	PÉRIODES									COÛT HORAIRE (en dollars liduriens)
	Novembre 2000	Décembre 2000	Janvier 2001	Février 2001	Mars 2001	Avril 2001	Mai 2001	Juin 2001	Juillet 2001	
Assemblage final	capacité suffisante (\Rightarrow pas de problème d'ajustement «charge – capacité»)									90 \$
Assemblage intermédiaire	1 150	1 150	1 150	1 250	1 250	1 280	1 250	1 200	1 200	100 \$
Usinage	1 630	1 600	1 700	1 650	1 650	1 700	1 600			150 \$

Pour simplifier, nous supposerons que les quantités lancées obéissent à la technique du «lot pour lot» présentée au § III-1.2, page 472. Ce choix implique que la livraison programmée est, par hypothèse, égale au besoin net de la période; la ligne livraison programmée disparaît donc du tableau de calcul.

Le tableau 112, détaille les calculs de la MRP pour le niveau 0. On fera l'hypothèse ici que ce niveau Assemblage Final ne connaît pas de problème de capacité. Il s'ensuit que les productions programmées correspondent exactement aux besoins nets, en tenant compte bien sûr du décalage induit par les délais d'obtention (12 800 A, 13 400 B et 20 100 C feront l'objet d'un assemblage final en novembre 2000, pour être disponible au début du mois de décembre). On peut noter que le calcul des positions de stock ne présente pas d'intérêt pratique à partir du mois de janvier 2001, parce que c'est la technique du «lot pour lot» qui est retenue; dans le cas contraire, l'utilisation des relations générales 73 (page 472) et 74 (page 472) implique le calcul systématique de la position de stock.

Les calculs du niveau 1 sont un peu plus compliqués car, pour certaines périodes, la charge requise par l'application d'une programmation au plus tard est supérieure à la capacité disponible. Le travail est effectué en deux étapes, pour vérifier si la capacité requise reste ou non toujours inférieure à la capacité disponible.

- La première étape consiste à opérer l'explosion de la partie de nomenclature concernée puis à calculer lesancements en production sans se préoccuper d'éventuelles limitations de capacité; ce travail est effectué dans le tableau

1. Par exemple, en août, on lancera dans l'atelier d'assemblage intermédiaire la fabrication de sous-ensembles F qui seront livrés deux mois plus tard pour être montés en octobre dans les produits finis qui seront achevés à la fin du mois d'octobre pour être livrés au début du mois de novembre, afin de satisfaire les besoins de ce mois pour lequel le PDP ne fournit aucune information.

TABLEAU 112
Lancement du niveau « assemblage final » (à capacité infinie)

		PÉRIODES												
		Octobre 2000	Novembre 2000	Décembre 2000	Janvier 2001	Février 2001	Mars 2001	Avril 2001	Mai 2001	Juin 2001	Juillet 2001	Août 2001	Septembre 2001	Octobre 2001
Référence A	Besoins Bruts (PDP)		10300	12800	9700	10500	9700	10000	10600	11000	13000	10000	10000	10000
	Livraisons attendues		10000	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	Position de stock	300	0	-12800	-22500
	Besoins Nets = Livraisons programmées		0	12800	9700	10500	9700	10000	10600	11000	13000	10000	10000	10000
	Lancements		12800	9700	10500	9700	10000	10600	11000	13000	10000	10000	10000	
Référence B	Besoins Bruts (PDP)		12600	13400	12000	10700	10100	11500	12000	11600	11200	11000	11000	11000
	Livraisons attendues		12500	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	Position de stock	100	0	-13400	-25400
	Besoins Nets = Livraisons programmées		0	13400	12000	10700	10100	11500	12000	11600	11200	11000	11000	11000
	Lancements		13400	12000	10700	10100	11500	12000	11600	11200	11000	11000	11000	
Référence C	Besoins Bruts (PDP)		17400	20100	16300	17500	18000	19000	21500	20900	20100	19000	19500	19500
	Livraisons attendues		17300	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	Position de stock	100	0	-20100	-36400
	Besoins Nets = Livraisons programmées		0	20100	16300	17500	18000	19000	21500	20900	20100	19000	19500	19500
	Lancements		20100	16300	17500	18000	19000	21500	20900	20100	19000	19500	19500	

Table des matières

Index thématique

114, page 481 ; il est repris en partie au tableau 113, page 480, avec une explication des calculs que l'on va commenter :

- au mois de novembre 2000, compte tenu du fait que seuls les produits A et B comportent chacun un (et un seul) sous-ensemble F, les besoins bruts de F provenant du niveau 0 sont donc de 12800 + 13400 ; il faut y ajouter les 1500 unités requises par le plan directeur de production ; les besoins bruts de F pour novembre sont donc de 27700 unités ;
- à la fin du mois d'octobre 2000, la position de stock pour F s'élevait à 500 unités, valeur qu'il convient d'ajouter à la livraison attendue pour le mois de novembre (27400), pour connaître le total disponible (27900) duquel il faudra défalquer les besoins bruts du mois (27700) pour déterminer la position de stock de la fin de ce mois de novembre (200) ;
- un calcul similaire en décembre 2000 conduit à des besoins bruts de 9700 + 12000 + 1400 = 23100 ; la position de stock de fin de mois s'élève alors à : 23000 (livraison attendue) + 200 (position de stock à la fin du mois précédent) – 23100 (besoins bruts), ce qui donne 100 ;
- aucune livraison n'étant attendue pour janvier 2001 (ni pour les mois suivants) et les besoins bruts de janvier dépassant la position de stock de fin décembre, la position de stock de fin janvier devient négative, ce qui conduit, pour janvier, à des besoins nets positifs de 22600 qui, compte tenu du délai d'obtention de F, devront être couverts par un lancement deux mois plus tôt (novembre 2000) ;

- pour les mois suivants, toujours pour la référence F, l'absence de livraisons attendues fait que la position de stock de fin de mois est égale à celle du mois précédent, diminuée des besoins bruts du mois; ce calcul ne présente cependant pas d'intérêt (d'où les points de suspension du tableau) et les relations récurrentes 73 (page 472) et 74 (page 472) sont inutiles car les besoins nets sont alors nécessairement égaux aux besoins bruts;

TABLEAU 113

Explication des calculs du lancement du niveau « Assemblage intermédiaire » (à capacité infinie)

		PÉRIODES						
		Octobre 2000	Novembre 2000	Décembre 2000	Janvier 2001	Février 2001	Mars 2001	
Référence F	Besoins Bruts venant de	A ^a		12800	9700	10500	9700	10000
		B ^b		13400	12000	10700	10100	11500
		PDP		1500	1400	1500	1600	2100
		Σ		27700	23100	22700	21400	23600
	Livraisons attendues		27400	23000	0	0	0	
	Position de stock		500	200	100	-22600	-44000	...
Besoins Nets = Livraisons programmées			0	0	22600	21400	23600	
Lancements			22600	21400	23600	24400	24400	

DÉLAI D'OBTENTION = 2

- a. Les lancements de A (niveau 0) deviennent, après multiplication par 1 (Il faut 1 A pour fabriquer 1 €), les besoins bruts de F venant de A.
- b. Les lancements de B (niveau 0) deviennent, après multiplication par 1 (Il faut 1 B pour fabriquer 1 €), les besoins bruts de F venant de B.

- à ce niveau du raisonnement, ce lancement ne tient nullement compte des possibilités physiques de production (capacités de production implicitement infinies); la démarche restant la même pour les autres mois et les autres références, on ne commentera donc pas les autres calculs.
- La seconde étape consiste à calculer la charge induite par la proposition de lancement faite au [tableau 114](#). Pour ce faire, il faut utiliser les gammes¹ données au [tableau 110, page 477](#). Par exemple, en novembre 2000, le lancement en production de 22600 unités de F (voir [tableau 114](#)) conduit à une charge de travail de $22600 \times 0,005 = 113$ heures, puisque le temps opératoire

1. Certains logiciels permettent d'ajouter un temps de lancement en production, au temps opératoire directement productif, seul pris en compte ici. Par ailleurs, le mécanisme de calcul de la charge de travail retenu ici, pour les références ayant un délai d'obtention supérieur à une période (ici F qui a un délai de 2 mois), considère implicitement que le travail est à exécuter au cours de la dernière période du délai d'obtention. Ceci revient à considérer les dernières périodes du délai d'obtention comme improductive (délai d'attente, etc.). Cette hypothèse n'est pas réaliste lorsque le temps de production requis pour la référence au cours d'une période excède la durée de cette période et/ou que le travail ne peut être fractionné entre plusieurs ressources. Cette hypothèse a donc d'autant moins de chances d'être acceptable que le découpage temporel est fin. L'alternative, non illustrée dans ce chapitre, consiste à calculer la charge induite par une référence dont le délai d'obtention est de plusieurs périodes, en répartissant le travail à effectuer suivant une logique de profil moyen de chargement, et à intégrer cette répartition temporelle dans les mécanismes d'ajustement « charge – capacité ».

TABLEAU 114
Lancement du niveau « Assemblage intermédiaire » (à capacité infinie)

		PÉRIODES											
		Octobre 2000	Novembre 2000	Décembre 2000	Janvier 2001	Février 2001	Mars 2001	Avril 2001	Mai 2001	Juin 2001	Juillet 2001	Août 2001	Septembre 2001
Référence F	Besoins Bruts venant de	A	12800	9700	10500	9700	10000	10600	11000	13000	10000	10000	10000
		B	13400	12000	10700	10100	11500	12000	11600	11200	11000	11000	11000
		PDP	1500	1400	1500	1600	2100	1800	1800	2000	1600	1400	1600
		Σ	27700	23100	22700	21400	23600	24400	24400	26200	22600	22400	22600
	Livraisons attendues		27400	23000	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	Position de stock	500	200	100	-22600	-44000
	Besoins Nets = Livraisons programmées		0	0	22600	21400	23600	24400	24400	26200	22600	22400	22600
	Lancements		22600	21400	23600	24400	24400	26200	22600	22400	22600		
Référence G	Besoins Bruts venant de	A	12800	9700	10500	9700	10000	10600	11000	13000	10000	10000	10000
		B	13400	12000	10700	10100	11500	12000	11600	11200	11000	11000	11000
		C	20100	16300	17500	18000	19000	21500	20900	20100	19000	19500	19500
		PDP	1700	1200	1700	1600	1800	1500	1400	1300	1200	1400	1800
		Σ	48000	39200	40400	39400	42300	45600	44900	45600	41200	41900	42300
	Livraisons attendues		48200	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	Position de stock	700	900	-38300	-78700
	Besoins Nets = Livraisons programmées		0	38300	40400	39400	42300	45600	44900	45600	41200	41900	42300
Lancements		38300	40400	39400	42300	45600	44900	45600	41200	41900	42300		
Référence H	Besoins Bruts venant de	B	13400	12000	10700	10100	11500	12000	11600	11200	11000	11000	11000
		C	20100	16300	17500	18000	19000	21500	20900	20100	19000	19500	19500
		PDP	2000	2300	1800	1900	2100	2000	2100	2000	2000	2000	2000
		Σ	35500	30600	30000	30000	32600	35500	34600	33300	32000	32500	32500
	Livraisons attendues		31400	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	Position de stock	4800	700	-29900	-59900
	Besoins Nets = Livraisons programmées		0	29900	30000	30000	32600	35500	34600	33300	32000	32500	32500
	Lancements		29900	30000	30000	32600	35500	34600	33300	32000	32500	32500	

Table des matières

Index thématique

unitaire de F est de 0,005 heure (temps lu sur le [tableau 110](#)). De même pour G , on aboutit à $38\,300 \times 0,01 = 383$ heures et, pour H , à $29\,900 \times 0,02 = 598$ heures. La charge de travail qui découle du plan directeur de production s'élève donc en novembre à $113 + 383 + 598 = 1094$ heures. Étant donné que la capacité disponible s'élève à 1 150 heures, l'entreprise dispose d'un excédent de 56 heures. Un calcul similaire pour les autres mois conduit à observer un excédent pour tous les mois sauf pour le mois de mars 2001 pour lequel on a un dépassement de 38 heures; le résultat de ces calculs est donné dans le [tableau 115](#) (on ne se préoccupera pas, pour l'instant, des six dernières lignes de ce tableau).

III-4 L'ajustement «charge – capacité»

Continuons l'examen de notre exemple, ce qui nous permettra de mettre en évidence un ajustement possible par la constitution de stock la moins onéreuse et

la plus tardive possible (§ III-4.1). On examinera ensuite rapidement (§ III-4.2, page 486) un ajustement par adaptation de la capacité, avant de faire quelques remarques complémentaires (§ III-4.3, page 487).

TABLEAU 115

Ajustement « charge – capacité » de l'atelier d'assemblage intermédiaire

		PÉRIODES								
		Novembre 2000	Décembre 2000	Janvier 2001	Février 2001	Mars 2001	Avril 2001	Mai 2001	Juin 2001	Juillet 2001
Heures d'assemblage intermédiaire demandées	F	113	107	118	122	122	131	113	112	113
	G	383	404	394	423	456	449	456	412	419
	H	598	600	600	652	710	692	666	640	650
	Σ	1094	1111	1112	1197	1288	1272	1235	1164	1182
Heures disponibles		1150	1150	1150	1250	1250	1280	1250	1200	1200
Dépassement initial		0	0	0	0	38	0	0	0	0
Excédent initial		56	39	38	53	0	8	15	36	18
Heures à reporter		0	0	0	0	38	0	0	0	0
Excédent final		56	39	38	15	0	8	15	36	18
Heures programmées		1094	1111	1112	1235	1250	1272	1235	1164	1182
Productions programmées	F	22600	21400	23600	24400	24400	26200	22600	22400	22600
	G	38300	40400	39400	42300	45600	44900	45600	41200	41900
	H	29900	30000	30000	34500	33600	34600	33300	32000	32500

$22600 \times 0,005 =$

III-4.1 Ajustement par les stocks

Si l'on refuse, a priori, de remettre en cause le plan directeur de production, il faut transférer l'excédent de charge de 38 heures de travail du mois de mars 2001 à une période antérieure. Ce report de production implique la constitution d'un stock qu'il faudra bien financer d'une manière ou d'une autre. C'est pourquoi il est judicieux de retarder le plus possible cette constitution de stock (principe de fabrication au plus tard sans compromettre le PDP). Comme en février on observe un excédent de 53 heures, la totalité du transfert de charge de travail excédentaire de mars est réalisable en février (des cas plus complexes seront abordés avec l'ajustement « charge – capacité » de l'atelier d'usinage). Cette décision prise, il ne reste plus qu'à déterminer lequel des trois sous-ensembles *F*, *G* ou *H* fera l'objet de ce transfert d'activité.

Ce choix doit être cohérent avec la logique économique sous-jacente à la constitution la plus tardive possible d'encours : il faudra que l'anticipation des 38 heures de travail se traduise par la création d'un stock ayant la plus faible valeur possible, parce que l'on fait l'hypothèse que la possession de cet encours a un coût de détention proportionnel à sa valeur (on reviendra sur l'explicitation de ce raisonnement en page 487). Il faut donc calculer le coût de revient des produits fabriqués et de leurs composants, ce que l'on fera à partir des informations du tableau 110 (page 477), en partant des composants les plus élémentaires (niveau de nomenclature le plus élevé) pour terminer par les produits finis (niveau 0 de la nomenclature), puisqu'il n'est pas possible de calculer le coût d'un ensemble sans connaître celui de ses constituants.

Prenons, par exemple, le cas du composant *V*. Ce composant utilise 0,50 \$ de matières premières et son usinage nécessite 0,005 heure à 150 \$; son coût de revient unitaire est donc $0,5 + 0,005 \times 150 = 1,25$ \$. On établit de même que les composants *W* et *Y* (*X* étant acheté à l'extérieur) coûtent respectivement 2,25 \$ et 2,50 \$:

- coût unitaire de *V*: $0,5 + 0,005 \times 150 = 1,25$ \$
- coût unitaire de *W*: $0,75 + 0,010 \times 150 = 2,25$ \$
- coût unitaire de *X*: acheté à 2 \$
- coût unitaire de *Y*: $1 + 0,010 \times 150 = 2,50$ \$

Il est alors possible de calculer les coûts de revient unitaires du niveau 1. Par exemple, le sous-ensemble *F* utilise 1 \$ de matières premières, 0,005 heure de l'atelier d'assemblage (coût horaire : 100 \$), une unité du composant *V* (à 1,25 \$), une unité du composant *W* (à 2,25 \$) et deux unités du composant *X* (à 2 \$) ; il s'ensuit que le coût de revient unitaire de *F* s'élève à 9 \$. On calcule de même pour *G* et *H*, des coûts de revient unitaires respectivement égaux à 9,25 \$ et 11 \$:

- coût unitaire de *F*: $1 + 0,005 \times 100 + (1 \times 1,25 + 1 \times 2,25 + 2 \times 2 + 0 \times 2,5) = 9$ \$
- coût unitaire de *G*: $2 + 0,010 \times 100 + (0 \times 1,25 + 1 \times 2,25 + 2 \times 2 + 0 \times 2,5) = 9,25$ \$
- coût unitaire de *H*: $1 + 0,020 \times 100 + (1 \times 1,25 + 1 \times 2,25 + 1 \times 2 + 1 \times 2,5) = 11$ \$

Un calcul similaire (mais sans objet ici) pour les références du niveau 0 donne: 25,05 \$ pour *A*, 36,15 \$ pour *B* et 28,05 \$ pour *C*.

Ensuite, il faut calculer, à partir des gammes, les productions horaires en volume puis en valeur, pour chaque référence. S'il faut 0,005 heure pour assembler un sous-ensemble *F*, c'est que l'on produit $1/0,005 = 200$ sous-ensembles *F* à l'heure. La valeur de cette production horaire est donc $9 \times 200 = 1800$ \$. Un calcul similaire pour les sous-ensembles *G* et *H* conduit à des valeurs de 925 \$ et 550 \$:

- valeur de la production horaire de *F*: $9 \times (1/0,005) = 1800$ \$
- valeur de la production horaire de *G*: $9,25 \times (1/0,010) = 925$ \$
- valeur de la production horaire de *H*: $11 \times (1/0,020) = 550$ \$

En définitive, bien qu'ayant le coût de revient unitaire le plus élevé, le sous-ensemble *H* est la référence la plus économique à stocker.

Les 38 heures de production de *H* que l'on anticipe correspondent à $38/0,02 = 1900$ unités, le temps opératoire unitaire de *H* étant de 0,02 heure. Il convient dès lors de retrancher 1900 à la production initialement décidée (35500) pour mars 2001 (ce qui donne une production programmée de 33600) et d'ajouter cette même valeur à la production initialement décidée (32600) pour février 2001 (ce qui donne une production programmée de 34500). À l'issue de cet ajustement, on obtient la programmation définitive des références du niveau, données dans les dernières lignes du [tableau 115 de la page 482](#).

La programmation définitive du niveau 1 étant fixée, il est alors possible de poursuivre le processus d'éclatement des nomenclatures en s'attaquant maintenant au niveau 2 (voir [tableau 116](#)). Sur le plan méthodologique, il n'y a rien de nouveau par rapport à ce qui vient d'être vu, la seule remarque complémentaire à faire concerne la procédure d'ajustement «charge – capacité».



TABLEAU 116
Lancement du niveau « usinage » – à capacité infinie

			PÉRIODES									
			Octobre 2000	Novembre 2000	Décembre 2000	Janvier 2001	Février 2001	Mars 2001	Avril 2001	Mai 2001	Jun 2001	Juillet 2001
Référence V	Besoins Bruts venant de	F		22600	21400	23600	24400	24400	26200	22600	22400	22600
		H		29900	30000	30000	34500	33600	34600	33300	32000	32500
		PDP		4000	3500	3800	3100	3600	3600	3500	3400	3500
		Σ		56500	54900	57400	62000	61600	64400	59400	57800	58600
	Livraisons attendues			56600	55500	0	0	0	0	0	0	0
	Position de stock		500	600	1200	-56200
	Besoins Nets = Livraisons programmées			0	0	56200	62000	61600	64400	59400	57800	58600
	Lancements			56200	62000	61600	64400	59400	57800	58600		
Référence W	Besoins Bruts venant de	F		22600	21400	23600	24400	24400	26200	22600	22400	22600
		G		38300	40400	39400	42300	45600	44900	45600	41200	41900
		H		29900	30000	30000	34500	33600	34600	33300	32000	32500
		PDP		700	1000	1100	900	1100	1300	1000	1000	1000
		Σ		91500	92800	94100	102100	104700	107000	102500	96600	98000
	Livraisons attendues			91200	0	0	0	0	0	0	0	0
	Position de stock		500	200	-92600
	Besoins Nets = Livraisons programmées			0	92600	94100	102100	104700	107000	102500	96600	98000
Lancements			92600	94100	102100	104700	107000	102500	96600	98000		
Référence X	Besoins Bruts venant de	F		45200	42800	47200	48800	48800	52400	45200	44800	45200
		G		76600	80800	78800	84600	91200	89800	91200	82400	83800
		H		29900	30000	30000	34500	33600	34600	33300	32000	32500
		PDP		3000	2500	2500	2500	2500	2500	2500	2500	2500
		Σ		154700	156100	158500	170400	176100	179300	172200	161700	164000
	Livraisons attendues			154000	0	0	0	0	0	0	0	0
	Position de stock		1000	300	-155800
	Besoins Nets = Livraisons programmées			0	155800	158500	170400	176100	179300	172200	161700	164000
Lancements			155800	158500	170400	176100	179300	172200	161700	164000		
Référence Y	Besoins Bruts venant de	H		29900	30000	30000	34500	33600	34600	33300	32000	32500
		PDP		1600	1700	1100	1500	1500	1500	1500	1500	1500
		Σ		31500	31700	31100	36000	35100	36100	34800	33500	34000
	Livraisons attendues			31800	0	0	0	0	0	0	0	0
	Position de stock		300	600	-31100
	Besoins Nets = Livraisons programmées			0	31100	31100	36000	35100	36100	34800	33500	34000
Lancements			31100	31100	36000	35100	36100	34800	33500	34000		

Table des matières

Index thématique

En effet, au niveau de l'atelier d'usinage, des dépassements sont enregistrés sur deux mois consécutifs (voir [tableau 117](#)), à savoir les mois de mars (78 heures) et février (70 heures).

La démarche à suivre est de *type rétrograde*, dans la mesure où l'on s'attaque d'abord aux problèmes des périodes les plus éloignées pour, progressivement, revenir sur les périodes les plus proches. Cette démarche se justifie par le lissage

TABLEAU 117
Ajustement « charge – capacité » de l'atelier d'usinage

		PÉRIODES						
		Novembre 2000	Décembre 2000	Janvier 2001	Février 2001	Mars 2001	Avril 2001	Mai 2001
Heures d'assemblage intermédiaire demandées	V	281	310	308	322	297	289	293
	W	926	941	1021	1047	1070	1025	966
	Y	311	311	360	351	361	348	335
	Σ	1518	1562	1689	1720	1728	1662	1594
Heures disponibles		1630	1600	1700	1650	1650	1700	1600
Dépassement initial		0	0	0	70	78	0	0
Excédent initial		112	38	11	0	0	38	6
Cumul d'heures à reporter C_t		0 ^a	99 ^b	137 ^b	148 ^b	78	0	0
Variation Δ_t d'heures de la période ^c		+ 99	+ 38	+ 11	- 70	- 78	0	0
Heures programmées ^d		1617	1600	1700	1650	1650	1662	1594
Excédent final		13	0	0	0	0	38	6
Productions programmées	V	56200	62000	61600	64400	59400	57800	58600
	W	102500 ^e	97900	103200	97700	99200	102500	96600
	Y	31100	31100	36000	35100	36100	34800	33500

Table des matières

Index thématique

- a. 0 parce que $112 > 99$, ce qui conduit à un excédent final de 13 pour cette période.
- b. $99 = 137 - 38$; $137 = 148 - 11$; $148 = 78 + 70$.
- c. $\Delta_t = C_{t+1} - C_t$, sauf pour la dernière période: $99 = 99 - 0$; $38 = 137 - 99$; $11 = 148 - 137$; $- 70 = 78 - 148$; $- 78 = 0 - 78$; $0 = 0 - 0$; pour la dernière période, la variation est nulle en cas d'excédent initial et, dans le cas contraire, égale au dépassement initial.
- d. «Heures programmées de période t » = «Heures demandées de période t » + Δ_t : $1617 = 1518 + 99$; $1600 = 1562 + 38$, $1700 = 1689 + 11$; ... ; autre méthode de calcul: «Heures programmées de période t » = «Heures disponibles de période t » - «Excédent final».
- e. $102500 = 92600 + 99 / 0,01$; $97900 = 94100 + 38 / 0,01$; etc.

de la charge qui provoque un transfert des dépassements sur les périodes antérieures, comme nous l'avons déjà vu.

- En février 2001, le cumul des reports s'élève à $70 + 78 = 148$ heures.
- En janvier 2001, on dispose d'un excédent de 11 heures, ce qui ramène le report cumulé à $148 - 11 = 137$ heures.
- En décembre 2000, l'excédent initial d'heures s'élève à 38 heures qui permettent de diminuer d'autant le report cumulé qui tombe à $137 - 38 = 99$ heures.
- Enfin l'excédent de 112 heures initialement enregistré pour novembre 2000 sera utilisé à concurrence de 99 heures pour résorber le reliquat de charge et il restera 13 heures inutilisées en novembre 2000.

L'ajustement par une anticipation de la production étant possible, il ne reste plus qu'à décider de la référence pour laquelle le transfert de production doit être opéré. Le calcul des valeurs de productions horaires de V , W et Y donne:

- valeur de la production horaire de V : $1,25 \times (1/0,005) = 250$ \$
- valeur de la production horaire de W : $2,25 \times (1/0,010) = 225$ \$
- valeur de la production horaire de Y : $2,50 \times (1/0,010) = 250$ \$

ce qui conduit à classer dans l'ordre W puis V et Y (les ex-aequo étant départagés arbitrairement). Comme au niveau de l'assemblage intermédiaire, il ne sera nécessaire, ici, de faire appel qu'à une seule référence (ici W) pour ajuster l'offre et la demande. On ne peut éviter de faire appel à plusieurs références lorsque, pour une période quelconque, la diminution désirée de la production de la référence retenue est supérieure au lancement initialement calculé; il convient alors dans ce cas de compléter le transfert en prélevant dans le lancement initialement calculé de la référence classée en deuxième position (et de poursuivre ce raisonnement sur les références suivantes, si cela ne suffit pas). Dans notre exemple, il faut modifier ainsi la production de l'atelier d'usinage et donc la production de W :

- en mars 2001 : 0 (report cumulé d'avril) – 78 heures (report cumulé de mars), soit une diminution de 7800 unités de W et une programmation finale de $107000 - 7800 = 99200$ unités de W en mars 2001 ;
- en février 2001 : 78 heures (report cumulé de mars) – 148 heures (report cumulé de février égal à $78 + 70 = 148$ heures), soit une diminution de 70 heures et une programmation finale de $104700 - 7000 = 97700$ unités de W en février 2001 ;
- en janvier 2001 : 148 heures (report cumulé de février) – 137 heures (report cumulé de janvier: $148 - 11 = 137$ heures), soit une augmentation de la production de W de 1100 unités, d'où une programmation finale de $102100 + 1100 = 103200$ unités de W en janvier 2001 ;
- en décembre 2000 : on obtient une augmentation de $(137 - 99 =)$ 38 heures et donc 3800 unités de W et en novembre une augmentation de 99 heures correspondant à une augmentation de production de 9900 unités de W et une programmation finale de $92600 + 9900 = 102500$.

On peut pousser l'analyse économique de la solution retenue en calculant, dans le [tableau 118 de la page 487](#), la position prévisionnelle de stock de la référence W ainsi que la valeur de l'encours qui en résulte. Si l'on suppose que le coût de possession mensuel unitaire d'une référence se calcule¹ comme 1% de son coût de revient, le coût de possession des encours se calcule comme étant 1% du montant de l'encours mensuel (dernière ligne du [tableau 118](#)), ce qui conduit à un coût total de l'ajustement réalisé s'élevant à 1055,25 dollars liduriens.

III-4.2 Ajustement par adaptation de la capacité

Cet ajustement par les stocks qui a été privilégié n'est pas le seul possible. Une modulation des capacités peut être envisagée par transfert de personnel entre unités productives (si les centres de production sont «sur-capacitaires» en équipements) ou par un appel à des heures supplémentaires ou à une sous-traitance. Là encore, un raisonnement économique s'impose. Dans notre exemple, la valeur de la production horaire de W s'élevant à 225, le coût de possession mensuel d'une heure de production sur cette référence s'élève à 2,25 \$. Si le coût de l'heure supplémentaire s'élève à 180 \$², il devient plus intéressant de décaisser une heure supplémentaire que d'anticiper une heure de production sur plus de 80 mois (point mort à $180 / 2,25 = 80$ mois), ce qui fait, dans cet exemple, que l'appel aux heures supplémentaires est exclu économiquement.

1. Pour une discussion approfondie de ce coût, voir le [chapitre X, § II-2.2.3.1, page 655](#).

TABLEAU 118
Évolution prévisionnelle de la position de stock de W et coût de possession des stocks

	PÉRIODES								
	Octobre 2000	Novembre 2000	Décembre 2000	Janvier 2001	Février 2001	Mars 2001	Avril 2001	Mai 2001	Juin 2001
Besoins Bruts de W		91 500	92 800	94 100	102 100	104 700	107 000	102 500	96 600
Livraisons attendues de W (cf. tableau 116)		91 200							
Livraisons programmées de W (cf. tableau 118)			102 500	97 900	103 200	97 700	99 200	102 500	96 600
Position de stock de W (fin de période)	500	200	9 900	13 700	14 800	7 800	0	0	0
Valeur du stock (de fin de période)	1 125	450	222 75	308 25	333 00	175 50	0	0	0
Coût de possession (de la période)	11,25	4,50	222,75	308,25	333,00	175,50	0	0	0

III-4.3 Remarques

Les possibilités d'ajustement par les stocks peuvent être contraintes par les capacités de stockage. Dans ce cas, le raisonnement économique doit être adapté : la référence jugée, dans l'absolu, comme la plus intéressante peut être aussi l'une de celles qui a le plus fort encombrement unitaire. Dans ces conditions, on est amené à lui préférer, au moins partiellement, une référence moins volumineuse permettant de satisfaire la contrainte (au prix d'une valeur d'encours créé plus élevée). Prenons l'exemple (voir [tableau 119, page 488](#)) d'un ajustement « charge - capacité » conduisant, sans tenir compte d'une contrainte de stockage de 108 unités, à reporter 20 heures de travail sur le produit P₃. Le volume de production de P₃ correspondant à 120 unités de stockage, cette solution n'est pas réalisable.

On se rend compte alors ($a_i \frac{20}{t_i}$) que si l'ajustement s'effectue en totalité sur la référence P₁ ou la référence P₂ (ce qui correspond au volume de production à transférer $20/t_i$), la contrainte de capacité est non seulement respectée mais il reste même un reliquat de 8 unités de stockage, si l'ajustement est effectué sur P₂ et 28, si l'ajustement est effectué sur P₁. Dans ces conditions, il est évident que la solution optimale panachera une production de P₃ avec une production de la référence P₁ ou la référence P₂, tout en cherchant à saturer les contraintes d'heures à reporter et de stockage. Pour savoir si l'attention doit se porter sur la référence P₁

2. *Note de la page précédente.* Si ce standard intègre un amortissement de l'équipement et un forfait de dépenses annexes (énergie...). Il convient alors de n'intégrer que le coût direct de main-d'œuvre qui, seul, correspond à un supplément de charges effectif. Par ailleurs, dans la mesure où il existe des possibilités d'anticipation de la production « en heures normales », permettant d'ajuster la charge à la capacité sans dépense supplémentaire de personnel, le raisonnement économique doit s'appuyer sur le coût de l'heure supplémentaire et non sur la différence entre le coût de l'heure supplémentaire et celui de l'heure normale. En effet, dans ces conditions, l'appel à des heures supplémentaires conduit à accroître les charges du compte de résultats d'un montant égal au coût des heures supplémentaires et non à l'accroissement de coût.

ou la référence P_2 , il suffit de constater qu'à une unité de P_3 se substitue dans le stock :

- soit $1,2 / 0,8 = 1,5$ unité de P_2 , correspondant à $0,16 \times 1,5 = 0,24$ heure de travail (en échange de 0,2 heure effectuée sur P_3), ce qui correspond à une valeur d'encours de $0,24 \times 937,5 = 225$;
- soit $1,2 / 0,5 = 2,4$ unités de P_1 , correspondant à $0,125 \times 2,4 = 0,3$ heure de travail, ce qui correspond à une valeur d'encours de $0,3 \times 960 = 288$.

Il est donc plus intéressant de travailler sur la référence P_2 . Dans la mesure où la référence P_2 peut, à elle seule, satisfaire les deux contraintes (contrairement à P_3), la solution optimale est obtenue en résolvant le système des 2 équations à 2 inconnues correspondant aux contraintes¹, ce qui donne ici : 40 unités de P_3 et 75 unités de P_2 . La valeur d'encours créée s'élève alors à 16450, contre 13000 en l'absence de contrainte de stockage.

TABLEAU 119
Ajustement charge - capacité avec contraintes de stockage

Référence i	Temps opératoire t_i	Coût unitaire	Valeur de la production horaire	Encombrement unitaire a_i^a	$a_i \frac{20}{t_i}$
P_1	0,125	120	960,0	0,5	80
P_2	0,160	150	937,5	0,8	100
P_3	0,200	130	650,0	1,2	120

a. exprimé en unité moyenne de stockage.

Il peut ne pas être possible d'ajuster la charge découlant de l'application du *PDP* et la capacité disponible par la constitution de stocks (ce qui était le cas dans notre exemple). Si la technique de lotissement retenue n'est pas du type «lot pour lot», on cherchera tout d'abord à diminuer la taille des lots, sans provoquer de ruptures de stock. Ensuite, et ce quelle que soit la technique de lotissement retenue, on cherchera à faire varier le niveau des ressources «critiques» : transfert sur les postes critiques de ressources affectées initialement à des postes non critiques, appel aux heures complémentaires, appel au personnel intérimaire, appel à la sous-traitance.

Si ces diverses solutions de lissage ne suffisent pas (ou ne sont pas possibles), on devra différer la demande excédentaire. L'appel aux techniques de traçage, évoquées au § II-6, page 469, permet de faciliter les arbitrages. Dans ce cadre, on jouera d'abord sur la partie du plan directeur de production correspondant à la satisfaction d'une demande de pièces détachées. Si ce type de problème se pose trop souvent, il y a intérêt à adapter les capacités (appel au travail posté en deux ou trois équipes pour les centres de production critiques, investissements nouveaux, etc.) ou à chercher à ajuster la demande (notamment par les prix si cela est possible).

1. $0,16x_2 + 0,2x_3 = 20$ et $0,8x_2 + 1,2x_3 = 108$. En réalité on est en présence d'une simplification du problème d'optimisation suivant : $Min(120x_1 + 150x_2 + 130x_3)$, sous contraintes : $0,125x_1 + 0,16x_2 + 0,2x_3 \geq 20$ et $0,5x_1 + 0,8x_2 + 1,2x_3 \leq 108$, qui relève de la programmation linéaire qui sera présentée au chapitre XVI.

Il n'est peut-être pas inutile de faire remarquer que plusieurs de ces procédures d'ajustement entre les charges et les capacités disponibles peuvent être utilisées pour opérer le même type d'arbitrage à un niveau plus agrégé (plan à long terme, par exemple), en utilisant des regroupements de produits (macro-nomenclatures) et de ressources (macro-gammes), ainsi qu'un découpage temporel différent¹. Certains outils, comme l'*algorithme de Land* (qui sera présenté au [chapitre VIII](#), § II-3.1, page 576 et qui est d'une programmation et d'une utilisation particulièrement aisée), sont utilisables pour effectuer un premier arbitrage « grossier » entre charge et capacité dans la définition du Plan Directeur de Production ; pour une formulation plus complexe du problème, faisant notamment intervenir des embauches ou des licenciements du personnel, il faut faire appel à des formulations de programmation linéaire du type de celles qui seront présentées au [chapitre VIII](#).

SECTION IV REMARQUES COMPLÉMENTAIRES

Après avoir présenté quelques compléments techniques (§ IV-1), on examinera trois types de remarques pouvant être faites sur l'usage de ce type d'approche. Tout d'abord (§ IV-2, page 494) se pose le problème de la fréquence et de l'utilisation dynamique de la MRP, dans le cadre d'un processus de planification glissante. Ensuite (§ IV-3, page 496) se pose le problème des liens qui existent entre le programme de fabrication proposé par la MRP et l'ordonnancement. Enfin (§ IV-4, page 496), se pose le problème de la possibilité d'amélioration de cette démarche, notamment en cherchant à utiliser les apports de la recherche opérationnelle et des techniques de hiérarchisation.

Table des
matières

IV-1 Améliorations des techniques de base de la MRP

On verra successivement la prise en compte de l'incertitude par le biais de stocks de sécurité dans la MRP (§ IV-1.1) et les règles de lotissement utilisables et proposées par les principaux logiciels (§ IV-1.2, page 491).

Index
thématique

IV-1.1 Introduction d'un stock de sécurité

La MRP se situe volontairement en univers certain. Cette hypothèse de travail est irréaliste. La prise en compte de variations possibles de délais d'obtention peut se contrer par le biais de délai de sécurité, comme on l'a déjà évoqué page 468. La prise en compte de variations possible des besoins bruts peut s'effectuer par le biais d'un stock de sécurité, assez facilement calculable si l'on travaille avec la technique du « lot pour lot » (voir page 491) car il y a alors coïncidence entre livraisons programmées et besoins nets.

Reprenons l'exemple des besoins bruts du [tableau 104](#) (page 471), et supposons maintenant que l'on veut travailler avec un stock de sécurité de 20% des besoins bruts de la période, ce qui revient à dire que la position de stock de fin de période doit être égale à 20% des besoins bruts de la période puisqu'il s'agit de se prémunir avec ce stock résiduel, d'éventuelles variations des besoins bruts². Cette

1. Voir en particulier les chapitres IV et VI de Vollmann, Berry et Whybark (1997, [433]).

2. Une technique, souvent utilisée, consiste à définir le stock de sécurité à un niveau « moyen » constant (et donc indépendant des besoins bruts). La simplification de traitement numérique que cette technique implique a pour contrepartie une couverture du risque variable d'une période à l'autre.

valeur est portée sur la ligne SS_t du **tableau 120**.

L'erreur à ne pas commettre est d'ajouter ce stock de sécurité aux besoins bruts car il est évident que ces stocks de sécurité se cumuleront dans la position de stock, si l'on se situe en univers certain.

- Partons de la position de stock de 12 unités à la fin de la 15^e période et de livraisons de 22 au début de la période 16, le disponible s'élève $12 + 22 = 34$ et, les besoins bruts étant de 30, le stock de fin de période observable (en univers certain) est alors de 4 unités ($= 12 + 22 - 30$), valeur inférieure aux 6 unités souhaitées (20% de 30); la protection est trop faible mais il est trop tard car elle résulte d'une décision prise en période 13.
- À l'inverse, le stock observable (en univers certain) à la fin de la 17^e période est de 7 unités ($= 4 + 13 - 10$), valeur supérieure aux 2 unités souhaitées (20% de 10) mais là encore il est trop tard pour réagir puisqu'il s'agit de la livraison d'un lot lancé en production au cours de la période 14.
- La position de stock que l'on veut atteindre à la fin de la 18^e période est égale à 4; elle est égale à la position de stock de la fin de la 17^e période, augmentée de la livraison attendue (par définition égale aux besoins nets BN_{18} de la période) qui sera effectuée en début de période et diminuée des besoins bruts BB_{18} de la période 18. On peut écrire: $PS_{t-1} + BN_t - BB_t = PS_t$, d'où l'on tire $BN_t = BB_t + PS_t - PS_{t-1}$, où l'on remplace PS_t par la valeur que l'on désire assigner à la position de stock de fin de période ($PS_t = SS_t$). Bien évidemment, BN_t ne peut pas prendre de valeur négative et prendra donc la valeur 0 si $BB_t + SS_t < PS_{t-1}$ (la position de stock à la fin de la période t devenant $PS_{t-1} - BB_t$).

TABLEAU 120

Introduction des stocks de sécurité dans le calcul des besoins nets (E-2010)

Période t	15	16	17	18	19	20	21	22
Besoins Bruts BB_t	-	30	10	20	26	14	20	15
Livraisons attendues Q_t	-	22	13	0	0	0	0	0
Position de Stock PS_t (hors stock de sécurité et livraisons programmées)	12	$12 + 22 - 30 = 4^a$	$4 + 13 - 10 = 7^b$	$7 + 0 - 20 = -13$	$-13 + 0 - 26 = -39$
Stock de Sécurité SS_t	-	$30 \times 0,2 = 6$	$10 \times 0,2 = 2$	$20 \times 0,2 = 4$	$26 \times 0,2 \cong 5$	$14 \times 0,2 \cong 3$	$20 \times 0,2 = 4$	$15 \times 0,2 = 3$
Besoins Nets BN_t (= livraisons programmées)	-	0 (car $Q_t > 0$)	0 (car $Q_t > 0$)	$20 + 4 - 7 = 17$	$26 + 5 - 4 = 27$	$14 + 3 - 5 = 12$	$20 + 4 - 3 = 21$	$15 + 3 - 4 = 14$

a. $PS_{16} < SS_{16} \Rightarrow$ Protection insuffisante mais il est trop tard.

b. $PS_{17} > SS_{17} \Rightarrow$ Protection suffisante.

Pour résumer, trois situations sont possibles dans le cas du «lot pour lot» et sont résumées dans les relations 75:



- **Situation I:** $Q_t > 0$: livraison attendue \Rightarrow il est trop tard
- **Situation II:** $Q_t = 0 \Rightarrow$ on passe à livraison programmée (= BN_t car «lot pour lot»)
 - 2 cas de figure:
 - $BB_t + SS_t > PS_{t-1} \Rightarrow BN_t = BB_t + SS_t - PS_{t-1}$ et $PS_t = SS_t$
 - $BB_t + SS_t \leq PS_{t-1} \Rightarrow BN_t = 0$ et $PS_t = PS_{t-1} - BB_t$

relations 75

En cas d'utilisation d'autres techniques que celle du «lot pour lot», il convient d'adapter la démarche précédente, ce que l'on fera en [page 492](#).

IV-1.2 Présentation des règles de lotissement utilisables

La détermination de la quantité à livrer pour satisfaire les besoins d'une ou plusieurs périodes, devrait normalement reposer sur un arbitrage entre des coûts de lancement et de possession, mais il n'en est pas toujours ainsi. Les logiciels disponibles offrent jusqu'à une dizaine de règles de calcul des lots, parmi lesquelles on peut noter.

- La **technique du «lot pour lot»** consiste à programmer pour chaque période une quantité couvrant exactement les besoins nets. Cette technique est judicieuse si le coût de lancement est relativement faible par rapport au coût de possession. Dans cette appréciation, le découpage temporel retenu joue un rôle important, ce qui fait que cette technique peut s'avérer judicieuse pour une période de 15 jours ouvrables et ne pas l'être pour un découpage par périodes de 5 jours.
- La **quantité fixe de commande**, qui est déterminée de façon exogène ou par le calcul (quantité économique de Wilson, présentée en détail au [chapitre XII, page 771](#)), est à déconseiller parce que l'hypothèse de régularité de la demande n'est pas respectée (cf. [§ I-2, page 459](#)) et que cette quantité conduit à un stockage inutile sur la dernière période de consommation, dès lors que le reliquat disponible ne suffit pas à couvrir les besoins de la période (ce qu'illustre l'exemple du [tableau 121](#), qui reprend les données du [tableau 106 de la page 473](#)).

TABLEAU 121

Incidence de l'usage d'une quantité fixe de commande

t	18	19	20	21	22
BN_t	13	26	14	20	15
Q_t	50	0	50	0	0
PS_t	37	11	47	27	12

Stock inutile car en $t = 20$: obligation de réapprovisionnement

- La quantité couvrant les besoins nets de la période considérée ainsi que d'un nombre fixe de périodes à venir constitue une solution qui peut être judicieuse si la demande n'est pas trop irrégulière et si ce nombre de périodes est bien choisi. Les approches suivantes visent à déterminer rationnellement ce nombre de périodes (lequel peut varier selon l'approche retenue).
- La **quantité économique périodique** combine les deux approches précédentes en proposant l'utilisation du nombre fixe de périodes correspondant à

celui séparant approximativement deux commandes consécutives dans le modèle de Wilson.

- L'application de l'**algorithme de Wagner et Whitin**, présenté au **chapitre VIII, § II-4.1, page 582**, requiert un temps de calcul plus important que celui des autres méthodes présentées ici.
- La quantité découlant de l'application de l'**heuristique de Silver et Meal** (1973, [386]) cherche la valeur n qui minimise le quotient de la somme du coût de lancement et de possession sur les n périodes de consommation de la quantité livrée, par le nombre n de périodes. Cette heuristique fournit des résultats presque aussi bons que ceux obtenus avec l'algorithme précédent, mais au prix de calculs nettement moins importants. Illustrons rapidement l'application de cette heuristique à partir d'un coût de commande de 100 € et d'un coût de possession de 2 € par unité et par période. L'approvisionnement proposé consiste à livrer, au début de la période $t = 18$, une quantité $Q_{18} = 53$, qui couvre les besoins des périodes 18,19 et 20. On s'intéressera ensuite à la livraison Q_{21} à effectuer en début de période 21, en réitérant la démarche.

TABLEAU 122

Application de l'algorithme du coût moyen minimal par période et de celui du coût moyen unitaire minimal (sans stock de sécurité)

Solutions possibles de livraison en début de période $t = 18$	Coût moyen par période minimal (Silver & Meal)	Coût moyen unitaire minimal
$Q_{18} = 13 \Rightarrow C_{18} = 100$	$100/1 = 100$	$100/13 = 7,69$
$Q_{18} = 13 + 26 = 39 \Rightarrow C_{18} = 100 + 26 \times 2 \times 1 = 152$	$152/2 = 76$	$152/39 = 3,90$
$Q_{18} = 39 + 14 = 53 \Rightarrow C_{18} = 152 + 14 \times 2 \times 2 = 208$	$208/3 = 69,3$	$208/53 = 3,92$
$Q_{18} = 53 + 20 = 73 \Rightarrow C_{18} = 208 + 20 \times 2 \times 3 = 328$	$328/4 = 82$	$328/73 = 4,49$

Table des matières

Index thématique

- La quantité résultant d'un calcul de **minimisation de coût unitaire** suit une logique similaire à celle de Silver et Meal mais en retenant la quantité livrée comme dénominateur (voir dernière colonne du **tableau 122**).
- La quantité conduisant à une valeur sensiblement identique du coût de lancement et du coût total de possession associés au lot livré (ce qui donne ici $Q_{18} = 53$, le coût de possession étant alors de 108 et donc approximativement égal au coût de lancement).

L'existence d'un stock de sécurité conduit à une adaptation de ces algorithmes. On suppose maintenant que le stock de sécurité souhaité s'élève à 20 % des besoins bruts, que les besoins bruts de la période 18 sont de 43 (ce qui diffère de l'exemple initial) et que la position de stock en fin de période 17 est de 30 (ce qui conduit aux mêmes besoins nets pour la période 18).

- Le stock de sécurité désiré pour la période 19 est alors de $43 \times 0,2 = 9$, ce qui conduit à une première possibilité consistant à livrer $Q_{18} = 13 + 9 = 22$, pour un coût de 100, augmenté du coût de détention du stock de sécurité, par hypothèse inutilisé, ce qui donne $100 + 9 \times 2 \times 1 = 118$.

- La deuxième possibilité conduit à satisfaire les besoins nets des périodes 18 et 19 (39) en y ajoutant un stock de sécurité. Plusieurs définitions peuvent être retenues pour ce stock de sécurité; on considérera ici que le stock de sécurité est calculé sur le cumul des besoins bruts (ici 43 + 26), ce qui conduit à un stock de sécurité de 14, une quantité commandée de (39 + 14 = 53) et le coût de 152, précédemment trouvé (tableau 122), doit être augmenté du coût du stock de sécurité détenu (14) pendant 2 mois (14 x 2 x 2), ce qui donne 208.
- La troisième possibilité à étudier porte sur une quantité commandée correspondant à la somme des besoins nets des 3 premières périodes (53) et du stock de sécurité calculé sur le cumul des besoins bruts de ces trois périodes (17). Le coût de 208, précédemment trouvé (tableau 122), doit être augmenté du coût du stock de sécurité détenu (17) pendant 3 mois (17 x 2 x 3), ce qui donne 310.
- La quatrième possibilité à étudier porte sur une quantité commandée correspondant à la somme des besoins nets des 4 premières périodes (73) et du stock de sécurité calculé sur le cumul des besoins bruts de ces trois périodes (21). Le coût de 328, précédemment trouvé (tableau 122) doit être augmenté du coût du stock de sécurité détenu (21) pendant 4 mois (21 x 2 x 4), ce qui donne 496.

Avec la méthode de Silver et Meal, l'approvisionnement proposé consiste à livrer au début de la période $t = 18$, une quantité $Q_{18} = 70$, qui couvre les besoins des périodes 18, 19 et 20. Avec la méthode du coût moyen unitaire minimal, l'approvisionnement proposé consiste à livrer, au début de la période $t = 18$, une quantité $Q_{18} = 53$, qui couvre les besoins des périodes 18 et 19.

Table des matières

Index thématique

TABLEAU 123

Application de l'algorithme du coût moyen minimal par période et de celui du coût moyen unitaire minimal (avec stock de sécurité)

Solutions possibles de livraison en début de période $t = 18$	Coût moyen par période minimal (Silver & Meal)	Coût moyen unitaire minimal
$Q_{18} = 13 + 9 = 22 \Rightarrow C_{18} = 100 + 9 \times 2 \times 1 = 118$	$118/1 = 118$	$118/22 = 5,36$
$Q_{18} = 39 + 14 = 53 \Rightarrow C_{18} = 152 + 14 \times 2 \times 2 = 208$	$208/2 = 104$	$208/53 = 3,92$
$Q_{18} = 53 + 17 = 70 \Rightarrow C_{18} = 208 + 17 \times 2 \times 3 = 310$	$310/3 = 103,3$	$310/70 = 4,43$
$Q_{18} = 73 + 21 = 94 \Rightarrow C_{18} = 328 + 21 \times 2 \times 4 = 496$	$454/4 = 113,5$	$454/94 = 4,83$

Ces techniques doivent être adaptées lorsque l'approvisionnement s'effectue avec des rabais sur quantités¹. L'obtention de la solution optimale implique un appel à la programmation linéaire si l'on cherche à traiter le cas général avec coût de lancement et rabais (voir chapitre VIII, § II-2, page 567). On peut toutefois traiter ce problème avec une efficacité suffisante en adaptant l'heuristique du coût moyen par période ou du coût moyen unitaire, en y intégrant la dépense d'acquisition.

1. Les rabais sur quantité sont présentés au chapitre XII, page 787.

Deux remarques peuvent être faites sur ces diverses techniques.

- La seule méthode optimale disponible est celle de l'algorithme de Wagner & Whitin, mais le problème à optimiser est celui du lancement en production sur un poste de travail, d'une référence unique, indépendamment des autres références utilisant ce même poste de travail et sans prise en considération ni des conséquences de la politique suivie sur les autres postes de travail (et, plus particulièrement, sur ceux sur lesquels seront produits les composants nécessaires au lancement du produit considéré), ni d'éventuelles contraintes de capacité. On ne dispose pas aujourd'hui de méthodes optimales de calcul de ces quantités pour traiter des problèmes réalistes dans une optique multi-échelons, multi-étages, avec capacités limitées (voir § IV-5, page 497).
- Il est bien rare qu'au départ le responsable, à qui ce travail de définition de la taille des lots à lancer en production est confié, ait une vision claire des problèmes posés, or la performance du système est étroitement fonction des choix opérés en la matière. On peut ajouter que le raisonnement qui consiste à transposer sans précaution des règles qui semblent avoir fait leurs preuves dans d'autres entreprises est dangereux, les caractéristiques du problème posé ayant de fortes chances d'être différentes.

IV-2 Utilisation périodique de la MRP – planification glissante –

La MRP peut être mise en œuvre sous deux modes d'utilisation. Une application périodique, toutes les semaines par exemple¹, des principes développés précédemment, sur l'intégralité des données d'un plan directeur de production (plan glissant portant sur plusieurs semaines) conduit à une **régénération périodique** du programme de production (ce traitement informatique dure généralement entre 20 et 30 heures, ce qui limite la réactivité de cette approche).

Illustrons cet usage de la **planification glissante** en nous appuyant sur un exemple simple utilisant les stocks de sécurité. Supposons que l'on s'intéresse à la référence X, pour laquelle un stock de sécurité de 10% des besoins bruts est demandé, et que la règle du «lot pour lot» soit utilisée dans la définition du lotissement et que la référence soit fabriquée dans un atelier à capacité largement excédentaire (il n'y a donc pas de problème d'ajustement charge – capacité). Les données du PDP, de la livraison attendue en début de période 13 et de la position de stock en fin de période 12, sont données dans le **tableau 124**, qui est créé à la fin de la période 12, et dans lequel tous les calculs aboutissant aux lancements programmés sont effectués. Seul le lancement concernant la période 13 est exécuté, les lancements suivants étant virtuels.

Supposons maintenant que 40 pièces de la livraison de 700 unités (effectuée comme prévu en début de semaine 13) se sont avérées défectueuses, ce qui a obligé à entamer le stock de sécurité et qu'en outre les besoins bruts calculés pour la semaine 17 (connus seulement en fin de période 13) s'élèvent à 950 (le PDP restant toujours sur 4 périodes, dans cet exemple). Dans ces conditions :

- la position de stock en fin de semaine 13 s'élève à $70 - 40 = 30$ (au lieu de 70);

1. Cette périodicité doit être cohérente avec le découpage temporel du PDP (voir page 462).

TABLEAU 124
Données de MRP établi à la fin de la semaine 12

Semaine	12	13	14	15	16
Besoins Bruts de X pour la période		780	960	660	1060
Position de stock désirée pour X en fin de période		78	96	66	106
Livraison attendue pour X en début de période		700	0	0	0
Position de stock prévue pour X en fin de période	150	70	96	66	106
Besoins Nets de X pour la période = Livraison programmée pour X en début de période		0	986	630	1 100
Lancements programmés X en début de période		986	630	1 100	

- la position de stock prévisionnelle en fin de semaine 14 devient $30 + 986 - 960 = 56$ (au lieu de 96);
- les besoins nets de la semaine 15 deviennent $660 + (66 - 56) = 670$ (au lieu de 630);
- la position de stock prévisionnelle en fin de semaine 17 s'élève alors à $0,1 \times 950 = 95$;
- et les besoins nets de la semaine 17 sont égaux à $950 + (95 - 106) = 939$.

Le **tableau 125** décrit les calculs aboutissant aux nouveauxancements programmés. Les changements opérés par rapport au tableau précédent sont mis en caractères de plus grande taille; la seule décision prise est de lancer en production 670 unités au début de la période 14.

TABLEAU 125
Données de MRP établi à la fin de la semaine 13

Semaine	13	14	15	16	17
Besoins Bruts de X pour la période		960	660	1060	950
Position de stock désirée pour X en fin de période		96	66	106	95
Livraison attendue pour X en début de période		986	0	0	0
Position de stock prévue pour X en fin de période	30	56	66	106	95
Besoins Nets de X pour la période = Livraison programmée pour X en début de période		0	670	1 100	939
Lancements programmés X en début de période		670	1 100	939	

Mais on peut également faire une mise à jour plus fréquente des données et ne rentrer que les variations nettes du plan directeur de production pour chercher à en déterminer l'incidence sur le programme de production (*net change system*). Cette dernière approche est séduisante a priori, car elle va dans le sens d'une adaptation en temps réel des décisions de production. Cependant, elle se heurte pratiquement à des difficultés d'application dues à la forte instabilité du programme de production qu'elle induit généralement et que les spécialistes de MRP qualifient de **nervo-sité**. Cette instabilité peut être réduite en modifiant les règles de lotissement, en jouant sur les stocks de sécurité et en interdisant la modification automatique de certainsancements programmés qui sont alors qualifiés d'**ordres fermes** (à ne pas confondre avec les commandes fermes; voir [page 462](#)).

IV-3 Relations entre la MRP et l'ordonnancement

Il est tentant de vouloir passer de la programmation de la production à l'ordonnancement, mais une telle démarche est normalement vouée à l'échec.

En effet, comme nous l'avons vu au chapitre V, un ordonnancement effectué sur une base déterministe devient rapidement inutilisable du fait des divers aléas rencontrés dans son application. Un tel couplage entre l'ordonnancement et la MRP impliquerait que le découpage temporel de la MRP (longueur de la période de base, précision des gammes) soit assez fin et que la périodicité de traitement de la MRP soit forte ; les implications en termes de temps de traitement et de coûts sont telles qu'un couplage efficace semble encore pour longtemps hors de portée. En outre, il faut noter que la MRP charge systématiquement au plus tard les postes de travail (contrairement aux usages en vigueur en ordonnancement), ce qui a pour effet de tendre à une sous-utilisation des capacités sur la première période.

Pour ces différentes raisons, il semble préférable de lier l'ordonnancement et le programme de production des premières périodes par le biais de dates de livraison. On peut ajouter que les systèmes d'ordonnancement en ateliers spécialisés tiennent compte «par construction» des capacités disponibles mais sont mal armés pour tenir compte de la nécessaire convergence des composants nécessaires à la fabrication d'une référence, sauf si l'on introduit cette cohérence par le biais des dates de livraison et que ces dates de livraison sont respectées (il est inutile de privilégier la fabrication d'un composant A à monter sur un composant B, si le composant C également utilisé par B a pris un retard de fabrication non rattrapable). La liaison entre la régulation du cours terme et celle du long terme passe donc par une «combinaison astucieuse» de différentes approches.

IV-4 Intégration de la distribution dans la MRP: la DRP

La gestion du réseau de distribution ne saurait être complètement déconnectée de la définition de la programmation de la production (avec ou sans intervention de la MRP). Quelle que soit la gestion des différentes unités du réseau de distribution, le système d'information doit répercuter le plus rapidement possible, à tous les échelons supérieurs, la connaissance de la demande finale afin de définir les ordres de réapprovisionnement de tous les échelons sur une base prévisionnelle correcte, au lieu d'attendre les répercussions observables de cette demande finale sur les stocks situés en amont pour décider «en myope» de la conduite à suivre (pratique qui conduit le plus souvent à «amplifier» la variation des stocks détenus, pour des raisons analogues à celles évoquées au paragraphe 1.2.1.2.). Cette transparence du système d'information des stocks de distribution a conduit certains partisans¹ de la MRP à pousser cette intégration au système de décision et à n'envisager qu'un système unique «production-distribution».

Pour réaliser cette intégration, dans le cadre d'une logique MRP, deux adaptations sont nécessaires. Il faut tout d'abord modifier les nomenclatures utilisées en considérant que le niveau zéro est celui des entrepôts «de base» (et, le cas échéant, de quelques clients pour lesquels une gestion intégrée est recherchée). Le niveau 1 repérera les entrepôts régionaux et le niveau 2, celui de la demande de produits finals s'exerçant sur les centres de production (et qui, jusqu'alors, relevaient du

1. Voir en particulier Martin (1993, [294]); voir aussi Vollmann et al. (1997, [433]), chap. XVIII.

niveau zéro). Cette modification revient à dire que l'on s'intéresse en final, non pas à l'article produit mais à l'article disponible dans un entrepôt. Dans ces conditions, la logique de la *MRP* assurera l'intégration de systèmes d'information jusqu'alors distincts, puisque la modification périodique du Plan Directeur, consécutive à l'introduction de nouvelles informations sur les demandes réelles et prévisionnelles du niveau 0 (entrepôts), se répercute immédiatement sur la définition de tous les besoins bruts de toutes les références, à tous les niveaux, à l'occasion du calcul périodique du programme de production (et de distribution). Mais il faut ensuite adapter, d'une part, les règles de lotissement au problème spécifique du transport (capacité des camions, organisation des tournées...) et, d'autre part, modifier les règles de déclenchement d'un réapprovisionnement de telle sorte que le stock disponible dans un centre de distribution ne tombe jamais en dessous d'un stock de sécurité. En outre, le découpage temporel utilisé doit être assez fin pour être compatible avec celui utilisé dans la logistique de distribution.

Cette intégration, connue sous le nom de *Distribution Requirement Planning (DRP)*, pose deux problèmes qu'il ne faut pas sous-estimer :

- Tout d'abord, le Plan Directeur de Production se définit pour chaque référence vendue par les entrepôts situés en fin de la chaîne de distribution (nouveau niveau zéro), ce qui non seulement multiplie de manière substantielle le volume d'informations à traiter, mais encore complique singulièrement le travail de prévision (la précision de prévisions faites sur des données agrégées étant bien meilleure).
- Ensuite, il faut bien voir que le calcul d'un lot à produire et celui d'un lot à transporter n'obéissent pas à la même logique, ce qui limite la portée de la *DRP*. En effet, si le coût de lancement en production est normalement indépendant de la taille du lot, il n'en est pas de même en matière de transport : un coût fixe est associé à la tournée d'un camion, mais le lot que celui-ci peut transporter est limité en poids ou en volume. D'autre part, la taille du lot en production influe directement sur le niveau des immobilisations à financer et, pour cette raison, un arbitrage est fait entre un coût de lancement et un coût de possession ; le problème est un peu différent en distribution, dans la mesure où le transport des marchandises ne fait que modifier la localisation et non le volume des immobilisations à financer.

Ces remarques n'excluent nullement le fait que les systèmes d'information et de décision en place déterminent, avec le marché, l'importance de ces immobilisations. La *DRP* n'est pas le seul système à reposer sur un système d'information «transparent», c'est-à-dire répercutant en temps réel les transactions enregistrées à un échelon (dépôt local, par exemple), à l'ensemble des échelons supérieurs (dépôts régionaux et usine, par exemple), au lieu d'assurer le couplage entre les différentes entités du réseau par le biais de commandes de réapprovisionnement (qui résultent de transactions antérieurement enregistrées). De tels systèmes permettent d'anticiper les besoins à satisfaire et donc de mieux organiser la production et les transports (voir Brown, 1981, [71]).

IV-5 Améliorations possibles de la démarche suivie par la *MRP*

La nature heuristique de la démarche présentée est évidente. S'il est possible de formaliser le problème par un programme linéaire en nombres entiers¹, la dimen-

sion du problème exclut, pour longtemps encore l'appel à des procédures optimales. Cette remarque n'implique pas que des améliorations de cette démarche ne puissent être tentées, dans deux directions.

Tout d'abord, il est possible d'améliorer dans certains cas les règles de lotissement en tenant compte du caractère multi-échelons du problème posé¹. Cela étant, cette amélioration possible ne doit pas faire oublier qu'il est très peu plausible que l'on obtienne par cette voie une solution optimale en fin de parcours.

Plus intéressant, dans l'immédiat, est l'appel aux techniques de planification hiérarchisée (section V) ou à certaines techniques de recherche opérationnelle (plus particulièrement celle de programmation linéaire qui sera présentée au chapitre XVI) pour améliorer la définition du plan directeur de production et certains arbitrages «charge – capacité». On a vu, en effet, que le plan directeur de production résultait d'un compromis entre le point de vue des services commerciaux et celui des services de production ; or la lourdeur des traitements de la MRP fait que l'on s'arrête pratiquement toujours à la première solution faisable. Pour que de telles procédures méritent vraiment le nom de procédures de planification, il est indispensable que puissent être examinées les conséquences de différentes alternatives «faisables». Cette exigence, même en tenant compte des progrès observés en informatique de gestion, ne peut être satisfaite avant longtemps sans une amélioration de ce type d'approche.

SECTION V TECHNIQUES DE PLANIFICATION HIÉRARCHISÉE

Un certain nombre d'approches alternatives de celle de la MRP ont été proposées pour résoudre des problèmes de planification. Quelques-unes² s'appuient sur la programmation linéaire ou quadratique. Le processus de production est alors décrit dans le cadre des formulations multi-périodes, multi-ressources présentées à la section I du chapitre VIII mais le niveau de détail retenu, en particulier au niveau des références, conduit à une impasse d'un point de vue opérationnel. Il est évident que la prise en compte de nomenclatures du type de celle utilisée en MRP, qui ne pose pas de problème de formulation, ne fait qu'accroître la complexité du problème à résoudre. Dans ces conditions, il faut soit travailler à un niveau de détail fin avec des démarches empiriques, soit rechercher une certaine optimisation avec un niveau de détail moindre. Une voie intermédiaire est cependant utilisée par certains logiciels de MRP qui offrent la possibilité de travailler à un niveau agrégé en termes de produits et de ressources, avec des profils moyens de chargement (voir page 469), pour essayer d'aider empiriquement à la définition du plan directeur de production.

La simplification retenue par la **planification hiérarchisée** consiste à travailler sur des regroupements homogènes d'un nombre plus ou moins important de références, en appliquant le principe selon lequel le niveau de détail requis pour

1. *Note de la page précédente*. Une analyse de la littérature disponible sur ce point peut être trouvée dans l'article de Billington, Mc Clain & Thomas (1983, [52]).

1. Le lecteur intéressé par ce point se reportera à l'ouvrage de Schwarz (1981, [377]).

2. Voir Vollmann; Berry et Whybark (1997, [433]), chapitre XV, Silver, Pyke et Peterson (1998, [387]) et Hax et Candea (1984, [224]), chapitre III.

prendre une décision est d'autant plus faible que la mise en application est éloignée. Cette manière de procéder conduit à la résolution successive de problèmes de dimension acceptable, où la solution du problème-amont devient une contrainte des problèmes-aval, pour aboutir à une solution finale ayant des performances très voisines de celles de l'optimum. L'application de ces idées a donné naissance à plusieurs tentatives de formalisation dont l'une des plus intéressantes est celle initialement proposée au MIT par Hax et Meal en 1975 (puis développées par de nombreux chercheurs travaillant dans l'orbite de Hax) et mise en œuvre dans plusieurs entreprises. Même peu diffusée¹, cette démarche est intéressante à connaître d'un point de vue méthodologique car elle offre des pistes exploitables d'amélioration des approches de planification dans un domaine qui relève largement d'un empirisme raisonné.

Les techniques de MRP visent à effectuer une programmation prévisionnelle de tous les composants, tandis que celles de la planification hiérarchisée ne s'intéressent qu'aux produits finals (niveau zéro de la nomenclature) et, par voie de conséquence, à l'élaboration du plan directeur de production. Cependant des extensions pour traiter les deux premiers niveaux de la nomenclature ont été proposées et testées². Le domaine d'application de la planification hiérarchisée est plutôt celui d'entreprises manufacturières produisant en masse et pour stock des produits ayant une nomenclature à peu de niveaux. On peut aussi envisager de l'appliquer dans des productions de masse d'assemblage à la commande dès lors que l'on a peu de chances d'être en rupture de stock en sous-ensembles. La démarche proposée se base sur trois niveaux d'agrégation des références et donc comporte trois grandes phases de calcul (traitées aux § V-2, page 502, § V-3, page 503 et § V-4, page 507), mais au préalable, nous examinerons les fondements de la planification hiérarchisée (§ V-1).

Table des matières

Index thématique

V-1 Les fondements de la planification hiérarchisée

La planification hiérarchisée repose sur une certaine structuration des produits finals, ce qui permet de raisonner à plusieurs niveaux d'agrégation possibles (§ V-1.1) et présente un certain nombre d'avantages décisifs (§ V-1.1, page 499).

V-1.1 La structuration des produits dans la planification hiérarchisée

Hax et Meal (1975, [223]) proposent une structure arborescente à 3 niveaux :

- La *référence* correspond au produit final acheté par le client. Certaines caractéristiques, mineures du point de vue de la production (couleurs par exemple), peuvent différencier une référence d'une autre référence.
- La *famille* de références réunit un ensemble de références qui partagent un même outillage et un même coût de lancement. Le plus souvent, les réf-

1. Une liste d'applications récentes de ces approches peut être trouvée dans Silver, Pyke et Peterson (1998, [387]), p. 546 - 547.

2. Voir Hax et Candea (1984, [224]), p. 429-440. Au début des années quatre-vingt, une approche voisine était développée, sous notre direction, par Nouhi (1984, [319]), pour le compte d'une grande entreprise française. Une optimisation par la programmation linéaire était effectuée à un niveau agrégé pour les deux premiers niveaux de nomenclature, un processus de désagrégation permettait ensuite de se «raccorder» à une MRP II. Il est alors possible d'étudier rapidement un certain nombre de variantes du plan directeur de production et, en particulier, de calculer le coût engendré par certaines demandes du service commercial ou du service financier.

rences d'une même famille sont produites en même temps. Aucune référence ne peut appartenir à plus d'une famille et toutes les références sont rattachées à une famille.

- Le *type* de familles réunit un ensemble de familles qui ont approximativement la même évolution tendancielle et saisonnière et ont approximativement le même taux de production, mesuré par la valeur des immobilisations produites par unité de temps. Aucune famille ne peut appartenir à plus d'un type et toutes les familles sont rattachées à un type.

La [figure 144](#) illustre ce type de structure par un exemple simplifié qui sera utilisé dans l'exemple numérique explicitant la démarche. Il convient de bien noter cette structure diffère de celle de la nomenclature de la [figure 137 de la page 459](#) dans laquelle toutes les références repérées aux nœuds du graphe sont des références réelles qui sont liées par des relations d'inclusion physique (relation «composant - composé»), visualisées par des niveaux de nomenclature. Ici, seules les références du niveau bas sont réelles, celles de niveau supérieur correspondent à des regroupements logiques sans rapport à une quelconque relation d'inclusion, puisque ces références du niveau bas sont toutes des références du niveau 0 (au sens de la nomenclature de MRP).

FIGURE 144
Nomenclature hiérarchisée

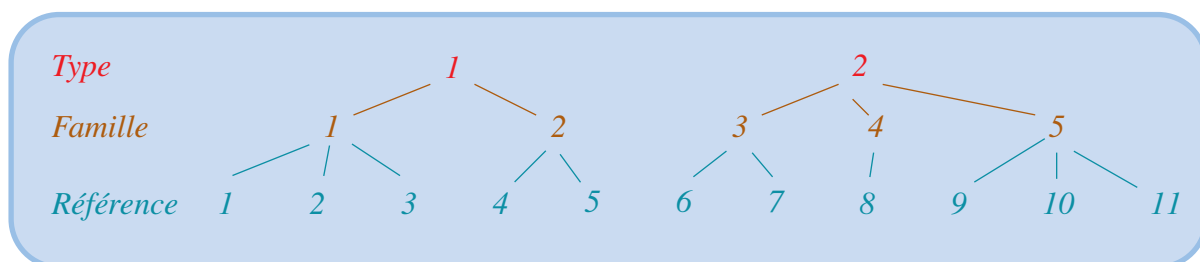


Table des
matières

Index
thématique

La phase 1 du traitement concerne les types de famille (§ V-2, page 502) ; la phase 2 désagrège les résultats trouvés en programmation par familles (§ V-3, page 503) et la dernière phase de traitement désagrège les résultats par familles en programmation par références (§ V-4, page 507).

V-1.2 Les avantages offerts par la planification hiérarchisée

Pour Hax et Golovin (1978, [222]), les principaux avantages présentés par la planification hiérarchisée sont au nombre de trois : faible coût de traitement, meilleure fiabilité des données et implantation facile du système.

L'inconvénient majeur, non évoqué par les promoteurs de cette approche, reste l'absence de prise en compte de la répercussion des décisions prises pour les références de niveau 0 sur la programmation des références de niveau supérieur. Si la variété des produits finis s'obtient par combinatoire d'options (voir [chapitre II](#)) et si la demande est assez régulière en volume et structure, il ne se pose guère de problème. Dans le cas contraire d'importants problèmes de cohérence peuvent se poser.

V-1.2.1 Faible coût de traitement

Par rapport aux approches non hiérarchisées, des économies importantes sont réalisées au niveau du volume de traitement d'informations :

- Les prévisions de demandes sont généralement effectuées au niveau des familles de références et non au niveau des références élémentaires (voir § V-1.2.2).
- Le modèle d'arbitrage intertemporel travaille au niveau le plus agrégé (type de famille).
- Le programme de production détaillé n'est calculé que pour la première période.

V-1.2.2 Meilleure fiabilité des données

L'utilisation de prévisions au niveau de la référence élémentaire conduit parfois à des résultats aberrants. D'un point de vue statistique, cela s'explique fort bien : à partir du moment où les variables étudiées sont indépendantes (ou très faiblement corrélées), la variance de la prévision faite sur la somme de ces variables est égale à la somme des variances de ces variables. L'intervalle de confiance d'une série agrégée est alors plus « restreint » que la somme des intervalles de confiance sur les composantes de cette série.

Les implications pratiques de cette observation conduisent à préférer les prévisions effectuées au niveau des familles d'articles, puis à éclater la prévision globale par des pourcentages. Ces derniers, présentant une assez grande inertie, peuvent être prévus à l'aide de techniques du type lissage exponentiel¹ (ou du lissage exponentiel adaptatif). Par exemple, un fabricant de fermetures du bâtiment aura donc intérêt à effectuer une prévision globale des ventes de persiennes (= famille) puis à désagréger ces prévisions par matériaux utilisés (fer, bois, plastique), en veillant à ce que la somme des pourcentages soit bien égale à 100 %.

V-1.2.3 Facilité d'implémentation

Le dernier argument invoqué en faveur de la planification hiérarchisée, important en pratique, est que la planification hiérarchisée fournit des résultats faciles à interpréter. L'analyse de sensibilité consécutive à la modification de telle ou telle donnée (appel possible à une sous-traitance de capacité, par exemple) est aisée dans le cadre de la planification hiérarchisée, alors que l'utilisation de procédures désagrégées conduit à analyser un trop grand nombre de modifications qui font que « les arbres cachent la forêt ».

Par ailleurs, les plans à moyen terme des responsables des différents services d'une entreprise se font toujours à un niveau agrégé : les prévisions commerciales sont faites par groupes de produits, et les décisions prises par lignes de produits ou qualifications d'emplois. Il est important que les variables décisionnelles et les analyses de sensibilité correspondent à celles dont les gestionnaires ont besoin. De ce point de vue, la planification hiérarchisée est une procédure facile à accepter par la direction, d'autant plus que la définition des regroupements de référence, ainsi que celle des moyens productifs, peuvent se faire en tenant compte des structures de responsabilité.

1. Voir le § II-3, page 1046, et § II-5.2.2, page 1069, du chapitre XV.

V-2 Phase 1 des traitements: programmation par type de références

Cette phase 1 est à la fois une programmation de la production à un niveau agrégé et une prévision à moyen terme des besoins en ressources. La démarche proposée par Hax et Meal privilégie le seul facteur travail (appréhendé à un niveau agrégé) pour effectuer principalement un arbitrage entre l'appel à des heures supplémentaires et la constitution d'un stock pour faire face à des pointes de la demande. L'instrument qu'ils préconisent est celui de la programmation linéaire (mais ce n'est pas la seule approche envisageable) dans le cadre d'une formulation assez fruste (compte tenu des possibilités offertes par la programmation linéaire, présentées à la [section I](#) du [chapitre VIII](#)).

Quelle que soit la technique de calcul retenue, la phase 1 effectue une programmation agrégée par type de références, en général sur un horizon d'un an pour tenir compte de l'existence de mouvements saisonniers, en partant de dotations en heures normales et en heures supplémentaires disponibles pour chacune des périodes. Cette programmation cherche à minimiser un coût de gestion sur l'horizon économique choisi, en satisfaisant la demande de chaque type de production. Ces demandes sont exprimées en heures de main-d'œuvre à partir d'une sommation des besoins nets des références d'un même type, pour tenir compte de l'existence de stocks disponibles au début de la première période de programmation (mais à la différence de ceux de la MRP ces besoins nets ne tiennent pas compte ici des livraisons attendues). Par ailleurs, la formulation du problème peut imposer un stock minimal (stock de sécurité) ainsi que le non-dépassement d'un stock maximum.

Les moyens de production sont calculés à partir des effectifs disponibles chaque période (et donc en tenant compte des vacances), du nombre d'heures ouvrables par période et d'un coefficient de présence effective (95 %, par exemple). Prenons l'exemple d'un plan directeur de production élaboré à la fin de la période 5, pour les 4 périodes suivantes ([tableau 126](#)).

TABLEAU 126

Phase 1 de la planification hiérarchisée: programmation de la production par type de familles de référence (unité: heure)

Période	Production prévisionnelle agrégée par type									Stock disponible de fin de période	
	Type 1			Type 2			Ensemble (Type 1 + Type 2)			Type 1	Type 2
	Heures normales	Heures sup.	Total Type 1	Heures normales	Heures sup.	Total Type 2	Heures normales	Heures sup.	Total		
5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	10910	4790
6	0	0	0	18480	4620	23100	18480	4620	23100	3060	15240
7	5012	0	5012	5108	2530	7638	10120	2530	12650	6020	4070
8	4000	0	4000	4800	2200	7000	8800	2200	11000	1020	1360
9	9820	0	9820	9530	4830	14360	19350	4830	24180	2080	3780

Le découpage temporel retenu conduit généralement à ce que le délai de production (depuis celui des composants élémentaires rentrant dans le produit

fini) soit de plusieurs périodes. Dans ces conditions, le travail d'optimisation de cette première phase ne prend pas en compte l'horizon gelé (cf. [page 463](#)) autrement que dans le calcul préalable des stocks disponibles à la fin de la dernière période de l'horizon gelé.

V-3 Phase 2 des traitements: désagrégation de la programmation par type de références en programmation par famille de références

Cette désagrégation n'est utile que pour la première période, afin de pouvoir préparer le travail du service du planning. Pour les périodes suivantes, ce travail ne présente guère d'intérêt parce que des ajustements devront être effectués compte tenu de ce qui se sera passé la première période. Bien entendu, pour être cohérente avec la programmation par type, il sera nécessaire que la somme des productions des références des familles d'un type donné soit égale à la production totale du type programmé (ces productions étant exprimées en heures de main-d'œuvre).

Plusieurs approches de ce problème sont envisageables¹ mais nous ne présenterons ici que la méthode de Hax et Meal, facile à mettre en œuvre, et qui donne, semble-t-il, de bons résultats. La procédure empirique préconisée calcule la production globale de chaque famille appartenant à un même type, en trois temps, et chaque groupe de références appartenant à un même type est traité isolément.

Table des matières

V-3.1 Première étape: détermination des familles mises en production

Index thématique

L'idée de base est très simple : il n'y a pas lieu d'approvisionner une référence j , si la différence constatée entre le stock de début de période R_j et le stock de sécurité S_j est supérieure à la demande prévisionnelle D_j de la période. Pour vérifier si cette condition est remplie, Hax et Meal proposent de calculer l'indicateur $\{R_j - S_j\} / D_j$ qui indique qu'un réapprovisionnement est nécessaire dès lors qu'il prend une valeur inférieure à 1.

Étant donné qu'on lance en fabrication toutes les références d'une famille, il suffit qu'il soit nécessaire de mettre en fabrication au moins une référence d'une famille, pour que l'on mette en fabrication toutes les références de cette famille.

L'application de ces principes à notre exemple numérique donne le [tableau 127 de la page 504](#), d'où l'on déduit que l'on fabriquera au cours de la période à venir les familles de références 3, 4 et 5. Les calculs effectués ici pour les références du type 1 semblent inutiles puisque l'on a vu, à la fin de la phase 1, que seules des références de type 2 étaient mises en production mais, en réalité, cette vérification est faite avant pour s'assurer qu'il est possible de ne produire aucune référence du type 1 (dans la négative, une légère transformation de la formulation du problème est nécessaire).

1. Une série de modèles de plus en plus sophistiqués ont été proposés entre 1975 et la fin des années quatre-vingt. On trouvera les principaux modèles proposés dans Hax et Candea (1984, [224]). Certains raffinements ont été proposés pour prendre en compte des critiques faites à cette approche, mais les complications généralement induites par l'accroissement de sophistication ne justifient que rarement cet effort. Mieux vaut limiter la portée de l'approche et la garder simple que de vouloir la généraliser à tout prix au risque d'aboutir à une instrumentation inexploitable en pratique.

V-3.2 Deuxième étape: détermination initiale du volume de production des familles de références retenues

Pour les références d'une même famille, on calcule les quantités économiques de commande en utilisant, par exemple, la technique des commandes groupées¹. Ces quantités u_j sont fournies dans le [tableau 128 de la page 505](#) sans justification numérique des valeurs proposées.

TABLEAU 127
Phase 2 de la planification hiérarchisée - étape 1 : détermination des familles mises en production

Type	Famille k	Référence j	D_j (demande prévisionnelle de la période 6)	R_j (stock disponible en début de période 6)	S_j (stock de sécurité)	$(R_j - S_j)/D_j$	
1	1	1	250	575	45	2,12	
		2	350	795	75	2,06	
		3	900	1810	150	1,84	
		Total	1500	3180	270	-	
	2	4	2600	2920	280	1,02	
		5	3750	4810	390	1,18	
		Total	5200	7730	560	-	
	Total		6350	10910	670	-	
	2	3	6	2430	1165	275	0,37
			7	5480	1750	520	0,22
Total			7910	2915	795	-	
4		8	220	25	35	-0,05	
		Total	220	25	35	-	
5		9	1130	295	165	0,12	
		10	2620	585	330	0,10	
		11	770	970	115	1,11	
		Total	4520	1850	610	-	
Total		12650	4790	1440	-		
Total		19000	15700	2110	-		

Table des matières

Index thématique

Cependant, nous avons vu qu'il est possible de lancer en fabrication une famille de références dans laquelle les besoins de la période à venir et éventuellement ceux de plusieurs des périodes suivantes sont couverts par les stocks disponibles. Pour éviter un sur-stockage inutile, il faut limiter le montant des commandes ; cette limite est fonction d'un stock maximal M_j de fin de période (avant satisfaction de la demande de la première période) qui peut être calculé de telle sorte, par exemple, qu'il ait 99 % de chances de couvrir les besoins des six ou neuf premiers mois. Étant donné qu'en début de période on dispose d'un stock R_j , la quantité

1. Voir le § I-2.3.3, page 826, du chapitre XII. Un certain nombre de formulations alternatives s'appuyant sur la programmation mathématique ont été proposées et sont présentées en détail dans Hax et Candea (1984, [224]) avec une bibliographie importante.

maximale que l'on pourra commander sera donc $(M_j - R_j)$ ou la quantité économique de commande si celle-ci est inférieure à $(M_j - R_j)$. Le [tableau 128](#) applique cette démarche (la détermination des M_j n'est pas explicitée ici).

TABLEAU 128

Phase 2 de la planification hiérarchisée - étape 2 : détermination du volume initial de production des familles mises en production

Type	Famille k	Référence j	R_j (stock disponible en début de période 6)	M_j (stock maximal en fin de période 6)	$M_j - R_j$	u_j (quantité de commande)	$q_j = \text{Min}(u_j; M_j - R_j)$
2	3	6	1 165	6 545	5 380	5 330	5 330
		7	1 750	8 460	6 710	6 980	6 710
		Total	2 915	15 005	12 090	12 310	12 040
	4	8	25	1 755	1 730	1 010	1 010
		Total	25	1 755	1 730	1 010	1 010
	5	9	295	5 260	4 965	1 910	1 910
		10	585	10 445	9 860	5 620	5 620
		11	970	4 720	3 750	2 160	2 160
		Total	1 850	20 425	18 575	9 690	9 690
	Total		4 790	37 185	32 395	23 010	22 740

Table des matières

V-3.3 Troisième étape: détermination définitive du volume de production des familles de références retenues

La deuxième étape de calcul ne conduit qu'exceptionnellement à un volume de production (ici **22 740**, cf. [tableau 128](#)) égal à celui décidé dans la première phase de la planification hiérarchisée (ici **23 100**, cf. [tableau 126, page 502](#)), il y a donc lieu de procéder à un ajustement pour programmer effectivement 23 100 heures de travail pour la période à venir. Il se trouve qu'ici le volume initialement programmé est inférieur à celui décidé dans la première phase de la planification hiérarchisée, mais on aurait pu tout aussi bien obtenir le cas inverse. Examinons ces deux cas de figure.

Index thématique

V-3.3.1 Cas d'un volume insuffisant de production initialement programmée

La solution préconisée par Hax et Meal consiste à répartir entre les familles d'articles la dotation excédentaire (ici $23\,100 - 22\,740 = 360$ heures), au prorata des productions maximales possibles pour ces différentes familles.

Ce processus est illustré dans le tableau suivant dans lequel M_k (et R_k) correspondent à la sommation des M_j (et R_j) des références j appartenant à la même famille k . Cependant il ne saurait être question, pour une famille, de programmer une nouvelle quantité supérieure à la production maximale autorisée (ce qui se produit dans notre exemple pour la famille 3 pour laquelle la contrainte de stockage oblige à produire 84 heures de moins que souhaité). Dans un premier temps, la production prévue est celle donnée en dernière colonne du [tableau 129](#).

TABLEAU 129

Phase 2 de la planification hiérarchisée - étape 3 : détermination du volume définitif de production des *familles* mises en production
(cas d'un volume insuffisant - initialisation)

Type	Famille k	$M_j - R_j$		$360f_k$	q_j	$q_k' = q_k + 360f_k$	$q_k'' = \text{Min}(q_k' ; M_j - R_j)$
		volume	%				
2	3	12090	37,32%	134	12040	12174	12090
	4	1730	5,34%	19	1010	1029	1029
	5	18575	57,34%	207	9690	9897	9897
	Total	32395	100,00%	360	22740	23100	23016

Les 84 heures qui restent à programmer seront réparties entre les familles restantes en suivant la même démarche, ce qui conduit au tableau de calcul 130.

TABLEAU 130

Phase 2 de la planification hiérarchisée - étape 3 : détermination du volume définitif de production des *familles* mises en production
(cas d'un volume insuffisant - calculs complémentaires)

Type	Famille k	$M_j - R_j$		$84f_k$	q_k''	$q_k''' = q_k'' + 84f_k$
		volume	%			
2	4	1730	8,52%	7	1029	1036
	5	18575	91,48%	77	9897	9974
	Total	20305	100,00%	84	10926	11010

La désagrégation des 23 100 heures consacrées aux références de *type 2* conduit donc à la programmation suivante : 12090 heures pour la *famille 3*, 1036 heures pour la *famille 4* et 9974 heures pour la *famille 5*. Il ne reste plus maintenant qu'à désagréger les programmations par familles en programmation par références, mais auparavant il nous faut examiner ce qu'il aurait fallu faire si le volume d'heures, requis à la fin de la seconde étape de calcul, dépassait le montant imparti.

V-3.3.2 Cas d'un volume excessif de production initialement programmée

Supposons que le volume de production, décidé à la fin de la première phase de la procédure de Hax et Meal, soit de 19000 heures au lieu de 23 100 (tableau 126, page 502). Il n'est alors plus possible de réaliser la programmation des 22740 heures trouvées à la fin de cette deuxième étape de calcul. La procédure préconisée est simplement d'appliquer aux programmations prévues pour chaque famille, un même coefficient d'abattement, ici $19000 / 22740 = 0,836$. On obtient alors, pour la *famille 3*, une production de $12090 \times 0,835 = 10102$.

V-4 Phase 3: désagrégation de la programmation par famille de références en programmation par références

On se place ici dans la situation qui a conduit au § V-3.3.2. La phase 3, comme la phase 2, ne concerne que la période à venir. La technique de désagrégation proposée par Hax et Meal¹ est une adaptation de la technique des commandes groupées. En effet, si une famille de références est mise en production dès lors qu'on est obligé de produire l'une des références de la famille, on retardera au maximum le lancement de la famille, si le stock disponible de chaque référence, après production, c'est-à-dire la quantité $R_j + q_j - S_j$, permet de couvrir, pour chaque article, le même nombre de périodes de consommation. Ce principe, qui permet de minimiser le montant des stocks immobilisés, peut-être mis en œuvre assez facilement en ne travaillant qu'avec la demande D_j de la seule période à venir, puisque, par hypothèse, la part de la demande de la référence j dans la demande totale de la famille est à peu près stable au cours des périodes à venir. La quantité à mettre en œuvre est, pour chacune des références j d'une famille k pour laquelle on a décidé, à la fin de la phase 2, de produire un volume q_k , est donnée par la relation 76. Dans cette relation, l'expression entre crochets, quotient du volume de production disponible après production de la famille de référence, par le volume de demande de cette famille, représente le nombre moyen de périodes de consommation de chacune des références de la famille après décision de production.

Table des matières

$$q_j = \left[\frac{q_k + \sum_h (R_h - S_h)}{\sum_h D_h} \right] D_j - (R_j - S_j) \tag{relation 76}$$

Index thématique

TABLEAU 131

Phase 3 de la planification hiérarchisée : désagrégation de la programmation par famille en programmation détaillée par référence

Type	Famille k	Référence j	D_j (demande de la période 6)	R_j (stock disponible en début de période 6)	S_j (stock de sécurité)	q_k	$\frac{q_k + \sum_h (R_h - S_h)}{\sum_h D_h}$	q_j (relation 76)	$q_j + R_j$	M_j	
2	3	6	2430	1165	275			3475	4640	6545	
		7	5480	1750	520			8615	10365	8460	
		Total	7910	2915	795	12090	1,796	12090	15005	15005	
	4	8	220	25	35			1010	1035	1755	
		Total	220	25	35	1010	-	1010	1035	1755	
	5	9	1130	295	165			2674	2969	5260	
		10	2620	585	330			5620	6205	10445	
		11	770	970	115			2160	3130	4720	
		Total	4520	1850	610	9974	2,481	9690	11540	20425	
	Total			12650	4790	1440	23074	-	22740	27530	37185

1. D'autres formulations en programmation non linéaire ont été proposées. Sur ce point, voir Bitran & Hax (1977, [53]) et Hax & Candea (1984, [224]), chapitre VI.

Cette démarche est appliquée dans le [tableau 131 de la page 507](#). Les deux dernières colonnes de ce tableau permettent de s'assurer que la contrainte de stockage est toujours respectée, après décision de production. On constate ici que ce n'est pas le cas pour la référence 7. L'excédent de $10365 - 8460 = 1905$ doit être ventilé alors entre les autres références de la famille en utilisant la même logique de l'égalité du nombre de périodes de consommation. Dans notre exemple, comme il n'existe qu'une seule autre référence, le report des 1905 heures de production s'effectue en totalité sur cette référence.

Pour être complet, il faut ajouter que le calcul initial de cette phase 3 peut non seulement conduire à une non-satisfaction de la contrainte de stockage, mais également à une valeur négative de q_j si le stock initial est trop fort. Lorsque ce dernier cas se produit, on recommence les calculs de désagrégation en excluant cette référence du calcul, après lui avoir donné la valeur zéro.

Le programme détaillé de production de la première période du plan directeur de production est donné au [tableau 132](#).

TABLEAU 132
PDP des références pour la période 6

Référence	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	Total
Production	0	0	0	0	0	5380	6710	1036	2674	6245	1055	23100

Chapitre VII

LE JUSTE - À - TEMPS

Les techniques de planification de la production du type *MRP* appartiennent à la famille dite de **production à flux poussés** qui anticipe la demande de composants par une programmation prévisionnelle s'appuyant sur un échéancier de livraison de produits finis. Dans les années soixante-dix est apparue une philosophie diamétralement opposée, reposant sur une logique dite de **production à flux tirés** dans laquelle la production d'un composant est déclenchée par la demande *effective* des centres de production demandeurs de la référence, au lieu de l'être par la demande *prévisionnelle* de ces centres. La production **juste-à-temps** (connue sous son sigle **JAT**) se fonde sur cette seconde approche et résout à la fois des problèmes de planification et d'ordonnancement. Elle constitue une alternative intéressante aux techniques de *MRP* pour certains types de production. On parle encore, dans la littérature spécialisée, d'**appel par l'aval** ou encore de production à flux tendus.

Table des
matières

Depuis quelques années, on parle également d'**approvisionnement synchrone** pour désigner un approvisionnement à flux tirés dans lequel le délai qui sépare l'ordre d'approvisionnement, de la livraison, est très court (rarement plus de quelques heures). La brièveté de ce délai oblige le fournisseur à une organisation logistique contraignante. Lorsque l'approvisionnement porte¹ sur des composants ou de modules interchangeables ou sur des composants optionnels, pour introduire de la variété dans une production de masse, le fournisseur peut être amené à pratiquer un assemblage à la commande pour respecter la contrainte de délai. Si les composants sont directement utilisés sur une ligne d'assemblage, le fournisseur peut être tenu en outre de livrer ces articles en bord de chaîne dans un ordre prédéterminé² lié à la « personnalisation » des produits qui « défilent » devant le poste consommateur de ces articles (cas des sièges de voiture, par exemple); on parle alors d'**encyclage**. La brièveté du délai imparti au fournisseur peut l'obliger à s'implanter près du client, pour des raisons de compatibilité du temps de transport avec ce délai³.

Index
thématique

Pour faire appel à cette approche de Juste-À-Temps, deux conditions doivent être réunies :

- Il faut d'abord que l'on ait affaire à une production de masse visant à satisfaire des demandes relativement stables,

1. Voir la définition et la discussion de ces concepts au [chapitre II, page 103](#) et suivantes.

2. Dans l'industrie automobile, la métaphore couramment utilisée est celle de **film** qui correspond à une suite d'images, chacune d'entre elles correspondant à un véhicule produit pour un client particulier et donc doté de spécifications propres. Le problème de l'ordonnancement de produits personnalisés sur une ligne de production (création du film) est traité aux [§ I-2, page 599](#), et [§ II-2, page 614](#) du [chapitre IX](#).

- Il faut ensuite que le « contexte de production » soit conforme à la philosophie du *JAT*.

La première remarque exclut du champ d'application un certain nombre d'entreprises et explique l'échec de certaines d'entre elles qui ont voulu « passer au juste à temps » pour « suivre une mode ». Cela étant, un certain nombre de principes du *JAT* sont utilisables avec profit par toutes les entreprises. La seconde condition est plus complexe. Elle s'appuie sur une certaine vision du rôle joué par les stocks et la main-d'œuvre (section I). Techniquement, le *JAT* utilise, tout comme la *MRP*, un Plan Directeur de Production (section II, page 512). C'est au niveau du système d'informations, connu sous le nom de système *KANBAN* (section III, page 513), que le *JAT* semble se différencier le plus des autres systèmes (en grande partie parce qu'il semble aller à contre-courant de l'informatisation croissante observée des systèmes d'information occidentaux), mais cette différence apparente ne doit pas faire oublier qu'un système d'information n'est qu'un sous-ensemble d'un système de gestion et que le plus important réside, sans doute, dans les remarques faites en section I. Nous terminerons (section IV, page 524) par quelques remarques complémentaires.

SECTION I L'ENVIRONNEMENT DE PRODUCTION DU *JAT*

Ce n'est sans doute pas un hasard si la philosophie du *JAT* est apparue au Japon. En effet, elle vise fondamentalement à éliminer toutes les sources de gaspillage dans la production, en fournissant le bon composant au bon endroit et au bon moment. Cette hantise du gaspillage des Japonais s'explique par l'exigüité de l'espace disponible au Japon et l'absence quasi complète de ressources minières ou énergétiques. Il s'ensuit que tout ce qui ne contribue pas directement à la valeur d'un produit est considéré comme du gaspillage. Dans cette perspective, le stock est à bannir puisqu'il ne génère pas de valeur ajoutée. Le non-respect des spécifications d'une fabrication est également à prohiber puisqu'il se traduit par un rebut ou par des procédures de rectification des défauts constatés qui ne contribuent pas non plus à la création d'une valeur ajoutée. Enfin, les équipements productifs doivent être maintenus en état de marche par une maintenance préventive pour éviter non seulement les pertes de temps et de matières consécutives à des pannes mais également la constitution de stocks de sécurité pour pallier les conséquences de cette source de perturbations.

La notion de gaspillage ne s'arrête pas aux produits et aux équipements. Elle vise également la bonne utilisation des ressources humaines. On doit alors considérer comme gaspillage toute sous-utilisation du potentiel des travailleurs. De par leur qualification polyvalente (capacité à travailler sur des machines fort différentes) et leur haut niveau (capacité à accomplir non seulement des tâches simples mais aussi des tâches complexes, comme les réglages), les travailleurs sont à

3. *Note de la page précédente.* La généralisation, par une grosse entreprise, de ce type d'exigence à plusieurs fournisseurs, peut conduire à la création de **Parcs Industriels de Fournisseurs** ou **PIF** (on parle encore de **Sites Avancés Fournisseur** ou **SAF**) à proximité du centre d'utilisation des références commandées. Ces parcs ne doivent pas être confondus avec les **Magasins Avancés Fournisseurs (MAF)** qui se situent dans l'emprise du site du client (ou en bordure de celui-ci) et correspondent à une externalisation par le client des problèmes de stockage et de gestion des contraintes d'encyclage, sans opération de production, dans le cadre d'un approvisionnement à flux tendus.

même d'assumer la responsabilité qui leur incombe : fournir à temps les composants requis. Il s'ensuit notamment qu'en cas d'incidents, on assistera à une mobilisation collective pour résoudre les problèmes ponctuels posés. Sur le moyen terme, cette « philosophie » conduit à impliquer fortement les travailleurs dans la recherche permanente d'une amélioration des processus de fabrication et ce, à travers des systèmes participatifs divers (cercles de qualité, systèmes de suggestion...).

Une dernière caractéristique japonaise explique l'émergence du *JAT* dans ce pays. Historiquement, les industries européennes et nord-américaines ont défini leurs gammes de production dans une optique de production de masse (tendance encore très largement observable de nos jours). Elle s'expliquait à l'origine par le fait que l'on était fondamentalement en présence de marchés « offreurs », c'est-à-dire dans lesquels la demande solvable devait s'adapter à une offre relativement peu variée. Dans ce contexte, le **bureau des méthodes** (qui définit les gammes de fabrication et d'assemblage) ne prête qu'une attention très limitée au temps de préparation préalable au lancement d'une série en production parce qu'il considère que les temps de préparation devant être répartis sur des lots importants, il vaut mieux se focaliser sur les temps unitaires de production pour baisser les coûts. En partant d'un temps de lancement élevé (et donc d'un coût de lancement élevé), le calcul économique préconise l'usage de lots de production importants (ce qui a été considéré, à tort¹, comme une justification de l'hypothèse de départ de l'inutilité de prêter attention aux coûts de lancement). La philosophie japonaise, considérant les stocks comme du gaspillage, a conduit à prêter une attention aussi grande aux temps de préparation qu'aux temps de fabrication proprement dits. Dans la mesure où un temps de préparation réduit implique un coût de lancement faible et donc des séries économiques courtes, la diminution drastique des stocks devient économiquement intéressante.

Ce raccourcissement des temps de préparation est facilité notamment par la polyvalence du personnel qualifié qui rend le plus souvent inutile l'intervention d'un régléur. Avec des outillages et des produits finis similaires, il n'est pas rare² de voir des temps de préparation dans un rapport d'un à plus de dix entre les entreprises japonaises et les entreprises européennes ou nord-américaines (à temps de production unitaire sensiblement équivalents). On doit ajouter enfin que cette conception japonaise conduisant à une réduction sensible des stocks présente en outre l'avantage considérable d'accroître la **flexibilité** du système productif,

1. Le fait que l'*effet* justifie la *cause* conduit, à l'évidence, à une circularité causale dans le raisonnement, erreur logique que bon nombre d'ingénieurs et de gestionnaires n'auraient jamais dû commettre. Une discussion plus approfondie de cet usage des modèles, en s'appuyant sur cet exemple, est proposée à la [page 652](#).

2. Shingo (1987, [383]), et Monden (1998, [307], chap. VI) décrivent les techniques à mettre en œuvre pour faire tomber les temps de changement d'outillage à moins de 10 minutes. Ces approches, connues sous le nom de **SMED** (*Single Minute Exchange of Die*), reposent sur quelques idées simples : le temps de changement d'outillage θ se décompose en un temps θ_1 nécessitant l'arrêt de la machine (réglage, essais...) et un temps θ_2 ne le nécessitant pas (préparation des outils à monter...); il faut limiter l'arrêt de la machine au temps θ_2 (les autres opérations s'effectuant en temps masqué), essayer de transformer des opérations impliquant l'arrêt de la machine en opérations ne l'impliquant pas, essayer de supprimer les opérations d'ajustement, etc.

L'ouvrage de Womack, Jones & Roos (1991, [450]) expose un travail remarquable de comparaison internationale effectué sur l'industrie automobile, par une équipe du MIT. Enfin, le chapitre II de l'ouvrage de Hall (1983, [213]), qui reste sans doute l'un des meilleurs disponibles sur le *JAT*, est tout à fait instructif sur ce point.

laquelle se définit comme la capacité à réagir rapidement à toute variation de l'environnement et qui est d'autant plus forte que les stocks sont faibles.

On ne saurait trop insister sur la cohérence d'une telle vision. En effet, l'une des fonctions des stocks est de permettre un découplage des problèmes : le stock servant de tampon entre l'unité productrice sujette à des aléas divers de production et l'unité demandeuse dont la demande est parfois fort difficile à prévoir ; on reviendra sur ce problème à la [page 619](#) (avec une illustration de ce mécanisme de retardement de la propagation d'incident assuré par les stocks) et à la [page 624](#). Pour retarder la propagation de perturbations tout en limitant au maximum les stocks-tampons, il faut, d'une part, jouer sur les autres ressources (hommes et équipements) qui doivent être légèrement surdimensionnées et polyvalentes et, d'autre part, chercher à éliminer les sources d'aléas qu'il est possible de maîtriser, notamment par le biais de la maintenance préventive et de la qualité de la production. À ce propos, on peut remarquer que maintenance et qualité sont liées puisque le respect des spécifications¹ d'un produit dépend notamment de la stabilité des caractéristiques de la machine et de son outillage, de la qualité des réglages, du respect des gammes par l'opérateur et, enfin, de la qualité des composants utilisés.

La flexibilité des entreprises japonaises utilisant le *JAT* est largement facilitée dans l'adaptation des capacités de production aux fluctuations mensuelles du *PDP* (inférieures à 10% chez Toyota, par exemple), par la possibilité de faire varier mensuellement l'horaire journalier de travail.

SECTION II LE PLAN DIRECTEUR DE PRODUCTION DU *JAT*

À la base du *JAT*, se trouve un Plan Directeur de Production (*PDP*). À la différence du *PDP* établi pour la *MRP*, le *PDP* du *JAT* est établi sur un horizon prévisionnel ne dépassant pas habituellement trois mois. Ce délai est le plus souvent très inférieur au cycle de fabrication mais la relative stabilité du *PDP* et la souplesse de l'environnement du *JAT* lui permettent de fonctionner dans des conditions satisfaisantes.

La production mensuelle de chaque référence est divisée par le nombre de jours ouvrables du mois. Ces productions journalières correspondent à un objectif duquel il convient de ne pas s'écarter et qui permet de limiter au maximum les stocks. Dans la mesure du possible, cette production journalière sera fragmentée en lots de production qui seront panachés pour constituer une séquence répétitive de production.

Il est peu probable que la charge de travail qui découle de l'application de ce *PDP* corresponde exactement aux capacités disponibles. Si la charge de travail désirée est inférieure au potentiel disponible, le temps excédentaire sera utilisé pour la maintenance ou pour réfléchir en groupe aux améliorations possibles des processus de production (cercles de qualité). En aucun cas, cet excédent n'est utilisé pour fabriquer une production destinée à être stockée. Dans le cas inverse,

1. On notera en passant que le contrôle statistique de la qualité dans le *JAT* diffère du contrôle «classique» parce qu'il accepte un risque important de rejet à tort de l'hypothèse de bon fonctionnement, ce qui conduit à préférer d'intervenir à tort que d'avoir des problèmes de qualité.

il est fait appel aux heures supplémentaires ou à des ressources d'autres ateliers (ce que permet la polyvalence des travailleurs).

Le *PDP* est habituellement recalculé tous les mois ainsi que l'incidence de cette actualisation sur la gestion des flux.

SECTION III LE SYSTÈME KANBAN DE GESTION DES FLUX

Le *JAT* est très souvent confondu avec le *Kanban*. En réalité, le *Kanban* est un mode de gestion décentralisé des flux d'information et des flux de production qui n'est que l'une des composantes du *JAT*, les autres composantes ayant été évoquées précédemment. Le caractère décentralisé et «manuel» de ce système d'information prend fortement le contre-pied de systèmes fortement centralisés s'appuyant sur des logiciels lourds axés sur la *MRP*. C'est sans doute la raison essentielle qui fait que les responsables européens et nord-américains n'ont retenu au départ que cet aspect des choses.

III-1 Les étiquettes de production

Kanban, en japonais, signifie étiquette (ou carte ou ticket); nous retiendrons ici le terme français **étiquette**. À chaque référence utilisée est associé un nombre fixe d'étiquettes qui mentionnent notamment le numéro de la référence et la quantité que contient le conteneur. Celles-ci sont nécessairement :

- soit accrochées à des conteneurs pleins,
- soit accrochées à un tableau situé dans le centre de fabrication de la référence ou à un tableau situé dans le centre de consommation de cette référence,
- soit, enfin, en transit entre le centre de consommation de la référence et celui de sa fabrication (sans être accrochées à des conteneurs pleins).

Table des
matières

Index
thématique

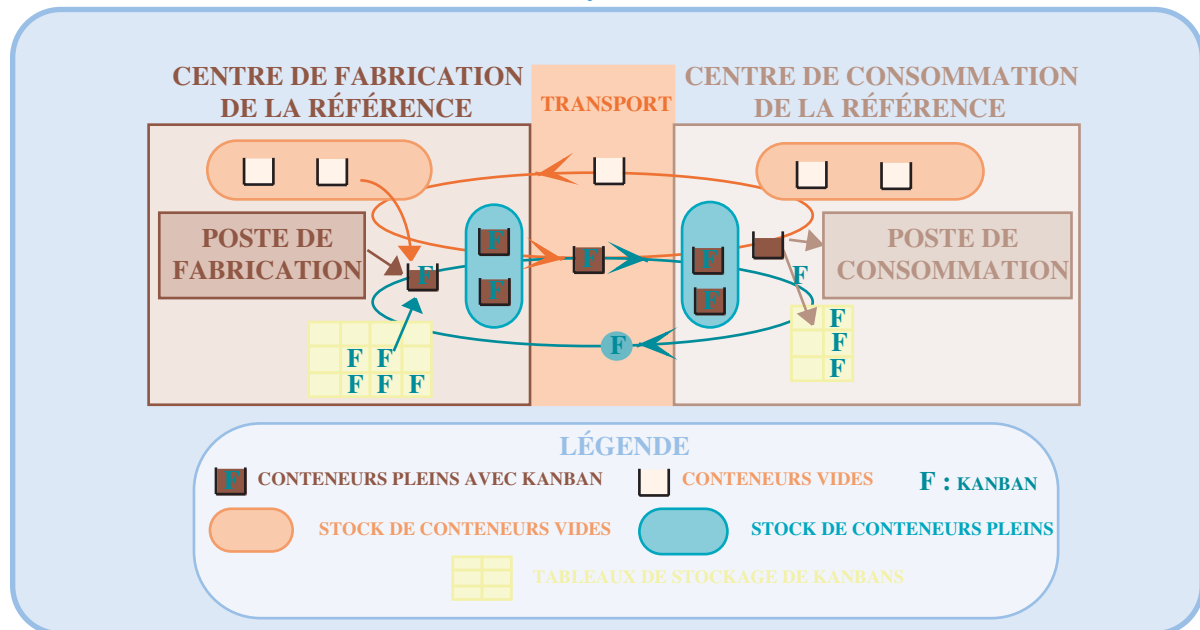
Le cas étudié dans ce paragraphe est celui d'un centre unique de fabrication et d'un centre unique de consommation, ce qui fait qu'un seul type d'étiquette suffit que l'on qualifie indifféremment d'**étiquette de production** ou d'**étiquette de fabrication**. Chaque étiquette correspond alors à un **ordre de fabrication ouvert**, c'est-à-dire exécutable dès réception, émis implicitement par un centre de consommation de la référence, à destination du centre de production de cette référence (ce qu'illustre la [figure 145](#) avec la boucle inférieure représentant la circulation des informations *et l'animation disponible en cliquant dans l'icône en marge du texte*¹). Aucune fabrication ne peut être lancée par le centre de fabrication de la référence sans qu'il ne dispose d'étiquettes correspondant à cet ordre de fabrication ouvert. Si, à la suite d'un incident quelconque, le centre de consommation de la référence s'arrête de produire (et donc de consommer), des conteneurs pleins s'accumuleront en amont de ce centre de consommation de la référence; au bout d'un certain temps, aucune étiquette ne parvenant au centre fabriquant la référence, la fabrication de celle-ci ne sera plus possible, faute d'ordre de fabrication. Ce système connaît donc, par construction, un butoir au montant des encours physiquement observable.



1. Voir avertissement de la note du bas de la [page 8](#).

FIGURE 145

Schéma de principe du système kanban avec un seul centre de consommation de la référence



Les conteneurs sont normalement banalisés et sont donc utilisables pour plusieurs références. Quelques entreprises « individualisent » les conteneurs en les associant à des références auquel cas le conteneur joue le rôle d'étiquette (avec, presque toujours, une rapidité moins grande dans la circulation des flux d'informations). Par ailleurs, il n'est pas rare au Japon de trouver des étiquettes de couleur différente, chaque couleur correspondant à une zone géographique de fabrication de référence. Le rappel de la couleur sur le sol constitue l'un des éléments de la signalétique qui facilite l'organisation matérielle de la circulation des flux d'informations et de matières dans l'usine.

Depuis une dizaine d'années, on observe un processus de dématérialisation des kanbans, ce qui permet, sous certaines conditions, de gagner du temps et de l'argent (si la diminution des encours fait plus que compenser l'accroissement de charges habituellement observé lors du passage du système manuel au système informatisé). On parle alors de **kanban électronique**. L'information est transmise automatiquement au centre de production à un point clé du processus pour provoquer l'approvisionnement du bon composant au bon endroit. Par exemple, dans l'industrie automobile, un système de lecture optique permet au passage d'une caisse à un certain endroit de la chaîne, de déclencher l'approvisionnement de certains composants auprès d'équipementiers, directement sur leur Site Avancé Fournisseur ou auprès de leur Magasin Avancé Fournisseur¹ selon les spécifications précises du véhicule². Dans les organisations en ateliers spécialisés, c'est souvent l'opérateur qui prélève la première pièce d'un conteneur qui saisit l'information sur un clavier. Les ERP disposent généralement d'un module de JAT qui gère les kanbans électroniques

1. Voir définition en page 510.

2. Les perturbations qui peuvent se produire postérieurement à cette réquisition ont des incidences qui sont analysées au § I-3.2.1, page 603 du chapitre IX.

III-2 Étiquettes de fabrication et étiquettes de transfert

Le schéma de principe de la [figure 145](#) n'est utilisé dans la pratique que lorsqu'un seul centre de production utilise la référence fabriquée. Dans le cas contraire, le système d'information est modifié: en plus des étiquettes de fabrication, des **étiquettes de transfert** sont créées pour chaque centre de consommation de la référence. Les étiquettes de fabrication circulent alors exclusivement entre le centre de production et l'aire de stockage située en aval de ce centre, tandis que les étiquettes de transfert circulent exclusivement entre l'aire de stockage aval du centre de fabrication (où un second tableau mural leur est consacré) et les centres de consommation de la référence concernés.

Pour chaque centre de consommation de la référence, on définit un nombre précis d'étiquettes de transfert mentionnant le centre de consommation et celui de production. Pour procéder à l'envoi d'un conteneur de la zone de stockage aval du centre de fabrication à un centre demandeur:

- on prend un conteneur plein dans le stock aval du centre de fabrication,
- on retire du tableau mural des étiquettes de transfert une étiquette de transfert de ce centre demandeur,
- on la substitue à l'étiquette de fabrication accrochée au conteneur,
- on accroche l'étiquette de fabrication au tableau mural des étiquettes de fabrication de ce centre de fabrication.

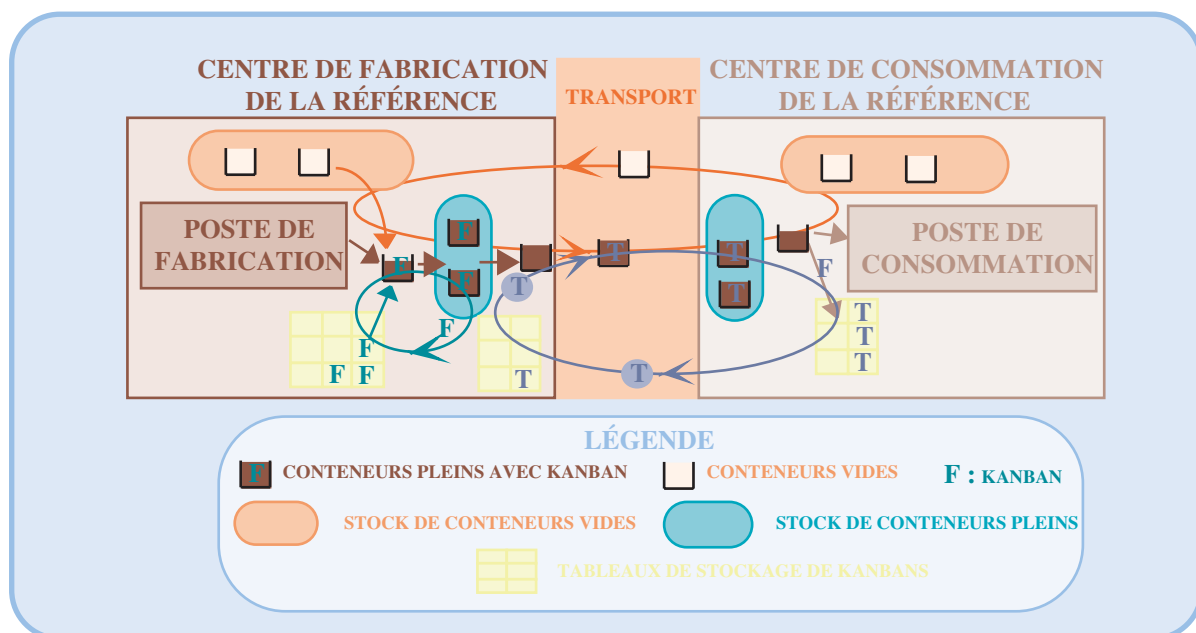
Le schéma de la [figure 146](#) illustre ce second type d'organisation par étiquettes de fabrication et de transport, qui sera *illustré par une animation* à la [page 523](#), dans la situation qui justifie pleinement l'usage de ces deux types d'étiquettes, celle de plusieurs centres de consommation de la référence.

Table des matières

FIGURE 146

Schéma de principe du système kanban avec plusieurs centres de consommation de la référence

Index thématique



Cette variante du système assure la même maîtrise de la circulation des flux de conteneurs et des flux d'informations, puisque les trocs d'une étiquette de transfert contre une étiquette de fabrication (dans les deux sens) reviennent seulement, par

rapport au schéma de principe de la [figure 145 de la page 514](#), à modifier le texte de l'étiquette indifférenciée de cette figure et à disposer, pour des raisons de commodité, de deux tableaux muraux au lieu d'un, dans le centre de fabrication de la référence.

Il est bien évident que ces principes généraux de circulation d'informations sont susceptibles d'adaptation pour réduire les délais d'acheminement des informations. C'est ainsi que l'on trouve des systèmes dans lesquels les étiquettes seront munies de codes à barres. Celles-ci seront lues optiquement par un poste de saisie d'informations situé dans le centre de production demandeur de la référence lors de l'utilisation d'un conteneur, à la suite de quoi de nouvelles étiquettes sont mises en circulation directement au niveau du centre producteur et les « anciennes » étiquettes détruites. D'autres procédures (téléx, téléphone, liaison informatique directe...) sont également envisageables. Cette sophistication du système d'information ne présente d'intérêt que lorsque le centre producteur et les centres demandeurs sont éloignés. C'est le cas, en particulier, pour les flux de marchandises et d'informations circulant entre une usine et les interlocuteurs privilégiés de l'entreprise que sont les fournisseurs et les principaux clients (dépôts régionaux, grands comptes...). Ces dernières remarques visent le cas d'entreprises ayant réalisé une forte intégration verticale du suivi de la production et de la distribution dans une optique de juste à temps.

III-3 Détermination du nombre d'étiquettes

Le système *Kanban* permet de maîtriser les flux de façon sûre sans prendre parti sur leur importance, c'est-à-dire sur le nombre d'étiquettes à mettre en circulation. Cela dit, la logique sous-jacente à la détermination de ce nombre est simple : on en créera le strict minimum pour que le système productif marche (sinon, il y aura gaspillage !). Il est évident que ce nombre d'étiquettes est fonction de la taille du conteneur. Une règle empiriquement utilisée par certaines entreprises consiste à limiter la taille du conteneur à moins de 10 % de la demande quotidienne et à chercher à atteindre le lot de transport à véhiculer dans un conteneur de taille standard, qui soit le plus faible possible (cela dit, le coût de manutention vient « tempérer » cet objectif). Par ailleurs, la variété des conteneurs est à limiter au maximum car leur banalisation facilite leur gestion.

Pour comprendre la logique de détermination du nombre d'étiquettes, il faut passer par l'étude de cas de figure de plus en plus complexes en commençant par le cas d'un centre unique de consommation approvisionné par un centre de fabrication ne produisant qu'une seule référence (§ III-3.1) ou plusieurs références (§ III-3.2, page 523), avant d'attaquer le cas plus général d'un centre de fabrication approvisionnant plusieurs centres de consommation (§ III-3.3, page 524).

III-3.1 Centre de production ne produisant que cette référence

Pour une référence donnée produite par le système, circule dans l'usine un nombre N d'étiquettes, somme de N_F étiquettes de fabrication et N_T étiquettes de transfert. Notons D la demande quotidienne de la référence (par exemple, $D = 48$ unités par jour) qui découle de la mise en œuvre du *PDP*, et k , le nombre d'unités de la référence que contient un conteneur plein (par exemple, $k = 4$). On peut alors convertir cette demande quotidienne exprimée en nombre d'unités de la référence

(c'est-à-dire $D = 48$ unités), en nombre de conteneurs demandés chaque jour pour cette référence (c'est-à-dire $D/k = 48/4 = 12$ conteneurs/jour).

On examinera successivement le cas d'une utilisation exclusive d'étiquettes de fabrication sans prise en compte de série à lancer en production (§ III-3.1.1), puis en prenant en compte cette possibilité (§ III-3.1.2, page 521), avant d'aborder l'introduction d'étiquettes de transfert (§ III-3.1.3, page 522).

III-3.1.1 Cas d'un lot de production égal à un seul conteneur et d'une utilisation exclusive d'étiquettes de fabrication

Faisons momentanément abstraction des étiquettes de transfert ($N_T = 0$; $N = N_F$), et supposons que la journée de travail soit de 8 heures. Le centre demandeur consommera un conteneur toutes les 40 minutes (c'est-à-dire le quotient de 8 heures de travail d'une journée par les 12 conteneurs consommés quotidiennement). Puisque, dès qu'un conteneur est entamé, son étiquette de fabrication est aussitôt décrochée pour permettre son retour au centre de production qui exécutera cet ordre de fabrication ouvert en 15 minutes, il suffit que le temps mis par cette étiquette pour revenir accrochée à un conteneur plein soit inférieur à 40 minutes, pour qu'une seule étiquette suffise. Si ce **temps de cycle C** (appelé encore **délai de réaction**) est de 120 minutes, trois étiquettes suffiront.

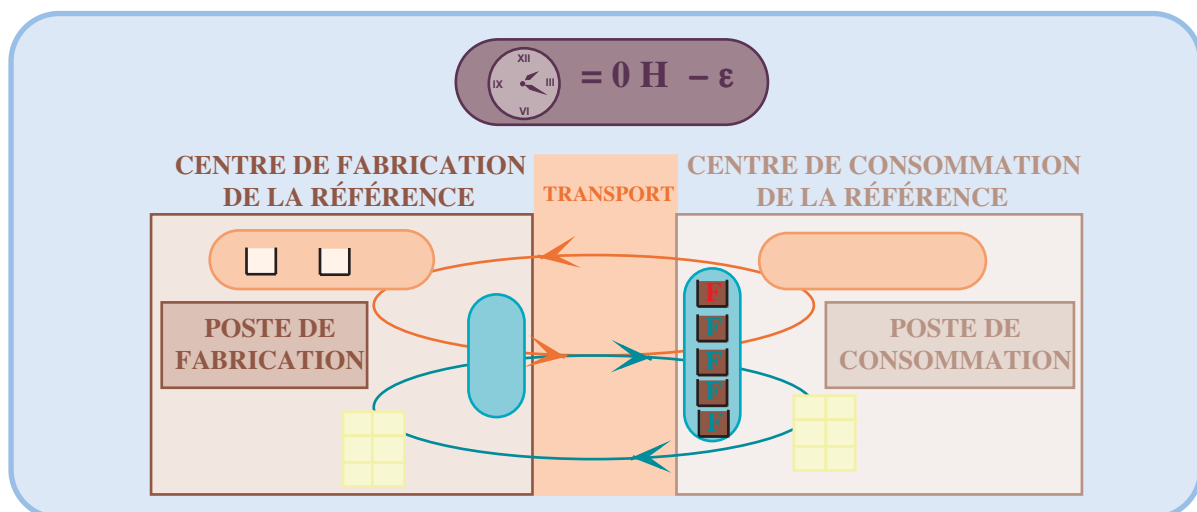
Pour s'en persuader, il suffit d'effectuer une petite simulation en univers certain, dans laquelle on surdimensionne le nombre d'étiquettes en le portant, par exemple, à cinq unités. Partons d'une situation où, juste avant le début de la simulation (instant 0 heure, moins une durée très brève, notée ϵ), les cinq étiquettes se trouvent toutes sur des conteneurs pleins, tous situés dans le stock-amont du centre de consommation de la référence (voir figure 147). Au tout début de la simulation

Table des matières

Index thématique



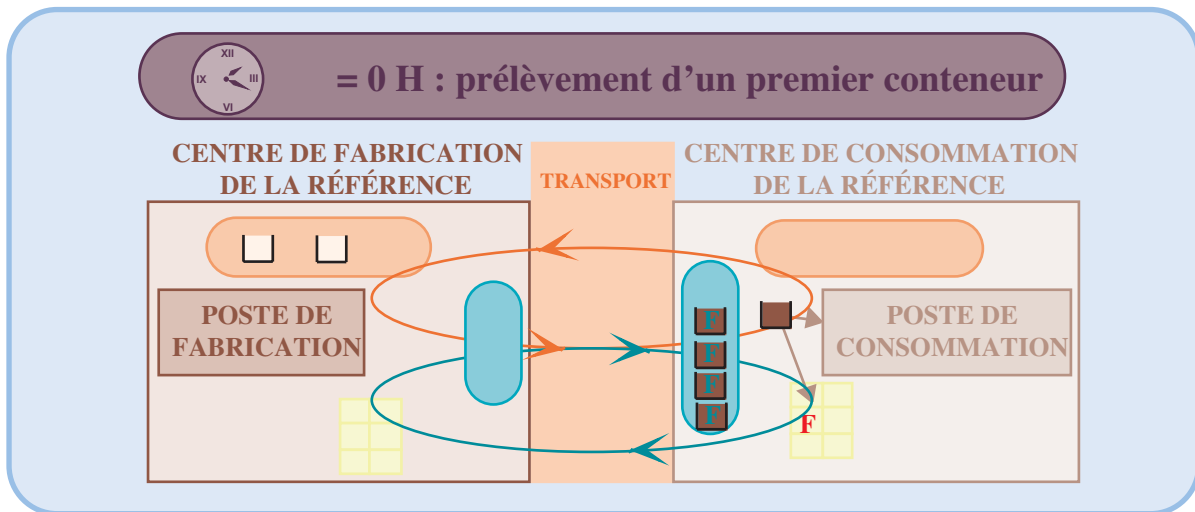
FIGURE 147
Initialisation



(instant 0 heure, voir figure 148, page 518), le centre de consommation prélève un conteneur plein parce qu'il a besoin d'une pièce; il pose aussitôt l'étiquette sur le tableau mural du centre de consommation. On notera cette étiquette **F**, pour la différencier des autres et pouvoir suivre son périple dans les figures.

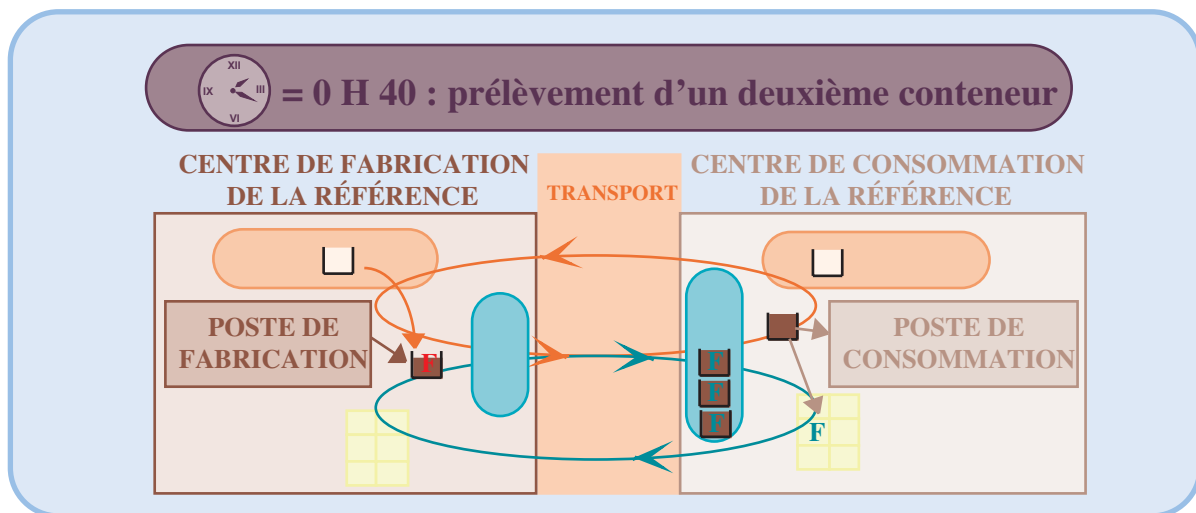
Quarante minutes plus tard (voir figure 149, page 518), un second conteneur est prélevé par le centre de consommation et son étiquette est accrochée au tableau

FIGURE 148
Prélèvement d'un premier conteneur



mural. Entre temps, la première étiquette (celle notée **F**) a été acheminée au centre de production qui, n'ayant rien d'autre à faire, l'a accrochée à un conteneur vide (prélevé sur le stock de conteneurs vides de cet atelier) et est en train de le remplir à cet instant.

FIGURE 149
Prélèvement d'un deuxième conteneur à 0 heure 40

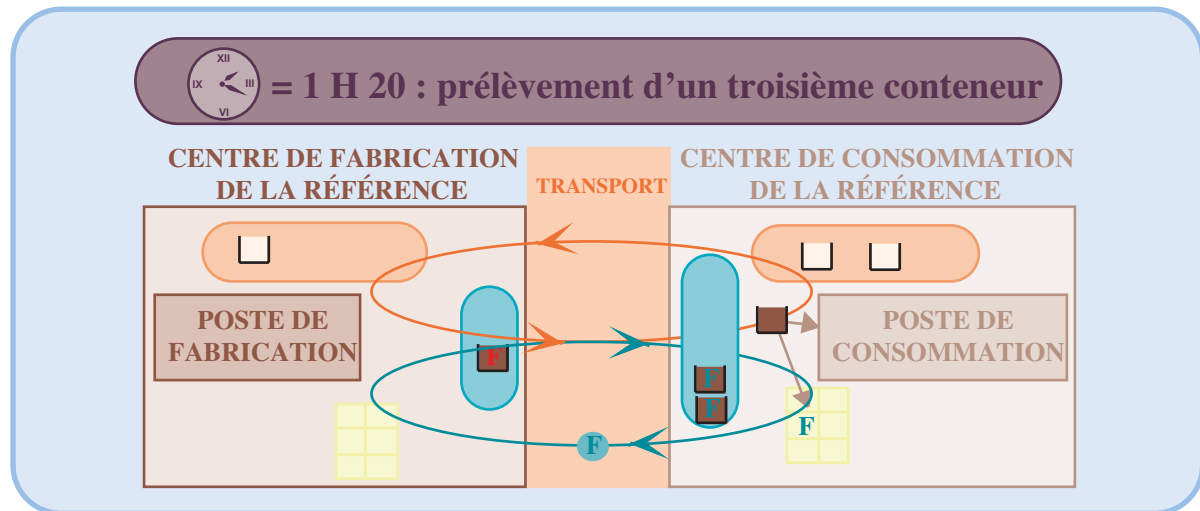


Quarante minutes plus tard (c'est-à-dire à une heure et vingt minutes, voir [figure 150](#)), un troisième conteneur est prélevé par le centre de consommation et son étiquette est accrochée au tableau mural. Entre temps, deux faits se sont produits :

- la seconde étiquette utilisée depuis le début de la simulation est en cours d'acheminement au centre de production ;
- le conteneur auquel l'étiquette **F** a été accrochée a été complété puis stocké dans le stock-aval du centre de production de la référence à laquelle on s'intéresse ici.

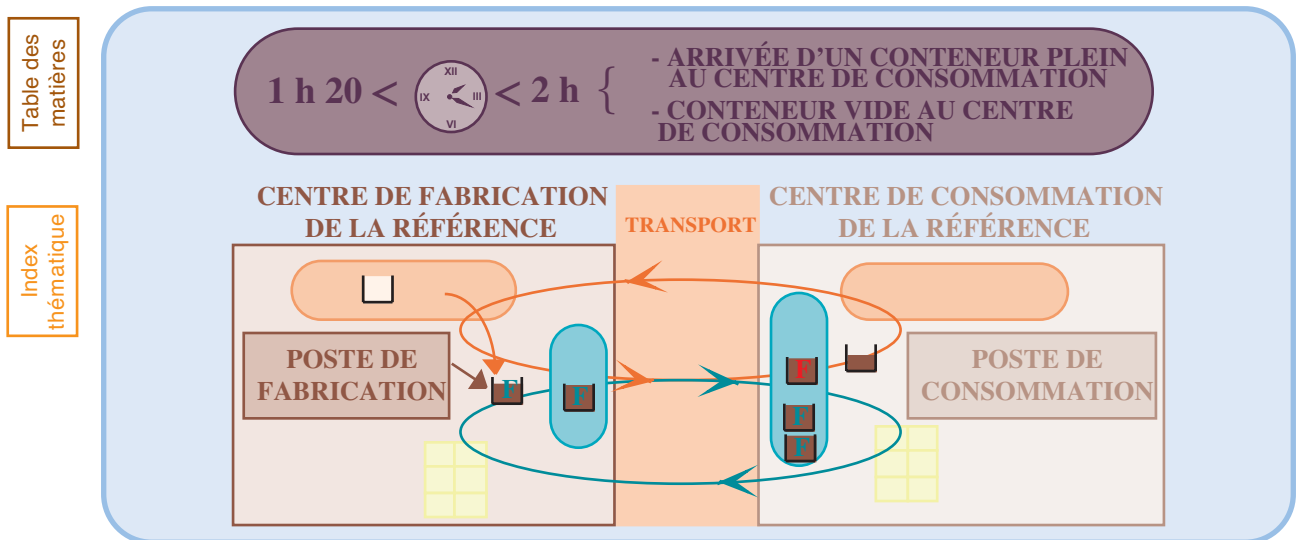
Moins de quarante minutes plus tard (au maximum quelques secondes avant que deux heures ne s'écoulent avant la fin de la simulation, voir [figure 151](#), page

FIGURE 150
Prélèvement d'un troisième conteneur à 1 heure 20



519), le conteneur auquel l'étiquette **F** a été accrochée est arrivé dans le stock-amont du centre de consommation.

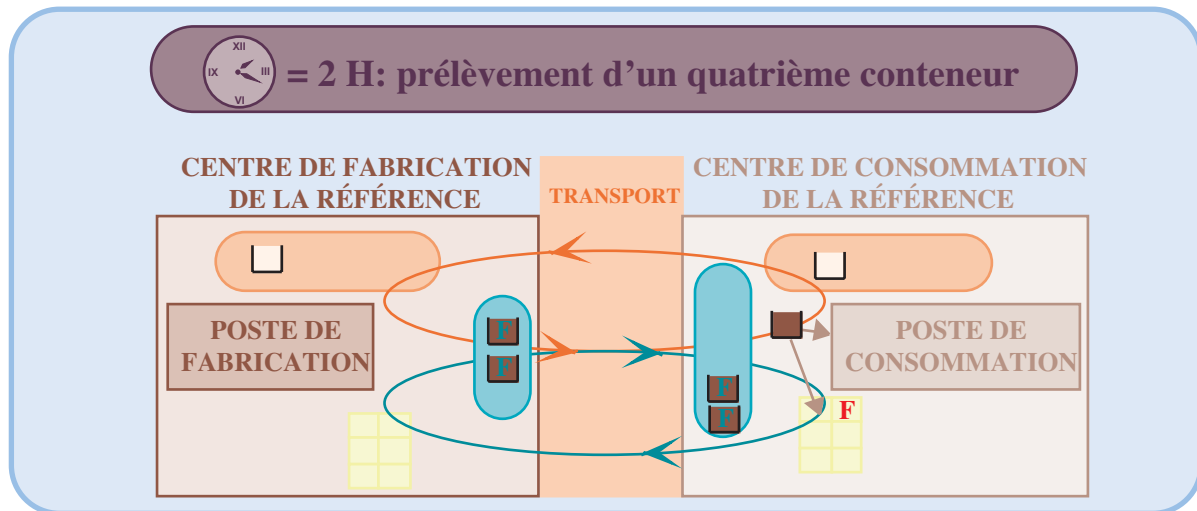
FIGURE 151
Événements se produisant entre 1 heure 20 et 2 heures



Dès que deux heures se sont écoulées (instant ponctuel: 2 heures, voir [figure 152](#)), le conteneur auquel l'étiquette **F** a été accrochée est prélevé par le poste de consommation (qui consomme un conteneur toutes les quarante minutes avec la régularité d'un métronome, puisque l'on est en univers certain). Il s'ensuit que les deux derniers conteneurs ne pourront jamais être utilisés et que les deux étiquettes qui ont permis de les remplir sont parfaitement inutiles. Trois étiquettes suffisent donc.

Généralisons le raisonnement permettant de calculer le nombre nécessaire d'étiquettes de fabrication d'un produit consommé par un seul centre. Le temps de cycle étant exprimé en jours ($120 \text{ minutes} = 2 \text{ heures} = 2/8 = 0,25 \text{ jour}$), il suffira de multiplier sa valeur ($C = 0,25$) par la demande quotidienne exprimée en conte-

FIGURE 152
Prélèvement d'un quatrième conteneur à 2 heures



neurs ($D/k = 48/4 = 12$), pour obtenir le nombre minimal d'étiquettes nécessaires ($12 \times 0,25 = 3$).

$$N_F = \frac{D}{k} \cdot C \quad \text{relation 77}$$

Le seul problème posé est donc celui de la détermination du temps de cycle de l'étiquette qui s'analyse comme un délai d'obtention et comporte donc un temps de transport de l'étiquette au centre de fabrication et un temps de séjour de l'étiquette sur le tableau mural du centre de consommation (durée qui dépend de la cadence d'enlèvement des étiquettes), le temps de fabrication proprement dit, le temps de transport du centre producteur au centre demandeur et le temps d'attente du conteneur au stock-aval du centre de production (durée qui dépend de la cadence d'enlèvement des conteneurs); on peut y ajouter un délai de sécurité (le plus faible possible) pour tenir compte des aléas et incidents divers.

La simulation permet de comprendre que le nombre minimal d'étiquettes à mettre en circulation dépend exclusivement de la durée du cycle C , laquelle est à peu près indépendante de la demande de la référence. En effet, dans notre exemple, si le conteneur auquel l'étiquette **F** a été accrochée revient au bout d'un peu plus de 1 heure 20 dans le stock-amont du centre de consommation, il faudra malgré tout attendre jusqu'à 2 heures pour avoir besoin des unités mises dans ce conteneur marqué de l'étiquette **F**. L'incidence du rythme de consommation de la référence se limite donc au temps d'attente du conteneur plein dans le stock-amont du centre de consommation. Concrètement, le temps de cycle est obligatoirement égal à un multiple du temps unitaire nécessaire à la consommation d'un conteneur. Il est intéressant de noter que la baisse de ce temps de cycle n'implique pas de gagner une durée égale à ce temps unitaire de consommation: il suffit en effet de gagner la différence entre ce temps unitaire de consommation et le temps d'attente du conteneur plein dans le stock-amont du centre de consommation.

III-3.1.2 Cas d'un lot de production égal à plusieurs conteneurs et d'une utilisation exclusive d'étiquettes de fabrication

Supposons maintenant que l'importance du temps de lancement en fabrication conduit, pour la référence considérée, à une production par lot. Cette possibilité se justifie explicitement, n'en déplaise aux tenants du zéro-stock, par un arbitrage entre une économie de coût de lancement et une économie de coût de possession du stock additionnel: le problème de la taille du lot à lancer en fabrication se posera tant que le coût de lancement ne sera pas nul (ce qui implique un temps de lancement nul ou effectué en temps masqué à un coût nul).

Retenons, pour notre exemple, l'hypothèse d'une quantité q lancée en production, égale à 28 unités, valeur numérique qui est nécessairement un multiple du nombre d'unités retenu pour l'étiquette. Ce lot permet de remplir $q/k = 28/4 = 7$ conteneurs. Le temps de fabrication de ces 28 unités peut n'être que de quelques minutes, mais il faudra quand même attendre d'avoir six étiquettes supplémentaires accrochées au planning, avant de pouvoir lancer en fabrication de quoi remplir sept conteneurs. Ce temps de cycle s'accroît donc d'un délai supplémentaire de 4 heures (= 6 conteneurs \times 40 minutes) et l'on passe de 3 étiquettes à $3 + 6 = 9$ étiquettes. Pour modifier la formule de détermination du nombre minimal d'étiquettes, deux possibilités techniques sont envisageables:

- La première possibilité consiste à modifier la [relation 77](#) pour tenir compte de la quantité à lancer et, dans ce cas, la définition du temps de cycle reste inchangée:

$$N_F = \frac{D}{k} \cdot C + \left(\frac{q}{k} - 1\right) \quad \text{relation 78}$$

- ce qui donne bien, dans notre exemple $N_F = \frac{48}{4} \times 0,25 + \left(\frac{28}{4} - 1\right) = 3 + (7 - 1) = 9$ étiquettes.
- La seconde solution consiste à inclure au temps du cycle C , dans notre exemple 0,25 jour, le temps d'attente avant fabrication, c'est-à-dire 4 heures.

Ce temps de cycle passe alors de 0,25 à $\frac{2+4}{8} = 0,75$ jour. On conserve alors

la [relation 77](#) dont l'application donne ici $N_F = \frac{48}{4} \times 0,75 = 9$ étiquettes.

L'explicitation de la transformation du temps de cycle est facilement généralisable: on ajoute à la valeur initiale de C (0,25, valeur définie sans prise en compte du lotissement ou, plus exactement, avec le lot incompressible d'un conteneur), la valeur ΔC calculée par la relation suivante:

$$\Delta C = \frac{(q/k - 1)}{D/k} \quad \text{relation 79}$$

ce qui donne bien $\frac{(28/4 - 1)}{48/4} = 0,5$ dans notre exemple.

III-3.1.3 Cas d'une utilisation simultanée d'étiquettes de fabrication et d'étiquettes de transfert

Sur le plan des principes, ce cas de figure (illustré par la [figure 146, page 515](#)) est relativement simple à traiter. On a vu que l'introduction des étiquettes de transport se traduit concrètement par une sorte de « passage de relais » entre étiquettes qui se cantonnent à des zones exclusives. Il suffit alors de décomposer le temps de cycle global C en deux parties : une partie C_F spécifique au centre de production et correspondant au temps de circulation d'une étiquette de fabrication¹ et une partie C_T correspondant à la circulation d'une étiquette de transfert (avec $C = C_F + C_T$), d'où l'on tire :

$$N_F = \frac{D}{k} \cdot C_F \text{ et } N_T = \frac{D}{k} \cdot C_T \quad \text{relation 80}$$

L'application de cette [relation 80](#) est moins simple qu'il ne le paraît. Le fait que les valeurs prises par N_F et N_T soient nécessairement entières peut induire une augmentation d'une unité du nombre total d'étiquettes. Cette proposition est facile à illustrer sur l'exemple du [§ III-3.1.1](#). Supposons que le temps de cycle dans le centre de fabrication soit de 30 minutes, soit 0,0625 jour. Il reste alors 1 heure 30 minutes (soit 0,1875 jour) pour le reste du circuit. L'application de la [relation 80](#) donne :

- $N_F = 12 \times 0,0625 = 0,75$ que l'on doit amener à la valeur entière immédiatement supérieure de 1, ce qui revient à dire qu'un conteneur plein partira toutes les 40 minutes et qu'un temps de stationnement supplémentaire de 10 minutes sera effectué par le conteneur plein situé dans le stock-aval du centre de fabrication de la référence ;
- $N_T = 12 \times 0,1875 = 2,25$ que l'on doit amener à la valeur entière immédiatement supérieure de 3, *si le conteneur plein séjourne très peu de temps dans le stock-amont du centre de consommation* ; on peut ajouter que ce passage à 3 étiquettes se traduit mécaniquement par un accroissement de 30 minutes² (= du temps de séjour du conteneur plein dans le stock-amont du centre de consommation). Dans cet exemple, le nombre total d'étiquettes passe de 3 à 4.
- Par contre, *si le conteneur plein séjourne un certain temps dans le stock-amont du centre de consommation*, par exemple 22 minutes, ce temps d'attente peut être transféré n'importe où dans le circuit. Ce transfert permet d'éviter l'accroissement du nombre d'étiquettes **si** la partie décimale obtenue en application de la [relation 80](#) (ici $2,25 - 2 = 0,25$) correspond à une durée (ici $0,25 \times 40 = 10$ minutes) inférieure à ce temps d'attente. On baisse donc le temps d'attente stock-amont du centre de consommation de 22 minutes à $22 - (40 - 30) = 12$ minutes, pour transférer 10 minutes d'attente au stock-aval du centre de production (cette attente étant de toute façon inévitable, comme on l'a dit plus haut) et l'on peut faire l'économie d'une troisième étiquette de

1. c'est-à-dire le temps qui sépare l'enlèvement d'une étiquette du tableau mural du centre de fabrication, de sa substitution par une étiquette de transport sur un conteneur plein placé dans le stock-aval de centre de fabrication, suivi immédiatement de sa remise sur le tableau mural de centre de fabrication.

2. = $(3 - 2,25) \times 40$ minutes.

transfert qui conduirait, en pratique, à une attente de $12 + 30 = 42$ minutes dans le stock-amont du centre de fabrication.

L'introduction de lot supérieur à un conteneur à lancer en fabrication ne pose pas de problème particulier. En effet, les étiquettes supplémentaires sont alors nécessairement des étiquettes de fabrication et l'allongement de temps de cycle porte exclusivement sur le cycle de fabrication.

Une animation simulant le cas de deux centres de consommation vous est proposée. Les tournées d'acheminement des conteneurs et des Kanbans s'effectuent dans le cadre de tournées régulières. Les centres de consommation fonctionnent sans arrêt mais avec des taux différents de consommation de la référence. Le cumul des consommations horaires reste inférieur à la production horaire de la référence, ce qui fait que le centre de production est de temps en temps en attente de travail. L'ordre d'arrivée des tournées de kaban dans le centre de production conduit à des échanges d'étiquettes lorsque des conteurs pleins sont stockés, la règle du «premier arrivé - premier servi» étant utilisée. Une tournée d'enlèvement de conteneur plein peut ache-miner plus d'un conteneur ou ne rien prendre à défaut de conteneur prêt. Même en se situant en univers certain, la synchronisation des événements n'est pas immédiate et le temps nécessaire avant de pouvoir reproduire la même séquence d'événements est long. La prédictivité du fonctionnement du système est donc loin d'être triviale, ce qui explique la proposition habituelle d'un surdimensionnement initial du nombre de kanbans, suivi d'un retrait progressif de kanbans jusqu'au moment où le système ne répond plus correctement. De nos jours, la facilité d'usage de petits simulateurs comme Simul8 milite en faveur d'une simulation préalable permettant de tester facilement des situations relativement complexes et caractérisées par une certaine variabilité des paramètres à prendre en considération.



Table des
matières

Index
thématique

III-3.2 Cas de la fabrication de plusieurs références par le même centre de fabrication

Si le centre de fabrication produit également d'autres références, il n'est alors plus sûr que la machine soit libre au moment exact où les sept étiquettes de fabrication sont accrochées au planning mural (habituellement, à chaque référence produite par ce centre est accrochée une «zone verticale» distincte, [figure 153](#)). Cette production multiple conduisant à une interdépendance des références nécessite d'accroître le temps de cycle de chaque référence et donc le nombre d'étiquettes en circulation.

Supposons que, dans l'exemple avec lotissement, on ait estimé nécessaire d'ajouter 4 heures au cycle C qui passe alors à 10 heures; 6 étiquettes de fabrication supplémentaires sont alors nécessaires (et bien sûr, aucune étiquette de transfert supplémentaire). On repérera sur le planning mural par des couleurs ou tout autre moyen visuel (comme l'usage de trames dans la [figure 153 de la page 524](#)):

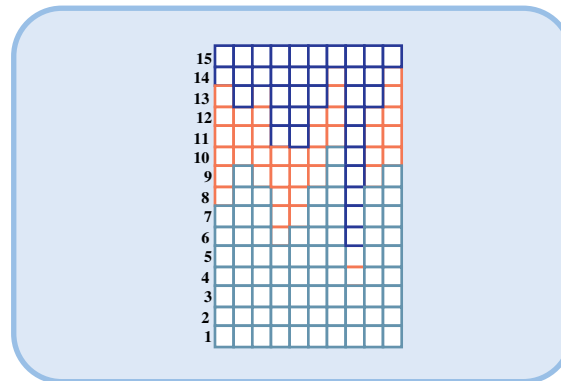
- le niveau de lancement (ici 7, pour la référence 1 de la [figure 153](#))
- et le niveau maximal (appelé encore cote d'alerte) conduisant à la rupture de stock (ici $7 + 6 = 13$).

En jetant un œil sur son planning mural, l'ouvrier sélectionnera la référence la plus urgente. Il est évident que la détermination de cette marge de manœuvre est délicate et qu'elle est d'autant plus importante que la machine est, en régime de croisière, proche de la saturation.

L'existence de réglages complique le problème lorsque ces temps de réglage dépendent de l'ordre de passage en fabrication des pièces. Aussi, a-t-on parfois intérêt à lancer en fabrication toutes les références d'une famille, ce que l'on fera lorsque l'on est en passe d'atteindre la cote d'alerte d'une référence quelconque de la famille. La prévision du comportement du système devient alors fort difficile aussi peut-on avoir intérêt à faire appel à un logiciel de simulation.

FIGURE 153

Tableau mural « multi kanbans »



III-3.3 Cas de plusieurs centres de consommation

On a examiné au § III-3.1.3, page 522, l'utilisation d'étiquettes de transfert dans le cas où la référence n'était demandée que par un seul centre. La détermination du nombre d'étiquettes de fabrication et de transfert est a priori une simple généralisation de ce qui a été dit dans ce paragraphe. Bien entendu les étiquettes de fabrication sont communes; dans notre exemple, il y en aura toujours 13, sous l'hypothèse d'un lot de 7 conteneurs à lancer en fabrication et d'une fabrication de plusieurs références par le centre de production, et ce quel que soit le nombre de centres demandeurs (voir le § III-3.2). Par contre, les étiquettes de transfert sont spécifiques à chaque centre de consommation.

On peut cependant noter que le système est plus difficilement prévisible dans la mesure où les arrivées d'étiquettes au centre de production et les départs de conteneurs à destination des centres de consommation ne se produisent plus à intervalle constant. Il peut devenir plus difficile, compte tenu d'une certaine interdépendance des demandes, d'éviter la création des étiquettes additionnelles liées à la décomposition du temps de cycle et à l'obligation d'avoir un nombre entier d'étiquettes (voir remarques de la fin du § III-3.1.3).

SECTION IV REMARQUES COMPLÉMENTAIRES

Quelques remarques complémentaires doivent être faites. Les premières visent la localisation spatiale des ressources matières et machines. Les secondes visent la mise en place du JAT.

IV-1 L'aménagement de l'espace dans les usines utilisant le JAT

L'une des conséquences du JAT est la suppression des magasins. Seules subsistent des aires de stockage destinées à accueillir en nombre très limité des conte-

neurs. Par ailleurs, les caractéristiques de la demande dans les entreprises fonctionnant suivant les principes du *JAT* font que les principes de la technologie de groupe sont très rapidement mis en œuvre afin de minimiser les problèmes de logistique. C'est ainsi que l'on trouve assez souvent des regroupements de machines spécialisées dédiées à un ensemble de références, disposées en U; les ouvriers sont à l'intérieur du U et ont à parcourir une distance réduite pour aller d'une machine à l'autre. De telles configurations sont souvent plus efficaces que celles reposant sur des machines automatisées très polyvalentes.

Il semblerait, enfin, que la mise en œuvre judicieuse de ces deux points conduise à une réduction substantielle de l'espace nécessaire pouvant aller jusqu'à plus de 50% par rapport à celle observée dans des entreprises similaires organisées suivant des principes «classiques». C'est donc à un bouleversement du «paysage industriel» que conduit la mise en œuvre du *JAT*.

IV-2 Le *JAT* en pratique

Le *JAT* est, nous avons assez insisté sur ce point, une philosophie «cohérente» et celle-ci implique une recherche permanente d'amélioration des procédures. L'un des problèmes clés à résoudre est celui de la diminution du nombre d'étiquettes à mettre en circulation. La logique retenue conduit au départ à l'inclusion de délais de sécurité dans le temps de cycle *C* évoqué ci-dessus. Cette inclusion sera d'autant plus utile que l'on a vu qu'au fur et à mesure que l'on lève les hypothèses simplificatrices, il devient de plus en plus difficile de prévoir le comportement du système (sans aide informatique). C'est pourquoi périodiquement, lorsque les conditions s'y prêtent (marge de sécurité disponible du fait d'une surcapacité momentanée, notamment), on expérimente les conséquences découlant d'une diminution d'une unité du nombre d'étiquettes (toutes choses égales par ailleurs). Si l'on est déjà à flux tendus, cette expérimentation révèle un ou plusieurs problèmes de nature à empêcher la systématisation de cette nouvelle «règle de gestion». Une réflexion est alors conduite pour tenter d'apporter des solutions aux problèmes ainsi révélés et, en cas de succès, une nouvelle valeur de temps de cycle est adoptée.

Cette approche empirique est lente et implique une souplesse organisationnelle et un «droit à l'erreur» que nombre d'entreprises occidentales ne connaissent pas. Il s'ensuit qu'assez souvent des améliorations sont encore possibles. Une alternative partielle à cette approche est envisageable. Elle consiste à faire appel à la simulation¹.

Le *JAT* n'implique pas que la totalité de la gestion des flux passe par le système *Kanban* et, en pratique, celui-ci ne gère guère plus de 60 à 70% des flux. Les exceptions concernent habituellement les références correspondant à des options (dont la demande est logiquement fort irrégulière et dont l'importance limitée au

1. Pour tester un ensemble de règles de gestion, parmi lesquelles figurent les tailles de lots et le nombre d'étiquettes à mettre en circulation. Cette approche peut donner rapidement des enseignements précieux, mais leur qualité dépend de celle du modèle retenu et de ses paramètres. Voir à ce sujet le mémoire de CNAM réalisé en 1984, sous notre direction, par C. Moins chez Renault – Véhicules Industriels. Dans ce travail, la simulation d'un problème réel mixant l'utilisation de solutions analytiques optimales (détermination de tailles de lots de références produites périodiquement à des intervalles multiples d'une période de base, elle aussi à déterminer, sur une même machine) et de règles empiriques de gestion, a conduit à des résultats fort intéressants.

maximum par une standardisation des produits finis incluant en série ce que la concurrence propose en option) ou les pièces importantes faisant l'objet d'un assemblage sur une ligne. Ajoutons que l'on trouve, dans certaines entreprises utilisant par ailleurs la *MRP*, quelques ateliers, voire quelques usines, utilisant complètement un *JAT*, ces unités étant dédiées à la fabrication de références à consommation forte et régulière.

IV-3 Comparaison du Juste - À - Temps et de la MRP

On a vu que la pertinence de l'usage du *JAT* est conditionnée par le respect de certaines conditions. Celui de la *MRP* ne l'est pas mais il implique un système de gestion sophistiqué et présente l'inconvénient de moins pousser à l'amélioration continue. Dans la pratique, ces deux systèmes de gestion sont plus complémentaires qu'opposés.

- Dans certaines entreprises utilisant par ailleurs la *MRP*, quelques ateliers, voire quelques usines, utilisant complètement un *JAT*, ces unités étant dédiées à la fabrication de références à consommation forte et régulière.
- De nombreuses entreprises travaillent en Juste-A-Temps, à partir d'une programmation faite par une *MRP*, pour gérer de manière détaillée les flux au cours de la première période de la *MRP* (souvent une semaine), en partant des lancements décidés pour cette période. De ce point de vue, le *JAT* est un outil d'ordonnancement et la différence d'usage entre ces approches porte principalement sur l'horizon décisionnel.

Chapitre VIII

TECHNIQUES AVANCÉES DE PLANIFICATION

Le chapitre précédent était orienté vers la présentation de techniques de planification largement diffusées. Ce chapitre a une vocation nettement plus académique dans la mesure où les approches qu'il présente sont d'un usage encore limité. Elles s'appuient sur une modélisation de problèmes de production qui permet d'utiliser les outils de la recherche opérationnelle. L'orientation retenue est celle d'une mise en évidence des mécanismes de modélisation permettant de définir des problèmes de gestion de processus productifs, qui soient suffisamment proches de ceux rencontrés dans la réalité et susceptibles d'être résolus par ces outils. S'il est faux de réduire, comme certains l'ont tenté, la gestion de production à la recherche opérationnelle, il est tout aussi stupide d'en négliger les potentialités, ce qui peut être dû à une méconnaissance des techniques de modélisation présentées ci-après. La conjonction de progrès réalisés en modélisation et ses techniques de mise en œuvre, conjugués avec ceux réalisés en puissance de traitement et baisse des coûts, observés en informatique, changent fondamentalement l'accessibilité de ses approches (ce qui sera développé à la [page 1132](#)).

Table des
matières

Index
thématique

On commencera par traiter les approches s'appuyant sur la programmation linéaire ([section I](#)) avant de présenter assez sommairement, quelques-unes qui utilisent la programmation dynamique ([section II, page 562](#)). Une présentation des fondements de la programmation linéaire et de ses dépassements récents est faite au [€](#), ce qui permet ici de se concentrer sur les approches modélisatrices. Certaines de ces modélisations concernent des problèmes de transport; on se contentera alors de les évoquer en les situant dans le cadre général de modélisation proposé ici et en renvoyant leur étude plus détaillée au [chapitre XIII](#). Ajoutons qu'une discussion approfondie des techniques de modélisation économique de gestion sera faite au [§ II-2.2, page 652](#), du [chapitre X](#); dans ce [chapitre X](#) et les deux suivants, il s'agira de modéliser des problèmes associés à des décisions de routine pour permettre d'établir des solutions optimales à appliquer. Dans ce [chapitre VIII](#), il s'agit surtout d'aider à la formulation de problèmes complexes pour lesquels des solutions analytiques n'existent pas mais pour lesquelles existent des outils généraux de résolution numérique, du moins pour des problèmes de taille limitée.

SECTION I QUELQUES APPLICATIONS DE LA PROGRAMMATION LINÉAIRE À LA DÉFINITION DU PROGRAMME OPTIMAL DE PRODUCTION

La modélisation de problèmes de production relatifs à des décisions stratégiques, tactiques ou opérationnelles, sous une forme permettant l'appel aux outils de programmation linéaire, offre des opportunités intéressantes d'aide à la résolution de problèmes complexes mais celles-ci doivent être considérées comme l'une des composantes d'un mécano d'outils créé pour résoudre un problème. Par exemple, son utilisation pour calibrer les ressources en hommes et équipements d'un système productif devra être complétée¹ par une simulation permettant de vérifier la robustesse aux aléas, de la solution trouvée. Par ailleurs, son utilisation est difficilement envisageable dans la prise de décision en temps réel. Mais son usage s'avère judicieux pour préparer certaines décisions appliquées de manière routinière.

Le «portefeuille de modèles» disponibles dans ce domaine est conséquent et beaucoup de modèles ne diffèrent que par le changement de quelques hypothèses ou modalités de représentation du réel. Pour cette raison, on a choisi de présenter de manière structurée ces approches, en mettant en évidence les classes de problèmes traités, et la façon de créer un modèle par mécano de modèles élémentaires en utilisant les principes qui permettent de prendre en compte des conditions logiques et des structures non linéaires dans la programmation linéaire (cf. § II-2, page 1135, du chapitre XVI). C'est plus cet apprentissage de la modélisation par cette approche, que l'exhaustivité des outils disponibles, qui est recherché dans cette section.

On commencera par quelques remarques sur la modélisation des processus de production (§ I-1). On examinera ensuite (§ I-2, page 531) une série de problèmes de production se posant au cours d'une période et considérés comme indépendants de ce qui se passe au cours des autres périodes; on parlera alors de **modélisation mono-période** des processus productifs. On verra enfin (§ I-3, page 555) la généralisation de ces approches avec la présentation de la **modélisation multi-périodes** des processus productifs.

I-1 La modélisation des processus de production par la programmation linéaire

Dans tous les cas, le problème que l'on rencontre est celui de la définition du niveau de détail pertinent pour préparer une décision, ce qui revient à raisonner sur un niveau d'agrégation acceptable à la fois dans l'espace (celui des ressources ou celui des produits) et dans le temps. La distinction opérée entre les modèles mono-période et les modèles multi-périodes oblige à introduire une nouvelle caractérisation des ressources (§ I-1.1). Les simplifications que l'on est amené à opérer par rapport à l'espace des ressources et des produits obligent à s'interroger sur le degré d'homogénéité des concepts manipulés dans la représentation retenue de la réalité (§ I-1.2, page 530). On introduira ensuite, au fur et à mesure, les éléments d'une représentation cartographique des processus tels qu'ils peuvent être décrits

1. Voir V. Giard & C. Triomphe (1995, [200]).

dans une approche s'appuyant sur la programmation linéaire. Ce type de représentation est plus fruste que d'autres comme la modélisation à des fins simulatoires (cf. [chapitre III, § I-2.1, page 148](#)) et celle tournant autour de la modélisation des processus notamment dans le cadre du BPR et des ERP (cf. [chapitre XIV, § III, page 957](#)) mais leur usage n'est pas le même et son intérêt est lié à celui de l'appel à ces techniques de programmation linéaire.

I-1.1 Les ressources dans la modélisation par la programmation linéaire

Toutes les ressources productives, sauf les ressources informationnelles qui sont en dehors de nos préoccupations (à l'exception des gammes opératoires), sont nécessairement soit stockables, soit non stockables.

- Une **ressource stockable** est une ressource qui, lorsqu'elle n'est pas consommée au cours d'une période, peut l'être au cours de la période suivante¹. Les produits, lorsqu'ils ne sont pas périssables, appartiennent à cette catégorie. Une ressource stockable se décrit par une quantité physiquement observable correspondant à un décompte d'objets ou, lorsqu'il y en a trop, à une mesure (poids ou volume ou ...) associée à l'ensemble physique étudié.
- Une **ressource non stockable** est une ressource qui offre potentiellement des prestations datées qui seront ou non utilisées. D'une manière générale, les hommes et les machines offrent ce type de prestation qui, lorsqu'elle n'est pas utilisée au cours d'une période, ne peut être stockée pour être utilisée au cours de la période suivante et doit donc être considérée comme définitivement perdue². Intrinsèquement, le fait qu'une ressource soit non stockable est indépendant du découpage temporel et reste vrai lorsque l'on découpe la période de référence en périodes plus courtes. Il résulte de ces diverses considérations qu'une ressource non stockable se décrit par une quantité immatérielle, presque toujours une durée d'utilisation *continue* possible de la ressource visée au cours de la période de référence. On verra ultérieurement que la production consommant généralement plusieurs ressources, le gaspillage de certaines ressources non stockables est à peu près inévitable.

Une **denrée périssable** est, par nature, une ressource stockable, puisqu'il est possible de définir des périodes suffisamment courtes pour que l'altération du produit ne soit pas perceptible. Réciproquement, tout objet physique se dégrade si l'on retient une période «suffisamment longue». La caractéristique «périssable» est donc très largement liée au découpage temporel retenu par l'observateur. Cela étant, lorsque l'analyse est conduite exclusivement sur une seule période, il n'est pas aberrant de traiter une denrée périssable comme une ressource non stockable.

1. Cette propriété se traduit en modélisation par les équations de conservation temporelle des stocks (voir [§ I-3.1.1, page 556](#)); celles-ci n'existent pas pour les ressources non stockables. La littérature d'ordonnancement appelle **ressource consommable** ce que l'on a appelé ressource stockable et **ressource renouvelable**, ce que l'on a appelé ressource non stockable.

2. L'heure de travail de Durand, disponible aujourd'hui entre 9 heures et 10 heures, est définitivement perdue si aucun travail n'est demandé à Durand au cours de cette période (du fait d'un retard de livraison de composants, par exemple). On peut demander à Durand d'effectuer une heure supplémentaire, mais Durand sera resté une heure de plus pour effectuer globalement le même travail au cours de la journée.

On représentera graphiquement par des triangles les ressources consommées par une production, que ces ressources soient stockables ou non.

I-1.2 Production de biens et de services

Un centre de production (ou un poste de travail ou un atelier ou ...) est un lieu géographique de consommation de ressources stockables et non stockables en vue d'effectuer la production d'un bien ou d'un service. On représentera graphiquement par des rectangles ces centres de production.

Le *niveau de détail* retenu fait qu'un centre de production peut être lui-même constitué de plusieurs centres de production amenés à traiter des productions éventuellement hétérogènes. Dans ce cas, le centre de production est une «boîte noire» et ce qui se passe à l'intérieur est en dehors du champ de l'étude: on se contente alors d'utiliser des gammes de production grossières caractérisées par de simples rapports de proportionnalité entre une production et les consommations de facteurs que cette production nécessite.

L'usage de *gammes* «grossières» implique que l'on fasse abstraction des gammes détaillées. Cette agrégation ne pose pas de problème pour l'ensemble des opérations élémentaires effectuées au niveau d'un centre de production «élémentaire» alors que l'agrégation d'informations provenant de *plusieurs* centres de production élémentaires pose le problème de la définition du potentiel productif de la «boîte noire», du fait des problèmes induits par l'ordonnement. En effet, l'analyse des problèmes d'équilibrage de chaîne (cf. [chapitre IX](#)) et d'ordonnement (cf. [chapitre V](#)) montre un certain nombre de points importants.

- Si l'on est en présence d'une *production homogène* effectuée sur une ligne de *postes de travail*, le débit de la ligne est contraint par le poste qui a le temps opératoire le plus long. Ceci implique que, structurellement, les capacités des autres postes ne peuvent pas être saturées. La description de la «boîte noire» passe alors par l'utilisation d'une ressource non stockable fictive résumant l'ensemble des ressources et dont la disponibilité, sur la période de référence retenue, est celle du poste critique de la chaîne.
- Si l'on est en présence d'une *production hétérogène* effectuée sur une ligne de postes de travail (dont certains peuvent être «sautés», pour certaines productions), la structure est alors de type flow shop (voir définition en [page 362](#)). Dans ce cas, on sait que la durée d'exécution d'un ensemble d'ordres de fabrication varie en fonction de l'ordonnement retenu et qu'il est impossible d'éviter que plusieurs postes de travail (et, à la limite, tous) soient en rupture de charge à un moment ou à un autre. La détermination du potentiel productif de la «boîte noire» n'est plus indépendante de la structure du portefeuille de commandes et de la qualité de l'ordonnement. On ne peut donc que proposer une valeur approximative de la disponibilité de la «boîte noire» sur la période de référence.
- Si l'on est en présence d'une production *hétérogène* effectuée sur une structure de type *job shop* (voir définition en [page 362](#)), on se trouve dans une situation encore moins prévisible que dans le cas précédent. L'introduction de gammes alternatives dans le centre de production complique encore plus

la détermination d'une valeur approximative de la disponibilité de la «boîte noire».

La production x_i (valeur entière ou non) du produit i , effectuée par un centre de production au cours d'une période, correspond à un flux, mesuré par une quantité continue ou discrète, qui ira alimenter un stock de produits intermédiaires ou de produits finis. Cette production nécessite la consommation de ressources repérées par l'indice j , à raison de a_{ij} unités de j , pour 1 unité produite de i . La production x_i induit donc le *prélèvement* du flux $a_{ij}x_i$, dans le stock de la ressource j , si cette ressource est stockable, et, dans le cas d'une ressource non stockable, elle induit la *consommation* du flux de prestations $a_{ij}x_i$. En général, les différentes quantités produites ne sont pas toutes prédéterminées; dans le cas contraire, le degré de liberté réside dans le choix de l'une des gammes alternatives de production de chaque produit i .

On peut ajouter que, parmi les différentes typologies utilisées pour analyser les systèmes productifs, il sera fait appel (§ I-3.1.3, page 559) à la distinction entre production à la commande et production pour stock.

I-2 Modélisation mono-période des processus productifs

Il faut distinguer le cas d'un centre de production unique ou traité comme tel (§ I-2.1) de celui d'un réseau de centres de production (§ I-2.2, page 548).

I-2.1 Centre de production unique

On peut considérer que l'on est en présence d'un centre de production unique dans deux cas de figure:

- le centre de production est effectivement unique,
- le centre de production est composé de plusieurs centres de productions élémentaires traités comme autant de ressources stockables et *indépendantes* les uns des autres, en ce sens¹ que tous les problèmes d'ordonnancement de la production entre ces centres sont implicitement ignorés; cette indépendance implique:
 - qu'il ne saurait y avoir de rupture de charge de travail d'un centre en raison du séquençement des opérations et d'éventuels goulots d'étranglement en amont de ce centre,
 - que les capacités disponibles définies pour les ressources non stockables sont utilisables en totalité.

Au cours d'une même période, plusieurs productions de biens ou de services peuvent être effectuées par ce centre de production unique. Ces productions peuvent être indépendantes, c'est-à-dire liées uniquement par la rareté des ressources productives. On distinguera alors le cas de gammes uniques pour chaque produit (§ I-2.1.1) du cas de gammes multiples (§ I-2.1.2, page 534). On trouve également le cas de productions liées, obtenues lorsqu'une même unité de ressource est utilisée à la production de plusieurs unités de biens ou de prestations de service. On distinguera alors le cas de gammes liées par des contraintes

1. Cette définition n'exclut pas le cas des productions liées de biens ou de prestations de service qui seront analysées au § I-2.1.3, page 540, et au § I-2.1.4, page 544.

spatiales, que l'on rencontre dans la fabrication de certains biens (§ I-2.1.3, page 540), de celui de gammes liées par des contraintes spatio-temporelles, que l'on rencontre généralement dans la production de certaines prestations de services (§ I-2.1.4, page 544). Enfin, on examinera le cas particulier d'un centre de production unique dédié à la fabrication d'un produit unique dont on cherche à déterminer la meilleure gamme (§ I-2.1.5, page 545).

I-2.1.1 Productions indépendantes faisant appel à des gammes uniques

I-2.1.1.1 Le problème posé

La production du système productif est effectuée au cours d'une période unique (hypothèse qui sera levée au § I-3):

- chaque produit i (i variant de 1 à n), dont on doit déterminer la quantité à produire x_i (positive ou nulle):
 - fait appel à une gamme de production *unique* qui est décrite par la consommation de a_{ij} unités de la ressource j , pour 1 unité de i ;
 - doit être produit en une quantité x_i devant être supérieure ou égale à une quantité minimale x_{\min_i} (pouvant être nulle ou positive) et inférieure à une quantité maximale x_{\max_i} (pouvant être infinie), ce qui conduit aux inéquations suivantes:

$$x_i \geq x_{\min_i} ; x_i \leq x_{\max_i} \quad \text{relation 81}$$

- chaque ressource j (ressources stockables ou non stockables) est disponible en quantité b_j (offre); la consommation de cette ressource $\sum_i a_{ij}x_i$ par l'ensemble des productions (demande) ne peut excéder les disponibilités (demande \leq offre), on a donc:

$$\sum_i a_{ij}x_i \leq b_j, \text{ pour } j = 1, \dots, J \text{ (demande } \leq \text{ offre)} \quad \text{relation 82}$$

Cette relation «demande d'une ressource \leq offre de cette ressource» est générale et revêt diverses formes (ici, la demande du facteur productif dépend des productions retenues et l'offre est fixée). On verra ultérieurement des cas de figure où l'offre du facteur considéré est variable et dépend des valeurs qui seront retenues pour d'autres variables de commande du problème¹.

De très nombreuses solutions respectent cet ensemble de contraintes. La recherche de la meilleure de ces solutions implique l'usage d'un critère qui conduit à l'introduction d'une fonction-objectif. Dans le cas étudié, cette fonction est habituellement la marge globale résultant du programme de production retenu. Celle-ci revêt alors la forme simplifiée d'une combinaison linéaire des productions dont les coefficients de pondérations m_i sont des marges unitaires des produits i :

1. Polyvalence de certaines ressources (§ I-2.1.2.3, page 539) mais aussi, dans la modélisation dynamique, présence variable, selon les périodes, de ressources non stockables en fonction d'un ensemble de services à retenir (§ I-3.1.2, page 558).

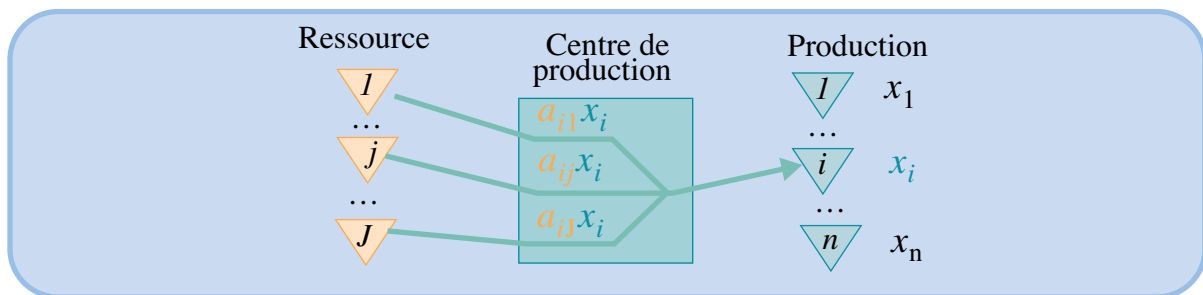
$$\text{Max } z, \text{ avec } z = \sum_{i=1}^n m_i x_i + \dots \quad \text{relation 83}$$

Les points de suspension indiquent la possibilité de compléter la fonction-objectif par d'autres éléments de coûts, si l'on souhaite «compliquer» le problème analysé pour permettre une représentation plus fine de la réalité.

La figure 154 décrit sommairement le problème posé, étant entendu que seuls les flux générés par la production de i sont décrits.

FIGURE 154

Productions multiples avec ressources multiples, gammes uniques, sur un seul centre de production et une seule période



I-2.1.1.2 Exemple d'application

Table des matières

GAMMA SA fabrique plusieurs centaines de produits et cherche à définir un programme optimal de production pour satisfaire les demandes de février 2003. On se limitera ici à la fabrication de 4 de ces produits qui nécessitent l'intervention de 5 ateliers; les données techniques de fabrication sont fournies dans le **tableau 133**.

Index thématique

TABLEAU 133
Gammes opératoires et disponibilité des ressources

Ressource j		Consommation a_{ij} de la ressource j pour produire une unité du				Disponibilités b_j de la ressource
		produit $i = 1$	produit $i = 2$	produit $i = 3$	produit $i = 4$	
Ressources non stockables	Emboutissage	0,03 h	0,15 h	0,05 h	0,10 h	400 heures
	Fraisage	0,06 h	0,12 h	0,00 h	0,10 h	400 heures
	Assemblage	0,05 h	0,10 h	0,05 h	0,12 h	500 heures
	Finition	0,04 h	0,20 h	0,03 h	0,12 h	450 heures
	Conditionnement	0,02 h	0,06 h	0,02 h	0,05 h	400 heures
Ressources stockables Tôles de 2 mm		0,0 m ²	0,5 m ²	0,0 m ²	0,3 m ²	500 m ²

Les contraintes de production minimales et maximales sont données dans le **tableau 134**, ainsi que les données de coûts variables directs et les prix de vente.

D'un point de vue économique, le problème posé est celui de la détermination du programme de production de chaque produit qui maximise la marge globale et respecte les contraintes de disponibilité des ressources et de satisfaction de la demande:

TABLEAU 134
Contraintes de productions et marges unitaires des produits

	Produit $i = 1$	Produit $i = 2$	Produit $i = 3$	Produit $i = 4$
Production minimale x_{\min_i}	1000	0	500	100
Production maximale x_{\max_i}	6000	500	3000	1000
Prix de vente unitaire (\$ lidurien)	50	125	80	100
Coût variable direct unitaire (\$ lidurien)	30	75	55	70
Marge unitaire sur coût variable direct m_i (\$ lidurien)	20	50	25	30

- maximiser la marge z :
 $Max z$, avec $z = (20x_1 + 50x_2 + 25x_3 + 30x_4)$
- sous contraintes de disponibilité d'heures de centres de production :
 - $0,03x_1 + 0,15x_2 + 0,05x_3 + 0,10x_4 \leq 400$ (emboutissage)
 - $0,06x_1 + 0,12x_2 + 0,00x_3 + 0,10x_4 \leq 400$ (fraisage)
 - $0,05x_1 + 0,10x_2 + 0,05x_3 + 0,12x_4 \leq 500$ (assemblage)
 - $0,04x_1 + 0,20x_2 + 0,03x_3 + 0,12x_4 \leq 450$ (finition)
 - $0,02x_1 + 0,06x_2 + 0,02x_3 + 0,05x_4 \leq 400$ (conditionnement)
- sous contrainte de disponibilité de tôles:
 $0,5x_2 + 0,3x_4 \leq 500$
- sous contraintes de productions minimales et maximales:
 $1000 \leq x_1 \leq 6000$
 $0 \leq x_2 \leq 500$
 $500 \leq x_3 \leq 3000$
 $100 \leq x_4 \leq 1000$

Les résultats du programme linéaire sont les suivants: $x_1^* = 5500$, $x_2^* = 500$, $x_3^* = 3000$, $x_4^* = 100$. La marge totale réalisée avec ce plan de production est 213000 dollars liduriens. On a donc fabriqué le maximum des produits 2 et 3 que l'on pouvait vendre durant la période. Le produit 4 n'est fabriqué que parce qu'une production minimale lui est imposée. Le programme utilise intégralement les capacités d'emboutissage et de fraisage, les capacités résiduelles sont de 13 heures pour l'atelier d'assemblage, 28 heures dans celui de la finition et 195 heures dans celui du conditionnement. Il reste 220 m² de tôle de 2 mm.

I-2.1.2 Productions indépendantes faisant appel à des gammes alternatives

Par rapport au problème introduit au § I-2.1.1, on se donne maintenant la possibilité d'utiliser des gammes alternatives pour fabriquer un ou plusieurs des produits considérés, tout en considérant que l'on est toujours en présence d'un centre de production unique, mobilisant plusieurs ressources. On verra à la page

548 une autre formulation qui repose sur une cartographie des flux faisant intervenir explicitement plusieurs centres de production.

I-2.1.2.1 Le problème posé

Ce type de problème, connu dans la littérature anglo-saxonne de la recherche opérationnelle sous le nom de *process selection problem*, se caractérise normalement par :

- un niveau de production imposé pour différents produits (hypothèse qui sera levée à la page 539);
- plusieurs filières de production possibles pour au moins un produit; les filières de production d'un produit différent par les procédés techniques utilisés ou par les ressources consommées (machines de performances techniques ou économiques différentes, appel à des heures supplémentaires, autres qualifications de personnel, sous-traitance, etc.) mais, dans tous les cas, le résultat physique final est le même;
- les coûts unitaires et facteurs utilisés dépendent de la filière retenue;
- le problème posé est celui de la détermination, pour chaque produit, de la quantité fabriquée par chaque filière, qui minimise le coût de production; si le prix de vente est constant, ce critère est équivalent à celui de la maximisation de la marge sur coût variable (ce dernier étant le seul possible si le problème consiste également à définir les niveaux de production, comme on le verra au § I-2.1.2.4, page 539);
- cette définition du programme optimal doit tenir compte des dotations disponibles des différents facteurs productifs utilisés dans les filières retenues.

Posons :

- x_{ij_i} = quantité du produit i ($i = 1, 2, \dots, n$) fabriqué par la filière j_i ($j_i = 1, 2, \dots, J_i$) de ce produit au cours de la période considérée,
- d_i = production requise pour le produit i ,
- b_k = montant de la ressource k ($k = 1, 2, \dots, K$) disponible au cours de la période,
- $a_{ij_i,k}$ = nombre d'unités du facteur productif k utilisé pour produire une unité du produit i par la filière productive j_i ,
- c_{ij_i} = coût variable unitaire d'une unité du produit i par la filière j_i .

Le problème posé consiste à :

- trouver les valeurs positives ou nulles des x_{ij_i} qui minimisent le coût total de production de la période :

$$\text{Min } z, \text{ avec } z = \sum_{i=1}^n \sum_{j_i=1}^{J_i} c_{ij_i} x_{ij_i} \quad \text{relation 84}$$

- sous contraintes :
 - de production à réaliser :

$$\sum_{j_i=1}^{J_i} x_{ij_i} = d_i, \text{ pour } i = 1, 2, \dots, n \quad \text{relation 85}$$

- de respect de la dotation de facteurs disponibles:

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j_i=1}^{J_i} a_{ij_i,k} x_{ij_i} \leq b_k, \text{ pour } k = 1, 2, \dots, K \quad \text{relation 86}$$

I-2.1.2.2 Exemple d'application

Reprenons l'exemple du § I-2.1.1.2, page 533, en supposant maintenant:

- que les niveaux de production sont fixés aux valeurs maximales (respectivement 3000, 500, 1000 et 2000); il n'y a donc plus aucune latitude dans le niveau de production du mois de février 2003 (ce qui caractérisait le problème précédent);
- qu'en plus des heures disponibles, **GAMMA SA** a désormais la possibilité de sous-traiter les opérations d'emboutissage et de fraisage à un coût variable unitaire de 20% supérieur au coût interne (par exemple, pour le produit 1, le coût unitaire de sous-traitance est de 36 dollars liduriens contre 30, en coût unitaire interne); les opérations d'assemblage, de finition et d'emballage sont nécessairement effectuées dans les ateliers de **GAMMA SA** qui refuse de sous-traiter ces opérations qui constituent l'essentiel de sa valeur ajoutée;
- un appel aux heures supplémentaires est possible dans l'atelier de finition, à concurrence de 100 heures, ce qui a pour effet d'accroître les coûts variables unitaires de 1 \$ pour les produits 1 et 3, de 2 \$ pour le produit 2 et de 1,50 \$ pour le produit 4;
- que la limitation sur la tôle de 2 mm ne porte que sur la fabrication interne.

L'analyse de ces données montre qu'il y a 4 filières de production pour chacun des 4 produits ($J_i = 4$, quel que soit le produit i). On notera donc x_{ij} au lieu de x_{ij_i} , le nombre d'unités du produit i fabriquées par la filière j_i (voir [tableau 135](#)).

TABLEAU 135
Variables du problème avec explicitation des filières de production

Emboutissage & fraisage	Interne		Externe		
	Normales	Supplémentaires	Normales	Supplémentaires	
Finition en heures	1	2	3	4	
Filière de production j	1	2	3	4	
Produit i	1	x_{11}	x_{12}	x_{13}	x_{14}
	2	x_{21}	x_{22}	x_{23}	x_{24}
	3	x_{31}	x_{32}	x_{33}	x_{34}
	4	x_{41}	x_{42}	x_{43}	x_{44}

Les coûts unitaires de production des différents produits pour chacune des filières sont donnés dans le [tableau 136](#).

Le problème est alors de minimiser la fonction-objectif z suivante qui décrit la recherche du programme de production ayant le plus faible coût:

TABLEAU 136
Coûts unitaires de production par filière (en \$ lidurien)

Emboutissage & fraisage		Interne		Externe	
		Normales	Supplémentaires [†]	Normales [‡]	Supplémentaire [†]
Finition en heures		1	2	3	4
Filière de production j		1	2	3	4
Produit i	1	30	31	36	37
	2	75	77	90	92
	3	55	56	66	67
	4	70	71,5	84	85,5

†. Entraîne un accroissement de coût de 1 \$, par rapport au coût de base (fabrication interne en heures normales), pour les produits 1 et 3, de 1,50 \$ pour le produit 4 et de 2 \$ pour le produit 2.

‡. Entraîne un accroissement de coût de 20%, par rapport au coût de base (fabrication interne en heures normales)

Min z , avec $z = (30x_{11} + 31x_{12} + 36x_{13} + 37x_{14} + 75x_{21} + 77x_{22} + 90x_{23} + 92x_{24} + 55x_{31} + 56x_{32} + 66x_{33} + 67x_{34} + 70x_{41} + 71,5x_{42} + 84x_{43} + 85,5x_{44})$

Les contraintes sur les *heures normales* disponibles deviennent alors:

$$\sum_{j=1}^2 (0,03x_{1j} + 0,15x_{2j} + 0,05x_{3j} + 0,10x_{4j}) \leq 400 \text{ (emboutissage)}$$

$$\sum_{j=1}^2 (0,06x_{1j} + 0,12x_{2j} + 0,10x_{4j}) \leq 400 \text{ (fraisage)}$$

$$\sum_{j=1}^4 (0,05x_{1j} + 0,10x_{2j} + 0,05x_{3j} + 0,12x_{4j}) \leq 500 \text{ (assemblage)}$$

$$0,04(x_{11} + x_{13}) + 0,2(x_{21} + x_{23}) + 0,03(x_{31} + x_{33}) + 0,12(x_{41} + x_{43}) \leq 450$$

(finition en heures normales)

$$\sum_{j=1}^4 (0,02x_{1j} + 0,06x_{2j} + 0,02x_{3j} + 0,05x_{4j}) \leq 400 \text{ (conditionnement)}$$

La contrainte pesant sur les *heures supplémentaires* de l'atelier de *finition* est:
 $0,04(x_{12} + x_{14}) + 0,2(x_{22} + x_{24}) + 0,03(x_{32} + x_{34}) + 0,12(x_{42} + x_{44}) \leq 100$

La contrainte de disponibilité de tôle devient:
 $0,5(x_{21} + x_{22}) + 0,3(x_{41} + x_{42}) \leq 500$

Les contraintes de niveau de production sont maintenant:

$$\sum_{j=1}^4 x_{1j} = 3000; \quad \sum_{j=1}^4 x_{2j} = 500; \quad \sum_{j=1}^4 x_{3j} = 1000; \quad \sum_{j=1}^4 x_{4j} = 2000$$

Le plan de production optimal trouvé est le suivant: $x_{11}^* = 3000$, $x_{23}^* = 300$, $x_{24}^* = 200$, $x_{31}^* = 1000$, $x_{41}^* = 1666,67$, $x_{43}^* = 333,33$, les autres variables étant nulles ($x_{12}^* = x_{13}^* = x_{14}^* = x_{21}^* = x_{22}^* = x_{32}^* = x_{33}^* = x_{34}^* = x_{42}^* = x_{44}^* = 0$). Les implications concrètes de cette programmation sur les centres de production sont données dans le [tableau 137](#). Le coût minimal obtenu avec ce programme est de

TABLEAU 137
Programme de production

Centres de production		Production du produit			
		1	2	3	4
Emboutissage et fraisage	Production interne	3000	0	1000	1667
	Sous-traitance	0	500	0	333
Assemblage		3000	500	1000	2000
Finition en heures	Normales	3000	300	1000	2000
	Supplémentaires	0	200	0	0
Conditionnement		3000	500	1000	2000

335066,67 dollars liduriens. L'utilisation des capacités productrices de la main-d'œuvre de **GAMMA SA** est donnée au [tableau 138](#). La totalité des 500 m² disponi-

TABLEAU 138
Utilisation des ressources découlant du programme de production

Ateliers	Heures normales			Heures supplémentaires		
	disponibles	program- mées	inutilisées	disponibles	program- mées	inutilisées
Emboutissage	400,0	306,7	93,3	0	0	0
Fraisage	400,0	346,7	53,3	0	0	0
Assemblage	500,0	490,0	10,0	0	0	0
Finition	450,0	450,0	0,0	100	40	60
Conditionnement	400,0	210,0	190,0	0	0	0

bles de tôle de 2 mm est utilisée pour fabriquer le produit 4 (qui requiert 500 m² au total). De ce fait, le produit 2 est totalement sous-traité (ainsi que le reste de la production requise pour le produit 4). L'analyse des variables duales montre que le mètre carré supplémentaire de tôle de 2 mm permet de diminuer le coût de production de 9,30 \$, tandis que l'heure supplémentaire dans l'atelier de finition permet¹ d'économiser 10 \$.

Il faut ajouter que la solution trouvée conduit à des valeurs fractionnaires de x_{43}^* et de x_{41}^* . Arrondir la solution trouvée conduit à ne pas respecter la contrainte disponibilité de tôle mais, en pratique, la précision des informations peut être telle que la solution proposée est acceptable. Si on choisit de tronquer les solutions fractionnaires plutôt que de les arrondir, on est certain de respecter les contraintes

1. Cette valeur se retrouve immédiatement en remarquant que cet atelier traite (1 / 0,2 =) 5 unités de produit 2 par heure et que le coût différentiel de l'heure supplémentaire (par rapport à l'heure normale) est de 2 \$/ heure, ce qui conduit bien au prix-fantôme de 2 x 5 = 10 \$ liduriens.

du type \leq et cela est acceptable si les valeurs tronquées ne sont pas trop proches de 0. En toute rigueur, si l'on veut d'emblée aboutir des solutions entières, il faut déclarer les variables entières et utiliser un solveur de programmation linéaire entier (ou mixte). Dans ce cas, la solution trouvée est inchangée pour les productions des produits 1 et 3 ($x_{11}^* = 3000$, $x_{31}^* = 1000$) et, pour les autres produits, devient: $x_{41}^* = 1665$; $x_{43}^* = 335$; $x_{21}^* = 1$, $x_{23}^* = 299$ et $x_{24}^* = 200$, pour un coût minimal de 335075 (dégradation de l'optimum de 8,33 dollars liduriens). On peut remarquer que cette solution est voisine de la précédente et que l'on utilise x_{21}^* , juste pour saturer la contrainte, ce qui ne doit guère se justifier économiquement (le coût de lancement en production n'étant sans doute plus négligeable par rapport au coût variable direct).

I-2.1.2.3 Prise en compte de la polyvalence de certaines ressources

Pour faciliter le plein emploi des facteurs productifs on a souvent intérêt à utiliser des ressources polyvalentes. Dans l'exemple numérique du § I-2.1.2.2, on dispose de 950 heures dans les ateliers d'assemblage et de finition. Si certains ouvriers peuvent tenir indifféremment l'un ou l'autre poste, à concurrence par exemple de 150 heures, le reste des ($950 - 150 =$) 800 heures étant effectuées par des opérateurs spécialisés (par exemple: 450 en assemblage et 350 en finition), on modifiera le problème en créant deux variables supplémentaires, y_1 et y_2 , volume horaire de polyvalents utilisés respectivement dans les ateliers d'assemblage et de finition. Les ressources de ces ateliers deviennent respectivement $450 + y_1$ et $400 + y_2$. Il en résulte les transformations suivantes du problème, ainsi que la création d'une nouvelle contrainte, celle d'une utilisation de la ressource polyvalente ne devant pas dépasser la dotation disponible:

Table des matières

Index thématique

$$\sum_{j=1}^4 (0,05x_{1j} + 0,10x_{2j} + 0,05x_{3j} + 0,12x_{4j}) - y_1 \leq 450 \text{ (assemblage)}$$

$$0,04(x_{11} + x_{13}) + 0,2(x_{21} + x_{23}) + 0,03(x_{31} + x_{33}) + 0,12(x_{41} + x_{43}) - y_2 \leq 350$$

(finition en heures normales)

$$y_1 + y_2 \leq 150 \text{ (polyvalents)}$$

Dans ces conditions, les polyvalents seront complètement utilisés à raison de 40 heures en assemblage et 110 heures en finition, ce qui permet de diminuer de 10 heures l'appel aux heures supplémentaires affectées à l'atelier de finition. Cette diminution, conformément à la remarque faite sur la variable duale de cette contrainte, permet d'économiser $10 \times 10 = 100$ dollars liduriens (d'où un coût minimal de 334975) et seule la fabrication du produit 2 est affectée. Dans la formulation discrète on obtient: $x_{21}^* = 1$, $x_{23}^* = 349$ et $x_{24}^* = 150$.

I-2.1.2.4 Détermination simultanée des quantités à produire et des filières de production

Reprenons l'exemple du § I-2.1.2.2, page 536 (formulation avec explicitation de filière), en gardant toutes les données à l'exception de celles relatives au niveau de production désiré (on reprendra les bornes du problème du § I-2.1.1.2 fournies

dans le [tableau 134, page 534](#)) et en transformant la fonction-objectif pour maximiser une marge sur coût variable (on reprendra pour cela les prix de ventes unitaires du [tableau 134¹](#)). On a alors à maximiser:

$$\text{Max } z, \text{ avec } z = (20x_{11} + 19x_{12} + 14x_{13} + 13x_{14} + 50x_{21} + 48x_{22} + 35x_{23} + 33x_{24} + 25x_{31} + 24x_{32} + 14x_{33} + 13x_{34} + 30x_{41} + 28,5x_{42} + 16x_{43} + 14,5x_{44})$$

Les contraintes de production deviennent, compte tenu de l'introduction, des filières de production:

$$1000 \leq \sum_{j=1}^4 x_{1j} \leq 6000 ; 0 \leq \sum_{j=1}^4 x_{2j} \leq 500 ; 500 \leq \sum_{j=1}^4 x_{3j} \leq 3000 ;$$

$$100 \leq \sum_{j=1}^4 x_{4j} \leq 1000$$

Le plan de production optimal trouvé est le suivant: $x_{11}^* = 5500$, $x_{13}^* = 260$, $x_{21}^* = 500$, $x_{31}^* = 3000$, $x_{41}^* = 100$ et la nouvelle marge optimale est de 216640 dollars liduriens pour la période, ce qui correspond à une augmentation de 3640 dollars réalisée grâce à la souplesse introduite par la sous-traitance (les heures complémentaires n'étant pas mobilisées). On notera que ce programme de production n'utilise que 280 m² de tôle de 2 mm, sur les 500 disponibles. Les conséquences de ce nouveau programme sont résumées dans les [tableaux 139](#) et [140](#).

TABLEAU 139
Programme de production

Centres de production		Production du produit			
		1	2	3	4
Emboutissage et fraisage	Production interne	5500	500	3000	100
	Sous-traitance	260	0	0	0
Assemblage		5760	500	3000	100
Finition en heures	Normales	5760	500	3000	100
	Supplémentaires	0	0	0	0
Conditionnement		5760	500	3000	100

I-2.1.3 Productions liées de produits faisant appel à des gammes alternatives

I-2.1.3.1 Le problème posé

Le cas de figure modélisé ici se rencontre lorsque:

- la production
 - peut s'effectuer en faisant appel à un nombre fini de gammes possibles, chaque gamme permettant de fabriquer *simultanément* plusieurs produits, en quantité variable selon la gamme considérée,

1. $\Rightarrow 50 - 30 = 20$ pour x_{11} ; $50 - 31 = 19$ pour x_{12} ; etc.

TABLEAU 140
Utilisation des ressources découlant du programme de production

Ateliers	Heures normales			Heures supplémentaires		
	disponi- bles	program- mées	inutili- sées	disponi- bles	program- mées	inutili- sées
Emboutissage	400,0	400,0	0,0	0	0	0
Fraisage	400,0	400,0	0,0	0	0	0
Assemblage	500,0	500,0	0,0	0	0	0
Finition	450,0	432,4	17,6	100	0	100
Conditionnement	400,0	210,2	189,8	0	0	0

- chaque gamme alternative utilise une seule ressource stockable (qui peut être simultanément utilisée par d'autres gammes),
- plusieurs ressources stockables différentes peuvent être utilisées mais chaque gamme ne fait appel qu'à une seule de ces ressources;
- un nombre minimal d'unités doit être fabriqué pour chaque produit, au cours de la période considérée.

On trouve cette classe de problèmes principalement dans les problèmes de découpe :

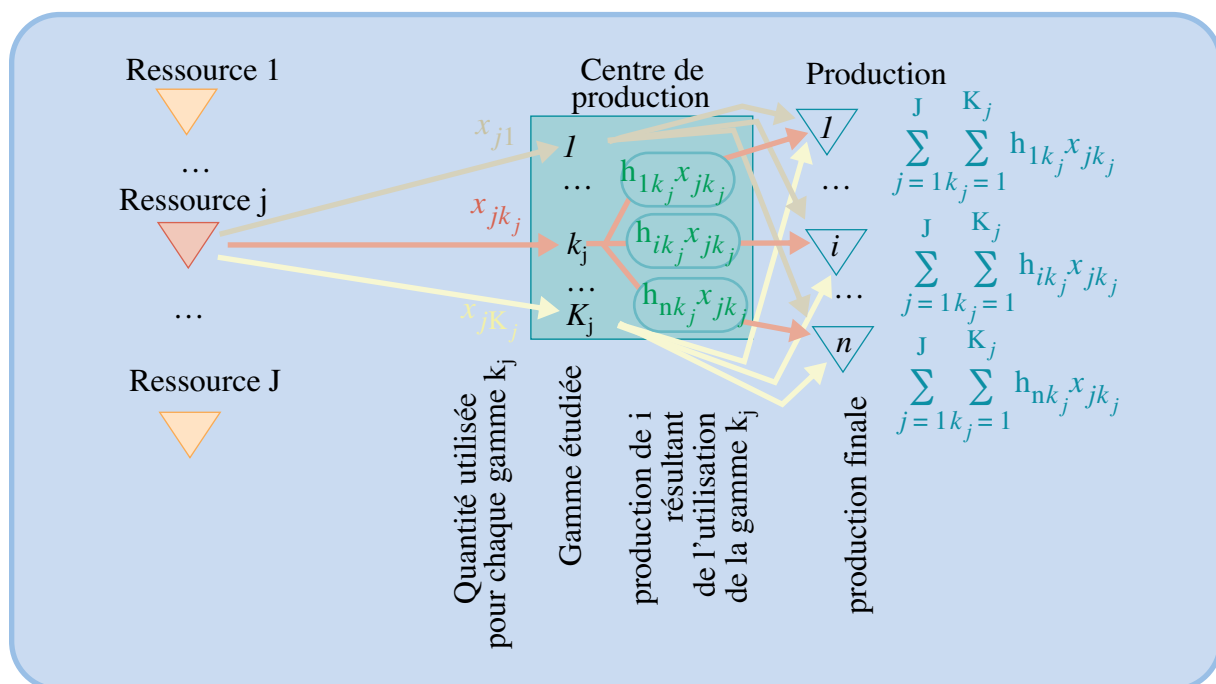
- dans un espace à une dimension avec la découpe de bobines de grande largeur (plusieurs largeurs de bobine pouvant être utilisées), en bobines de largeur plus faible destinées à satisfaire les demandes de clients du système;
- dans un espace à deux dimensions, avec la découpe de feuilles (verre ou film pour plaques de radiologie ou coupon de tissus ou etc.) en objets de formes variables.

Table des matières

Index thématique

FIGURE 155

Productions liées avec gammes alternatives utilisant chacune une seule ressource et un centre unique de production (période unique)



La structure du problème posé est décrite dans la [figure 155 de la page 541](#), avec une explicitation de la seule ressource j pour ne pas trop compliquer la représentation du problème. Elle se définit par les caractéristiques suivantes :

- il existe K_j gammes de production possibles utilisant exclusivement la ressource j ;
- le programme de production à déterminer se définit par les quantités x_{jk_j} de la ressource j utilisant la gamme k_j (k_j variant de 1 à K_j), les valeurs x_{jk_j} étant entières;
- selon la gamme k_j , l'utilisation d'une unité de la ressource j permet de produire h_{ik_j} unités du produit i ; l'utilisation de x_{jk_j} unités de la ressource j permet donc de produire $h_{ik_j}x_{jk_j}$ unités du produit i ; l'obtention de ces K_j gammes résulte souvent d'une recherche par tâtonnement mais elle peut s'appuyer sur une démarche itérative complétant progressivement un ensemble initial de gammes ne fabriquant chacune qu'un seul produit¹;
- la production totale du produit i , quelles que soient la ressource j utilisée et

la gamme k_j retenue pour cette ressource j , est donc $\sum_{j=1}^J \sum_{k_j=1}^{K_j} h_{ik_j}x_{jk_j}$; cette

production doit être supérieure ou égale à la demande d_i , c'est-à-dire que les n contraintes suivantes doivent être satisfaites :

$$\sum_{j=1}^J \sum_{k_j=1}^{K_j} h_{ik_j}x_{jk_j} \geq d_i, \text{ pour } i = 1, \dots, n \quad \text{relation 87}$$

- des contraintes sur les ressources disponibles (similaires à celles de la [relation 82, page 532](#)) peuvent être introduites, si nécessaire.

La fonction-objectif du problème consiste à minimiser une somme pondérée des quantités x_{jk_j} de ressource j utilisant la gamme k_j , où les coefficients de pondération c_j peuvent être des coûts unitaires ou des coefficients de conversion permettant de décrire la consommation totale en une même unité (longueur, poids, etc.) :

$$\text{Min } z, \text{ avec } z = \sum_{j=1}^J c_j \sum_{k_j=1}^{K_j} x_{jk_j} + \dots \quad \text{relation 88}$$

I-2.1.3.2 Exemple d'application

On n'illustrera ici que le problème unidimensionnel. **VELINOR** possède une usine qui fabrique une large gamme de papiers d'emballage; au début du processus de fabrication, on part de grandes bobines de papier de 4 mètres de large ou de 3 mètres de large et d'un même diamètre pour fabriquer des rouleaux de feuilles de papier d'emballage qui existent en 3 largeurs: 90 cm, 48 cm et 120 cm. Les grandes bobines de 4 m de large sont donc coupées en plusieurs petites bobines correspondant à l'une de ces spécifications. Par exemple, on peut, à partir d'une

1. Voir Scharage (1991, [374]), p. 286-289.

grande bobine de 4 m, obtenir 8 petites bobines de 48 cm ou 3 de 120 cm, mais bien d'autres combinaisons sont envisageables (comme 2 petites bobines de 90 cm + 2 petites bobines de 48 cm + 1 petite bobine de 120 cm).

Le problème de détermination des gammes est exogène à celui du plan de production optimal qu'il précède nécessairement. La recherche des gammes possibles est celle de tous les jeux de valeurs entières positives ou nulles n_1, n_2, n_3 (correspondant aux coefficients h_{ik_j}), qui sont tels que $120n_1 + 90n_2 + 48n_3 \leq 400$ (en ne s'attachant ici qu'au cas des grandes bobines de 4 m) et que la largeur résiduelle de la grande bobine après découpe $\{400 - (120n_1 + 90n_2 + 48n_3)\}$ reste inférieure à celle de la plus petite bobine (48 cm): $400 - (120n_1 + 90n_2 + 48n_3) < 48$. Les divers plans de coupe de notre exemple sont donnés dans les tableaux 141 et 142.

TABLEAU 141

Nombre h_{ik_1} de petites bobines i produites par les gammes alternatives de production utilisant des grandes bobines de 4 mètres ($j = 1$)

Table des matières

Index thématique

		Gamme (plan de coupe) k_1 pour une bobine de 4 mètres ($j = 1$)											
		$k_1 = 1$	$k_1 = 2$	$k_1 = 3$	$k_1 = 4$	$k_1 = 5$	$k_1 = 6$	$k_1 = 7$	$k_1 = 8$	$k_1 = 9$	$k_1 = 10$	$k_1 = 11$	$k_1 = 12$
Bobines de	120 cm ($i = 1$)	3	2	2	1	1	1	1	0	0	0	0	0
	90 cm ($i = 2$)	0	0	1	0	1	2	3	0	1	2	3	4
	48 cm ($i = 3$)	0	3	1	5	3	2	0	8	6	4	2	0
Largeur de la bobine résiduelle		40	16	22	40	46	4	10	16	22	28	34	40

TABLEAU 142

Nombre h_{ik_2} de petites bobines i produites par les gammes alternatives de production utilisant des grandes bobines de 3 mètres ($j = 2$)

		Gamme (plan de coupe) k_2 pour une bobine de 3 mètres ($j = 2$)							
		$k_2 = 1$	$k_2 = 2$	$k_2 = 3$	$k_2 = 4$	$k_2 = 5$	$k_2 = 6$	$k_2 = 7$	$k_2 = 8$
Bobines de	120 cm ($i = 1$)	2	1	1	1	0	0	0	0
	90 cm ($i = 2$)	0	2	1	0	3	2	1	0
	48 cm ($i = 3$)	1	0	1	3	0	2	4	6
Largeur de la bobine résiduelle		12	0	42	36	30	24	18	12

Les besoins de la clientèle varient d'une semaine sur l'autre. Supposons que, pour la semaine à venir, les demandes soient de 200 petites bobines de 120 cm de large, 500 petites bobines de 90 cm et 300 petites bobines de 48 cm. Le problème

posé est celui de la définition du programme de production qui minimise le nombre de grandes bobines à utiliser, pondéré par la largeur de la bobine ou, ce qui revient au même, qui minimise l'importance de la surproduction et des chutes de papier¹.

Si le problème posé est celui de la recherche du nombre minimal de bobines pondérées par leurs longueurs, la fonction-objectif est alors: $Min z$, avec $z =$

$$4 \sum_{k_1=1}^{12} x_{1k_1} + 3 \sum_{k_2=1}^8 x_{2k_2}, \text{ sous contraintes que la demande soit satisfaite (les excédents étant écoulés la semaine suivante):}$$

dents étant écoulés la semaine suivante):

$$x_{1,1} + 2x_{1,2} + 2x_{1,3} + x_{1,4} + x_{1,5} + x_{1,6} + x_{1,7} + 2x_{2,1} + x_{2,2} + x_{2,3} + x_{2,4} \geq 200$$

$$x_{1,3} + x_{1,5} + 2x_{1,6} + 3x_{1,7} + x_{1,9} + 2x_{1,10} + 3x_{1,11} + 4x_{1,12} + 2x_{2,2} + x_{2,3} + 3x_{2,5} + 2x_{2,6} + x_{2,7} \geq 500$$

$$3x_{1,2} + x_{1,3} + 5x_{1,4} + 3x_{1,5} + 2x_{1,6} + 8x_{1,8} + 6x_{1,9} + 4x_{1,10} + 2x_{1,11} + x_{2,1} + x_{2,3} + 3x_{2,4} + 2x_{2,6} + 4x_{2,7} + 6x_{2,8} \geq 300$$

L'une des solutions optimales de ce problème est $x_{1,6}^* = 100$, $x_{1,7}^* = 1$, $x_{1,8}^* = 10$, $x_{1,10}^* = 2$, $x_{1,12}^* = 24$, $x_{2,1}^* = 1$, $x_{2,2}^* = 97$, $x_{2,7}^* = 3$. Cette solution conduit à produire 200 petites bobines de 120 cm de large, 500 petites bobines de 90 cm et 301 petites bobines de 48 cm, ce qui correspond exactement à la demande sauf pour les bobines de 48 cm (excédent de 1 petite bobine).

I-2.1.4 Productions liées de prestations de service faisant appel à des gammes alternatives

Le problème posé est en réalité une variante du problème précédent (§ I-2.1.3), dont l'originalité tient surtout à la définition des gammes qui intègrent, implicite-

1. Si l'on désire formuler le problème en un problème de minimisation des chutes et productions inutiles, on notera w_{jk_j} la chute non récupérable réalisée avec le plan de coupe k_j qui est donnée en dernière ligne des tableaux

141 et 142. Au cumul des largeurs de chutes inutilisables $\sum_{j=1}^J \sum_{k_j=1}^{K_j} w_{jk_j} x_{jk_j}$ il faut ajouter la surproduction, c'est-

à-dire le cumul des largeurs des petites bobines excédentaires: $\sum_{i=1}^n a_i \left[\sum_{j=1}^J \sum_{k_j=1}^{K_j} h_{ik_j} x_{k_j} - d_i \right]$, la largeur a_i corres-

pondant à la spécification i . Dans ces conditions, la fonction-objectif devient: $Min z$, avec

$$z = \left\{ \sum_{j=1}^J \sum_{k_j=1}^{K_j} w_{jk_j} x_{jk_j} + \sum_{i=1}^n a_i \left[\sum_{j=1}^J \sum_{k_j=1}^{K_j} h_{ik_j} x_{k_j} - d_i \right] \right\} = \left\{ \sum_{j=1}^J \sum_{k_j=1}^{K_j} \left(w_{jk_j} + \sum_{i=1}^n a_i h_{ik_j} \right) x_{jk_j} - \sum_{i=1}^n a_i d_i \right\},$$

les contraintes restant les mêmes. En réalité, ces deux formulations sont équivalentes, à la constante additive près

$\sum_{i=1}^n a_i d_i$ qui correspond au cumul des largeurs des petites bobines demandées (ce qui est évident car le cumul

des largeurs des grandes bobines utilisées se décompose en cumul des largeurs des petites bobines demandées, cumul des largeurs des petites bobines excédentaires et cumul des largeurs des chutes), car

$\sum_{j=1}^J \sum_{k_j=1}^{K_j} \left(w_{jk_j} + \sum_{i=1}^n a_i h_{ik_j} \right) x_{jk_j}$ n'est rien d'autre que le cumul des largeurs des petites bobines produites et des chutes.

ment, un ensemble de *contraintes spatio-temporelles*. Certains problèmes de transport se caractérisent par une liste cohérente de prestations à exécuter. Chaque prestation est caractérisée, du point de vue qui nous intéresse ici, par une exécution effectuée entre une heure h_i de départ d'une origine i et une heure h_j d'arrivée à une destination j , différente de i ; les autres caractéristiques de cette prestation importent peu ici. Chaque prestation est effectuée par un seul véhicule (avion, train, camion ou autocar) ou un seul opérateur (conducteur, pilote, hôtesse, contrôleur, etc.). Au cours d'une période, par exemple la journée, une même ressource élémentaire (véhicule ou opérateur) peut prendre en charge plusieurs prestations, à la double condition que chaque prestation ait comme origine la destination de la prestation précédente, et que son heure de départ soit postérieure à l'heure d'arrivée de la prestation précédente. Une gamme se définit alors comme une liste *cohérente* de prestations que peut prendre en charge une même ressource élémentaire. Il s'agit d'exécuter au moindre coût de toutes les prestations par un ensemble de ressources élémentaires utilisant, chacune, une gamme différente, ce qui revient à choisir les gammes à utiliser dans un ensemble de gammes possibles toutes différentes. Ce problème de transport est analysé en détail au [chapitre XIII, § II-2, page 921](#).

I-2.1.5 Détermination de la gamme optimale associée à la production d'un produit unique

La quantité à fabriquer étant définie, le seul degré de liberté réside dans la détermination d'une gamme optimale ou d'une combinaison optimale de gammes en cas de restriction sur les ressources.

Table des matières

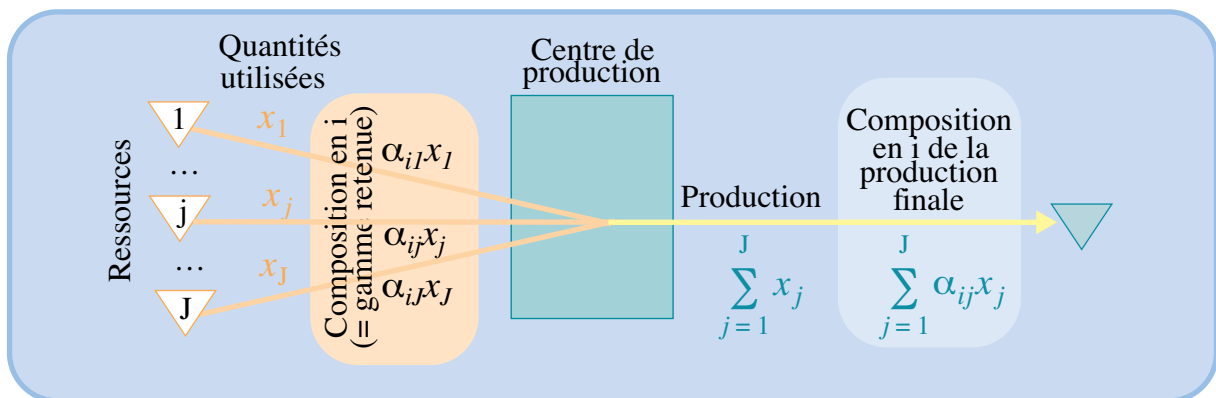
I-2.1.5.1 Le problème posé

Ce problème se pose lorsqu'un produit fabriqué (aliment, acier...) est un mélange de plusieurs matières premières j , utilisées en quantité x_j pour obtenir la

Index thématique

quantité demandée $\sum_{j=1}^J x_j = d$ (voir [figure 156](#)). Les matières premières j se caractérisent

FIGURE 156
Gamme d'un mélange



térisent chacune par un coût unitaire c_j et une quantité disponible différente b_j . Le dosage des matières premières j dans le mélange définit la gamme utilisée. On s'intéresse alors à un ensemble de n spécifications i caractérisant les composants de base des matières premières j et le produit fini (par exemple, teneurs en lipides,

protides, vitamines, etc. des composants d'un aliment ou teneur en métaux et impuretés de minéraux utilisés dans un alliage). La teneur α_{ij} du composant j utilisé en quantité x_j fait que le mélange final reçoit une quantité $\alpha_{ij}x_j$ du composant de base i . Le produit final doit respecter, pour chaque spécification i , des normes

définies par des intervalles de valeurs¹ $\alpha_{\min_i} \leq \frac{\sum_{j=1}^J \alpha_{ij}x_j}{\sum_{j=1}^J x_j} \leq \alpha_{\max_i}$,

ce qui s'écrit encore :

$$\sum_{j=1}^J (\alpha_{ij} - \alpha_{\max_i})x_j \leq 0 \text{ et } \sum_{j=1}^J (\alpha_{\min_i} - \alpha_{ij})x_j \leq 0, \text{ pour } i = 1, \dots, n \quad \text{relation 89}$$

Il faut que la production finale soit égale à la demande d :

$$\sum_{j=1}^J x_j = d \quad \text{relation 90}$$

Dans cette [relation 90](#), la demande d peut être remplacée par 1 si l'on cherche une composition optimale qui restera stable tant que les structures de coûts ne varient pas et qu'aucune contrainte ne pèse sur les ressources disponibles (par rapport aux demandes).

Le problème peut se compliquer :

- par la prise en compte de contraintes de disponibilité de matières premières, on est alors conduit à introduire des contraintes de même nature que celles de la [relation 82, page 532](#) mais qui se simplifient ici ($x_j \leq b_j$);
- par l'impossibilité d'utiliser complètement certaines ressources j , dans le processus de production non en raison de l'abondance de la ressource mais de l'élimination nécessaire de certains éléments indésirables que celle-ci contient (déchets, etc.) : lorsque seulement un pourcentage β_j (inférieur à 100 %) de la ressource j peut être utilisé dans le mélange final, il convient de remplacer, dans les relations [89](#) et [90](#), les x_j par des $\beta_j x_j$; l'exemple du § [I-2.1.5.2](#) traite ce cas de figure;
- par le désir de limiter a priori à v le nombre de composants utilisés, lorsque le nombre de contraintes est élevé; dans ce cas, il faut créer :
 - autant de variables binaires δ_j qu'il y a de composants j , δ_j valant 1 si et seulement si $x_j > 0$, ce qui s'obtient en introduisant, pour chaque composant j , les deux contraintes présentées dans le [tableau 350 de la page 1137 \(chapitre XVI\)](#),
 - ajouter la contrainte $\sum_j \delta_j \leq v$.

Le problème posé a conduit à utiliser un ratio comportant, au dénominateur, une somme des variables. Deux remarques peuvent être faites à ce propos :

1. On suppose, dans cette formulation, que la totalité des matières premières utilisées est intégrée dans le produit fini (pas de résidus ou d'impuretés); on examinera à la fin de ce paragraphe comment lever cette hypothèse.

- lorsque le ratio intervient dans des contraintes avec en dénominateur $\sum_j q_j x_j$, il est possible de se ramener au cas présenté ci-dessus ($\sum_j x_j$) en remplaçant les x_j par $x_j' = q_j x_j$ et divisant par q_j les coefficients des x_j intervenant aux numérateurs des contraintes et de la fonction-objectif;
- lorsque le ratio intervient dans la fonction-objectif, $Max [\sum_i c_j x_i / \sum_i q_j x_i]$, avec des contraintes «classiques» ($\sum_i a_{ij} x_i \leq b_j$), on se ramène à la formulation standard¹ en créant la variable additionnelle $\omega = 1 / \sum_i q_j x_i$ et les variables $x_j' = \omega x_j$; dans ces conditions:
 - la fonction-objectif devient $Max [\sum_i c_i x_i']$,
 - les contraintes sont multipliées par ω pour devenir $\sum_i a_{ij} x_i' - b_j \omega \leq 0$,
 - et la contrainte $\sum_i q_i x_i' = 1$ doit être ajoutée.

I-2.1.5.2 Exemple d'application

Un producteur d'alliages spéciaux reçoit la commande de 1 tonne d'un alliage spécial comportant 4 métaux, avec les spécifications suivantes: teneur en métal A $\geq 23\%$, teneur en métal B $\leq 15\%$, teneur en métal C $\leq 4\%$, teneur en métal D comprise entre 35% et 65%. L'alliage ne doit comporter aucun autre métal. Le producteur a à sa disposition 6 minerais différents ayant des teneurs variables des métaux demandés (voir [tableau 143](#)).

TABLEAU 143
Composition et prix des minerais disponibles

Minerais j	Poids de métal (en tonne) pour 1 tonne de minerais						Coût / tonne (\$ lidurien)
	A ($i = 1$)	B ($i = 2$)	C ($i = 3$)	D ($i = 4$)	Impuretés ($1 - \beta_j$)	Total	
1	0,25	0,10	0,10	0,25	0,30	1,00	230
2	0,40	0,00	0,00	0,30	0,30	1,00	200
3	0,20	0,10	0,00	0,30	0,40	1,00	180
4	0,00	0,15	0,05	0,20	0,60	1,00	100
5	0,20	0,20	0,00	0,40	0,20	1,00	270
6	0,08	0,05	0,10	0,17	0,60	1,00	120

Le problème posé est celui de la définition du mélange de minerais qui minimise le coût de production de 1 tonne (d'où l'on déduit par simple multiplication le mélange optimal pour une production de d tonnes). Soit x_j le nombre de tonnes

1. Voir Williams (1993, [444]), p. 26 à 27. Le dénominateur doit être positif, quelle que soit la solution trouvée; pour cela, il suffit que les coefficients q_i soient tous positifs; par ailleurs, la généralisation à la minimisation et aux autres contraintes ($=$ et \geq) est immédiate).

de minerai j ($j = 1, 2, \dots, 6$) utilisé pour produire une tonne d'alliage (dans le mélange retenu). On cherche à déterminer les valeurs de x_j qui minimisent le coût de production d'une tonne. La fonction-objectif est donc $\text{Min } z$, avec $z = (230x_1 + 200x_2 + 180x_3 + 100x_4 + 270x_5 + 120x_6)$

Il faut que l'alliage respecte les spécifications du client, on aura donc :

$$0,25x_1 + 0,40x_2 + 0,20x_3 + 0,20x_5 + 0,08x_6 \geq 0,23 \text{ (teneur en métal A)}$$

$$0,10x_1 + 0,10x_3 + 0,15x_4 + 0,20x_5 + 0,05x_6 \leq 0,15 \text{ (teneur en métal B)}$$

$$0,10x_1 + 0,05x_4 + 0,10x_6 \leq 0,04 \text{ (teneur en métal C)}$$

$$0,25x_1 + 0,30x_2 + 0,30x_3 + 0,20x_4 + 0,40x_5 + 0,17x_6 \geq 0,35 \text{ (teneur en métal D)}$$

$$0,25x_1 + 0,30x_2 + 0,30x_3 + 0,20x_4 + 0,40x_5 + 0,17x_6 \leq 0,65 \text{ (teneur en métal D)}$$

Il faut également que la combinaison retenue donne exactement 1 tonne de l'alliage cherché. En tenant compte des déchets (1 tonne du minerai 1 contient 0,7 tonne de métal, etc.), on doit respecter la contrainte suivante :

$$0,7x_1 + 0,7x_2 + 0,6x_3 + 0,4x_4 + 0,8x_5 + 0,4x_6 = 1$$

La composition optimale est de 0,9714 tonne du minerai 2 et 0,8 tonne du minerai 4 pour fabriquer une tonne d'alliage ($x_2^* = 0,9714$ et $x_4^* = 0,8$), les autres minerais n'étant pas utilisés. Le coût de la tonne d'alliage est alors de 274,30 dollars liduriens. Seule la contrainte portant sur le métal C est contraignante et la variable duale qui lui est associée est de 285,7.

I-2.2 Cas de plusieurs centres de production isolés

On examinera le cas de la production à étage (§ I-2.2.1) et celui de l'assignation de clients à des centres de production ou de distribution (§ I-2.2.2, page 552).

I-2.2.1 Production à étages

I-2.2.1.1 Cartographie des flux

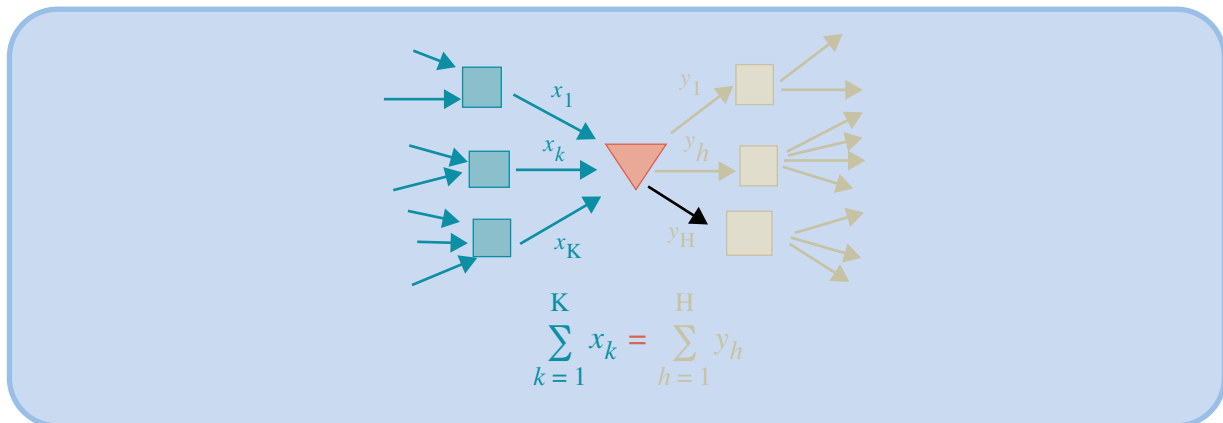
La représentation de la production dans un système productif s'effectue habituellement en effectuant une cartographie des flux, qui correspond à un graphe dont les nœuds sont les centres de production retenus et les arcs, les flux traités par ces centres de production. On peut introduire une seconde catégorie de nœuds pour représenter les stocks, mais ceci ne présente de réel intérêt opérationnel que dans deux cas de figure :

- Il est souhaité de faciliter la représentation de la *concentration* de plusieurs flux d'un même produit ou celle de l'*éclatement* d'un flux en plusieurs flux (cas du ramassage ou de la desserte en distribution), ce qu'illustre la [figure 157](#) (où les rectangles représentent des centres de production). Dans ce dernier cas, la structure est qualifiée de stock à étages et l'on doit utiliser des **équations spatiales de conservation des flux**¹ qui stipulent qu'au cours de la période considérée, la somme de ce qui rentre dans un stock est égale à la somme de ce qui est prélevé sur ce stock, ce qu'illustre la [figure 157](#) (où

1. Les équations spatiales de conservation des flux ne doivent pas être confondues avec les équations dynamiques de conservation des stocks présentées à la [page 556](#).

l'équation spatiale de conservation n'est mentionnée que pour un seul stock). Pour la description du fonctionnement de stocks à étages sur plusieurs périodes, il est possible d'utiliser des équations de conservation de stock combinant les équations spatiales et les équations dynamiques ;

FIGURE 157
Équation spatiale de conservation des flux



- pour permettre une description dynamique du fonctionnement du système, dans le cadre d'un modèle multi-périodes, ce qui conduira à l'utilisation d'équations dynamiques de conservation des stocks (voir page 556).

Table des matières

Dans la représentation de la circulation de flux, on est dans une configuration de stocks à étages dès lors que des flux transitent entre plusieurs stocks clairement identifiés. Si les articles situés dans deux stocks successifs sont physiquement identiques c'est que le flux entre les deux stocks est associé à une opération de transport et l'on parle de stocks de distribution. Dans le cas contraire, le flux entre les deux stocks est associé à une opération de production et l'on parle de stocks de fabrication.

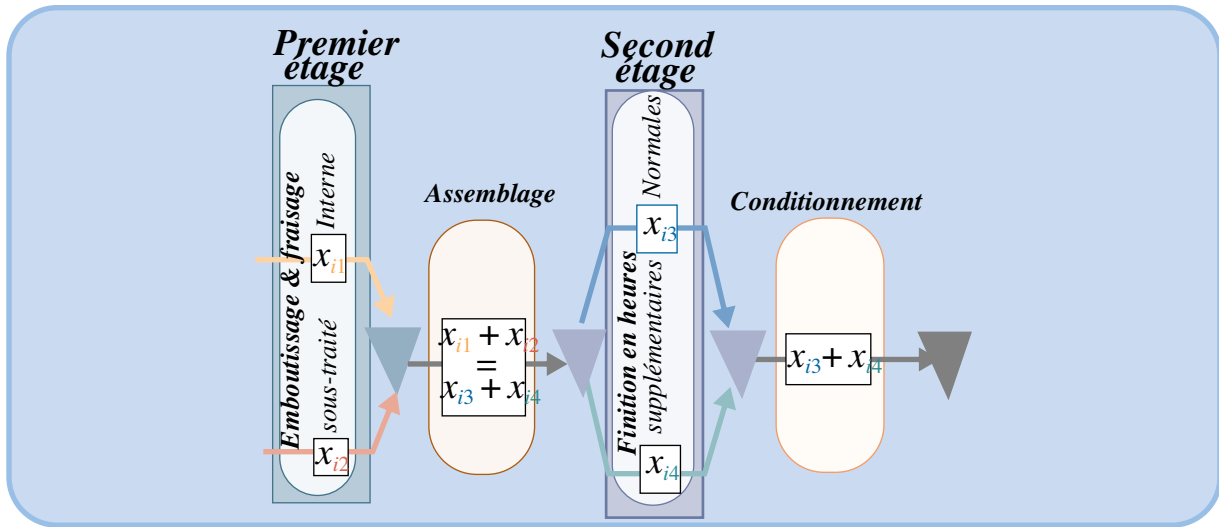
Index thématique

I-2.2.1.2 Application au cas de plusieurs productions indépendantes fabriquées par des gammes alternatives utilisant plusieurs ressources

Dans les exemples traités aux § I-2.1.1 et § I-2.1.2, on avait considéré comme un tout, un système productif composé en réalité de 5 ateliers. L'introduction de gammes alternatives (au § I-2.1.2) rend la décomposition intéressante car l'explicitation des différentes filières pose rapidement un problème combinatoire important que l'on évite lorsque l'on fait appel à la formulation de stocks à étages. Dans la cartographie des flux utilisée ici, la dissociation des flux allant entre deux stocks d'encours successifs s'effectue sur la base de critères techniques (gamme alternative) et économiques (coût différent d'exécution de l'opération). L'existence de plusieurs flux possibles entre deux stocks successifs implique des décisions à prendre sur le plan opérationnel, contrairement à ce qui se passe lorsque le flux est unique. Pour cette raison, on ne considère comme « étage » que les parties de la cartographie correspondant à des alternatives décisionnelles. Dans l'exemple du § I-2.1.2.2, on obtient la cartographie des flux de la figure 158.

Cette formulation présente plusieurs avantages : simplification de l'analyse formelle du problème (pas d'explicitation de toutes les filières), interprétation immédiate des résultats (pas de calculs intermédiaires pour retrouver la charge de

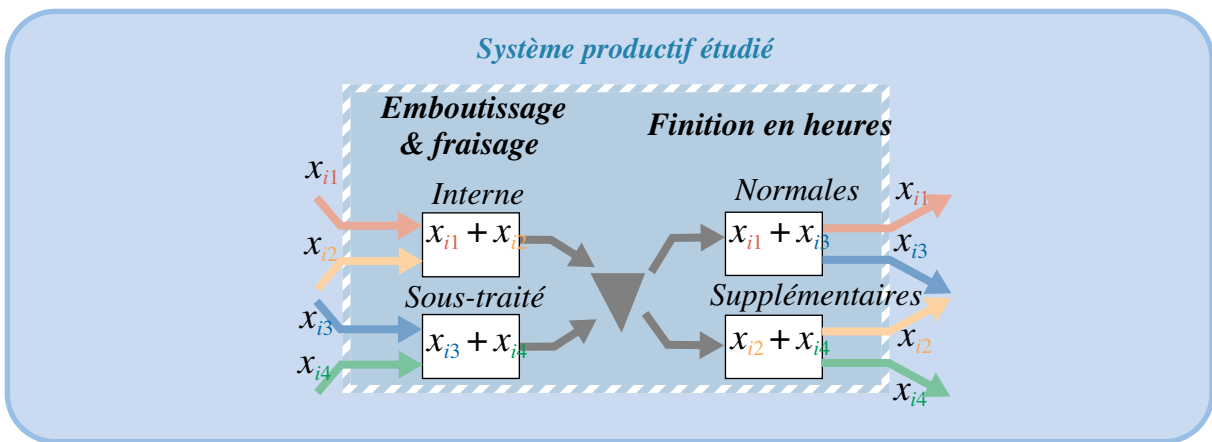
FIGURE 158
Cartographie des flux (formulation à étages)



travail de chaque poste) et meilleure maintenance du modèle (l'introduction d'une variante technico-économique dans un atelier n'oblige pas à «recalculer» toutes les filières). En contrepartie, l'augmentation du nombre de contraintes qui en résulte, comme on va le voir, conduit à un accroissement du temps de calcul.

Pour bien comprendre la différence avec la formulation utilisée au § I-2.1.2, il faut se reporter à la figure 159 qui fournit la cartographie des flux associés à cette première formulation et utilise la définition des variables du tableau 135 de la page 536. Les stocks intermédiaires des produits i correspondent aux en-cours après opérations d'emboutissage et de fraisage effectuées en interne ou en sous-traitance et les x_{ij} correspondent à des flux qui traversent le système *de bout en bout*, ce qui s'explique par le fait que l'on considère être en présence d'un centre de production unique.

FIGURE 159
Cartographie des flux avec explicitation des filières



Dans la formulation de stocks à étages, les contraintes du problème deviennent :

- Étage 1 : $0,03x_{11} + 0,15x_{21} + 0,05x_{31} + 0,10x_{41} \leq 400$ (emboutissage «interne»)

Table des matières

Index thématique

Table des matières

Index thématique

- $$0,06x_{11} + 0,12x_{21} + 0,10x_{41} \leq 400 \text{ (fraisage « interne »)}$$
- $$0,5x_{21} + 0,3x_{41} \leq 500 \text{ (tôles)}$$
- Étage 2:

$$\sum_{j=1}^2 (0,05x_{1j} + 0,10x_{2j} + 0,05x_{3j} + 0,12x_{4j}) \leq 500 \text{ (assemblage}^1)$$

$$0,04x_{13} + 0,2x_{23} + 0,03x_{33} + 0,12x_{43} \leq 450 \text{ (finition en heures normales)}$$

$$0,04x_{14} + 0,2x_{24} + 0,03x_{34} + 0,12x_{44} \leq 100 \text{ (finition en heures supplémentaires)}$$

$$\sum_{j=3}^4 (0,02x_{1j} + 0,06x_{2j} + 0,02x_{3j} + 0,05x_{4j}) \leq 400 \text{ (conditionnement)}$$
 - Équations de conservation des flux:

$$x_{i1} + x_{i2} = x_{i3} + x_{i4}, \text{ pour } i = 1, \dots, 4$$
 (conservation des flux entre les étages 1 et 2)
 - Équations de production à réaliser²:

$$x_{13} + x_{14} = 3000 \text{ (production imposée pour le produit 1)}$$

$$x_{23} + x_{24} = 500 \text{ (production imposée pour le produit 2)}$$

$$x_{33} + x_{34} = 1000 \text{ (production imposée pour le produit 3)}$$

$$x_{43} + x_{44} = 2000 \text{ (production imposée pour le produit 4)}$$

La fonction-objectif consiste à minimiser le coût total de production ou, ce qui revient au même, à minimiser le supplément de coût, par rapport au coût minimal défini en retenant pour chaque étage la solution la moins onéreuse (sans se préoccuper des contraintes liées aux ressources disponibles). Les coûts c_{ij} correspondant à des accroissements de coûts par rapport aux solutions de base, il en résulte que les c_{i1} et les c_{i3} sont nuls et que les c_{i2} et c_{i4} sont définis comme des variations par rapport aux c_{i1} et c_{i3} . L'accroissement de coût z que l'on cherchera à minimiser s'ajoutera donc (voir [tableau 136, page 537](#)) à une somme de $30 \times 3000 + 75 \times 500 + 55 \times 1000 + 70 \times 2000 = 322500$. On aura donc :

$$\text{Min } z, \text{ avec } z = \{(6x_{12} + 15x_{22} + 11x_{32} + 14x_{42}) + (1x_{14} + 2x_{24} + 1x_{34} + 1,5x_{44})\}$$

La solution optimale conduit à un accroissement minimal de coût égal à 12562, en arrondissant les productions trouvées, ce qui conduit au coût total de production de $322500 + 12562 = 335062$. Les conséquences sont identiques à celles trouvées précédemment (voir [tableau 137, page 538](#)), avec :

1. Cette contrainte pouvant encore s'écrire, compte tenu des équations de conservation des stocks (voir la [figure](#)

[158, page 550](#)):
$$\sum_{j=3}^4 (0,05x_{1j} + 0,10x_{2j} + 0,05x_{3j} + 0,12x_{4j}) \leq 500$$

2. On a retenu arbitrairement ici des équations du type $x_{i3} + x_{i4} = d_i$ mais on aurait pu tout aussi bien utiliser des équations du type $x_{i1} + x_{i2} = d_i$.

- pour le premier étage en interne $x_{11}^* = 3000$, $x_{31}^* = 1000$, $x_{41}^* = 1667$ et en externe $x_{22}^* = 500$, $x_{42}^* = 333$;
- pour le second étage en heures normales $x_{13}^* = 3000$, $x_{23}^* = 300$, $x_{33}^* = 1000$, $x_{43}^* = 2000$ et en heures supplémentaires $x_{24}^* = 200$.

On peut généraliser la démarche à un nombre quelconque κ_i d'étages pour le produit i (plus il y a d'étages¹, plus cette formulation est intéressante). Pour ce faire, on note $x_{ij_{k_i}}$ la production de l'alternative j_{k_i} de l'étage k_i du produit i , production qui conduit à l'accroissement de coûts $c_{ij_{k_i}}$ par rapport à la première des alternatives ($j_{k_i} = 1$). On a à donc à optimiser z :

$$\text{Min } z, \text{ avec } z = \sum_{i=1}^n \sum_{k_i=1}^{\kappa_i} \sum_{j_{k_i}=1}^{J_{k_i}} c_{ij_{k_i}} x_{ij_{k_i}} \quad \text{relation 91}$$

Par ailleurs, il faut introduire de nouvelles équations de conservation des stocks entre les étages $k_i = 1$ et $k_i = 2$ (entre les étages $k_i = 2$ et $k_i = 3, \dots$, entre les étages $k_i = \kappa_i - 1$ et $k_i = \kappa_i$):

$$\sum_{j_{k_i}=1}^{J_{k_i}} x_{ij_{k_i}} = \sum_{j_{k_i+1}=1}^{J_{k_i+1}} x_{ij_{k_i+1}}, \text{ pour } k_i = 1, \dots, \kappa_i - 1 \quad \text{relation 92}$$

I-2.2.2 Assignment de «clients» à un centre de production ou de distribution

I-2.2.2.1 Le problème posé

Dans sa version la plus simple, le problème posé est celui de la détermination du centre de production ou de distribution i (parmi n centres possibles) qui traitera la demande du client j (sachant qu'il y a m clients), étant entendu qu'un client n'est servi que par un centre mais qu'un centre peut servir plusieurs clients. L'éclairage économique de cette assignation est donné par le coût c_{ij} de satisfaction de la totalité de la demande du client j par le centre i . Pour résoudre ce problème, il faut utiliser une variable binaire x_{ij} qui prendra la valeur 1 si le centre i traite la demande du client j et la valeur 0, dans le cas contraire (voir [tableau 144](#)).

Le problème posé est celui de la minimisation du coût de fonctionnement du système:

$$\text{Min } z, \text{ avec } z = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m c_{ij} x_{ij} + \dots \quad \text{relation 93}$$

L'obligation que le client soit servi par un seul centre se traduit par le jeu des m contraintes suivantes:

1. correspondant à chaque fois à autant d'alternatives décisionnelles.

TABLEAU 144
Variables binaires du problème d'affectation

		client				
		1	...	<i>j</i>	...	<i>m</i>
Centre de production	1	x_{11}	...	x_{1j}	...	x_{1m}

	<i>i</i>	x_{i1}	...	x_{ij}	...	x_{im}

	<i>n</i>	x_{n1}	...	x_{nj}	...	x_{nm}

$$\sum_{i=1}^n x_{ij} = 1, \text{ pour chaque client } j \quad \text{relation 94}$$

Si l'on accepte qu'un client soit servi par plusieurs centres de production, la variable x_{ij} est alors continue et comprise entre 0 et 1 ; comme elle représente la part de la demande du client j qui est satisfaite par le centre de production i , la relation 94 reste valable.

Normalement, il existe une contrainte de capacité Q_i sur le centre i (sinon, la solution du problème est triviale). Pour en tenir compte, il faut introduire la relation 95, dans laquelle q_j représente la production totale demandée par le client j :

$$\sum_{j=1}^m q_j x_{ij} < Q_i, \text{ pour chaque centre } i \quad \text{relation 95}$$

Table des matières

Index thématique

Implicitement, dans cette formulation, le coût de fonctionnement d'un centre est proportionnel à sa production. Dans la réalité, la fonction de coûts est plus complexe: il y a des charges fixes qui varient par palier et le coût variable direct n'est pas constant. Les développements du § II-2.3.2, page 1142, du chapitre XVI permettent de prendre facilement en compte cet accroissement de complexité du problème.

I-2.2.2.2 Exemple d'application

La société **KOKOLA** désire s'implanter en Lidurie pour produire sa boisson pétillante bien connue de tous et qui est actuellement importée de Poldavie. Une étude préliminaire a sélectionné 5 sites possibles qui peuvent ou non être tous retenus et qui doivent desservir 10 dépôts régionaux (chaque dépôt devant être desservi en totalité par la même usine, les 5 premiers dépôts se trouvant dans le site des usines envisagées). Le tableau 145 de la page 554 fournit les coûts quotidiens d'acheminement.

Le problème posé est donc de minimiser la fonction de coût z suivante:

$$z = 1900x_{12} + 1600x_{13} + 2300x_{14} + 2380x_{15} + 2740x_{16} + 3560x_{17} + 2220x_{18} + 3400x_{19} + 2380x_{1,10} + 2300x_{21} + 1700x_{23} + 2400x_{24} + 2280x_{25} + 2440x_{26} + 3760x_{27} + 2020x_{28} + 3500x_{29} + 2580x_{2,10} + 2600x_{31} + 2300x_{32} + 1700x_{34} + 2980x_{35} + 2940x_{36} + 3960x_{37} + 2720x_{38} + 2800x_{39} + 2680x_{3,10} + 3100x_{41} + 2800x_{42} + 1500x_{43} + 3480x_{45} + 3240x_{46} + 4260x_{47} + 3220x_{48} + 2300x_{49} + 2880x_{4,10} + 2700x_{51} + 2200x_{52} + 2300x_{53} + 3000x_{54} + 2440x_{56} + 3560x_{57} + 1620x_{58} + 4100x_{59} + 2580x_{5,10}$$

FIGURE 160
Carte de la Lidurie

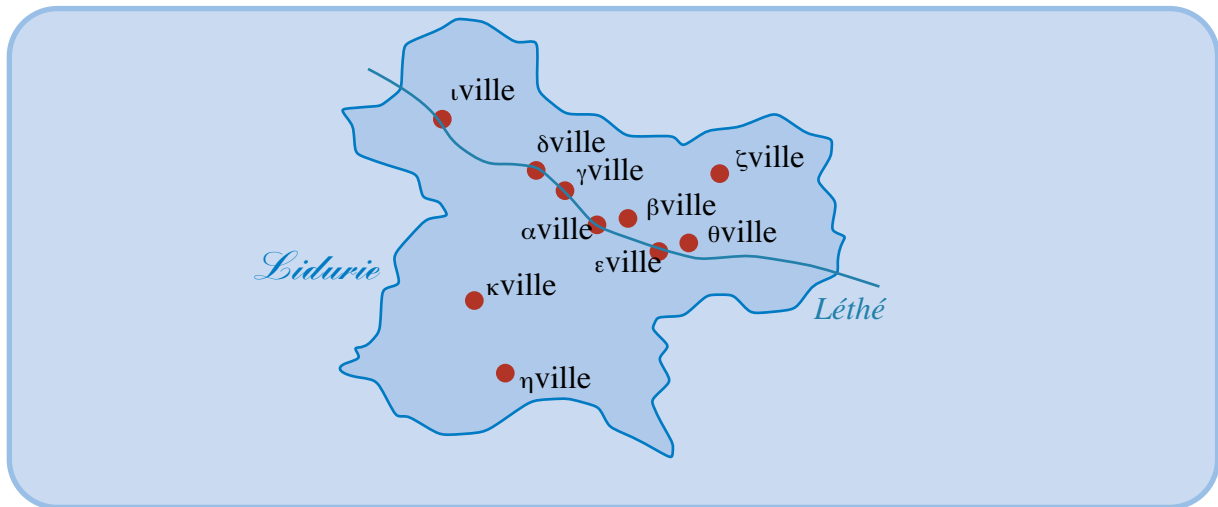


TABLEAU 145
Coûts d'acheminement entre usines et dépôts + demandes des dépôts et capacité des usines

		Dépôt										Capacité de l'usine
		α	β	γ	δ	ε	ζ	η	θ	ι	κ	
Usine	αville	0	1900	1600	2300	2380	2740	3560	2220	3400	2380	7000
	βville	2300	0	1700	2400	2280	2440	3760	2020	3500	2580	12000
	γville	2600	2300	0	1700	2980	2940	3960	2720	2800	2680	5000
	δville	3100	2800	1500	0	3480	3240	4260	3220	2300	2880	8000
	εville	2700	2200	2300	3000	0	2440	3560	1620	4100	2580	6500
production demandée par le dépôt		5000	4000	2500	3000	4200	1600	2900	1800	1500	2200	

Sous contrainte du respect:

- des capacités productives:

- $5000x_{11} + 4000x_{12} + 2500x_{13} + 3000x_{14} + 4200x_{15} + 1600x_{16} + 2900x_{17} + 1800x_{18} + 1500x_{19} + 2200x_{1,10} \leq 7000$
- $5000x_{21} + 4000x_{22} + 2500x_{23} + 3000x_{24} + 4200x_{25} + 1600x_{26} + 2900x_{27} + 1800x_{28} + 1500x_{29} + 2200x_{2,10} \leq 12000$
- $5000x_{31} + 4000x_{32} + 2500x_{33} + 3000x_{34} + 4200x_{35} + 1600x_{36} + 2900x_{37} + 1800x_{38} + 1500x_{39} + 2200x_{3,10} \leq 5000$
- $5000x_{41} + 4000x_{42} + 2500x_{43} + 3000x_{44} + 4200x_{45} + 1600x_{46} + 2900x_{47} + 1800x_{48} + 1500x_{49} + 2200x_{4,10} \leq 8000$
- $5000x_{51} + 4000x_{52} + 2500x_{53} + 3000x_{54} + 4200x_{55} + 1600x_{56} + 2900x_{57} + 1800x_{58} + 1500x_{59} + 2200x_{5,10} \leq 6500$

- de satisfaction des demandes: $\sum_{i=1}^5 x_{ij} = 1$, pour $j = 1$ à 10, les variables x_{ij} étant binaires (un dépôt n'étant servi que par une usine¹).

La solution de ce problème est donnée au **tableau 146** et conduit à un coût de 12700 dollars liduriens. Si la formulation retenue permet qu'un dépôt soit servi par plusieurs usines (voir **tableau 147**), l'économie réalisée est alors de 216,30 dollars liduriens.

TABLEAU 146
Affectation des dépôts aux usines (dépôt servi par une seule usine)

		Dépôt										Capacité résiduelle de l'usine
		α	β	γ	δ	ε	ζ	η	θ	ι	κ	
Usine	αville	5000	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2000
	βville	0	4000	0	0	0	1600	2900	0	0	2200	1300
	γville	0	0	2500	0	0	0	0	0	0	0	2500
	δville	0	0	0	3000	0	0	0	0	1500	0	3500
	εville	0	0	0	0	4200	0	0	1800	0	0	500

TABLEAU 147
Affectation des dépôts aux usines (dépôt pouvant être servi par plusieurs usines)

		Dépôt										Capacité résiduelle de l'usine
		α	β	γ	δ	ε	ζ	η	θ	ι	κ	
Usine	α-ville	5000	0	0	0	0	0	0	0	0	2000	0
	β-ville	0	4000	0	0	0	1600	2400	0	0	200	3800
	γ-ville	0	0	2500	0	0	0	0	0	0	0	2500
	δ-ville	0	0	0	3000	0	0	0	0	1500	0	3500
	ε-ville	0	0	0	0	4200	0	500	1800	0	0	0

I-3 Modélisation multi-périodes des processus productifs

On examinera successivement le fonctionnement de systèmes productifs traitant des flux de production sur plusieurs périodes (§ I-3.1), le cas de productions de prestations liées par des contraintes spatio-temporelles (§ I-3.2, page 561) et des problèmes d'ordonnancement (§ I-3.3, page 561).

I-3.1 Fonctionnement d'un système productif produisant des flux de production sur plusieurs périodes

La définition d'un programme de production sur plusieurs périodes implique tout d'abord que soient dupliquées toutes les variables de commande, ou une partie d'entre elles, autant de fois qu'il y a de périodes. Ensuite, la distinction

1. Dans le cas d'une possibilité de partage entre plusieurs usines, que l'on envisagera dans un second temps, les variables x_{ij} sont alors continues et il faut ajouter le jeu de contraintes suivant: $x_{ij} \leq 1, \forall i, j$.

proposée entre ressources stockables et ressources non stockables conduit à introduire (§ I-3.1.1) une version dynamique de conservation des stocks pour les ressources stockables. Une nouvelle catégorie de problèmes se rencontre dans les modèles multi-périodes : les dotations de ressources non stockables peuvent résulter de la combinaison des valeurs prises par des variables de commande qui offrent, chacune, une certaine disponibilité sur un ensemble de périodes (§ I-3.1.2, page 558). Enfin, la prise en compte de plusieurs périodes rend nécessaire la reprise de la distinction entre production pour stock et production à la commande (§ I-3.1.3, page 559).

I-3.1.1 Introduction des équations dynamiques de conservation des stocks pour les ressources stockables

Dans la description du fonctionnement d'un système productif sur plusieurs périodes, il n'y a *indépendance temporelle* entre les périodes qu'à la double condition :

- d'avoir, à la fin de chaque période, une *reconstitution à l'identique des stocks de ressources stockables*, puisque, par définition, les ressources non stockables non utilisées ne sont pas transférables sur la période suivante ; pour qu'il en soit ainsi, il faut que la consommation de chaque ressource stockable durant la période soit compensée à l'identique
 - soit par un approvisionnement externe (on est alors en présence d'un système ouvert),
 - soit par une production interne au système, qui porte alors sur une partie des ressources stockables ;
- d'avoir une indépendance entre les demandes des périodes (la levée de cette hypothèse sera examinée au § I-3.1.3, page 559).

En règle générale, à un niveau de découpage temporel suffisamment fin, ces conditions ne sont pas réunies. En effet, la production de certains postes de travail alimente des stocks de ressources pour d'autres postes de travail et, à supposer qu'aucune production ne s'effectue à cheval sur deux périodes, il n'y a aucune raison que les rythmes de consommation et de production soient identiques dans tout le système. L'*interdépendance temporelle* est assurée par des **équations de conservation temporelle des stocks**¹, à raison d'une par ressource stockable j et par période t , qui ne sont rien d'autre qu'une application du bon vieux principe de conservation :

$$s_{j,t+1} = s_{jt} + x_{jt} - d_{jt}, \text{ pour } j = 1, \dots, J \text{ et } t = 1, \dots, T - 1 \quad \text{relation 96}$$

Dans cette équation, valable pour une ressource stockable j quelconque :

- s_{jt} est le stock de *début* de période t (laquelle est délimitée par les « dates ponctuelles » t et $t+1$), avant toute livraison ou consommation,
- x_{jt} est la quantité, livrée en début de période, du bien considéré dans ce stock (ce concept de livraison sera approfondi ci-après) ; le stock disponible après cette livraison est donc $s_{jt} + x_{jt}$; on peut admettre que la livraison ne s'effectue

1. Cette équation est encore appelée plus simplement **équation de conservation** (ce qui est un peu ambigu puisqu'il existe une équation de spatiale conservation des flux, comme on l'a vu à la page 549) et parfois équation comptable (ce qui est, cette fois-ci, complètement ambigu). On la retrouvera sous une forme voisine dans l'une des utilisations classiques de la programmation dynamique (page 569).

pas «en une fois au début de la période» à condition qu'il soit certain que cela n'engendrera pas de rupture de stock ;

- d_{jt} , la demande exprimée tout au long de cette période; pour éviter toute rupture de stock, il faut alors que cette demande n'excède pas le stock disponible après livraison.

La **relation 96** repose sur le concept de stock détenu en *début* de période mais il est évident qu'il est tout aussi possible de définir une équation de conservation des stocks qui s'appuie sur le concept de stock défini en *fin* de période (qui est égal au stock disponible au début de la période suivante), ce qui donne:

$$s_{jt} = s_{j, t-1} + x_{jt} - d_{jt}, \text{ pour } j = 1, \dots, J \text{ et } t = 2, \dots, T \quad \text{relation 97}$$

La variable x_{jt} , utilisée dans les équations de conservation temporelle des stocks peut correspondre:

- à une livraison d'un montant prédéterminé, auquel cas on est en présence d'un paramètre et il serait judicieux de remplacer x_{jt} par b_{jt} pour être cohérent avec les notations antérieurement utilisées;
- à une livraison en provenance d'un autre centre de production et correspond à une (ou des) production(s) effectuée(s) au cours de périodes antérieures dans un (ou plusieurs) autre(s) centre(s); dans ce cas, il convient de remplacer x_t par la (ou une somme de) variable(s) de commande appropriée(s).

Ces deux cas ne sont pas exclusifs.

Symétriquement, la demande d_{jt} peut être remplacée par une *somme de variables* correspondant à des livraisons du même bien, en réponse à des demandes provenant d'autres centres de production qui sont des centres de consommation de ce bien.

La version multi-périodes de la **relation 82 de la page 532** est, en retenant la convention du stock de début de période (**relation 96**), en laissant ouverte la possibilité d'un approvisionnement prédéterminé b_{jt} et en notant x_{jt} , la livraison en provenance d'autres centres (x_{jt} devant être remplacé par les variables de commande appropriées):

$$\sum_t a_{ij} x_{it} \leq s_{jt} + b_{jt} + x_{jt}, \text{ pour } j = 1, \dots, J \text{ et } t = 2, \dots, T \quad \text{Version dynamique de la relation «Demande} \leq \text{Offre» dans le cas de ressources stockables} \quad \text{relation 98}$$

Cette **relation 98** se combine à la **relation 96** qui, pour être cohérente, doit distinguer les approvisionnements internes des approvisionnements externes, ce qui conduit à: $s_{j, t+1} = s_{jt} + x_{jt} + b_{jt} - d_{jt}$.

Dans certaines situations, l'existence de stocks positifs s_{jt} est pénalisée par l'introduction de coûts de possession du type $\sum_{t=2}^T c_{pj} s_{jt}$, où c_{pj} est le coût de possession d'une unité de j pendant une période¹.

1. Faire dépendre ce coût de la période implique seulement de remplacer c_{pj} par c_{pjt} .

I-3.1.2 Définition dynamique des ressources non stockables

Dans les problèmes multi-périodes, l'offre de certaines ressources non stockables (principalement celles de personnel) peut varier d'une période à une autre, pour faire face à une demande variable dans le temps. Ceci s'avère nécessaire lorsque l'on est en présence d'une production à la commande pour laquelle on ne dispose que d'un laps de temps très court, excluant tout lissage de la charge de travail par un report de la production sur une période ultérieure (cf. § I-3.1.3, page 559). Ce cas de figure se rencontre fréquemment dans les industries de service (personnel aux guichets de péage d'une autoroute ou aux caisses d'un supermarché, personnel d'un centre de tri, personnel hospitalier...). En général, dans ces problèmes, la disponibilité d'une ressource sur chaque période dépend de la juxtaposition de plusieurs décisions de mobilisation de ressources élémentaires présentes sur des plages de temps différentes.

Pour faciliter la suite de cette présentation, on raisonnera sur des services assurés par des opérateurs (ouvriers, anesthésistes, etc.). En pratique, on définit des services h qui sont assurés par n_h opérateurs. Chaque service h se caractérise par la présence ou l'absence, au cours de la période t , des opérateurs affectés à ce service, ce que l'on décrit par un tableau de coefficients g_{ht} qui valent 1, si le service h implique la présence de ces opérateurs durant la période t , et 0, dans le cas contraire (le tableau 148 illustre cette possibilité pour 5 services offerts retenus dans un centre productif).

TABLEAU 148
Services offerts

SERVICES	12H / 14H	14H / 16H	16H / 18H	18H / 20H	20H / 22H	22H / 24H	0H / 2H	2H / 4H	4H / 6H	6H / 8H	8H / 10H	10H / 12H
1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0
2	0	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0
3	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0
4	0	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0
5	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1

Si les n_h opérateurs du service h sont présents au cours de la période t , c'est que le coefficient g_{ht} vaut 1 ; il s'ensuit que le nombre total d'opérateurs présents au cours de la période t est :

$$\text{effectif présent durant la période } t = \sum_h g_{ht} n_h \quad \text{relation 99}$$

Par exemple, si l'on retient le jeu de données $n_1 = 3$, $n_2 = 0$, $n_3 = 10$, $n_4 = 5$ et $n_5 = 4$, les effectifs présents sont ceux du tableau 149.

Deux cas de figure se présentent donc dans l'analyse dynamique de l'offre de ressources non stockables :

- on peut, tout d'abord, être en présence d'une *prédétermination* de cette offre qui résulte :
 - soit de l'existence d'un service unique pour l'ensemble des périodes étudiées, avec une dotation de ressource connue à l'avance,

TABLEAU 149
Effectifs présents

12H / 14H	14H / 16H	16H / 18H	18H / 20H	20H / 22H	22H / 24H	0H / 2H	2H / 4H	4H / 6H	6H / 8H	8H / 10H	10H / 12H
3	3	3	3	10	15	15	15	9	4	4	4

- soit de l'existence de plusieurs services différents h dont les effectifs n_h sont prédéterminés, auquel cas, l'offre de ressource pour chaque période est alors prédéterminée et calculable par la [relation 99](#);
- les effectifs n_h peuvent également être des variables de commande du problème étudié; dans ce cas, la dotation de ressources de chaque période reste déterminée par la relation que nous venons de mettre en évidence mais elle n'est pas connue à l'avance.

Dans ces conditions, la version multi-périodes de la [relation 82 de la page 532](#) pour ce type de ressources non stockables devient (n_h étant ou non des variables de commande):

$$\sum_t a_{ij} x_{it} \leq \sum_h g_{ht} n_h, \text{ pour } j = 1, \dots, J \text{ et } t = 1, \dots, T$$

Version dynamique de la relation
«Demande \leq Offre» dans le cas de ressources non stockables [relation 100](#)

La liaison avec les productions (= demande de ressource) peut être complexe lorsque les opérateurs présents sont utilisés par plusieurs centres de production (cas introduit au § I-2.1.2.3, [page 539](#), avec la notion d'opérateur polyvalent, dans le cadre du modèle statique). On est en présence d'une double relation: la production décidée dans un centre pour une période induit l'effectif requis par le centre sur cette période et l'effectif globalement disponible au cours de cette période limite les effectifs affectés à chaque centre et donc la production possible de chaque centre. Ceci se traduit par l'usage de deux relations:

- la somme des opérateurs requis au cours d'une période doit rester inférieure ou égale aux opérateurs présents au cours de cette période (ce qui conduit à des relations similaires aux contraintes de la [page 539](#)),
- la production d'une période dans un centre de production est limitée par le nombre (éventuellement 0) d'opérateurs affectés à ce centre, durant la période¹.

I-3.1.3 Lissage de la production

Dans les problèmes multi-périodes, il convient de distinguer la production à la commande de la production pour stock. Dans le premier cas, la demande d_{it} de fourniture d'un bien ou d'une prestation i , à la période t , doit impérativement être satisfaite au cours de cette période. Dans le second cas, on dispose d'une certaine marge de manœuvre permettant de différer tout ou partie de la satisfaction de la demande sur une période ultérieure. Ce report est limité et la façon la plus simple

1. Les temps opératoires unitaires des produits ou services exécutés au cours de cette période influent sur le potentiel productif, mais ce sont des paramètres et non des variables de commande du système contrairement aux effectifs affectés aux centres de production.

de décrire cette restriction consiste à travailler sur la production cumulée $\sum_{t'=1}^t x_{it'}$

et sur la demande cumulée $\sum_{t'=1}^t d_{it'}$, pour toutes les périodes allant de 1 à T. Cette

production cumulée est nécessairement comprise entre deux bornes décrites par :

- la **relation 101** qui stipule que pour aucune période la production cumulée ne peut être supérieure à la demande cumulée (interdiction d'anticiper la demande¹):

$$\sum_{t'=1}^t x_{it'} \leq \sum_{t'=1}^t d_{it'}, \text{ pour } t = 1, \dots, T \quad \text{relation 101}$$

- la **relation 102** qui limite le report maximal possible à $\sum_{t'=1}^t x_{it'} - X_{min_{it}}$ et, ce faisant, le retard maximal possible de satisfaction d'une demande (sous l'hypothèse implicite de satisfaction des demandes dans leur ordre d'arrivée):

$$\sum_{t'=1}^t x_{it'} \geq X_{min_{it}}, \text{ pour } t = 1, \dots, T, \text{ avec } X_{min_{iT}} = \sum_{t'=1}^T x_{it'} \quad \text{relation 102}$$

Trois remarques pratiques doivent être faites.

- Cette possibilité de report autorise un certain lissage de la charge qui peut permettre, d'une part, de trouver une solution lorsque certaines ressources non stockables ne sont pas modulables (prestations de machines, par exemple) et, d'autre part, de faciliter l'obtention d'économies lorsque certaines ressources non stockables sont modulables suivant les principes décrits au § I-3.1.2, page 558.
- La distinction entre production pour stock et production à la commande est moins nette qu'il ne le paraît. Prenons l'exemple du tri du courrier urgent arrivant progressivement dans un centre de tri entre 17 et 20 heures. La totalité de ce courrier devant être traitée avant 21 heures, heure de coupure pour acheminement vers les autres centres de tri, on peut estimer que l'on est en présence d'une production à la commande. Mais dans la mesure où ce qui importe est que tout soit traité avant 21 heures, il est logique, dans une approche multi-périodes avec un découpage temporel assez fin, de considérer que l'on est en présence d'une production pour stock. La finesse du découpage temporel et l'éloignement plus ou moins grand de la date de livraison sont des éléments essentiels pour déterminer si l'on peut ou non considérer que l'on est en production pour stock.
- En cas de recherche d'une solution associée à un régime de croisière, le découpage temporel retenu couvre normalement une «macro-période» de référence (journée ouvrable, par exemple). Si l'on est en production pour stock, il faut considérer que l'on dispose, au début de la première période

1. Hypothèse qu'il peut être judicieux de lever dans certains problèmes.

élémentaire, d'un stock initial S et qu'à la fin de la dernière période élémentaire, on devra «rendre» ce stock pour bien rester en régime de croisière. Dans ces conditions, la [relation 101](#) se transforme en [relation 103](#), tandis que la [relation 102](#), inchangée, assure la restitution à l'identique du stock initial :

$$\sum_{t'=1}^t x_{it'} \leq \sum_{t'=1}^t d_{it'} + S, \text{ pour } t = 1, \dots, T \quad \text{relation 103}$$

I-3.2 Cas particulier des prestations liées par des contraintes spatio-temporelles

Nous avons introduit, [page 544](#), le cas de productions liées faisant appel à des gammes alternatives qui intégraient implicitement un ensemble de contraintes spatio-temporelles. L'ensemble de ces gammes alternatives était supposé connu, le problème posé étant celui de la sélection d'un sous-ensemble de ces gammes minimisant un coût de production. Il est évident que l'explicitation de ces gammes alternatives peut s'avérer un problème rapidement insoluble pour des raisons de combinatoire faisant intervenir des contraintes de temps et / ou d'espace.

Une autre série de problèmes liés à l'exécution d'un ensemble de prestations de transport et visant à définir directement des gammes à utiliser, sans passer par leur explicitation systématique préalable est celle des tournées. Dans sa version la plus simple (cf. [page 906](#)), le temps n'intervient pas vraiment et le problème peut être considéré comme appartenant à la classe des problèmes «mono-période» et être considéré comme relevant de la détermination de la gamme optimale d'un produit (§ I-2.1.5, [page 545](#)). Une formulation plus réaliste de ces problèmes de tournées oblige à tenir compte de l'existence de fenêtre de temps pour la collecte ou la livraison de marchandises (ou de personnes) dans un centre. Dès lors, ce problème fait appel à un découpage temporel et devient de nature «multi-périodes» en raison de la contrainte d'exécution de ces prestations sur un sous-ensemble de périodes, propre à chaque point desservi. L'analyse de ces problèmes de transport est effectuée à la [section II, page 904](#), du [chapitre XIII](#).

I-3.3 Problèmes d'ordonnancement

Dans les systèmes productifs faisant appel à plusieurs centres productifs (ou catégories de ressources), le problème de l'ordonnancement se pose nécessairement lorsque l'on travaille dans le cadre d'un découpage temporel assez fin et donc dans un contexte multi-périodes. Les caractéristiques de ce problème varient avec le type de système productif: orienté «projet», ateliers spécialisés ou ligne de production ou d'assemblage.

La programmation linéaire permet de formuler de manière élégante le problème de l'ordonnancement d'un projet et, à défaut d'être numériquement efficace, elle permet de dépasser certaines simplifications habituellement retenues. On peut considérer cette formulation comme relevant de la création d'une gamme de production s'inscrivant dans une perspective «multi-périodes». Ce problème est traité au § III-2.1.3, [page 319](#), du [chapitre IV](#).

Son extension à l'ordonnancement dans les systèmes productifs organisés en ateliers spécialisés (problème traité au [chapitre V](#)) est immédiate mais d'un intérêt opérationnel souvent limité, en raison de la dimension du programme linéaire

obtenue; cela étant, des problèmes additionnels se posent souvent, comme celui du temps de réglage d'une machine dépendant de l'ordonnement des opérations sur cette machine (qui formellement se ramènent à des problèmes de tournée); ces problèmes importants en pratique ne seront pas traités ici.

L'ordonnement sur ligne d'assemblage ou de production, dans le cas d'une production diversifiée par le biais d'options sera analysé au § I-2, page 599, et au § II-2, page 614, du chapitre IX.

SECTION II APPLICATION DES MÉTHODES GÉNÉRALES DE LA PROGRAMMATION DYNAMIQUE À LA PROGRAMMATION DE LA PRODUCTION ET À LA GESTION DES STOCKS

La programmation dynamique, déjà utilisée au chapitre III, chapitre IV-2.1.2, est une technique puissante de résolution de certains problèmes combinatoires relatifs à la définition d'une séquence optimale de décisions. Ici, cette séquence de décisions est relative à un calendrier de production ou d'approvisionnement (variable de commande), qui, combiné avec un échéancier de demandes, fournit une évolution du stock.

La programmation dynamique repose sur l'utilisation d'un principe très simple, dit principe d'optimalité. La compréhension de ce principe est plus simple à partir d'un exemple de transport que d'un exemple de stock. Les applications de cette approche aux problèmes de transport restent limitées car elles ne permettent pas de décrire les contraintes rencontrées habituellement. On présentera donc ici la méthode générale de la programmation dynamique avant d'en faire l'application.

II-1 Présentation de la méthode de la programmation dynamique

II-1.1 Exemple introductif

La **CGTA**, **Compagnie Générale des Transports d'Alphaville**, est chargée par un client d'effectuer une livraison à Omégaville, distante de près de 1 500 km d'Alphaville. Plusieurs itinéraires sont possibles, et le choix du meilleur itinéraire n'est pas a priori évident. Un itinéraire sera repéré par trois villes étapes par lesquelles le camion est tenu de passer. Graphiquement, le problème est décrit à la figure 161.

Le coût du transport entre deux villes i et j est donné dans le tableau 150 de la page 563; il est également porté sur l'arc reliant ces deux villes dans la carte de la figure 161. On ne se préoccupera pas ici de l'unité monétaire dans laquelle ces coûts sont exprimés, car il est évident que les données chiffrées d'un exemple ont intérêt à être les plus simples possibles pour ne pas masquer la démarche suivie par des difficultés de calcul.

Ce problème posé est assez simple et il serait facile de trouver directement lequel de ces 14 itinéraires possibles est le moins coûteux pour la **CGTA**. Dans la pratique, ce type de problème est plus complexe et l'énumération des itinéraires possibles est loin d'être évidente. La démarche de la programmation dynamique est une démarche récurrente qui permet à la fois d'éviter la recherche explicite de

FIGURE 161

Application de la programmation dynamique au problème de transport

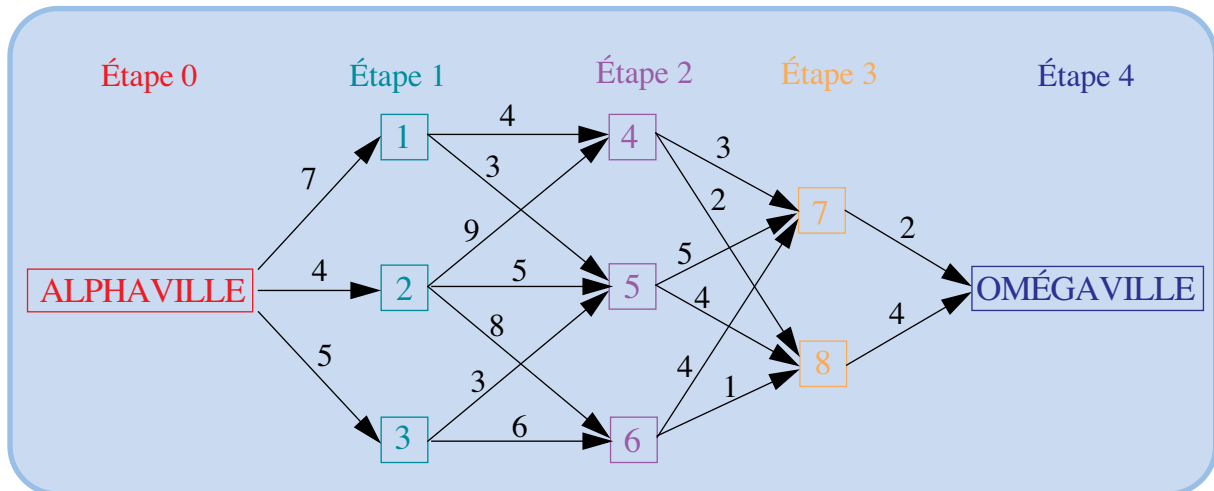


TABLEAU 150
Coûts de transport entre les villes

Villes			Villes		
i	j	c_{ij}	i	j	c_{ij}
α	1	7	4	7	3
α	2	4	4	8	2
α	3	5	5	7	5
1	4	4	5	8	4
1	5	3	6	7	4
2	4	9	6	8	1
2	5	5	7	ω	2
2	6	8	8	ω	4
3	5	3			
3	6	6			

tous les itinéraires possibles et, en même temps, de diminuer le nombre de calculs à effectuer.

II-1.2 Résolution par la programmation dynamique du problème posé

La méthode est simple : elle consiste à se placer fictivement à Omégaville, c'est-à-dire au point d'arrivée, et à remonter progressivement vers Alphaville, c'est-à-dire le point de départ, en calculant pour chaque ville possible d'une étape n ($n = 3$, puis $n = 2, \dots$, puisque l'on remonte en arrière) le coût le plus faible possible du transport entre cette ville et Omégaville. Ce calcul est relativement facile, car il suffit seulement de comparer autant de valeurs qu'il y a d'itinéraires possibles entre la ville i de l'étape n et les villes possibles de l'étape $n + 1$. Disons, pour fixer les idées, que la recherche du coût minimum du transport entre la ville 2 et Oméga-

ville s'effectue en comparant trois coûts seulement: celui de l'itinéraire passant par la ville 4, celui de l'itinéraire passant par la ville 5 et celui de l'itinéraire passant par la ville 6. Le calcul de chacun de ces trois coûts est simple. Par exemple le coût correspondant à l'itinéraire optimal de la ville 2 à Omégaville et passant par la ville 4 est la somme du coût du transport entre la ville 2 et la ville 4, c'est-à-dire c_{24} et du coût de transport minimal entre la ville 4 et Omégaville. Ce dernier coût aura été calculé à l'étape de calcul précédente.

Ce raisonnement récurrent est intuitivement évident. Il revient à dire que, quel que soit l'itinéraire choisi pour aller d'Alphaville à une ville i , le choix de l'itinéraire pour se rendre de la ville i à Omégaville est nécessairement optimal, c'est-à-dire que les décisions restant à prendre constituent une politique optimale pour quitter la ville i . En remontant progressivement en arrière, on détermine alors la séquence de décisions optimales qui constituent la politique optimale à suivre. Ce type de raisonnement est connu sous le nom de **principe d'optimalité** (mis en évidence par Bellman) qui peut s'énoncer¹ comme suit «une politique optimale est nécessairement composée de sous-politiques optimales», c'est-à-dire que si la politique optimale implique que l'on passe par l'état i d'une étape décisionnelle, et par l'état j d'une autre étape décisionnelle, la politique optimale pour se rendre de i à j (sans se préoccuper du problème initial) est la même que celle du problème initial.

Pour être en mesure de systématiser le raisonnement, il faut introduire les variables suivantes:

- $f_n(i)$ = coût minimum pour se rendre de la ville i , qui est l'une des villes possibles de l'étape n , à Omégaville.
- $g_n(i)$ = numéro de la ville de l'étape $n + 1$, qui donne ce coût minimal $f_n(i)$ lorsqu'à l'étape n on doit partir de la ville i .

Reprenons notre exemple numérique, à l'étape $n = 3$, le camion passe par la ville $i = 7$ ou la ville $i = 8$. Comme il n'existe qu'un seul chemin pour se rendre des villes 7 ou 8 à Omégaville, le coût minimal n'est autre que le coût $c_{7\omega}$ et $c_{8\omega}$ et la décision qui génère ces coûts n'est autre que le choix de se rendre à Omégaville, dernière et unique étape du voyage: $f_3(7) = 2$; $g_3(7) = \omega$ et $f_3(8) = 4$; $g_3(8) = \omega$.

La décision commence seulement à comporter un degré de liberté à l'étape $n = 2$. Supposons tout d'abord que le camion passe par la ville 4. Les villes 7 et 8 constituent les villes étapes suivantes possibles. Si le camion passe par la ville 7, le coût du transport est la somme de $c_{4,7} = 3$ et de $f_3(7) = 2$, coût minimal du transport jusqu'à Omégaville lorsque l'on part de la ville 7; ce coût est donc de 5. Si, au contraire, le camion passe par la ville 8, le coût de transport sera la somme de $c_{4,8} = 2$ et de $f_3(8) = 4$, coût minimal du transport jusqu'à Omégaville lorsque l'on part de la ville 8; ce coût est égal à 6. En définitive, le coût minimal est de 5 lorsque l'on part de la ville 4, et la première décision à prendre pour atteindre ce coût, est

1. Bellman, à qui l'on doit ce principe l'énonce comme suit: « une politique est optimale si, à une période donnée, quelles que soient les décisions précédentes, les décisions qui restent à prendre constituent une politique optimale en regard du résultat des décisions précédentes ».

de se rendre dans la ville 7; c'est-à-dire en reprenant nos conventions, on aura $g_2(4) = 7$. Le raisonnement que l'on vient de tenir se résume comme suit:

$$f_2(4) = \underset{4,7}{\text{Minimum}}[\{c_{4,7}+f_3(7)\},\{c_{4,8}+f_3(8)\}] = \{c_{4,7}+f_3(7)\} \rightarrow g_2(4) = 7$$

D'une façon générale, si l'on part de la ville i d'une étape n , pour se rendre dans une des villes j de l'étape $n + 1$, on retiendra la ville j qui minimise la somme du coût de transport entre i et j et du coût de transport minimal entre j et Omégaville. La démarche récurrente est donc décrite par la **relation 104**.

$$f_n(i) = \underset{j}{\text{Minimum}}\{c_{ij} + f_{n+1}(j)\}, \text{ pour } \begin{cases} n = N - 1, N - 2, \dots, 0 \\ j = \text{ville de l'étape } n + 1 \end{cases} \quad \text{relation 104}$$

On peut calculer de la même façon que pour la ville 7 le coût minimal et donc la décision optimale à prendre, lorsque le camion se trouve dans les villes 5 et 6.

$$f_2(5) = \underset{j=7,8}{\text{Minimum}}\{c_{5j} + f_3(j)\}$$

$$= \text{Minimum}[\{c_{5,7}+f_3(7)\},\{c_{5,8}+f_3(8)\}] = \text{Minimum}(5 + 2, 4 + 4) = 7$$

d'où $f_2(5) = 7$ et $g_2(5) = 7$

$$f_2(6) = \underset{j=7,8}{\text{Minimum}}\{c_{6j} + f_3(j)\}$$

$$= \text{Minimum}[\{c_{6,7}+f_3(7)\},\{c_{6,8}+f_3(8)\}] = \text{Minimum}(4 + 2, 1 + 4) = 5$$

d'où $f_2(6) = 5$ et $g_2(6) = 8$.

Les calculs peuvent se poursuivre de cette manière, jusqu'à ce que le point de départ soit atteint. Il est préférable cependant de systématiser les calculs dans un tableau du type du **tableau 151**, ce qui conduit au **tableau 152 de la page 566**.

TABLEAU 151
Définition du tableau de calcul d'application du principe de la programmation dynamique

		Décisions possibles: se rendre à l'étape $n + 1$ suivante dans la ville			Décision optimale	
		...	j	...	Coût minimal	Aller à:
État du système à l'étape n : être dans la ville		
	i	...	Coût minimal pour aller de i à Omégaville en passant par j $c_{ij} + f_{n+1}(j)$...	$f_n(i)$	$g_n(i)$
		

En définitive, le coût minimal du transport pour la **CGTA** est de 15. L'itinéraire à emprunter consiste à se rendre tout d'abord dans la ville 3, information que l'on trouve dans le tableau de calcul relatif à l'étape 0. Le tableau de l'étape 1, nous indique ensuite que si l'on part de la ville 3, il faut se rendre ensuite dans la ville 5. Le tableau de l'étape 2 indique que lorsqu'on part de la ville 5, la ville étape suivante est la ville 7. Tandis que le tableau de l'étape 3 nous indique qu'en partant de la ville 7, il ne reste plus qu'à se rendre à Omégaville, ce qui est évident à la

lecture de la carte ! En résumé, l'itinéraire optimal consiste à passer par les villes 3, 5 et 7.

TABLEAU 152
Application du principe de la programmation dynamique

Étape 3		Coût associé à la décision pour se rendre dans la ville j $= \omega$		Décision optimale	
		$f_3(i)$	$g_3(i)$	$f_3(i)$	$g_3(i)$
Partir de la ville i	7	2		2	ω
	8	4		4	ω

Étape 2		Coût associé à la décision pour se rendre dans la ville j		Décision optimale	
		7	8	$f_2(i)$	$g_2(i)$
Partir de la ville i	4	$3 + 2$	$2 + 4$	5	7
	5	$5 + 2$	$4 + 4$	7	7
	6	$4 + 2$	$1 + 4$	5	8

Étape 1		Coût associé à la décision pour se rendre dans la ville j			Décision optimale	
		4	5	6	$f_1(i)$	$g_1(i)$
Partir de la ville i	1	$4 + 5$	$3 + 7$		9	4
	2	$9 + 5$	$5 + 7$	$8 + 5$	12	5
	3		$3 + 7$	$6 + 5$	10	5

Étape 0 (point de départ)		Coût associé à la décision pour se rendre dans la ville j			Décision optimale	
		1	2	3	$f_0(\alpha)$	$g_0(\alpha)$
Partir de la ville i	α	$7 + 9$	$4 + 12$	$5 + 10$	15	3

Table des matières

Index thématique

L'économie de la méthode suivie est double :

- Elle ne nécessite pas l'explicitation des 14 itinéraires possibles (indépendamment des risques d'oubli dans des itinéraires plus complexes).
- Chaque calcul de coût d'itinéraire entraîne 4 additions, ce qui au total fait $14 \times 4 = 56$ additions ; la programmation dynamique n'a nécessité que 16 additions et, de ce point de vue, l'économie de travail est évidente.

Ajoutons enfin que certains itinéraires entre Alphaville et Omégaville auraient pu être caractérisés par moins de trois villes étapes. Si l'on définit, par exemple, un itinéraire possible passant par la ville 1 et une nouvelle ville, la ville 9, on aurait alors répété cette ville 9 à l'étape 2 et à l'étape 3, avec un coût de transport nul entre ces deux étapes, pour se ramener au problème précédent¹.

II-2 Application de l'algorithme général de la programmation dynamique à la planification de la production et à la gestion des stocks

Examinons maintenant l'application de l'algorithme général de la programmation dynamique à la planification de la production et des approvisionnements. Des algorithmes plus performants existent pour résoudre certaines classes de problèmes, mais ils ne seront présentés qu'au § II-3, page 575. On présentera tout d'abord un exemple (§ II-2.1) sur lequel s'appuiera notre présentation, puis nous verrons la transposition au cas des stocks de la méthode introduite avec le problème de transport (§ II-2.2, page 569), pour trouver (§ II-2.3, page 572) la résolution numérique du problème posé: on examinera, dans un dernier paragraphe (§ II-2.4, page 573), une propriété importante pour les problèmes de planification que la programmation dynamique permet de mettre en évidence.

II-2.1 Exemple introductif

FORMICUBE est un fabricant de mobilier de cuisine de luxe. La demande prévisionnelle, notée d_t , de l'élément suspendu à deux portes, référencé **X11** au catalogue, au cours de la période t , est celle du [tableau 153](#). Cette demande est volontairement sous-estimée pour que la présentation des calculs détaillés soit d'une longueur acceptable. On conviendra que cette demande s'exprime en totalité en fin de période, immédiatement après la livraison (ou la production de la période). Si l'on souhaite adopter la convention d'une demande s'exprimant ponctuellement en début de période, il faut alors adopter celle d'une livraison en début de la même période (ou à la fin de la période précédente) et s'il y a production, celle-ci doit s'effectuer au cours de la période antérieure. Le passage d'une convention à l'autre dans la définition d'un problème est évident, aussi a-t-on privilégié celle qui s'adapte le plus facilement à la fois aux problèmes de production et d'approvisionnement externe.

TABLEAU 153
Demande de la référence X11

t	1	2	3	4	5
d_t	2	5	4	2	4

La fabrication du **X11** nécessite un certain nombre de réglages indépendants du nombre d'unités à fabriquer. Le coût de lancement c_c correspondant à ces dépenses fixes de réglage et à des dépenses administratives est de l'ordre de 150 dollars liduriens.

Le coût direct de la main-d'œuvre dépend de la main-d'œuvre disponible et donc des productions décidées pour les autres références. Une certaine allocation des ressources est effectuée par le bureau du planning, en fonction des urgences

1. *Note de la page précédente.* Ce problème de détermination de l'itinéraire le plus court concerne des réseaux qualifiés d'«acycliques» parce qu'il est impossible d'avoir un cycle, c'est-à-dire de trouver, pour un nœud quelconque, un itinéraire ramenant à ce nœud. L'algorithme général de résolution de ce cas (voir Wagner [435], p. 232-233) conduit à une séquence de calculs identique à celle entraînée par la méthode suggérée ici. Ajoutons que la recherche de l'itinéraire le plus court, dans le cas de réseaux comportant des cycles, est plus longue; voir sur ce point Wagner [435], p. 227-231.

et, il faut bien le dire, d'un certain arbitraire. Cette allocation est néanmoins susceptible d'être révisée au vu des résultats obtenus pour l'ensemble des références produites par le même atelier (ou le même poste de travail), ce qui rend cet arbitraire relativement défendable car le surcroît de coût d'obtention d'une solution globalement optimale par rapport à une solution approchée risque fort de ne pas être compensé par l'accroissement d'économie qu'il procure (autrement dit: le mieux est souvent l'ennemi du bien!). Cette allocation tient compte des possibilités d'heures supplémentaires, des congés déposés, etc. et l'on se limitera à 2 coûts directs de production, le premier de 200 dollars liduriens et le second de 250 dollars liduriens.

Comme il ne peut y avoir d'heures supplémentaires que si les heures normalement disponibles sont totalement utilisées, on ne produira au second niveau de coût (250 dollars liduriens) qu'après avoir épuisé les possibilités de production du premier niveau de coût. Compte tenu de ces précisions, les productions maximales prévisionnelles sont données au [tableau 154](#).

TABLEAU 154
Structure des coûts d'approvisionnement de la référence XII

Période t	1	2	3	4	5
Production maximale à 200 dollars liduriens	2	2	3	3	3
Production maximale à 250 dollars liduriens	3	3	3	3	3

Il est possible de produire pendant une période un article qui ne sera utilisé qu'à la période suivante, mais ceci conduit à un stockage et donc à un certain coût. Le coût de possession à utiliser est normalement proportionnel au seul coût direct de main-d'œuvre, puisque la décision que l'on prend n'a d'incidence que sur ce poste. Ce dernier point est particulièrement important dans l'analyse du problème concret que l'on étudie. En effet, il serait stupide de préférer produire maintenant à 250 dollars liduriens une unité que l'on aurait pu produire 3 périodes avant à 200 dollars liduriens, si la main-d'œuvre disponible ainsi économisée n'a pu être utilisée ailleurs. On supposera ici que l'on aura toujours l'utilisation de la main-d'œuvre normalement disponible (niveau 1 de coût), tandis que l'appel aux heures supplémentaires peut être exactement modulé en fonction des besoins exprimés.

En toute rigueur, le coût de stockage n'est pas le même pour un article produit à 200 dollars liduriens et un article produit à 250 dollars liduriens mais, pour simplifier notre exemple numérique, nous retiendrons un même coût de stockage dans les 2 cas, soit 10 dollars liduriens par unité stockée par période. Cette valeur est obtenue en utilisant un taux de possession de 24% par an (soit 2% par mois), valeur retenue par **FORMICUBE** comme rentabilité marginale de ses actifs circulants, compte tenu de l'importance de ses charges fixes. Ce taux de possession de 4% par mois correspond à un taux d'opportunité. En l'appliquant à 250 dollars liduriens de coût direct main-d'œuvre, on retrouve 5 dollars liduriens; en y ajoutant un coût de stockage estimé à 5 dollars par mois, on retrouve le coût de possession mensuel de 10 dollars liduriens.

Par ailleurs, les capacités de stockage sont limitées. On verra du reste dans la pratique que, même si des contraintes de stockage sont faibles ou inexistantes, on a intérêt à en poser dans la formulation du problème pour réduire les calculs à effectuer dans la recherche de la solution optimale. On s'interdira ici d'avoir un stock de plus de 2 unités. Ajoutons enfin que l'on s'interdit également toute rupture de stock.

II-2.2 Formulation du problème posé en un problème de programmation dynamique

Pour formuler correctement le problème, il faut préalablement avoir défini un certain nombre de variables et de paramètres.

II-2.2.1 Variables et paramètres utilisés

Les variables décrivant le système physique sont les suivantes :

- t = indice de la période, la période joue le même rôle que l'étape n dans le problème de transport ;
- T = horizon de planification = nombre total de périodes prises en compte dans les calculs (ce nombre correspond au nombre total d'étapes dans le problème de transport) ;
- q_t = production de la période t , disponible ponctuellement à la fin de la période t ; q_t est la variable de commande ;
- R_t = stock physique au début de la période t , R_t est la variable d'état, et correspond donc à la notion de ville-étape possible i d'une étape n donnée, dans le problème de transport.

Dans la mesure où les unités stockées ne subissent aucune dégradation, on a la [relation 105](#) liant les variables d'état et de commande, laquelle est une adaptation de la [relation 96 de la page 556](#) :

$$R_t = R_{t-1} + q_{t-1} - d_{t-1} \quad \text{relation 105}$$

Cette relation signifie tout simplement que le stock au début de la période t est égal à celui de la période précédente augmenté de la production de la période précédente, et diminué de la demande de la période précédente. Cette équation n'a pas d'équivalent dans le problème de transport où la variable de commande d'une étape consistait à choisir la variable d'état de l'étape suivante¹. Ajoutons que, par hypothèse, le stock résiduel à la fin de l'horizon économique est nul, ce que l'on écrira $R_{t+1} = 0$.

Introduisons maintenant les variables spécifiques de la programmation dynamique :

- $f_t(R_v)$ = coût minimal pour les périodes t à T , lorsque le stock au début de la période t est R_t , cette fonction de coût est l'équivalent de la fonction $f_n(i)$ du problème de transport.

1. C'est cette simplicité des relations entre variables d'état et de commande qui permet d'introduire assez facilement le raisonnement de la programmation dynamique et fait préférer une présentation préalable de cette démarche sur un exemple de transport.

- $g_t(R_t)$ = production (ou approvisionnement) optimal livré en fin de période t lorsque le stock de début de période t est R_t , c'est la valeur de q_t qui permet d'obtenir le coût minimal $f_t(R_t)$. Cette fonction, qui prend la valeur prise par la variable de commande à la période t , est l'équivalent de la fonction $g_n(i)$ qui donnait le numéro de la ville de l'étape suivante (= variable de commande) qui permettait de minimiser le coût $f_n(i)$ lorsque l'on se trouvait dans la ville i de l'étape n .
- $C_t(q_t, R_t)$ = coût de production (ou d'approvisionnement) de q_t unités durant la période t , et de stockage durant la période t ; ce coût est l'équivalent du coût de transport. En effet, la décision de produire q_t , mène de l'état R_t de stock au début de la période t à un état $R_{t+1} = R_t + q_t - d_t$ à la période suivante. Le coût de passage de l'état R_t à l'état R_{t+1} est de même nature que le coût de transport c_{ij} de la ville i de l'étape n , à la ville j de l'étape $n + 1$.

II-2.2.2 Formulation du programme dynamique

Dans le problème de transport, on revenait progressivement de la ville d'arrivée à celle de départ. De même, dans le problème de stock, on reviendra progressivement de la période finale à la période initiale. Dans le problème de transport, la recherche de la décision optimale à prendre pour une étape n , lorsque l'on savait partir d'une ville i , consistait à comparer le coût de transport entre cette ville i et Omégaville pour toutes les villes étapes possibles de l'étape suivante $n + 1$. De même, dans le problème de stock, lorsque l'on sait que le stock de début de période est R_t , la recherche de la décision optimale passe par la comparaison des coûts de production et de stockage associés à toutes les productions possibles durant la période t , ce qui est relativement facile dans la mesure où le coût associé à un stock $R_{t+1} (= R_t + q_t - d_t)$ a déjà été calculé au cours de l'itération de calcul précédente. On peut formaliser comme suit cette recherche de la production optimale pour la période t , sachant que le stock de début de période est R_t défini par la relation récurrente 105:

$$f_t(R_t) = \underset{q_t}{\text{Minimum}} \{ C_t(q_t, R_t) + f_{t+1}(R_{t+1}) \} \quad \text{relation 106}$$

Se pose maintenant la question de savoir quelles sont les valeurs possibles de R_t et q_t . Deux cas de figure doivent être distingués selon que des contraintes pèsent ou non sur les capacités de production et/ou de stockage:

- En l'absence de toute contrainte de capacité de production et de stockage (ce qui n'est pas le cas de notre exemple numérique), le stock initial R_t peut prendre n'importe quelle valeur comprise entre 0 (pas de stock en début de période t) et la somme des demandes entre t et $t + T$ (stock initial suffisant pour satisfaire toutes les demandes prévues de la période considérée à la fin de l'horizon économique). Si l'on acceptait d'envisager un stock initial supérieur à cette valeur, le stock résiduel à la fin de la période T ne serait pas nul, contrairement à la contrainte que l'on s'est fixée. La quantité produite au cours de la période t doit être suffisante pour qu'il n'y ait pas de rupture de stock en fin de période c'est-à-dire que q_t doit être au moins égale à zéro ou $d_t - R_t$, c'est-à-dire à la demande de la période diminuée du stock de début de

période (si cette différence est positive). Par ailleurs, il est évident que la quantité livrée ne doit pas conduire à un stock résiduel positif en fin d'horizon économique. Elle est donc au plus égale au cumul des demandes de la période t à la période T , diminué du stock initial de la période t .

En résumé, on a :

En l'absence de contrainte de capacité de production et de stockage, R_t varie de 0 à $\sum_{i=t}^T d_i$ et q_t varie de Maximum $\{0, d_t - R_t\}$ à $\sum_{i=t}^T d_i - R_t$ relation 107

Examinons maintenant le cas de contraintes de capacité de production et de stockage. On notera R_t^{\max} le stockage maximal de la période t , c'est-à-dire la valeur maximale autorisée pour R_t . La livraison et la demande de la période t , étant réputées se produire en fin de période, n'auront aucune incidence sur le stockage effectif durant la période t . On notera de même q_t^{\max} la production maximale de la période. Les domaines de variation possibles de R_t et q_t sont plus complexes à définir que dans le cas précédent :

- Le stock initial R_t le plus faible possible est le stock nul, à moins que ce stock nul n'entraîne une rupture de stock au cours de la période t , ce qui se produit si la quantité demandée d_t est supérieure à la production maximale q_t^{\max} . S'il en est ainsi, il est bien évident que le stock initial minimal est $d_t - q_t^{\max}$, faute de quoi le stock initial de la période suivante serait négatif. Le stock initial maximum est égal au cumul des demandes de la période considérée jusqu'à la fin de l'horizon économique, à moins que la contrainte de stockage du début de période ne vienne limiter cette valeur.
- La quantité minimale q_t livrée en fin de période t , est nulle, à moins que cette livraison n'amène une rupture de stock, auquel cas il faut livrer $d_t - R_t$ pour éviter cette rupture de stock. La quantité maximale est nécessairement la plus faible des trois grandeurs suivantes :
 - la somme des demandes des périodes t à T , diminuée de R_t ,
 - la capacité de production maximale q_t^{\max} ,
 - la quantité qui sature la capacité de stockage du début de la période suivante, ce qui correspond à la valeur $R_{t+1}^{\max} + d_t - R_t$, compte tenu de l'équation 105 de conservation du système.

En résumé, on a :

Si limitation R_t^{\max} du stockage R_t varie de Maximum $(0, d_t - q_t^{\max})$, à Minimum $(\sum_{i=t}^T d_i, R_t^{\max})$ relation 108

Si limitation R_t^{\max} de la production, q_t varie de $\text{Maximum}(0, d_t - R_t)$, à Minimum

$$\left(\sum_{i=t}^T d_i - R_t, q_t^{\max}, R_{t+1}^{\max} + d_t - R_t \right) \quad \text{relation 109}$$

L'utilisation récurrente de ces relations peut conduire éventuellement à avoir une borne inférieure pour R_t ou q_t , qui soit supérieure à la borne supérieure. S'il en est ainsi, le problème posé n'a pas de solution tant que certaines contraintes n'auront pas été modifiées. Ajoutons enfin qu'il est facile d'adapter ces relations lorsqu'il est possible de différer une partie de la demande¹.

II-2.3 Résolution numérique de l'exemple introductif

Le **tableau 155 de la page 573**, formellement identique au **tableau 152 de la page 566**, illustre l'utilisation de l'algorithme de la programmation dynamique en tenant compte des diverses contraintes de capacités de production et de stockage. Les colonnes 2 à 5 donnent les composantes de l'équation de conservation. En pratique, dans l'élaboration manuelle d'un tel tableau, on vérifie sur les colonnes 2 et 5 que le stock de départ n'est ni négatif ni supérieur à la capacité de stockage. Quant aux valeurs prises par q_t , si la valeur la plus faible possible n'est pas zéro, cela se retrouve immédiatement à la colonne 5 (stock R_{t+1} négatif), et la valeur la plus forte se détermine en colonne 4 pour le total des demandes ou la production maximale de la période et en colonne 5 si ces valeurs conduisent à un stock trop important au début de la période suivante. La solution optimale et ses conséquences sont résumées dans le **tableau 156**.

TABLEAU 156
Solution optimale du problème de planification

Période t	Stock au début de la période	Livraison en début de période	Demande de la période	Stock à la fin de la période
1	0	2	- 2	0
2	0	5	- 5	0
3	0	4	- 4	0
4	0	3	- 2	1
5	1	3	- 4	0
Coût total : 4360 dollars liduriens				

1. Si le montant maximal des demandes différées en début de période t est noté R_t^{\min} valeur nécessairement négative ou nulle, on a alors :

$$R_t \text{ varie de } \text{Maximum}(R_t^{\min}, d_t - q_t^{\max} + R_{t+1}^{\min}) \text{ à } \text{Minimum}\left(\sum_{i=t}^T d_i, R_t^{\max}\right)$$

$$q_t \text{ varie de } \text{Maximum}(0, d_t - R_t + R_{t+1}^{\min}) \text{ à } \text{Minimum}\left(\sum_{i=t}^T d_i - R_t, q_t^{\max}, R_{t+1}^{\max} + d_t - R_t\right)$$

TABLEAU 155
Application de la programmation dynamique au problème de planification de la production

Table des matières	Horizon 5	<table border="1"> <thead> <tr> <th>R₅</th> <th>$g_5(R_5) = q_5$</th> <th>- d₅</th> <th>R₆</th> <th>f₅(R₅)</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>0</td> <td>4</td> <td>- 4</td> <td>0</td> <td>1000</td> </tr> <tr> <td>1</td> <td>3</td> <td>- 4</td> <td>0</td> <td>760</td> </tr> <tr> <td>2</td> <td>2</td> <td>- 4</td> <td>0</td> <td>570</td> </tr> </tbody> </table>	R ₅	$g_5(R_5) = q_5$	- d ₅	R ₆	f ₅ (R ₅)	0	4	- 4	0	1000	1	3	- 4	0	760	2	2	- 4	0	570
	R ₅	$g_5(R_5) = q_5$	- d ₅	R ₆	f ₅ (R ₅)																	
	0	4	- 4	0	1000																	
	1	3	- 4	0	760																	
	2	2	- 4	0	570																	
Horizon 4	<table border="1"> <thead> <tr> <th>R₄</th> <th>$g_4(R_4) = q_4$</th> <th>- d₄</th> <th>R₅</th> <th>f₄(R₄)</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>0</td> <td>3</td> <td>- 2</td> <td>1</td> <td>1510</td> </tr> <tr> <td>1</td> <td>2</td> <td>- 2</td> <td>1</td> <td>1320</td> </tr> <tr> <td>2</td> <td>0</td> <td>- 2</td> <td>0</td> <td>1020</td> </tr> </tbody> </table>	R ₄	$g_4(R_4) = q_4$	- d ₄	R ₅	f ₄ (R ₄)	0	3	- 2	1	1510	1	2	- 2	1	1320	2	0	- 2	0	1020	
R ₄	$g_4(R_4) = q_4$	- d ₄	R ₅	f ₄ (R ₄)																		
0	3	- 2	1	1510																		
1	2	- 2	1	1320																		
2	0	- 2	0	1020																		
Horizon 3	<table border="1"> <thead> <tr> <th>R₃</th> <th>$g_3(R_3) = q_3$</th> <th>- d₃</th> <th>R₄</th> <th>f₃(R₃)</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>0</td> <td>4</td> <td>- 4</td> <td>0</td> <td>2510</td> </tr> <tr> <td>1</td> <td>3</td> <td>- 4</td> <td>0</td> <td>2270</td> </tr> <tr> <td>2</td> <td>4</td> <td>- 4</td> <td>2</td> <td>2040</td> </tr> </tbody> </table>	R ₃	$g_3(R_3) = q_3$	- d ₃	R ₄	f ₃ (R ₃)	0	4	- 4	0	2510	1	3	- 4	0	2270	2	4	- 4	2	2040	
R ₃	$g_3(R_3) = q_3$	- d ₃	R ₄	f ₃ (R ₃)																		
0	4	- 4	0	2510																		
1	3	- 4	0	2270																		
2	4	- 4	2	2040																		
Horizon 2	<table border="1"> <thead> <tr> <th>R₂</th> <th>$g_2(R_2) = q_2$</th> <th>- d₂</th> <th>R₃</th> <th>f₂(R₂)</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>0</td> <td>5</td> <td>- 5</td> <td>0</td> <td>3810</td> </tr> <tr> <td>1</td> <td>4</td> <td>- 5</td> <td>0</td> <td>3570</td> </tr> <tr> <td>2</td> <td>3</td> <td>- 5</td> <td>0</td> <td>3330</td> </tr> </tbody> </table>	R ₂	$g_2(R_2) = q_2$	- d ₂	R ₃	f ₂ (R ₂)	0	5	- 5	0	3810	1	4	- 5	0	3570	2	3	- 5	0	3330	
R ₂	$g_2(R_2) = q_2$	- d ₂	R ₃	f ₂ (R ₂)																		
0	5	- 5	0	3810																		
1	4	- 5	0	3570																		
2	3	- 5	0	3330																		
Horizon 1	<table border="1"> <thead> <tr> <th>R₁</th> <th>$g_1(R_1) = q_1$</th> <th>- d₁</th> <th>R₂</th> <th>f₁(R₁)</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>0</td> <td>2</td> <td>- 2</td> <td>0</td> <td>4360</td> </tr> </tbody> </table>	R ₁	$g_1(R_1) = q_1$	- d ₁	R ₂	f ₁ (R ₁)	0	2	- 2	0	4360											
R ₁	$g_1(R_1) = q_1$	- d ₁	R ₂	f ₁ (R ₁)																		
0	2	- 2	0	4360																		

Index thématique

II-2.4 Horizon de planification et stabilité du programme d'approvisionnement

Le problème que l'on va mettre en évidence n'est pas lié à la programmation dynamique mais à l'usage de techniques de planification glissante, qu'elles soient optimales ou non. Reprenons notre exemple et faisons maintenant varier l'horizon de planification entre 3 et 5 mois (tableau 157). La quantité commandée le mois 3 varie en fonction de l'horizon de planification:

- elle est de 4 pour un horizon de 3 mois,
- elle est de 6 pour un horizon de 4 mois,

TABLEAU 157
Variation de l'horizon de planification

Période t	Stock au début de la période	Livraison en début de période	Demande de la période	Stock à la fin de la période
1	0	2	- 2	0
2	0	5	- 5	0
3	0	4	- 4	0
Coût total : 2850 dollars liduriens				

Période t	Stock au début de la période	Livraison en début de période	Demande de la période	Stock à la fin de la période
1	0	2	- 2	0
2	0	5	- 5	0
3	0	6	- 4	2
4	2	0	- 2	0
Coût total : 3370 dollars liduriens				

- elle est de nouveau de 4 pour un horizon de 5 mois.

Cet exemple montre que le programme de production ou d'approvisionnement n'est pas stable et dépend de l'horizon de planification retenu.

Cette observation n'est pas sans conséquence sur l'appréciation que l'on peut porter sur les techniques de planification glissante (présentées au § IV-2, page 494, chapitre VI) qui sont largement répandues dans les entreprises. Supposons, par exemple, que **FORMICUBE** utilise une planification glissante à 3 mois de sa production. Dans notre exemple, le mois 1, elle prévoit de produire 4 unités de la référence **X11** au cours du mois 3, lors de l'élaboration au mois 1 de son plan trimestriel glissant. Au début du mois 2, l'entreprise ne dispose d'aucun stock de cette référence, la connaissance de la demande du mois 4 conduit à un programme identique à celui trouvé au mois 1 avec un horizon de 4 périodes¹. En conséquence, le service chargé de la planification révisera en hausse la production prévue pour le mois d'après ($t = 3$). Mais au début du mois 3, cette production doit être révisée en baisse et doit passer de 6 unités à 4².

On peut donc conclure que l'adoption de techniques de planification glissante n'a aucune raison de fournir systématiquement une solution optimale. Cependant, on peut faire deux remarques :

- En présentant les techniques de MRP, on a vu que l'existence de nomenclatures à étages et des délais d'obtention conduisait à ne plus pouvoir garantir

1. La production du mois 1 étant la même pour une planification à 3 mois et à 4 mois, la programmation proposée pour les mois 2 à 4 est nécessairement la même que celle que l'on obtient dans le cadre d'une planification à 3 mois réalisée à la fin du mois 1.

2. La production des 2 premiers mois étant la même pour une planification à 3, 4 ou 5 mois, la programmation proposée pour les mois 3 à 5 est nécessairement la même que celle que l'on obtient dans le cadre d'une planification à 3 mois réalisée à la fin du mois 2.

la cohérence des décisions en cas de modifications du programme de production des produits finis pendant l'horizon gelé. Cette observation reste valable ici, ce qui conduit à relativiser les modifications du plan de production de périodes allant au-delà de l'horizon gelé. Les risques de modification sont plus faibles pour la première période que pour les périodes suivantes si les différentes données (demandes, capacités...) ne varient pas trop de période à période, elles sont en outre d'autant plus faibles que l'horizon de planification est éloigné.

- Les modifications de programmation du mois en cours, suggérées par la solution optimale, peuvent amener des gains faibles par rapport aux problèmes pratiques qu'elles créent. Dans notre exemple, le maintien d'un programme de 6 unités le mois 4 entraîne une majoration de coût de 10 dollars liduriens par rapport à la solution optimale. Un arbitrage doit être trouvé entre les coûts associés à une modification de la programmation, et un accroissement de coûts de production et de stockage.

II-3 Utilisation d'un algorithme spécifique pour le cas de coûts convexes de livraison et de stockage

Le coût de production introduit dans l'exemple numérique précédent n'était ni convexe, ni concave, ce qui nécessite l'utilisation de l'algorithme général de la programmation dynamique. Pour situer le problème et ses implications, il faut rappeler la définition des fonctions convexes et concaves. Une fonction de coût total sera dite convexe si chaque unité additionnelle coûte au moins autant que la précédente, cette situation est dite encore de rendement d'échelle décroissant. Au contraire, une fonction de coût de production sera dite concave si chaque unité additionnelle coûte au plus ce que coûte l'unité précédente¹. Cette situation est connue sous le nom de rendement d'échelle croissant. Dans l'application de ces définitions, il convient de ne pas oublier le coût associé à une production nulle.

Dans notre exemple, pour la période 1, on avait: $C(0) = 0$, $C(1) = 150 + 200 = 350$, $C(2) = 350 + 200 = 550$, $C(3) = 550 + 250 = 800...$ D'où les variations successives de coût de production: 350, 200, 250. Or, si au départ on peut envisager que la fonction soit concave ($200 < 350$), la propriété définissant ce type de fonction n'est plus respectée ensuite ($250 > 200$). La fonction de coût total n'est donc ni convexe ni concave. Il en est de même pour la fonction de coût de production des périodes suivantes. Par contre, si nous supprimons le coût de lancement (150 dollars liduriens), la fonction de coût de production devient convexe, les différentes variations successives étant (pour la première période) $200 = 200$, $250 > 200$, $250 = 250$, $250 = 250$. La fonction de coût de stockage, de 10 dollars liduriens / unité / mois, satisfait à la fois les conditions requises pour les fonctions concaves et pour les fonctions convexes, les inégalités imposées n'étant pas strictes. On pourra donc indifféremment considérer cette fonction de coût comme convexe ou comme concave.

1. Mathématiquement, si pour toute quantité q positive ou nulle, la fonction de coût totale $C(q)$ est dite *convexe* si $C(q+1) - C(q) \geq C(q) - C(q-1)$ (ce qui s'écrit aussi $\{C(q+1) + C(q-1)\}/2 \geq C(q)$); elle est dite *concave* si $C(q+1) - C(q) \leq C(q) - C(q-1)$ (ce qui s'écrit aussi $\{C(q+1) + C(q-1)\}/2 \leq C(q)$).

Si l'on reprend notre exemple, en supprimant le coût de lancement, les fonctions de coût de production et de stockage sont alors l'une et l'autre des fonctions convexes, et on a intérêt à utiliser l'algorithme présenté au § II-3.1, de préférence à l'algorithme général.

Une dernière modification sera apportée à cet exemple: le coût de possession sera proportionnel au coût de la main-d'œuvre. L'application du taux mensuel de 4% donne 8 dollars liduriens / unité / mois pour les articles produits à 200 dollars liduriens et 10 dollars liduriens pour les autres.

II-3.1 Algorithme à utiliser dans le cas de fonctions de coûts convexe

L'algorithme général de la programmation dynamique partait de la dernière période pour remonter progressivement vers la première période (on parle alors d'algorithme «rétrograde» ou de type «*backward*»). Les algorithmes à utiliser dans le cas convexe ou dans le cas concave partent au contraire de la période actuelle pour s'éloigner ensuite progressivement dans le temps (on parle alors d'algorithme de type «*forward*»).

On démontre¹ que la procédure à suivre est la suivante :

- Satisfaire la demande de la première période en utilisant les moyens de production les plus avantageux de la période, et calculer les capacités de production résiduelles.
- Satisfaire la demande de la seconde période en utilisant les moyens de production les plus avantageux de la période 2 ou de la période précédente, puis modifier en conséquence les capacités de production résiduelles utilisées pour satisfaire la demande de cette seconde période.
- Satisfaire la demande de la troisième période en utilisant les moyens de production les plus avantageux de la période 3 ou des périodes précédentes, puis modifier en conséquence les capacités de production résiduelles utilisées pour satisfaire la demande de cette troisième période.
- ...

Pour faire rapidement les calculs manuels, on a intérêt à faire appel au [tableau II-3.1 de la page 576](#) qui explicite la période de production et le coût des unités demandées à chaque période constitutive de l'horizon économique. Comme on s'interdit ici tout report de demande (hypothèse qui peut être levée au prix de modifications mineures²), seule la partie du tableau située au-dessus de la diago-

1. Il s'agit d'un algorithme proposé initialement par Land (1958, [270]). Voir Wagner (1975, [435]), p. 307 et sq. Le lecteur trouvera également dans Johnson et Montgomery (1974, [245]) p. 191 à 195 une démonstration de l'optimalité de l'algorithme dans le cas de rupture de stock interdite (seul cas présenté ici) en «transcrivant» le problème de programmation dynamique en un problème de programmation linéaire qui est formellement identique à celui du problème classique d'assignation de dépôts à des usines (analysé au § I-2.2.2, page 552) dans lequel on a n centres de production (chacun s'apparentant, dans notre problème, à un potentiel de production au même coût de production, pour une période donnée) et m dépôts (chacun s'apparentant, dans notre problème, à une demande totale d'une période) et où les coûts de transport entre usines et dépôts (s'apparentant, dans notre problème, au coût de production et de stockage) conditionnent les assignations de dépôts aux usines car on cherche à satisfaire les demandes au moindre coût. Cette analogie est flagrante dans le rapprochement du [tableau 157, page 574](#) et du [tableau 144, page 553](#). L'algorithme classique de résolution de ce problème de transport est beaucoup plus simple et rapide que l'algorithme du simplexe (présenté page 1117) classiquement utilisé pour résoudre les problèmes généraux de programmation linéaire.

nale nord-ouest sud-est du tableau peut être remplie. Initialement, le premier nombre de la dernière colonne n'est pas barré, et correspond aux capacités de production initiales, celles-ci seront rectifiées au fur et à mesure de leur utilisation. De même en dernière ligne, le premier nombre barré de chaque colonne correspond à la demande d_t . Par ailleurs, avant d'amorcer les calculs, il faut calculer les coûts unitaires (c.u.) de production et de stockage (par exemple le 280 qui se trouve dans la 2e ligne de la 4e période de consommation est la somme de 250 dollars liduriens de production et de $3 \times 10 = 30$ dollars liduriens de stockage). Dans la diagonale, se trouvent les coûts unitaires de production; les autres coûts unitaires de production et de stockage se calculent simplement en ajoutant au coût unitaire situé immédiatement à gauche, le coût de stockage de la période considérée, ce qui fait qu'en définitive le tableau de base est très rapidement élaboré.

L'application de l'algorithme conduit aux choix décrits dans le [tableau 158](#), mis à jour au fur et à mesure en rectifiant simultanément la capacité résiduelle et la demande restant à satisfaire pour chaque production décidée. Le programme de production optimal est alors celui décrit au [tableau 159](#).

TABLEAU 158
Planification dans le cas de coûts convexes

Période de production	Niveau de coût	Période de « consommation »										Capacité de production résiduelle			
		1		2		3		4		5					
		c.u.	Prod	c.u.	Prod	c.u.	Prod	c.u.	Prod	c.u.	Prod				
1	1	200	2	208		216		224		232		2	0		
	2	250		260		270		280		290		3			
2	1	X		200	2	208		216		224		2	0		
	2			250	3	260		270		280		290	3	0	
3	1	X		X		200	3	208		216		3			
	2					250	1	260		270		280		290	3
4	1	X		X				200	2	208	1	3	1	0	
	2						250		260		270		280		290
5	1	X		X							200	3	3	0	
	2							250				260		270	
Demande restant à satisfaire		2 0		5 3 0		4 1 0		2 0		3 0					

En définitive, l'application de cet algorithme est rapide et les calculs nécessaires pour trouver l'optimum sont moindres que ceux exigés par l'algorithme général¹. Son application dans l'industrie est limitée parce que cette méthode suppose un coût de lancement nul ou négligeable et ne permet pas de tenir compte de la variabilité par saut de certaines charges fixes.

2. Note de la page précédente. Voir Wagner (1975, [435]) p. 312.

TABLEAU 159
Solution optimale du cas convexe

Période t	Stock au début de la période	Livraison en début de période	Demande de la période	Stock à la fin de la période
1	0	2	- 2	0
2	0	5	- 5	0
3	0	4	- 4	0
4	0	3	- 2	1
5	1	3	- 4	0
Coût total: 3608 dollars liduriens				

Reprenons maintenant notre exemple, avec des données plus réalistes, c'est-à-dire en travaillant maintenant sur une dizaine de références du catalogue, articles nécessitant tous à peu près le même temps de fabrication et ayant des coûts de lancement négligeables. Supposons, en outre, qu'il soit possible de faire appel à de la main-d'œuvre intérimaire. Le problème étant posé mensuellement, on supposera que l'embauche d'un intérimaire porte nécessairement sur une période mensuelle, avec un coût de 8000 dollars liduriens pour une capacité maximale de production de 35 unités (d'où un coût unitaire minimal de 229 dollars liduriens). Par ailleurs, les heures normales peuvent être considérées comme d'un coût variable unitaire nul, les ouvriers étant payés au mois, ce qui correspond à une charge fixe mensuelle de 25000 dollars liduriens pour une production mensuelle maximale de 125 unités (d'où le coût standard de 200 dollars liduriens utilisé avant). Le coût de stockage mensuel unitaire sera de nouveau choisi égal à 10 \$/unité/mois. Pour minimiser les calculs, on a intérêt à formuler le problème après avoir décidé de produire en heures normales, chaque mois, le maximum de la demande possible de ce mois. La capacité résiduelle de production en heures normales d'un mois sera donc $125 - d_t$ si d_t est inférieur à 125 meubles et 0, dans le cas contraire. On appellera demande résiduelle la partie de la demande du mois qui n'est pas satisfaite par la capacité de production en heures normales du mois considéré. Compte tenu de ces précisions, les données du problème sont celles du [tableau 160](#). La solution optimale de ce problème est donnée au [tableau 161](#).

Deux points doivent être notés: d'une part on ne fait pas appel à la main-d'œuvre intérimaire et, d'autre part, au cours de la troisième période, la politique optimale consiste à accroître le stock de début de période de 15. La programmation dynamique a permis ici un lissage de charge efficace, à un coût minime. Cette

1. *Note de la page précédente.* Lorsqu'il est possible de différer la demande d'une période et que les coûts associés à une demande différée sont eux-mêmes convexes, il faut modifier légèrement l'algorithme utilisé dans le cas convexe pour tenir compte de cette possibilité (qui n'altère pas l'analogie formelle de ce problème de programme de production avec celui de transport). Lorsque les demandes ne peuvent être différées, toute unité demandée au cours d'une période ne peut être produite au cours d'une période ultérieure; c'est la raison pour laquelle la partie triangulaire inférieure gauche du [tableau 158](#), est «neutralisée». Dans le cas contraire, cette partie est utilisée et l'on y porte la somme du coût de production et du coût de report de la demande (ce dernier coût se substituant au coût de stockage). Notons que ce tableau doit être modifié si pour certaines périodes le coût associé à une demande différée varie (coût marginal non décroissant) en fonction des quantités déjà différées. Le lecteur intéressé par ce cas de figure trouvera un exemple numérique d'application dans Johnson et Montgomery (1975, [245]) p. 209-211.

TABLEAU 160
Données du second problème à coûts convexes

		Capacité de production maximale du mois						
		1	2	3	4	5	6	7
Heures normales [†]	totales	125	125	125	125	125	125	125
	résiduelles	20	0	0	0	0	5	0
Heures supplémentaires (coût unitaire = 250)		25	25	25	25	25	25	25
Heures en intérim	de la 1 ^{re} unité: 8000	1	1	1	1	1	1	1
	des unités suivantes: 0	34	34	34	34	34	34	34
Demande	totale	105	135	150	145	130	120	155
	résiduelle	0	10	25	20	5	0	30
Stockage maximal		30	30	30	30	30	30	0

†. Le coût de ces heures est considéré comme nul parce que non affecté par les décisions étudiées.

TABLEAU 161
Solution optimale du second problème à coûts convexes

Période t	Stock au début de la période	Livraison en début de période	Demande de la période	Stock à la fin de la période
1	0	20	0	20
2	20	0	- 10	10
3	10	15	- 25	0
4	0	20	- 20	0
5	0	5	- 5	0
6	0	5	0	5
7	5	25	- 30	0
Coût total: 16600 dollars liduriens				

solution optimale n'a pu être obtenue qu'en utilisant l'algorithme général de la programmation dynamique, les fonctions de coût de production n'étant pas convexes. Elle aurait pu être trouvée «manuellement» sans faire appel à cet algorithme (ou du moins une solution non optimale d'un coût voisin), mais il n'en est pas de même pour des problèmes concrets de grande taille.

II-3.2 Propriétés spécifiques du cas convexe

L'analyse de l'algorithme optimal permet de mettre en évidence des propriétés intéressantes spécifiques du cas convexe¹, les unes portant sur la modification des contraintes, les autres sur la variation de la demande.

1. Voir Wagner (1975, [435]) p. 312-316. Voir également Hax et Candea (1984, [224]), p. 104-107.

II-3.2.1 Modification des contraintes

Deux résultats importants doivent être notés :

- *La production optimale q_t de la période ne peut décroître si certaines capacités de production ou de stockage de la période t ou d'une période ultérieure sont accrues.* Par exemple, si la capacité de production de la seconde période passe de 5 à 6, la 6e unité ne pouvant être produite qu'au coût unitaire de 250 dollars liduriens et non 200 dollars liduriens (sinon, il y aurait modification de la fonction de coût), on n'observera aucune modification du plan de production. Supposons maintenant que les coûts unitaires de cette seule période 2 ne sont pas de 200 et 250 dollars liduriens mais de 150 et 200 dollars liduriens, le programme optimal reste le même que celui précédemment trouvé. Si, en outre, la capacité de production passe de 5 à 6, la quantité produite au cours de cette période s'accroît d'une unité, tandis que celle de la période suivante est diminuée d'autant.
- *La production optimale q_t de la période t ne peut croître si certaines capacités de production ou de stockage d'une période antérieure sont accrues.* Cette seconde propriété est illustrée par le tout dernier exemple donné où l'accroissement de la capacité de production de la période 2 a provoqué une diminution de la production de la période 3.

II-3.2.2 Variations de la demande (théorèmes d'horizon de planification)

L'examen de l'algorithme permet de mettre en évidence deux propriétés importantes.

La livraison q_t d'une période t ne peut décroître si la demande d'une période quelconque (période t , période antérieure à t ou période postérieure à t) s'accroît. Illustrons cette propriété sur l'exemple utilisé pour illustrer l'algorithme du cas convexe et faisons passer de 2 à 3 la demande de la quatrième période. Il est évident en se reportant au tableau de calcul que l'accroissement d'une unité de la période 4 entraîne un accroissement d'une unité de la production de la période 5. Cette propriété implique que toute programmation de production (ou de livraison) associée à un échancier de demande minimal constitue une programmation minimale, c'est-à-dire qu'elle ne peut être révisée qu'en hausse. Mais on peut tirer des conclusions encore plus fortes de l'examen de l'algorithme optimal, c'est ce que nous allons voir maintenant.

Pour p variant de 1 à T (T étant l'horizon de planification), la demande cumulée

des périodes 1 à p est notée $D_p = \sum_{t=1}^p d_t$ et la livraison cumulée des périodes 1 à p ,

$Q_p = \sum_{t=1}^p q_t$. Supposons en outre que la demande cumulée à la période p soit

susceptible d'être comprise entre deux bornes notées D_p^{\min} et D_p^{\max} . À chacun de ces deux échanciers correspond un échancier optimal de livraison. Notons de la même façon Q_p^{\min} et Q_p^{\max} les échanciers cumulés correspondants. On peut alors démontrer le théorème suivant :

Toute programmation optimale correspondant à une demande D_p , telle que $D_p^{\min} \leq D_p \leq D_p^{\max}$, est telle que l'on a nécessairement $Q_p^{\min} \leq Q_p \leq Q_p^{\max}$.

Illustrons ce théorème pour en faire apprécier la portée, en reprenant notre exemple numérique et en modifiant les échéanciers de demande (tableau 162).

TABLEAU 162
Planification et précision des demandes à venir dans le cas convexe

t	Échéancier minimal				Échéancier maximal				Échéancier réalisé			
	d_t	D_t^{\min}	q_t	Q_t^{\min}	d_t	D_t^{\max}	q_t	Q_t^{\max}	d_t	D_t	q_t	Q_t
1	1	1	2	2	3	3	3	3	2	2	2	2
2	4	5	3	5	5	8	5	8	5	7	5	7
3	2	7	3	8	5	13	5	13	4	11	4	11
4	2	9	3	11	2	15	3	16	2	13	3	14
5	5	14	3	14	5	20	4	20	4	17	3	17

Il résulte de ce théorème qu'il est possible de choisir une production optimale pour la période à venir, avec des informations approximatives sur les périodes éloignées. Il suffit en effet de disposer d'un ordre de grandeur, sous forme de fourchettes de valeurs, pour les périodes éloignées et de voir si la programmation de la période à venir est stable ou non (ce qu'illustre bien notre exemple). L'existence éventuelle d'une plage de valeurs assez large pour q_1 implique qu'il est alors souhaitable d'affiner les estimations prévisionnelles.

Ce théorème est dit «théorème d'horizon de planification», car passer de l'horizon de planification de n à $n + 1$ revient à faire passer d_{n+1} de la valeur 0 à sa valeur effective dans un problème ayant un horizon de $n + 1$ périodes. Reprenons une fois de plus notre exemple pour illustrer ce que l'on vient de dire en passant de $n = 4$ à $n = 5$ (tableau 163).

TABLEAU 163
Planification et allongement de l'horizon de planification dans le cas convexe

t	Échéancier initial				Échéancier final			
	d_t	D_t	q_t	Q_t	d_t	D_t	q_t	Q_t
1	2	2	2	2	2	2	2	2
2	5	7	5	7	5	7	5	7
3	4	11	4	11	4	11	4	11
4	2	13	2	13	2	13	3	14
5	0	13	0	13	4	17	3	17

II-4 Utilisation d'un algorithme spécifique pour le cas de coûts concaves de production et de stockage

Le cas concave, qui est celui de rendements d'échelle croissants, se rencontre peu fréquemment en approvisionnement interne (les coûts marginaux étant en général plutôt croissants que décroissants) et assez souvent en approvisionnement externe (cas des rabais progressifs). Lorsque le coût unitaire est constant et qu'existe un coût de commande, la fonction de coût d'approvisionnement est concave et l'algorithme de résolution du problème est encore appelé « modèle dynamique de la quantité économique de commande » (*dynamic lot size-model* dans la littérature de recherche opérationnelle) ou encore **algorithme de Wagner-Whitin**, du nom de ses inventeurs¹.

II-4.1 Présentation de l'algorithme à utiliser dans le cas concave

Un entrepreneur général s'approvisionne en portes de dimension standard pour ses divers chantiers. Le coût d'une commande (livraison...) s'élève à 100 dollars liduriens et peut être considéré comme indépendant du nombre de portes achetées. Le prix unitaire d'achat est de 150 dollars liduriens pour les 20 premières portes, et de 120 dollars liduriens pour les portes suivantes. Le coût de possession mensuel d'une porte est de 6 dollars liduriens. Les besoins prévisionnels pour les 6 prochains mois sont de 10, 30, 15, 25, 30, 30.

L'algorithme utilisé est du type « *forward* » comme dans le cas convexe, c'est-à-dire qu'il ne part pas de l'horizon de planification pour remonter progressivement en arrière, comme dans le cas de l'algorithme général, car on montre que la propriété suivante est vérifiée, lorsque les demandes ne peuvent être différées².

Il existe toujours une politique optimale telle que la quantité optimale produite (ou achetée) au cours de la période t , soit l'une des valeurs suivantes : 0, ou d_t , ou

$$d_t + d_{t+1}, \text{ ou } d_t + d_{t+1} + d_{t+2}, \dots \text{ ou } \sum_{i=t}^{t+n} d_i$$

Autrement dit, la livraison d'une période ne doit porter que sur une valeur correspondant exactement à la consommation d'une ou plusieurs périodes, et ne peut se produire qu'à condition que le stock de début de période (R_t) soit nul. Ceci implique que l'on ait³:

$$R_t \cdot q_t = 0 \quad \text{relation 110}$$

1. Note de la page précédente. Article publié en 1959 ([436]) ; il est cependant préférable de lire Wagner (1975, [435]) p. 314-323 qui est plus clair et plus général. Voir également Johnson et Montgomery (1975, [245]), p. 212-224 qui présentent d'autres algorithmes de résolution du problème.

2. Lorsqu'il est possible de différer la demande d'une période, et que les coûts associés à une demande différée sont eux-mêmes concaves, un algorithme relativement simple à mettre en œuvre peut être utilisé. Celui-ci est dû à Zangwill (1966, [453]), et un exemple numérique d'application de cet algorithme peut être trouvé dans Johnson et Montgomery (1975, [245]), p. 216-219. Cet algorithme repose sur une extension de la propriété utilisée en l'absence de rupture de stock. Si l'on note B_t le volume de demandes différées à la fin de la période t , après livraison et satisfaction (éventuelle) de la demande de la période, une condition nécessaire pour obtenir une politique optimale consiste à avoir toujours nulles, deux, des trois quantités suivantes : B_t , R_t et q_t . Autrement dit la demande d'une période est entièrement satisfaite par la livraison de la période, ou par le stock de début de période ou par une livraison d'une période ultérieure (demandes différées).

L'algorithme du cas concave est basé sur cette propriété. Modifions légèrement les notations du cas général pour introduire cet algorithme qui, contrairement à celui du cas convexe, fait appel à une présentation formalisée de programmation dynamique :

- $D_{it} = \sum_{j=i}^t d_j$ = demande cumulée de la période i à la période t ,
- $C_i(D_{it})$ = Coût de production de D_{it} à la période i , et de stockage de la période i à la période t ,
- f_t = coût minimal pour les périodes 1 à t , pour un stock résiduel nul à la fin de la période $t = \underset{i}{\text{Minimum}}(f_{i-1} + C_i(D_{it}))$, pour $i = 1$ à t , avec $F_0 = 0$,
- g_t = date optimale de dernière livraison lorsque l'horizon est t .

La récurrence du nouvel algorithme de programmation dynamique conduit à rechercher progressivement les valeurs de f_t , en passant de $t = 1$ à $t = T$, horizon de planification du problème. L'application de cet algorithme est faite dans le **tableau 164** (sur deux pages).

TABLEAU 164
Application de l'algorithme du cas concave

Horizon t	Date i de dernière livraison	$D_{it} = \sum_{j=i}^t d_j$	Coût de production de D_{it}	Coût de stockage de D_{it}	$C_i(D_{it})$ Coût total de D_{it}	$f(i-1)$	$C_i(D_{it}) + f(i-1)$
1	1	10	1600	0	1600	0	1600
1	$g(i=1) = 1$	$f(i=1) = 1600$					
2	1	40	5500	180	5680	0	5680
2	2	30	4300	0	4300	1600	5900
2	$g(i=2) = 1$	$f(i=2) = 5680$					
3	1	55	7300	360	7660	0	7660
3	2	45	6100	90	6190	1600	7790
3	3	15	2350	0	2350	5680	8030
3	$g(i=3) = 1$	$f(i=3) = 7660$					
4	1	80	10300	810	11110	0	11110
4	2	70	9100	390	9490	1600	11090
4	3	40	5500	150	5650	5680	11330
4	4	25	3700	0	3700	7660	11360

3. *Note de la page précédente.* De nombreux auteurs définissent le stock résiduel en fin de période plutôt qu'en début de période ($\Rightarrow R_t = R_{t-1} + q_t - d_t$). Nous avons retenu la convention inverse pour mieux montrer l'analogie de raisonnement entre le problème de transport et le problème d'approvisionnement. Il résulte de cette autre convention que le programme optimal est tel que l'on a : $R_{t-1} \cdot q_t = 0$. Cette période $t-1$ qui se caractérise par un stock nul de fin de période est appelé **point de régénération**, ce qui signifie qu'au-delà de ce point (\rightarrow période t) le système doit générer de nouveau une livraison pour faire face à la demande. L'introduction de ce concept n'évite pas l'utilisation de la notion de période de production ou de livraison (qui se déduit par simple décalage d'une unité) et ne présente d'intérêt pratique que si l'on adopte cette convention d'écriture.

Table des matières
Index
Mathématiques

TABLEAU 164 (SUITE)
Application de l'algorithme du cas concave

Horizon t	Date i de dernière livraison	$D_{it} = \sum_{j=i}^t d_j$	Coût de production de D_{it}	Coût de stockage de D_{it}	$C_i(D_{it})$ Coût total de D_{it}	$f(i-1)$	$C_i(D_{it}) + f(i-1)$
4	$g(i=4) = 2$	$f(i=2) = 11090$					
5	1	110	13900	1530	15430	0	15430
5	2	100	12700	930	13630	1600	15230
5	3	70	9100	510	9610	5680	15290
5	4	55	7300	100	7400	7660	15060
5	5	30	4300	0	4300	11090	15390
5	$g(i=5) = 4$	$f(i=5) = 15060$					
6	1	140	17500	2430	19930	0	19930
6	2	130	16300	1650	17950	1600	19550
6	3	100	12700	1050	13750	5680	19430
6	4	85	10900	540	11440	7660	19100
6	5	60	7900	180	8080	11090	19170
6	6	30	4300	0	4300	15060	19360
6	$g(i=6) = 4$	$f(i=6) = 19100$					

Le programme d'approvisionnement optimal se déduit immédiatement de ce tableau : on voit à la dernière ligne que la dernière date de livraison du programme optimal est $t = 4$, ce qui implique qu'à la fin de la période 4 (juste avant que la demande ne s'exprime), on livre 85 portes, c'est-à-dire de quoi satisfaire les demandes des périodes 4 à 6. L'approvisionnement des 3 dernières périodes étant ainsi réglé, il faut maintenant chercher la politique optimale d'approvisionnement pour un horizon de $T = 6 - 3 = 3$ périodes. Sur ce tableau, on lit que la dernière livraison ayant permis de satisfaire la demande d_3 , a été effectuée à la période 1 ; cette livraison couvre les besoins des demandes des périodes 1 à 3 et le programme optimal est alors totalement défini¹. Le coût minimal associé à cette stratégie est 19 100 (c'est la valeur de f_6) et le programme optimal est fourni dans le [tableau 165](#).

On peut présenter également les calculs dans le [tableau 166 de la page 586](#) qui décompose les éléments de calcul de la recherche de la stratégie optimale : les coûts de livraison et de stockage du tableau sont ceux imputables à la seule demande d_t dans le coût $C_i(D_{it})$; le coût cumulé est égal à $f_{i-1} + C_i(D_{it})$ et s'obtient si $t > i$ à partir du coût cumulé pour l'horizon $t - 1$ situé immédiatement à sa gauche et des coûts de production et de stockage de d_t , situés immédiatement au-dessus ; pour $i = t$, ce coût est la somme du coût de production de d_t et le coût

1. Si l'on avait eu $g_3 = 3$ au lieu de $g_3 = 1$, il y aurait eu en période 3 une livraison correspondant à la demande de cette période, et l'on aurait continué la recherche du programme optimal défini sur un horizon $T = 3 - 1 = 2$ périodes.

TABLEAU 165
Programme de production correspondant au problème traité dans les tableaux 165 et 166

Période t	Stock au début de la période	Livraison en début de période	Demande de la période	Stock à la fin de la période
1	0	55	- 10	45
2	45	0	- 30	15
3	15	0	- 15	0
4	0	85	- 25	60
5	60	0	- 30	30
6	30	0	- 30	0
Coût total: 19 100 dollars liduriens				

optimal f_{t-1} que l'on trouve en avant-dernière ligne du tableau (rappelons que par convention $f_0 = 0$).

Pour un horizon t donné, f_t est la valeur la plus faible des coûts cumulés de la colonne t et g_t prend la valeur de la ligne (= période de dernière livraison) où ce coût a été trouvé.

Il faut noter enfin que les structures concaves de coût excluent toute limitation sur les quantités produites ou stockées¹. Plusieurs heuristiques ont été proposées pour résoudre plus rapidement ce type de problème. La plus connue est sans doute celle du coût moyen minimum et celle de Silver et Meal présentées à la page 492. De nombreuses études attestent les bonnes performances de cette heuristique, tant que les demandes ne présentent pas de variations importantes « par palier » (notamment plusieurs valeurs consécutives nulles).

II-4.2 Stabilité du programme de livraison et horizon de planification

Dans le cas concave général, on ne retrouve pas la propriété, observée dans le cas convexe, selon laquelle « lorsque l'horizon de planification T s'accroît, une livraison programmée q_T ne peut décroître ». Pour s'en convaincre il suffit d'examiner les programmes d'approvisionnement optimaux de notre exemple pour les horizons de planification $T = 4$ et $T = 5$, où q_2 passe de 70 (tableau 167, page 586) à 0 (tableau 168 de la page 587).

Cependant, une propriété intéressante peut être montrée pour une classe de fonctions concaves bien particulières², celle des fonctions de coût de production linéaire, c'est-à-dire que le coût d'approvisionnement est $C(q_t) = a_t + b_t \cdot q_t$ et dans lesquelles on a $b_t \geq b_{t+1}$ (coût variable unitaire non croissant dans le temps). Dans ces conditions, on montre que les deux propriétés suivantes sont vraies :

1. Elles excluent également les demandes différées. Certains algorithmes existent pour traiter ces cas de figure, voir sur ce point Johnson et Montgomery (1974, [245]), p. 224.

2. Voir Wagner (17), p. 321.

TABLEAU 166
 Seconde méthode d'application de l'algorithme de Wagner et Whitin

			Horizon t					
			1	2	3	4	5	6
Demandes de la période t			10	30	15	25	30	30
Date de la dernière livraison pour un horizon t	1	Coûts de Livraison	1600	3900	1800	3000	3600	3600
		Coûts de Stockage	0	180	180	450	720	900
		Cumul	1600	5680	7660	11110	15430	19930
	2	Coûts de Livraison		4300	1800	3000	3600	3600
		Coûts de Stockage		0	90	300	540	720
		Cumul		5900	7790	11090	15230	19550
	3	Coûts de Livraison			2350	3150	3600	3600
		Coûts de Stockage			0	150	360	540
		Cumul			8030	11330	15290	19430
	4	Coûts de Livraison				3700	3600	3600
		Coûts de Stockage				0	180	360
		Cumul				11360	15140	19100
	5	Coûts de Livraison					4300	3600
		Coûts de Stockage					0	180
		Cumul					15390	19170
	6	Coûts de Livraison						4300
		Coûts de Stockage						0
		Cumul						19440
f_t			1600	5680	7660	11090	15140	19100
g_t			1	1	1	2	4	4

TABLEAU 167
 Programme optimal de l'exemple du cas concave pour $T = 4$

Période t	Stock au début de la période	Livraison en début de période	Demande de la période	Stock à la fin de la période
1	0	10	- 10	0
2	0	70	- 30	40
3	40	0	- 15	25
4	25	0	- 25	0
Coût total: 11090 dollars liduriens				

Table des

Index

TABLEAU 168
Programme optimal de l'exemple du cas concave pour $T = 5$

Période t	Stock au début de la période	Livraison en début de période	Demande de la période	Stock à la fin de la période
1	0	55	- 10	45
2	45	0	- 30	15
3	15	0	- 15	0
4	0	55	- 25	30
5	30	0	- 30	0
Coût total: 15 140 dollars liduriens				

- si $g_t = t$ au cours de la recherche de la solution optimale, c'est-à-dire si pour un horizon t l'approvisionnement de la période t a intérêt à s'effectuer par une livraison en t , il est toujours optimal de considérer la programmation des $t - 1$ premières périodes comme indépendante de celle des périodes suivantes. Cette propriété présente, d'une part, un avantage au niveau des calculs en diminuant notablement l'aspect combinatoire du problème, et d'autre part, garantit que la programmation des premières périodes est optimale si l'on a la chance de voir vérifier assez vite cette propriété, ce résultat étant indépendant de la plus ou moins bonne qualité des informations des périodes postérieures à t . Ajoutons que le montant de la livraison effectuée en t est susceptible de varier jusqu'à ce que cette propriété soit de nouveau vérifiée à une période ultérieure;
- si $t_2 \geq t_1$ on a alors toujours $g_{t_2} \geq g_{t_1}$, c'est-à-dire que la demande d'un mois est nécessairement satisfaite par la livraison qui satisfait la demande du mois précédent ou une livraison postérieure.

Reprenons notre exemple, en supposant maintenant que le coût unitaire des portes est constant (150 dollars liduriens). La première des deux propriétés ci-dessus fait que l'on doit chercher la solution optimale en cherchant:

$$f_t = \underset{i}{\text{minimum}}(f_{i-1} + C_i(D_{it})), \text{ pour } i = g_{t-1}, \dots, t \quad \text{relation 111}$$

On effectuera l'intégralité des calculs pour mieux faire apprécier les gains réalisés, la partie foncée du [tableau 169 de la page 588](#) correspondant aux calculs rendus inutiles du fait de la propriété de cette fonction de coût de production concave d'un type bien particulier les changements de couleurs correspondant aux différentes valeurs de g_t . Par exemple, pour $t = 4$ on a $g_t = 4$; les seules solutions à explorer pour un horizon $t = 5$ sont $f_3 + C_4(D_{4,5})$ et $f_4 + C_5(D_{5,5})$, il est inutile de calculer $C_1(D_{1,5})$, $f_1 + C_2(D_{2,5})$, $f_2 + C_3(D_{3,5})$. Par ailleurs, le coût de livraison ne comprendra ici que le coût de lancement, car le coût unitaire est le même à toutes les périodes (ce qui correspond à une dépense totale de 21 000 dollars liduriens pour les 6 mois, valeur à ajouter à f_6). Comme vous pouvez le constater, les calculs sont considérablement simplifiés dans ce cas. La solution optimale est obtenue pour l'échéancier de livraison suivant: 10, 45, 0, 25, 30, 30, ce qui correspond à un coût minimal total de $21\,000 + 590 = 21\,590$

TABLEAU 169
Adaptation de l'algorithme au cas des coûts de production linéaires

			Horizon t					
			1	2	3	4	5	6
Demandes de la période t			10	30	15	25	30	30
Date de la dernière livraison pour un horizon t	1	Coûts de Livraison	100					
		Coûts de Stockage	0	180	180	450	720	900
		Coûts de Cumul		280	460	910	1630	2530
	2	Coûts de Livraison		100				
		Coûts de Stockage		0	90	300	540	720
		Coûts de Cumul		200	290	590	1130	1850
	3	Coûts de Livraison			100			
		Coûts de Stockage			0	150	360	540
		Coûts de Cumul			300	450	810	1350
	4	Coûts de Livraison				100		
		Coûts de Stockage				0	180	360
		Coûts de Cumul				390	570	930
	5	Coûts de Livraison					100	
		Coûts de Stockage					0	180
		Coûts de Cumul					490	670
	6	Coûts de Livraison						100
		Coûts de Stockage						0
		Coûts de Cumul						590
f_t			100	200	290	390	490	590
g_t			1	2	2	4	5	6

TABLEAU 170
Programme optimal dans le cas de fonction de coût linéaire

Période t	Stock au début de la période	Livraison en début de période	Demande de la période	Stock à la fin de la période
1	0	10	- 10	0
2	0	45	- 30	15
3	15	0	- 15	0
4	0	25	- 25	0
5	0	30	- 30	0
6	0	30	- 30	0
Coût total: 21 590 dollars liduriens				

Chapitre IX

LIGNES DE FABRICATION OU D'ASSEMBLAGE

On observe une utilisation croissante de la structure de ligne de production ou de ligne d'assemblage¹, pour la fabrication de produits manufacturés complexes. Cette structure de production, introduite au [chapitre I, § I-2.2.3, page 53](#), est économiquement plus performante que celle de la configuration en ateliers spécialisés, sous des conditions décrites à la [page 60](#). L'un des facteurs déterminants de cette analyse de point mort est le volume de production susceptible d'être traité par la ligne étudiée. L'évolution des caractéristiques du marché (décrite à la [page 67](#)) se traduit par une variété accrue des produits qui conduirait inéluctablement à condamner la structure en ligne si celle-ci n'était pas capable d'absorber la diversité.

Table des
matières

Index
thématique

- Cette variété des produits manufacturés, analysée au [§ I-3, page 102](#), du [chapitre II](#), peut s'obtenir notamment par une combinaison appropriée de modules, chaque module étant choisi dans un ensemble limité de modules interchangeables. Dans ce cas, la structure en ligne est capable d'absorber la diversité et sa supériorité économique sur la structure en ateliers spécialisés est facile à vérifier, les flux de production de produits différents pouvant s'agréger sans problème dans l'analyse du point mort. On parlera dans ce chapitre de **produits homogènes**, cette homogénéité s'appréciant du point de vue des problèmes posés par la conception d'une ligne.
- La diversité introduite par la présence de composants optionnels, se traduisant par une variation du temps de travail sur certains postes, a des impacts importants dans la définition de la ligne et dans l'ordonnancement de la production (ce qui rend plus compliquée l'analyse de la supériorité économique de cette structure de production). On parlera alors de **produits hétérogènes**, toujours en retenant le point de vue des problèmes posés par la conception d'une ligne. Deux remarques doivent être faites:
 - On peut, sur une même ligne, fabriquer et assembler des gammes de produits utilisant la même plate-forme (voir [page 103](#)), ce qui induit la même variabilité du temps de travail sur certains postes. L'avantage de cette approche est de mieux pouvoir faire face à des variations de la répartition de la demande globale entre les gammes et donc de rendre le système productif plus flexible. Si le volume de production est assez important, on peut avoir intérêt à panacher des lignes ne traitant que des produits homogènes (chacune traitant la partie à peu près certaine de la

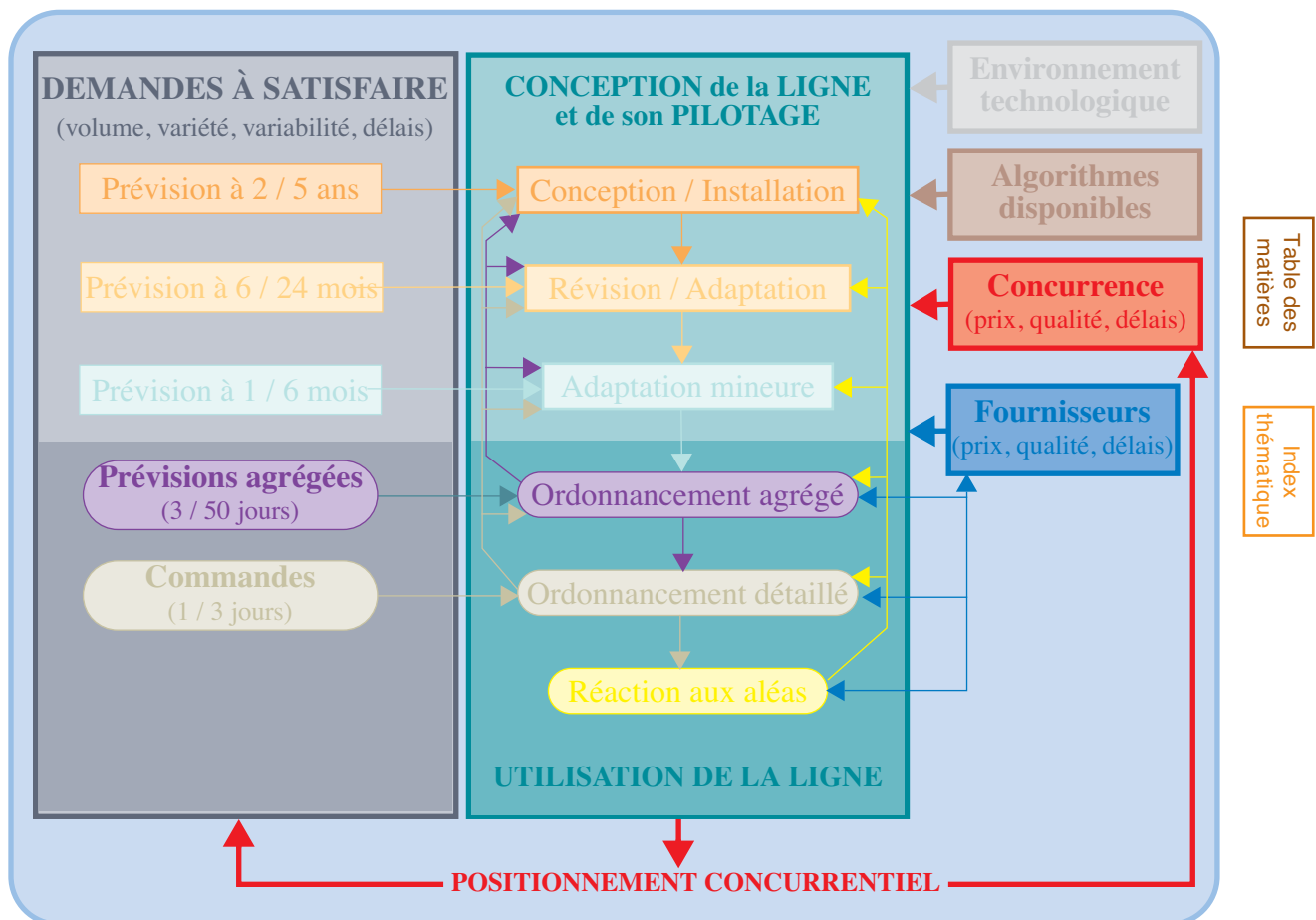
1. On parle encore de **chaînes de production** ou de **chaînes d'assemblage**.

demande d'une gamme) et des lignes polyvalentes, assurant la flexibilité voulue mais subissant l'impact de toutes erreurs de prévision¹.

- Il faut noter que, dans certaines industries, la tendance est d'obtenir des fournisseurs de premier rang, des modules intégrant ou non des composants optionnels, ce qui revient à externaliser le problème chez le fournisseur pour limiter l'hétérogénéité des produits et, ce faisant, la complexité des problèmes rencontrés².

Nous examinerons successivement le cas des lignes dédiées à la fabrication de produits homogènes (section I) et celui des lignes dédiées à la fabrication de produits hétérogènes (section II, page 611). Dans les deux cas, il faudra aborder le problème de la conception de la ligne puis celui de son utilisation. Ces deux problèmes ne sont pas indépendants et ils sont conditionnés par plusieurs facteurs, ce qu'illustre la figure 162.

FIGURE 162
De la conception de la ligne à son pilotage



1. Le coût de telles lignes est généralement plus élevé que celui de lignes spécialisées dans la production de produits homogènes mais la comparaison doit tenir compte du caractère plus ou moins certain de la demande et de l'intérêt économique de la variété de l'offre.

2. Par exemple, dans l'industrie automobile, les boucliers-arrière de certains véhicules haut de gamme peuvent ou non intégrer un capteur de recul. En demandant au fournisseur de livrer des boucliers complets dans un ordre respectant la variété requise au montage (couleur, présence ou non du capteur de recul), on passe alors d'un approvisionnement de composants à un approvisionnement de modules et les problèmes liés à la diversité sont externalisés chez l'équipementier.

L'interdépendance entre le problème de conception et celui de l'utilisation de la ligne tient au fait qu'il est recommandé, au niveau de la conception, de tester la robustesse et la pertinence des choix opérés sur le plan technique et celui de ses règles de pilotage, en simulant l'utilisation du système dans des situations plus ou moins proches de celle retenues dans la conception. Il s'agit alors de vérifier la réponse du système pour faire face à des variations de la demande, tant en volume, qu'en composition (si la ligne est conçue pour absorber une certaine variété), ou à des aléas de production (pannes, ruptures d'approvisionnement et problèmes de qualité¹), compte tenu du degré de flexibilité² physique de la ligne et des règles de pilotage, lesquelles peuvent s'appuyer sur des algorithmes relativement sophistiqués. C'est également en fonction de la conception qu'est pris en compte le degré de transformation que peut supporter la ligne pour faire face à des transformations plus ou moins importantes de la demande (d'où les boucles de rétroaction de la [figure 162](#)).

De nombreux facteurs conditionnent la conception et l'utilisation d'une ligne. Sans sous-estimer les facteurs de contingence internes (orientations stratégiques, capacité de financement...), on s'attachera ici aux facteurs externes. Tout d'abord, les caractéristiques déterministes (tendance, saisonnalité) et stochastiques de la demande jouent un rôle important sur la conception de la ligne, mais aussi celle des produits³ et les choix opérés vont conditionner la position concurrentielle de l'entreprise sur le créneau de demande visé et donc l'importance de la demande à satisfaire. La réponse du système dépend également des fournisseurs, dans une optique de chaîne logistique, d'autant plus fortement que les flux seront tendus. Enfin, les technologies disponibles et leurs coûts jouent un rôle important dans la conception de la ligne, ainsi que les règles de pilotages disponibles (en particulier les algorithmes permettant une meilleure conception ou un meilleur ordonnancement).

Table des matières

Index thématique

SECTION I LIGNES DÉDIÉES À LA FABRICATION DE PRODUITS HOMOGÈNES

On examinera d'abord le problème de la conception d'une ligne de production ou d'assemblage de produits homogènes (§ I-1) puis celui de son utilisation dans son aspect d'ordonnancement (§ I-2, [page 599](#)). La correction au plus tôt de problèmes de qualité induit un certain nombre de perturbations (§ I-3, [page 600](#)) dont il convient de tenir compte; de ce point de vue, il n'y a pas de différence notable entre les produits homogènes et les produits hétérogènes.

1. La ligne pouvant comporter des stocks-tampons permettant d'absorber des aléas. Par ailleurs, même dans le cas d'un approvisionnement à flux tendu (ou approvisionnement synchrone), ce que l'on évoquera après, les composants qui viennent de l'extérieur font l'objet de stocks en bord de ligne, ces stocks incluant un stock de sécurité plus ou moins important. L'importance de ces stocks, contrainte physiquement lors de la conception de la ligne, permet d'assurer un découplage plus ou moins important des problèmes et donc d'en éviter la propagation.
2. Cette problématique de la flexibilité est discutée au [chapitre III, § I-1.5, page 147](#).
3. En particulier par le biais de la standardisation (voir [chapitre III, § III, page 133](#)) et de la conception modulaire (voir [chapitre II, page 103](#)).

I-1 Conception d'une ligne de production ou d'assemblage de produits homogènes

Dans un premier paragraphe (§ I-1.1) nous examinerons le problème de base de l'équilibrage d'une chaîne et introduirons les concepts utiles pour son analyse, avant de présenter les approches utilisées pour les résoudre. On dispose en réalité de deux catégories d'outils. Ceux qui relèvent de la programmation mathématique (§ I-1.2, page 594) permettent une définition claire du problème à résoudre et font appel à des algorithmes garantissant l'optimalité de la solution pour des problèmes de dimension limitée. Les techniques heuristiques d'équilibrage d'une chaîne (§ I-1.3, page 596) ne garantissent pas l'optimalité, mais sont d'une utilisation assez facile et permettent de résoudre des problèmes d'une plus grande dimension.

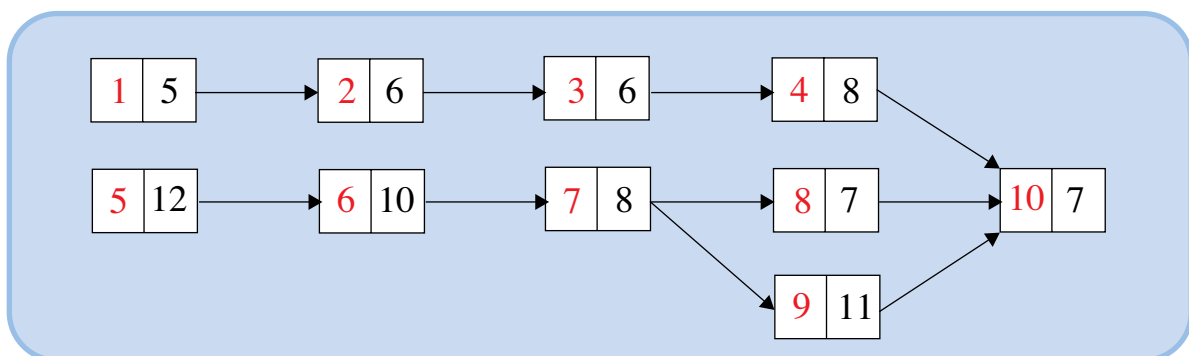
Plusieurs configurations de ligne ont été introduites (voir la figure 6 de la page 54 et l'animation de la figure 7 de la page 56); nous ne traiterons ici que le cas le plus simple: celui d'une ligne unique dans laquelle chaque opérateur ne traite que des opérations consécutives.

I-1.1 La problématique de l'équilibrage d'une ligne de fabrication ou d'assemblage

Moulicaf SA fabrique divers articles électroménagers. La chaîne de fabrication de son nouveau modèle de rôti-ssoire de luxe comporte une cinquantaine d'opérations. Nous n'examinerons ici que les problèmes relatifs à un sous-ensemble bien défini. Les 10 opérations sont visualisées dans le graphe *Potentiel - Tâches* de la figure 163, en utilisant une version simplifiée des conventions d'écriture adoptées dans le chapitre IV: à gauche le code repérant l'opération, à droite son temps opératoire (exprimé en dixièmes de minute):

FIGURE 163

Grappe Potentiel - Tâches des opérations nécessaires à l'exécution du sous-ensemble du nouveau modèle de rôti-ssoire de Moulicaf



Le problème posé est celui de la définition d'une ligne capable de fabriquer 3500 rôti-ssoires par mois de 164 heures, minimisant le nombre de postes de travail nécessaires, tout en équilibrant les charges de travail de chacun de ces postes. Un poste de travail – on parle encore de **station** dans la littérature des lignes de production ou d'assemblage (cf. page 54) – se définit par la prise en charge par une même personne¹ de plusieurs opérations consécutives ou indépendantes. On

1. Dans le cas d'une ligne traitant des produits hétérogènes, cette personne peut éventuellement être aidée par un renfort occasionnel, comme on le verra à la page 611.

suppose donc ici que le nombre d'opérateurs est variable. On présentera ultérieurement (page 596) une autre formulation dans laquelle le nombre d'opérateurs est fixe et où l'on cherche à maximiser la production, qui devient alors la variable du problème.

Dire que le système doit être en mesure de fabriquer 3 500 rôtissoires par mois, c'est imposer que chaque rôtissoire soit exécutée en un temps de $164 / 3\,500 = 0,04686$ heure = $0,04686 \times 60 = 2,81$ minutes (= 28,1 dixièmes de minutes, pour rester cohérent avec l'unité de temps retenue à la figure 163). C'est cette mesure de la productivité du système, appelée **cycle de fabrication** (noté c) que l'on utilise dans l'analyse d'une chaîne de production. On peut remarquer que l'on retrouve dans la définition de la productivité la distinction classique entre la notion de fréquence (nombre d'unités produites par unité de temps) et la notion de temps unitaire – ici le cycle de fabrication – qui n'est autre que l'inverse de la fréquence.

Il est évident qu'aucun poste de travail ne devra passer plus de 28 dixièmes de minute sur chaque rôtissoire, faute de quoi le niveau minimal de productivité de la chaîne, que l'on s'impose au départ comme contrainte, ne sera pas respecté. À l'inverse, il est tout aussi évident que le poste le plus chargé constitue le goulot d'étranglement du système productif et que c'est lui qui fixera la productivité de la chaîne. Par exemple, si le poste de travail le plus chargé requiert 12 dixièmes de minute, la production maximale horaire sera $60 / 1,2 = 50$ rôtissoires, ou encore $164 \times 50 = 8\,200$ rôtissoires/mois. Si l'on désire accroître en permanence la capacité de production sans avoir à multiplier le nombre de chaînes ou à augmenter les heures travaillées, il faut alors demander au spécialiste de la fonction méthode qui a procédé au découpage des opérations de modifier leur définition pour diminuer le temps opératoire des plus importantes (par transfert de charge de travail sur des opérations adjacentes, ou amélioration de la productivité). Par exemple, si l'on veut atteindre en régime de croisière une production de 10 000 rôtissoires, il faudra que la durée de l'opération élémentaire la plus longue n'excède pas $164 \times 60 / 10\,000 = 9,8$ dixièmes de minute.

Table des matières

Index thématique

Revenons au problème initialement posé. Le temps d'exécution total de toutes les opérations est de 80 dixièmes de minutes. Le nombre de postes de travail idéal serait $\sum_i t_i / c = 80 / 28,1 = 2,86$ postes de travail pour que la chaîne puisse être parfaitement équilibrée. Ce nombre qui n'est pas entier ne peut être réalisé; dans le meilleur des cas, il faudra au moins 3 postes de travail, mais rien ne garantit que le nombre arrondi immédiatement supérieur soit:

- d'une part réalisable du fait des contraintes de succession (supposons par exemple que les opérations 1 à 4 durent chacune 1,5 minute, il ne sera alors pas possible d'avoir moins de 4 postes de travail), ou pour des raisons d'impossibilité physique de regroupement de certaines opérations (outillage nécessaire très différent empêchant l'organisation rationnelle du poste de travail et donc faussant la validité des temps opératoires annoncés),
- et, d'autre part, soit facile à trouver (pour vous en convaincre, il vous suffit de chercher à résoudre le problème posé pour n'obtenir que 3 postes de travail).

Pour un nombre de postes de travail ($\sum_i t_i / c \leq k < n$), le temps mort total, en

pourcentage du temps total de travail, sera: $100 \frac{kc - \sum_i t_i}{kc} = 100\% - \frac{100}{kc} \sum_i t_i$.

Il est équivalent de chercher à minimiser le nombre de postes de travail ou de minimiser le pourcentage des temps morts. Une ligne sera dite parfaitement équilibrée si ce pourcentage est nul, mais une chaîne peut être théoriquement équilibrée à 90% (c'est-à-dire avoir 10% de temps mort) et connaître des fluctuations par rapport à ce taux, d'une part parce que les temps opératoires sont des temps qui ne sont pas certains mais aléatoires et, d'autre part, parce que le niveau d'activité réel peut varier par rapport aux prévisions (sous-utilisation de la ligne).

Nous venons d'évoquer le caractère aléatoire des temps opératoires. L'approche stochastique de cette classe de problèmes est particulièrement délicate. Aussi raisonne-t-on en avenir certain, en majorant d'une marge de sécurité les différents temps opératoires¹. Examinons maintenant les solutions proposées pour résoudre ces problèmes.

I-1.2 Formalisation du problème par la programmation mathématique

On dispose de deux batteries d'outils: ceux qui relèvent de la programmation mathématique (voir le [chapitre XVI, page 589](#)), qui garantissent l'optimalité de la solution trouvée, et les procédures heuristiques d'équilibrage de chaîne, qui sont rapides mais ne garantissent pas l'optimalité de la solution. En réalité, cette distinction est moins nette qu'il ne le paraît car, dans la première approche, les méthodes de résolution numérique disponibles ne permettent pas de traiter, dans un temps raisonnable et avec une garantie d'optimalité, des problèmes de grande dimension.

Le recours à la programmation mathématique² s'effectue dans deux directions, la programmation dynamique et la programmation linéaire en nombres entiers. Les performances de la programmation dynamique dans ce domaine sont médiocres; la formulation par la programmation linéaire en nombres entiers est en effet plus rapide de 50%. Celle-ci, due³ à Thangavelu et Shetty (1971, [415]), doit son efficacité, d'une part à une astuce de présentation et, d'autre part, au fait que

1. On a intérêt à calculer cette marge de sécurité (coefficient $h > 1$) en tenant compte des compensations des temps autour d'une valeur moyenne \bar{t} de l'opération, pour k objets passant successivement sur ce poste (k , variant de 1 à K), en faisant en sorte que la probabilité d'un dépassement (événement $\sum_k t_k > hki$) soit inférieure à une probabilité donnée $P\left(\sum_k t_k > hki\right) < \alpha$. On peut généraliser le raisonnement en cas de compensation possible sur plusieurs postes consécutifs (que l'on notera i): $P\left(\sum_k \sum_i t_{ik} > h_i k \bar{t}_i\right) < \alpha$. En l'absence de solution analytique, l'appel à la simulation via des add-in d'Excel, comme @Risk (Palisade.com), permet facilement de trouver une solution (h_i) par tâtonnement; dans le cas où le problème se limite à un seul poste, la détermination du h optimal s'effectue immédiatement avec un logiciel comme *Risk Optimizer*.

2. Voir Johnson et Montgomery (1974, [245]), p. 365-368.

3. Voir Johnson et Montgomery (1974, [245]), p. 374-375. Un historique de l'évolution de ces formulations peut être trouvé dans Scholl (1999, [373], p. 29). Deux autres formulations du problème peuvent être trouvées dans cet ouvrage, lesquelles sont plus performantes, sous certaines conditions.

les variables utilisées ne pouvant prendre que les valeurs 0 ou 1, des algorithmes performants peuvent être utilisés.

La formulation repose sur les variables binaires x_{ik} qui valent 1 si l'opération i est réalisée sur le poste k , et 0 dans le cas contraire. Il faut que l'opération i soit réalisée sur l'un des postes k , ce qui conduit à la **relation 112**:

$$\sum_{k=1}^K x_{ik} = 1, \text{ pour } i = 1 \text{ à } N \quad \text{relation 112}$$

Il convient ensuite de respecter des contraintes d'antériorité des opérations¹, lesquelles se répercutent sur les postes. Sachant que le numéro de poste auquel une opération i est affectée est $\sum_k kx_{ik}$, le fait que l'opération i doit précéder l'opération j , se répercute sur leurs postes d'affectation²:

$$\sum_k kx_{ik} \leq \sum_k kx_{jk}, \text{ pour tout } i, \text{ ancêtre de } j \quad \text{relation 113}$$

Par ailleurs, la charge de travail ($\sum_i t_i x_{ik}$) d'un poste k ne doit pas dépasser le temps de cycle c visé:

$$\sum_i t_i x_{ik} \leq c, \text{ pour } k = 1, \dots, K \quad \text{relation 114}$$

Pour déterminer le **nombre minimal de postes de travail**³, il suffit de partir d'une borne supérieure K (qui ne peut être supérieure au nombre d'opérations) et d'utiliser la variable indicatrice y_k qui vaut 1 si le poste k est utilisé. Dans ces conditions, la fonction-objectif est:

$$\text{Min } \sum_{k=1}^K y_k \quad \text{relation 115}$$

Elle tend à faire prendre une valeur nulle aux y_k . Pour forcer la variable indicatrice y_k à prendre la valeur 1 si le poste est utilisé, il suffit d'introduire la contrainte décrite par la **relation 116** qui force y_k à 1 dès qu'une opération est affectée au poste k :

$$\sum_i x_{ik} \leq Ny_k, \text{ pour } k = 1, \dots, K \quad \text{relation 116}$$

La solution de ce problème n'a pas de raison de lisser la charge de travail entre les postes. Il peut être alors souhaitable de recommencer la recherche d'une solu-

1. Cette «propagation de contraintes» des opérations sur les postes peut ne pas être fondée, en particulier si la ligne est organisée physiquement en serpent (voir l'animation de la **figure 7, page 56**) permettant à un opérateur de ne pas traiter que des opérations contiguës. Cela étant, les contraintes de déplacement doivent alors être prises en compte, un opérateur ne pouvant prendre en compte n'importe quel groupe d'opérations dont le cumul des temps opératoires est inférieur au temps de cycle; cette prise en compte est possible (avec utilisation d'une matrice de temps de transport d'un poste à un autre) mais complique singulièrement le problème. Ajoutons que le § III-2.1.3, page 319, du **chapitre IV** traite de la formulation du problème d'ordonnancement de projet par la programmation mathématique.

2. Il est évident que cette contrainte doit être remplacée lorsque l'on est en présence de lignes en serpent, permettant à un opérateur de ne pas traiter que des opérations contiguës.

3. Dans l'ouvrage de Guéret, Prins & Sevaux (1992, [210], p. 125-130), une variante (illustrée par l'utilisation d'un modèleur) part d'une formulation sans fonction-objectif, dans laquelle on décrémente progressivement le nombre de postes dans le problème posé, jusqu'au moment où l'on ne trouve plus de solution.

tion, en retenant le nombre de postes $\sum_{k=1}^K y_k$ qui vient d'être trouvé et de le considérer comme fixé dans la seconde formulation du problème qui, par l'abaissement du temps de cycle, doit contribuer au lissage.

Cette seconde formulation du problème vise à **minimiser le temps de cycle c** pour un nombre K prédéterminé de postes. Les relations 115 et 116 sont remplacées par la **relation 117** qui décrit la nouvelle fonction-objectif :

$$\text{Min } c \quad \text{relation 117}$$

Ces problèmes sont NP-difficiles (voir [page 361](#)). Des méthodes de résolution de type *branch and bound* (voir [page 390](#)) ont été mises au point pour résoudre des problèmes pouvant comporter jusqu'à un millier d'opérations, de manière d'autant plus efficace que chaque poste traite un nombre suffisant d'opérations¹.

Ces modèles peuvent être adaptés pour prendre en compte de nouvelles contraintes, en s'appuyant sur les principes décrits au § II-2, [page 1135](#) du [chapitre XVI](#). Par exemple, il peut être indispensable que les opérations i_1 et i_2 soient exécutées sur le même poste de travail (par exemple, parce que le travail est le même et porte sur des pièces symétriques); on peut alors mobiliser la règle 4 de la [page 1140](#), qui conduit à créer la **relation 118**:

$$x_{i_1k} = x_{i_2k}, \text{ pour } k = 1, \dots, K \quad \text{relation 118}$$

I-1.3 Les procédures heuristiques de résolution du problème d'équilibrage de chaîne

Plusieurs méthodes de recherche empiriques d'une solution ont été mises au point. Certaines sont basées sur un algorithme de type déterministe et peuvent résoudre des problèmes de quelques centaines d'opérations et dizaines de postes de travail, tandis qu'une autre méthode est basée sur une simulation aléatoire. Nous n'en présenterons que quelques-unes pour le seul intérêt de la description de démarches de résolution car il existe plusieurs logiciels commerciaux qui s'appuient sur des combinaisons d'heuristiques sophistiquées.

I-1.3.1 Les algorithmes déterministes

De nombreux algorithmes ont été imaginés. Celui proposé en 1961 par Helgeson et Birnie² se focalise sur les tâches en les classant selon une méthode de pondération de leurs positions (*Ranked Positional Weight Method*):

- il ordonne les tâches par ordre décroissant d'un coefficient de position défini comme le cumul des temps opératoires de la tâche considérée et des tâches qui la suivent,
- puis il affecte les postes de travail (définis pour un cycle de production) aux tâches dans cet ordre en respectant les antécédences.

1. Voir, en particulier, l'algorithme FABLE (*Fast Algorithm for Balancing Lines Effectively*) mis au point par Johnson en 1988 (voir Nof, Wilhelm & Warnecke, 1997, [318], p. 214-227); cet algorithme a une bonne efficacité pour des problèmes conduisant à charger en moyenne les postes à 6 opérations.

2. Voir Nof, Wilhelm & Warnecke (1997, [318], p. 210-211).

Nous ne nous étendrons pas sur cette méthode qui présente comme avantage principal de fournir rapidement une solution (et donc une borne supérieure au nombre de postes), mais qui peut être assez éloignée de la solution optimale.

La seconde méthode, plutôt focalisée sur les postes, a été proposée par Kilbridge et Wester¹. Elle consiste à partir du [tableau 171](#) où l'on note, pour chaque opération, le nombre d'opérations qui la précèdent (ce qui correspond à la notion de niveau dans le tableau d'antériorité que nous avons établi dans les techniques d'ordonnancement de la série unitaire; voir [tableau 55, page 290](#)).

TABLEAU 171
Préparation de l'application de l'algorithme de Kilbridge et Wester

Opération i	Niveau	t_i
1	0	5
2	1	6
3	2	6
4	3	8
5	0	12
6	1	10
7	2	8
8	3	7
9	3	11
10	4	7

⇒

Opération i	Niveau	t_i
1	0	5
5	0	12
2	1	6
6	1	10
3	2	6
7	2	8
4	3	8
8	3	7
9	3	11
10	4	7

Table des matières

Index thématique

La productivité minimale imposée est celle d'un cycle de production le plus proche possible de 28 dixièmes de minute, sans pouvoir dépasser cette valeur. Ce cycle est réalisable puisqu'aucun temps opératoire élémentaire n'excède cette durée. La procédure proposée consiste à affecter des opérations à un premier poste, puis à recommencer pour un deuxième poste en partant des opérations restantes, etc. jusqu'à épuisement des opérations à affecter. La règle d'affectation revient à attribuer à un poste en priorité des opérations restantes du niveau le plus bas, en complétant progressivement son «service». Lorsque plusieurs opérations d'un même niveau sont susceptibles de compléter le service d'un poste, sans que toutes ces opérations puissent lui être attribuées, on retiendra la combinaison d'opérations qui sature juste le poste² et à défaut celle qui a le temps opératoire le plus grand possible, afin de laisser le maximum de marge de manœuvre aux postes suivants. Appliquons cet algorithme.

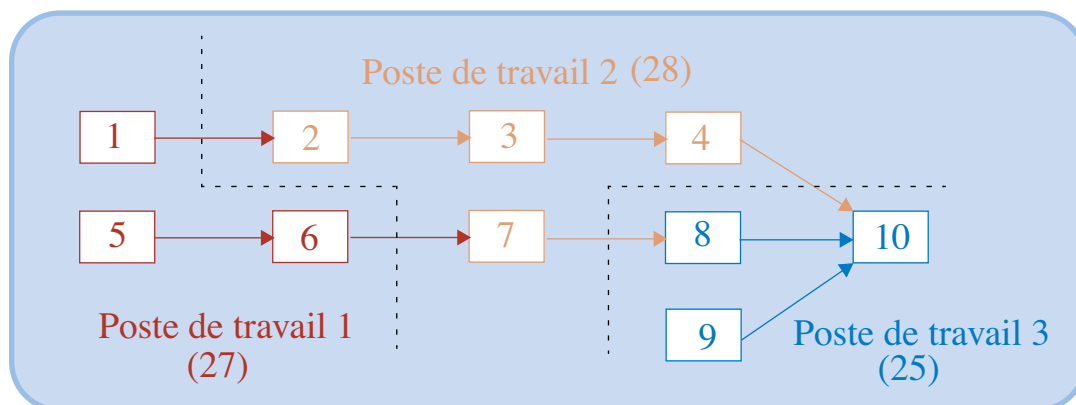
- Il conduit à attribuer au premier poste toutes les opérations de niveau 0, c'est-à-dire les opérations 1 et 5, ce qui correspond à un service de $t_1 + t_5 = 5 + 12 = 17$. Il reste donc un complément de service possible de $28 - 17 = 11$ que l'on cherchera dans les opérations de niveau 1. Deux opérations sont candidates (2 et 6) mais ne peuvent être simultanément retenues; on retient donc celle qui a le temps opératoire le plus fort sans dépasser le

1. Voir Starr (1978, [395]), p. 202-204. Starr montre sur un exemple numérique simple la supériorité de la méthode de Kilbridge et Wester sur celle de Helgeson et Birnie. Voir aussi Buffa et Taubert (1972, [73]), p. 335-347.

- reliquat de 11 (opération 6). Le premier poste a donc une charge de travail de 27 dixièmes de minute et réalise les opérations 1, 5 et 6.
- Le deuxième poste se voit attribuer la dernière opération de niveau 1 qui reste, l'opération 2 ($t_2 = 6$), les deux opérations de niveau 2 peuvent être retenues car le cumul des temps opératoires reste inférieur à 28 ($t_2 + t_3 + t_7 = 6 + 6 + 8 = 20$). Trois opérations de niveau 3 sont candidates, mais une seule peut être retenue, celle qui a le temps opératoire le plus long possible, c'est-à-dire l'opération 4 qui « charge » le poste à 28 dixièmes (on peut remarquer qu'aucun temps n'est perdu dans ce poste).
 - Le troisième poste se voit affecter les trois opérations restantes (8, 9 et 10), avec une charge de travail de 25. Au total, cette répartition donne un travail effectif de $27 + 28 + 25 = 80$, c'est-à-dire le cumul de tous les temps opératoires pour un travail potentiel de $3 \times 28 = 84$, le temps mort correspond à $4 / 84 = 4,8\%$ du temps total, autrement dit la chaîne est équilibrée à $80 / 84 = 95,2\%$.

FIGURE 164

Définition d'une chaîne équilibrée en application de l'algorithme de Kilbridge et Wester



On peut remarquer qu'un meilleur équilibre entre les postes peut être obtenu en permutant les tâches 4 et 8, ce qui donne une charge de travail de 27 au poste 2 et de 26 au poste 3 ; cette solution permet en outre une production supérieure à celle requise (3644 contre 3500).

Les performances de la méthode de Kilbridge et Wester sont en général très bonnes lorsque le temps de cycle est relativement important, c'est-à-dire qu'un poste de travail comporte des opérations de plusieurs niveaux. Lorsque le cycle est

2. *Note de la page précédente.* L'exemple retenu est trop simple pour montrer toutes les implications de la méthode proposée. En effet, une opération A d'un niveau i , par exemple $i = 2$, n'est pas forcément suivie d'une opération B de niveau $i + 1$; B peut être par exemple de niveau 5, parce que sa réalisation est conditionnée non seulement par la réalisation préalable de A, mais aussi de celle d'autres opérations. Lorsque ce cas se produit, on mentionne dans le tableau de préparation de l'application de l'algorithme, la plage de niveau 2 - 4 au lieu du seul niveau 2, en face de l'opération A. Ceci implique que A se trouvera affectée à un poste comportant des opérations dont le niveau le plus faible est 2, 3, ou 4. L'intérêt de cette mention est le suivant. Supposons que l'on étudie le deuxième poste de travail et que celui-ci comporte les opérations de niveau 2 non prises en compte dans le premier poste de travail, plus des opérations de niveau 3, mais que l'on ne trouve pas de combinaison d'opérations de niveau 3 susceptible de compléter exactement le service de ce deuxième poste de travail ; on pourra examiner alors si un échange de l'opération A avec une opération de niveau 4 permet de saturer ce deuxième poste de travail. Si tel est le cas, cet échange peut être réalisé sans violer les contraintes d'antériorité. Rien ne s'oppose à ce que d'autres opérations que l'opération A soient dans le même cas, ce qui augmente la probabilité de saturer le deuxième poste de travail, ... et également l'exploration combinatoire.

faible et qu'il est nécessaire de faire appel à plusieurs postes de travail pour traiter des opérations d'un même niveau, davantage d'essais doivent être tentés (problème combinatoire pour un même niveau) sans qu'on ait la certitude de trouver de bons résultats.

I-1.3.2 Les algorithmes stochastiques

Arcus¹ a proposé en 1966 une procédure heuristique d'équilibrage de chaîne, connue sous le nom de COMSOAL (*Computer Method of Sequencing Operations for Assembly Lines*) qui est dotée d'assez bonnes performances. Elle illustre l'amorce d'un courant de résolution de problèmes hautement combinatoires, en s'appuyant sur la génération contrôlée d'un grand nombre de solutions faisables en conservant, tout au cours de ce processus, la meilleure solution trouvée. Dans la génération d'une solution, il y a construction progressive d'une solution, sans remise en cause des décisions antérieurement prises dans cette construction de solution; lorsque la décision que l'on doit prendre pour compléter la solution comporte plusieurs alternatives, un choix est effectué aléatoirement sur la base de probabilités calculées en fonction d'un critère prédéfini. Cette approche reprend une partie des principes qui fondent les algorithmes déterministes. L'optimalité de la solution n'est pas garantie mais comme dans ce type de problèmes, il existe généralement un très grand nombre de solutions ayant la même performance, on espère par ce biais atteindre l'une d'entre elles ou s'en approcher suffisamment.

La construction d'une séquence réalisable s'effectue en modifiant la procédure de Kilbridge et Wester comme suit: lorsque plusieurs opérations d'un même niveau sont «candidates à un poste de travail», on remplace la recherche d'une combinaison complétant exactement le service du poste étudié par une sélection aléatoire de cette opération, compatible avec le cycle imposé. Reprenons notre exemple pour illustrer cette procédure. Le choix entre les opérations 2 et 6, toutes deux du niveau 1, s'effectue aléatoirement en leur affectant, par exemple, la même probabilité de 50%. Si le tirage au sort sélectionne l'opération 2, le poste de travail suivant commencera par inclure l'opération 6 qui est celle de niveau le plus faible parmi les opérations non encore affectées. Dans une version plus performante, des probabilités inégales sont attribuées aux opérations candidates selon des principes plus ou moins sophistiqués et l'on peut tenir compte de contraintes autres que celles d'antériorité, qui sont les seules que nous avons prises en compte ici².

Table des matières

Index thématique

I-2 Ordonnement sur ligne de production ou d'assemblage de produits homogènes

Par définition, l'ordonnement choisi n'a pas d'incidence sur la charge de travail de chacun des postes, lorsque l'on est en présence de produits homogènes. Il joue cependant un rôle lorsque, sur un poste donné, on a le choix entre plusieurs modules ou composants, pour personnaliser le produit. En cas d'approvisionnement synchrone (défini en page 509), il est généralement demandé aux fournis-

1. Voir Arcus (1966, [19]); les performances de cette approche sont discutées dans Johnson et Montgomery (1974, [245], p. 173-174) ou Buffa et Taubert (1972, [73], p. 348-352), décrivent avec détail l'organigramme de traitement (ce qui ne fait que formaliser le raisonnement rapidement décrit ici). Voir également Nof, Wilhelm & Warnecke (1997, [318], p. 211-213)

2. Par exemple, le fait qu'il soit préférable qu'un même opérateur prenne en charge deux opérations portant sur deux pièces symétriques.

seurs de livrer certains modules assurant la variété (sièges automobiles personnalisés par leurs housses) dans l'ordre de montage de ces composants ou modules (on parle d'encyclage; voir [page 509](#)), ce qui présente un intérêt en cas de composants ou modules encombrants, coûteux ou très variés. La réquisition du fournisseur dans un approvisionnement synchrone lui laisse un délai très court pour livrer les modules dans l'ordre demandé, d'autant qu'il reste souvent une dernière opération pour différencier le produit (montage de la housse) suivant le principe de différenciation retardée (voir [pages 105 et 464](#)), dans le cadre d'un assemblage à la commande pour le fournisseur. La séquence définie dans l'**ordre de réquisition** transmis au fournisseur a souvent intérêt à lisser la consommation des références, ce qui implique que les solutions d'ordonnement ne sont pas équivalentes. S'il n'existe qu'un poste de travail pour lequel un ordre de réquisition est périodiquement passé, la solution est triviale. Si plusieurs postes de travail sont concernés, le problème devient rapidement complexe dans la mesure où le lissage ne peut être le meilleur pour tous les ordres de réquisition.

Dès 1983, Monden (1998, [\[307\]](#), chapitre XVI et annexe III) présente l'approche Toyota qui vise à définir un ordonnancement lissant la consommation des composants optionnels et propose un algorithme de résolution (*Goal chasing method I*, avec version simplifiée, le *Goal chasing method II*) qui, ayant tendance à repousser certains problèmes en fin de journée, a conduit à une modification intégrant une préoccupation de lissage de la charge de travail (1998, [\[307\]](#), chapitre XVII). L'approche initiale, orientée «juste à temps», a fait l'objet de nombreux articles, certains proposant des formulations alternatives, dont certaines intègrent une préoccupation de lissage de la charge de travail, ou des algorithmes plus performants¹.

Notons, enfin, que cette variété peut impliquer des changements de réglage de certaines stations de travail, différents selon le réglage antérieur mais sans incidence sur le temps opératoire lui-même. Une solution à ce problème peut être trouvée en utilisant l'approche décrite au [§ I-2.1, page 390](#), du [chapitre V](#).

I-3 Incidence des aléas sur le fonctionnement de la ligne

On examinera successivement l'incidence de l'arrêt d'un poste de travail sur le fonctionnement de la ligne ([§ I-3.1](#)) et celle du traitement immédiat de problèmes de qualité ([§ I-3.2, page 602](#)). Ces différentes observations sont valables également lorsque la ligne est dédiée à la fabrication ou l'assemblage de produits hétérogènes.

I-3.1 Incidence de l'arrêt d'un poste de travail sur le fonctionnement de la ligne

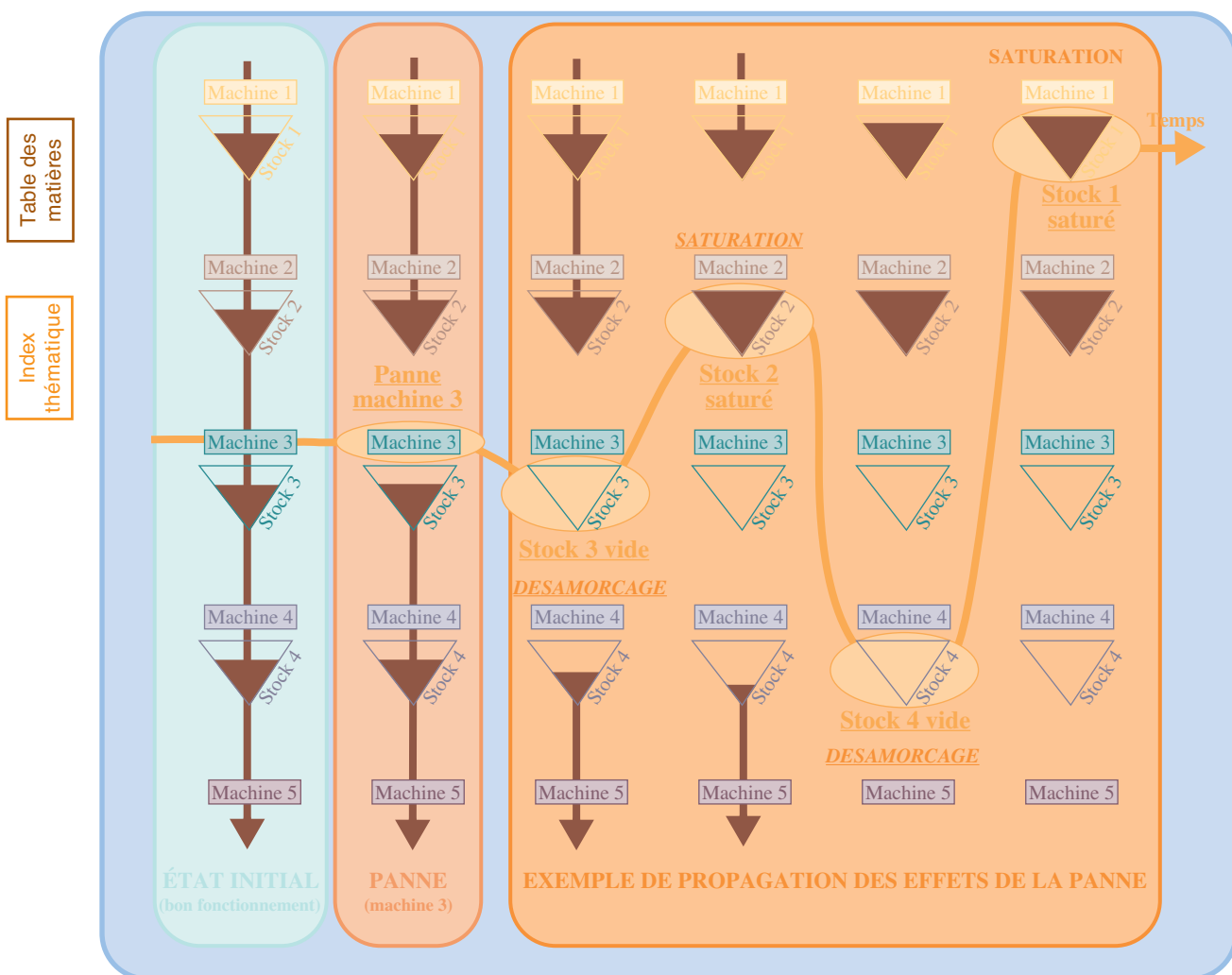
Quel que soit le système productif, d'inévitables incidents font que tout ne se passe pas comme prévu: temps opératoires réalisés différents des temps prévus, rupture d'approvisionnement, pannes de machines, absence inopinée d'un opérateur, problèmes de qualité en production... S'agissant d'une ligne de production ou d'assemblage, l'arrêt d'un poste de travail de la ligne conduit à l'arrêt de la

1. Par exemple Mintelburg (1989, [\[303\]](#)), Inman & Bulfin (1991, [\[238\]](#)), Kubiak (1993, [\[266\]](#)), Kubiak et Sethi (1991, [\[267\]](#)), Bautista, Companys & Corominas (1996, [\[40\]](#)), Joo & Wilhelm (1993, [\[252\]](#)), d'autres montrant que cette approche est un cas particulier d'une approche plus générale (Mintelberg & Sinnamon (1989, [\[304\]](#))).

ligne plus ou moins rapidement, en fonction de l'importance des stocks qui existe entre les postes de travail. Ces stocks-tampons permettent un certain découplage retardant la propagation d'un incident (on reviendra sur ce point à la page 624) mais il ne s'agit pas du seul mécanisme de découplage (comme cela a été déjà discuté à la page 512). Le mécanisme de paralysie progressif de la ligne est décrit dans la figure 165¹: la panne de la machine 3 empêche la poursuite de l'approvisionnement du stock-aval, provoquant:

- un vidage progressif du stock-aval, qui, une fois vide conduit à l'arrêt du poste suivant; ce mécanisme de **désamorçage** de la ligne se propage en aval chaque fois qu'un stock-tampon se vide; à chaque nouveau désamorçage, un nouveau poste de travail se trouve au chômage technique;
- une **saturation** de stock-amont qui conduit à un arrêt du poste-amont qui ne peut plus stocker sa production; il y a propagation de la saturation en amont, chaque fois qu'un stock-tampon devient plein; à chaque nouvelle saturation, un nouveau poste de travail se trouve au chômage technique.

FIGURE 165
Exemple de propagation des effets d'une panne



1. Repris de Giard et Pellegrin (1992, [198]).

Il découle de ce qui précède qu'en cas d'arrêt du travail sur l'un des postes de la ligne, l'absence de stocks-tampons conduit inéluctablement à la paralysie immédiate de toute la ligne. On peut ajouter que, dans le cadre d'une organisation en ateliers spécialisés de type *flow shop* (voir page 51 et page 362), l'arrêt d'un poste de travail se traduit également par une paralysie progressive du système par désamorçage et saturation, dans des conditions voisines de celles décrites ici, à condition de tenir compte du fait que la propagation est retardée d'une part par les plages d'inutilisation des postes de travail liée à l'ordonnancement (voir page 378) et, d'autre part, par le fait que les commandes peuvent « sauter » certains postes. Dans le cadre d'une organisation en ateliers spécialisés de type *job shop* (voir page 51), ces mécanismes de paralysie progressive du système par désamorçage et saturation se produisent également mais sont conditionnés par la variété des gammes des commandes lancées en production.

I-3.2 Incidence de la prise en compte immédiate des problèmes de qualité sur une ligne de production

La prise de conscience de l'importance de la gestion de la qualité (qui sera abordée en section IV, page 971, du chapitre XIV) a conduit les entreprises à passer progressivement du contrôle du produit à celui des processus. Le contrôle statistique des processus peut amener à arrêter un poste de travail pour effectuer des réglages, ce qui conduit à la paralysie progressive de la ligne, évoquée au paragraphe précédent.

Pour certains objets manufacturés complexes, comme les véhicules automobiles (que l'on prendra comme exemple pour illustrer cette classe de problèmes), un contrôle systématique est effectué à certaines étapes de production sur la ligne de production, pour s'assurer du respect de certaines caractéristiques qui jouent sur la sûreté de fonctionnement (opération de ferrage en tôlerie automobile) ou sur certaines caractéristiques techniques auxquelles le client est particulièrement sensible (peinture automobile). Ces contrôles systématiques ne sont pas effectués en fin de ligne mais juste après la dernière opération de transformation du produit aboutissant normalement au respect d'un certain nombre de spécifications (contrôle des caisses peintes à la sortie d'une cabine de peinture). La détection d'un problème de qualité conduit à rectifier les défauts constatés sur le produit avant qu'il ne continue à progresser sur la ligne de production. Souvent, ces retouches mobilisent des équipements spécifiques qui conduisent à retirer de la ligne le produit défectueux pour rectification des défauts constatés, le plus souvent sur une petite ligne dédiée¹ ou un atelier spécialisé. Une fois retouché et jugé conforme, le produit est réinjecté sur la ligne, juste après son point de dérivation (ce qu'illustre l'animation de la page 603²).

Ce processus de traitement de la qualité conduit à une perturbation du séquençage, appelée décyclage, dont on analysera les conséquences (§ I-3.2.1), avant de présenter des résultats analytiques permettant de mieux cerner le problème et de mieux évaluer les réponses à apporter (§ I-3.2.2, page 605)³.

1. On peut aussi repartir en arrière sur la ligne si cette rectification implique la même séquence de travail, ce qui est plus rare.

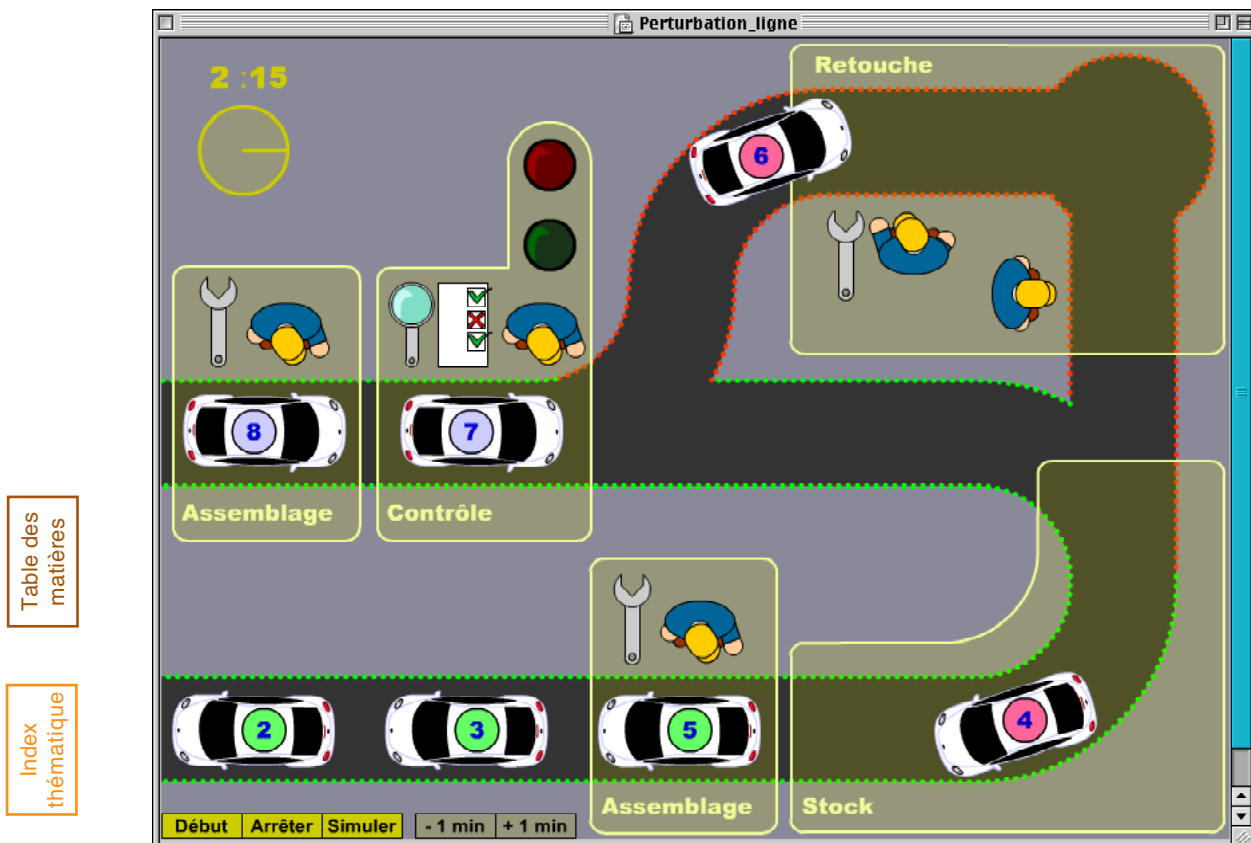
2. Voir avertissement de la note du bas de la page 8.

I-3.2.1 Génération de décyclages lors des retouches en dérivation de la ligne de production

Ce traitement en ligne des problèmes de qualité a deux conséquences, illustrées par le didacticiel associé à la [figure 166](#): il crée un décyclage et nécessite la présence d'un stock-tampon pour éviter tout désamorçage.

FIGURE 166

Incidence sur le séquençage, des retraits momentanés de produits pour rectification de problèmes de qualité



En effet, le séquençage des produits est perturbé: a priori, un produit qui fait l'objet d'un travail de retouche pendant deux cycles perd deux rangs, tandis que les deux produits suivants en gagnent un. Ce n'est pas si simple puisque chacun des deux produits suivants peut à son tour partir en retouche. Cette perturbation du séquençage, conduisant à des retards ou avances des produits en aval d'un point de contrôle de la qualité pouvant nécessiter des retouches « hors ligne », conduit à un **décyclage** de l'ordonnancement¹. Celui-ci est sans conséquence notable si, dans la phase d'assemble final, le produit est sans variété ou si la variété porte sur des modules interchangeables stockables facilement « en bord de chaîne ». Ceci implique une variété très limitée et un encombrement restreint des modules, pour

3. *Note de la page précédente.* Une analyse plus complète de ces processus peut être trouvée dans l'article de Danjou, Le Roy & Giard (2000, [117]).

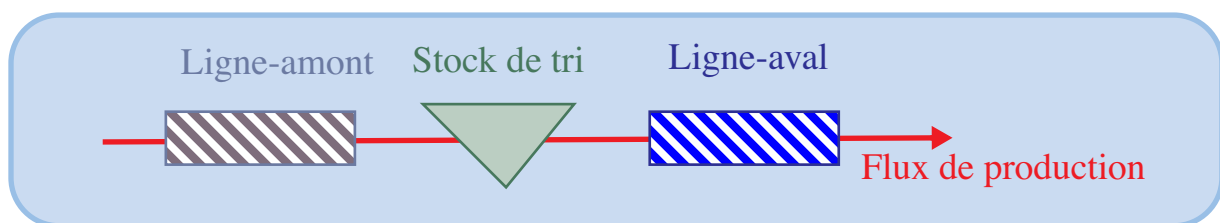
1. On parle de décyclage du film (défini à la [page 509](#)), dans l'industrie automobile. Dans cette métaphore, chaque image du film correspond à un véhicule répondant à une demande précise, caractérisée par une combinaison d'options de personnalisation. Certaines sont à prendre nécessairement dans une liste fermée (de moteurs, de couleurs, etc.), d'autres correspondent à un élément facultatif (toit ouvrant, etc.). La présence de ces dernières fait que l'on est en présence d'un produit hétérogène selon la terminologie définie en [page 589](#).

permettre la création de stocks de sécurité de ces modules interchangeable, montables à ce poste.

La séquence définie dans l'ordre de réquisition transmis au fournisseur n'a aucune chance d'être respectée si cet ordre est adressé avant passage au dernier point de contrôle qualité pouvant conduire à un retrait d'un produit pour mise en conformité; il s'ensuit que l'encyclage n'est pas correct, d'où une certaine désorganisation sur la ligne d'assemblage. Pour limiter l'importance du décyclage et de ses conséquences, certaines entreprises, en particulier celles de l'industrie automobile, positionnent entre la ligne de production et la ligne d'assemblage un stock-tampon particulier, qualifié de **stock de tri** (ou **tri-stock**) qui se caractérise par le remplacement de la règle du «premier arrivé - premier sorti» par d'autres règles (heuristiques) qui tendent principalement à restaurer le séquençage initial¹ et à conserver une certaine pertinence aux ordres de réquisition pilotant les approvisionnements de l'aval et passés aux fournisseurs avant perturbation de l'ordonnancement (figure 167). Ce réordonnement est glissant, puisque

FIGURE 167

Le système productif



chaque entrée ou sortie modifie la liste des candidats, et doit être résolu en temps réel, en raison de la taille du stock de tri et de la faiblesse du temps de cycle². La résolution de ce problème, rencontré par tous les constructeurs automobiles³, s'appuie sur un ensemble d'heuristiques⁴. Le paramétrage de ces heuristiques est délicat et la robustesse de ce module de pilotage dépend non seulement de l'importance des perturbations (*sensibilité aux aléas*) mais aussi de la structure

Table des matières

Index thématique

1. Dans l'industrie automobile, plusieurs types de stocks de tri existent: certains donnent un accès immédiat à tous les véhicules du stock (stock à accès direct), d'autres correspondent à un ensemble contigu de stocks parallèles fonctionnant en mode FIFO (stock à accès partiel, appelés «tiroirs»). Cette dernière configuration est utilisée de manière très différente selon les constructeurs, Renault utilise cette configuration avec stock de tri de 30 tiroirs de profondeur 4, alors que PSA utilise des stocks de tri de 4 tiroirs de profondeur 25 (Castelain et al., [87]); le AS/RS (*automated storage/retrieval system*) de l'usine d'assemblage d'Arlington de la General Motors comporte 192 positions (Feare, 1998, [147]). Dans les deux cas, ce stock intermédiaire permet donc non seulement de découpler les deux sous-systèmes adjacents en absorbant la désynchronisation des flux reçus et émis mais aussi de modifier l'ordre des véhicules sortant du stock, par rapport à celui des véhicules entrant dans le stock, pour rectifier l'incidence des inéluctables perturbations du séquençage initial.
2. Un temps de calcul de n cycles oblige en effet à exécuter l'ordonnement des n premiers véhicules du réordonnement; les arbitrages effectués sur les $n - 1$ derniers véhicules de cette liste exécutable ne peuvent pas prendre en compte les véhicules qui rentreront en stock postérieurement au départ du premier véhicule de la liste. Ce biais est sans doute faible si la taille du stock de tri est grande; il ne l'est sûrement pas en cas de stock de tri de faible taille. Dans ce dernier cas, l'arbitrage entre la qualité de la solution et la non prise en compte correcte de l'ensemble des possibles milite en faveur d'un temps de calcul d'un ou de deux cycles. Cela étant, la taille importante de certains stocks de tri à accès direct (cf. Feare, 1998, [87]) change considérablement les possibilités calculatoires; reste cependant à prouver que ce surdimensionnement est économiquement justifié.
3. Voir, par exemple, Castelain et al. [87] pour PSA et [307], p. 270 et sq. pour Toyota.
4. La combinaison d'heuristiques sophistiquées peut même donner naissance à un véritable système-expert (Monden, 1998, [307], p. 273).

des contraintes et de leur degré de saturation pour un ordonnancement donné (*sensibilité au mix des produits*).

Par ailleurs, pour éviter tout désamorçage de la ligne, il est indispensable d'avoir en aval du poste de contrôle de qualité un **stock-tampon** comportant initialement un nombre de produits ayant franchi avec succès cette étape de contrôle, égal au nombre maximal de cycles nécessaire aux rectifications. Dans la simulation, la retouche dure toujours deux minutes, ce qui conduit à un stock tampon initial de deux véhicules (temps de cycle égal à une minute); au cours de la simulation, vous pouvez constater que l'effectif du stock-tampon varie entre 0 et 2. Un temps de retouche aléatoire conduit habituellement à dimensionner le stock-tampon à un niveau inférieur au nombre maximal de cycles nécessaires à une retouche, ce qui revient à accepter une certaine probabilité d'occurrence d'un désamorçage¹.

I-3.2.2 L'approche analytique des conséquences du décyclage

On peut déterminer analytiquement la distribution de probabilité du décyclage (§ I-3.2.2.1) et ses conséquences sur les indicateurs de suivi de production (§ I-3.2.2.2, page 608) et sur les stocks de sécurité (§ I-3.2.2.3, page 609). Les résultats analytiques et exemples présentés dans ce § I-3.2.2, sont tirés de Giard, Danjou, Boctor (2001, [192] ou [193]) et de Giard & Danjou (1999, [194]).

I-3.2.2.1 Détermination de la distribution de probabilité du décyclage

Sous un certain nombre d'hypothèses peu restrictives², on peut déterminer la relation qui lie la distribution de probabilité $P(R = r)$ du nombre R entier, positif ou nul, de places perdues par un véhicule à un poste de contrôle ($0 \leq r \leq \rho$) et la distribution de probabilité³ $P(\Delta = \delta)$ du nombre δ de places gagnées ou perdues par un véhicule quelconque, compte tenu de l'ensemble des retards pris par les véhicules ordonnancés. Le raisonnement permettant d'aboutir à cette distribution (*relation 119, page 606*), en l'absence de transformation de l'ordonnancement par un stock de tri (voir *page 604*), est le suivant.

Table des
matières

Index
thématique

1. On peut déterminer le niveau optimal S^* de ce stock-tampon en explicitant l'arbitrage entre le coût de possession de l'encours dans ce stock et celui de l'arrêt de la chaîne, ce qui conduit, en première approximation reposant sur l'hypothèse implicite d'un «retour à la normale» entre deux désamorçages (hypothèse réaliste si la probabilité d'un désamorçage est faible), à utiliser un modèle de gestion calendaire, celui du marchand de journaux présenté à la *page 672*. Pour un coût unitaire c_p associé à la détention d'une unité détenue dans le stock tampon et un coût unitaire c_r associé au désamorçage pendant un cycle, le niveau optimal est tel que

$$P(X > S^*) = \frac{c_p}{c_p + c_r}, \text{ où } X \text{ est la durée (exprimée en nombre de cycles) de rectification du problème de qualité.}$$

2. - on est en régime de croisière, c'est-à-dire que l'on ne tient pas compte des problèmes rencontrés à la mise en place ou à l'arrêt du processus de production;
 - la durée de traitement dans les processeurs de la ligne est constante, le temps de cycle de la ligne permettant d'établir la correspondance entre le temps (date), le rang d'un véhicule et sa localisation;
 - la distribution de probabilité du nombre de rangs perdus est indépendante du nombre d'objets en retouche (pas d'accélération ou de ralentissement du rythme de travail en fonction de la charge de travail);
 - les événements «retouche d'un véhicule» sont indépendants, autrement dit le fait qu'un véhicule soit envoyé en retouche ne modifie pas la probabilité de passage en retouche des véhicules suivants;
 - en aval du poste de contrôle, le stock-tampon est suffisant pour éviter tout désamorçage.

3. La représentation de cette distribution est connue sous le nom de **courbe de décyclage**.

D'une manière générale, c'est-à-dire pour une distribution quelconque $P(R = r)$ dans laquelle r peut prendre n'importe quelle valeur entière comprise entre 0 et ρ , le véhicule qui occupe le rang j dans l'ordonnancement se présente devant le poste de contrôle au début de la période j . Après contrôle, il subit un retard r (positif ou nul), qui le fait sortir déclaré « sans défaut » et rentrer dans le stock-tampon à la fin de la période $j + r$, avec le rang $j + r$ si aucun des véhicules qui le précèdent n'est passé derrière lui. Les véhicules susceptibles de passer derrière lui ont nécessairement un rang à l'entrée du poste de contrôle compris entre $h = (j + r) - 1$ et $h = (j + r) - \rho$, que r soit positif ou nul. Dans le cas contraire, son rang sera égal à $j + r - x$, où x est le nombre de véhicules qui le précédaient et qui sont passés après. Une même valeur de décyclage δ peut être obtenue par différentes combinaisons de valeurs prises par r et x , δ pouvant varier entre $-\rho$ (cas où $R = 0$ et où tous les véhicules qui le précèdent partent en retouche) et $+\rho$ (cas où $R = \rho$ et où aucun des véhicules qui lui succèdent ne part en retouche). Sachant que l'on a nécessairement $0 \leq x \leq \rho$ et $0 \leq r \leq \rho$, les différentes combinaisons de valeurs prises par r et x sont données par $x = r - \delta$, pour $Max(0, \delta) \leq r \leq Min(\rho, \rho + \delta)$, et $-\rho \leq \delta \leq \rho$. La probabilité du décyclage Δ est alors donnée par la relation 119 :

$$P(\Delta = \delta) = \sum_{Max(0, \delta)}^{Min(\rho, \rho + \delta)} P(R = r) \cdot P(X = r - \delta), \text{ pour } -\rho \leq \delta \leq \rho \quad \text{relation 119}$$

qui utilise la relation récurrente¹ 120 :

$$P(X = x) = \frac{N_x}{x!} \cdot \Pi, \text{ où } N_x = \sum_{t=1}^x (-1)^{t-1} \cdot \frac{(x-1)!}{(x-t)!} \cdot s_t \cdot N_{x-t}, \text{ avec } N_0 = 1,$$

$$s_k = \sum_{i=1}^{\rho} \left[\frac{P(R \geq i)}{P(R < i)} \right]^k \text{ et } \Pi = \prod_{i=1}^{\rho} P(R < i) \quad \text{relation 120}$$

Table des matières

Index thématique

On peut illustrer ces relations par un exemple numérique s'appuyant sur une probabilité de retouche $P(R > 0) = p = 10\%$ ou 15% ou 20% et les deux distributions de probabilités conditionnelles (dissymétriques) du tableau 172, ce qui conduit aux distributions de décyclage du tableau 172, illustrées à la figure 168 (le caractère bimodal de ces courbes de décyclage est caractéristique de ce type de courbe, pour des distributions conditionnelles unimodales).

TABLEAU 172
Distributions conditionnelles $P(R = r / R > 0)$ utilisées

Probabilité conditionnelle $P(R = r / R > 0)$	$r = 1$	$r = 2$	$r = 3$	$r = 4$	$r = 5$	$r = 6$	$r = 7$	$r = 8$	$r = 9$	$r = 10$
Dissymétrique «gauche»	10%	29%	22%	14%	10%	5%	4%	3%	2%	1%
Dissymétrique «droite»	1%	2%	3%	4%	5%	10%	14%	22%	29%	10%

1. On a $P(X = 0) = \Pi$, $P(X = 1) = \Pi \cdot N_1$, avec $N_1 = s_1$, $P(X = 2) = \frac{N_2}{2!} \cdot \Pi$, avec $N_2 = (N_1)^2 - s_2$,
 $P(X = 3) = \frac{N_3}{3!} \cdot \Pi$, avec $N_3 = (s_1)^3 - 3s_2s_1 + 2s_3$.

FIGURE 168

Distribution de probabilités du décyclage d'un véhicule, pour $\rho = 10$ et différentes valeurs de probabilité de retouche

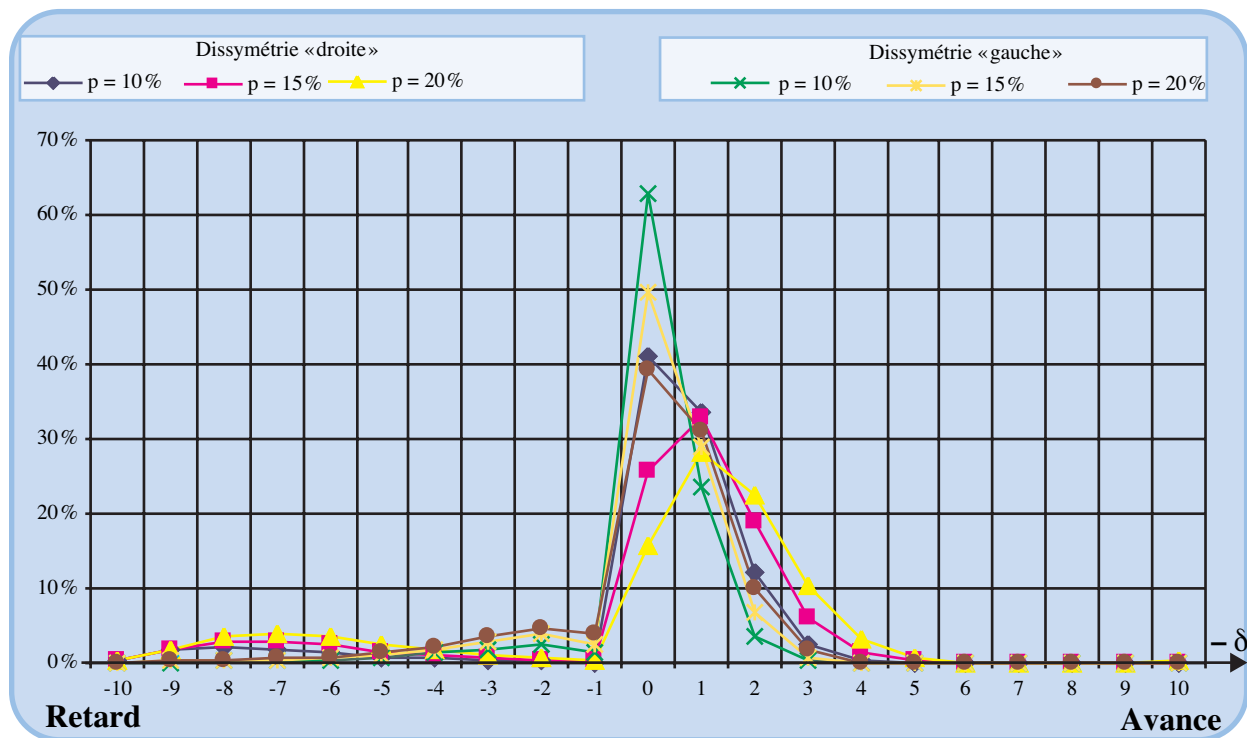


Table des matières

TABLEAU 173

Distribution de probabilités du décyclage d'un véhicule, pour $\rho = 10$ et différentes valeurs de probabilité de retouche

Index thématique

Probabilité de retouche p		Dissymétrie «droite» de la distribution conditionnelle			Dissymétrie «gauche» de la distribution conditionnelle		
		10%	15%	20%	10%	15%	20%
Avance	-10	0,46%	0,45%	0,39%	0,07%	0,09%	0,09%
	-9	1,70%	1,89%	1,82%	0,17%	0,22%	0,26%
	-8	2,23%	3,01%	3,44%	0,27%	0,37%	0,46%
	-7	1,89%	2,98%	3,96%	0,37%	0,52%	0,66%
	-6	1,37%	2,34%	3,43%	0,47%	0,67%	0,86%
	-5	0,87%	1,58%	2,49%	0,84%	1,17%	1,44%
	-4	0,56%	1,02%	1,65%	1,26%	1,78%	2,23%
	-3	0,39%	0,68%	1,08%	1,94%	2,73%	3,41%
	-2	0,28%	0,48%	0,74%	2,65%	3,79%	4,81%
-1	0,18%	0,32%	0,51%	1,55%	2,61%	3,77%	
0		41,16%	25,65%	15,73%	62,99%	49,68%	39,18%
Retard	1	33,74%	33,00%	28,13%	23,63%	28,84%	31,10%
	2	12,24%	18,83%	22,48%	3,53%	6,69%	9,95%
	3	2,58%	6,24%	10,44%	0,27%	0,79%	1,62%
	4	0,35%	1,33%	3,11%	0,01%	0,05%	0,15%
	5	0,03%	0,19%	0,62%	0,00%	0,00%	0,01%
	6	0,00%	0,02%	0,08%	0,00%	0,00%	0,00%
	7	0,00%	0,00%	0,01%	0,00%	0,00%	0,00%
	8	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%
	9	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%
	10	0,00%	0,02%	0,37%	0,00%	0,00%	0,00%

Cette distribution théorique du décyclage est importante en pratique pour plusieurs raisons :

- elle permet de mieux comprendre les perturbations induites par le décyclage sur la pertinence de l'approvisionnement de modules respectant un encyclage établi avant passage sur les postes de la ligne pouvant nécessiter des retouches, puisque cette distribution de probabilité est celle du retard ou de l'avance du produit sur lequel un module spécifique doit être monté ;
- elle permet d'établir une relation de cause à effet entre les améliorations de la qualité (se traduisant par une baisse en moyenne mais, encore plus, en dispersion de la distribution des retards pris dans les retouches) et la diminution des perturbations induite par les décyclages sur la pertinence des approvisionnements respectant un encyclage donné ;
- elle permet de porter un jugement pertinent sur certains indicateurs de performance utilisés dans le suivi en production (§ I-3.2.2.2) et donne des indications sur le niveau du stock de sécurité à constituer pour un module sur la ligne d'assemblage, en aval de ce point de contrôle (§ I-3.2.2.3, page 609).

L'existence d'un stock de tri permettant de modifier un ordonnancement perturbé ne permet plus de relier simplement la distribution des retards en retouche et celle du décyclage, puisqu'interviennent les algorithmes du stock de tri qui se substituent à la règle du « premier entré - premier sorti » (voir page 604). Dans ce cas, ce qui sera dit sur les indicateurs de performance et les stocks de sécurité ne sera pas pertinent.

I-3.2.2.2 Incidence du décyclage sur les indicateurs de suivi de l'ordonnancement

L'un des indicateurs de performance classiquement utilisé dans l'environnement de production en ligne est celui du pourcentage de produits effectivement achevés au cours d'une période donnée, par exemple la journée, par rapport à l'ensemble des produits que l'ordonnancement initial avait désigné comme devant sortir au cours de cette période. En l'absence de transformation de l'ordonnancement par un stock de tri, la relation analytique liant la distribution de probabilités de cet indicateur à celle du nombre de rangs perdus par un véhicule faisant l'objet de retouches, permet de porter un jugement sur la performance obtenue, tenant compte du caractère aléatoire des valeurs prises par cet indicateur ; c'est donc dans une perspective d'étalonnage de tableau de bord que cette relation est établie.

L'indicateur est calculé à la sortie d'un poste d'une ligne (le dernier poste de la ligne ou tout autre poste), pour une fenêtre de temps donnée (la journée, par exemple). Cette période se définit par une durée de H périodes élémentaires définies par le cycle de base de la ligne. Ce poste traite donc H produits au cours de cette période : le premier produit quittant le poste à la fin de la première période élémentaire et le $H^{\text{ème}}$ produit, quittant le poste à la fin de la $H^{\text{ème}}$ période. La liste Ω des produits devant initialement sortir au cours de cette fenêtre de temps différera de la liste Ω' des produits effectivement sortis : seul le sous-ensemble $\Omega \cap \Omega'$ de l'ensemble Ω' , respectant les prévisions. Si l'on note Z , le nombre de produits de Ω' n'appartenant pas à Ω , l'indicateur $(H - Z) / H$ est un bon indicateur du respect de la prévision. Le poste sur lequel la mesure est effectuée étant supposé ne pas subir de perturbations (pannes, ruptures d'approvisionnement, etc.), l'indi-

cateur mesure la performance du sous-système productif amont délimité par le poste ω auquel on s'intéresse et le poste α en amont du poste ω , qui est dernier poste, pour lequel on est certain, d'une part, que l'ordonnancement utilisé pour déterminer la liste Ω est nécessairement respecté et, d'autre part, que ce poste ne peut être à l'origine de problèmes de qualité qui pourront être détectés par l'un des postes de contrôle susceptibles d'envoyer des produits en retouche, postes nécessairement situés entre les postes α et ω ¹. En l'absence de perturbation, le temps qui s'écoule entre le passage d'un véhicule dans le poste α et celui dans le poste ω est constant et peut être important par rapport à la fenêtre de temps retenue. Dans ces conditions, l'indicateur de performance est doté d'une certaine inertie, dans la mesure où il intègre les conséquences d'événements qui se sont produits en dehors de la fenêtre de temps. Par ailleurs, la comparaison au cours du temps d'indicateurs calculés pour des fenêtres de temps de longueurs différentes s'en trouve affectée.

Le nombre de véhicules sortant de la fenêtre de temps est $Z = X + Y$, somme de deux variables aléatoires indépendantes (si $H > 2\rho$), où X est le nombre de «véhicules devant être traité en début de fenêtre de temps et sortant de cette fenêtre» et Y , le nombre de «véhicules devant être traité en fin de fenêtre de temps et sortant de cette fenêtre». Dans le cas général ayant conduit à la [relation 120 de la page 606](#), on démontre la [relation 121](#) qui lie la distribution de probabilité de l'indicateur à celle des retouches. La [figure 169 de la page 610](#) illustre l'utilisation de cette [relation 121](#), en reprenant l'exemple précédent ($\rho = 10$, $p = 20\%$, distribution de probabilité conditionnelle dissymétrique à gauche du [tableau 172 de la page 606](#)), pour une durée $H = 120$.

$$\mathcal{L}\left(\frac{H-Z}{H}\right) = \mathcal{L}(Z) = \Pi \sum_{\text{Max}(0, z-\rho)}^{\text{Min}(\rho, z)} \frac{N_x}{x!} \left[P(R=0) \left\{ \frac{N_{z-x}}{(z-x)!} \right\} + P(R>0) \left\{ \frac{N_{z-x-1}}{(z-x-1)!} \right\} \right]$$

relation 121

I-3.2.2.3 Incidence du décyclage sur les stocks de sécurité des modules à assembler

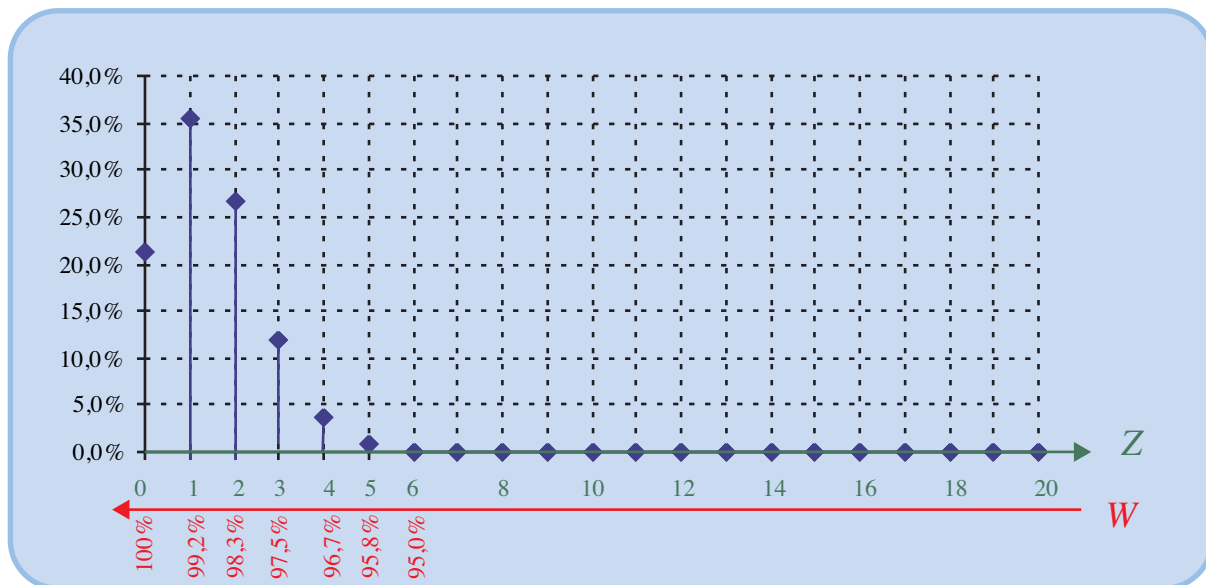
Le problème du stock de sécurité semble relever d'une généralisation de la démarche précédente, dans la mesure où l'on s'intéresse à la demande d'une pièce pendant une fenêtre de temps $\{t_1; t_2\}$ sur un poste donné. Les choses ne sont pas si simples pour deux raisons :

- les véhicules qui rentrent dans la fenêtre de temps (qui sépare deux approvisionnements périodiques) ou en sortent ne sont pas tous consommateurs du composant à gérer (l'approche retenue a banalisé ces véhicules, dans le sens où leur position initiale est une information perdue);
- les échanges de véhicules entre la fenêtre de temps $\{t_1; t_2\}$ et les fenêtres *antérieures* à t_1 ne sont pas à prendre en compte; en effet, les livraisons cumulées jusqu'à celle effectuée en t_1 sont censées couvrir les demandes allant jusqu'en t_2 ; dans ces conditions, à supposer que le stock de sécurité se

1. En cas de multiplicité des postes de contrôle pouvant conduire à des retouches, on se ramène sans perte de généralité à un poste de contrôle unique caractérisé par une distribution des retards combinant les distributions de retard de chacun des postes de contrôle (problème classique de convolution).

FIGURE 169

Distribution de probabilités de l'indicateur de performance $W = (120 - Z)/120$ pour $\rho = 10$ et $p = 20\%$ et distribution de probabilité dissymétrique à gauche



soit avéré suffisant pour éviter tout désamorçage, les véhicules devant consommer le composant considéré avant t_2 et s'étant présentés avant t_2 sont normalement pris en compte par les livraisons effectuées. Seules les permutations de véhicules autour de cette date t_2 peuvent conduire à un désamorçage à contrer par un dimensionnement approprié du stock de sécurité.

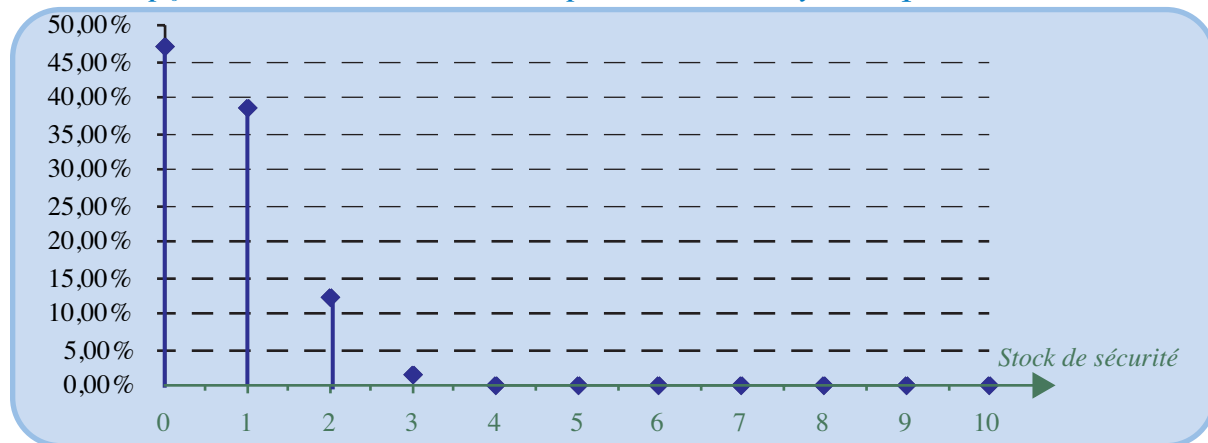
La relation 120 de la page 606 donnant la probabilité que x véhicules devant être traités avant t_2 soient traités postérieurement à cette date fournit les bases d'une solution. Sur les x véhicules qui passent après t_2 , x_1 consomment le composant optionnel tandis que sur les x véhicules qui passent avant t_2 , x_2 consomment ce composant. Si $x_1 > x_2$ aucun problème ne se pose, la consommation effective étant inférieure à la consommation prévisionnelle. Si $x_2 > x_1$ il est nécessaire d'avoir un stock de sécurité de $x_2 - x_1$ pour éviter tout désamorçage. Dans les pires conditions, on aura $x_2 = x$ et $x_1 = 0$, ce qui conduit à dimensionner le stock de sécurité à x qui constitue une borne supérieure. La figure 170, page 611, donne la distribution de probabilité du stock de sécurité **maximum** pour l'exemple précédent ($\rho = 10$, $p = 20\%$, distribution de probabilité conditionnelle dissymétrique à gauche du tableau 172 de la page 606). On constate qu'un stock de sécurité de 3 unités suffit à faire face aux aléas, tant que les perturbations restent de caractéristiques stables. Les hypothèses que l'on pourra formuler sur le fait que le composant optionnel est ou non consommé de façon régulière joue sur le niveau de compensation entre les consommations du composant par les véhicules qui font l'objet de la permutation étudiée.

On notera que le *niveau du stock de sécurité est indépendant* de l'intervalle de temps séparant deux livraisons, et donc *du niveau de la demande* couverte par cette livraison, contrairement à ce qui se passe dans le cas d'un approvisionnement destiné à couvrir des demandes aléatoires indépendantes¹. Ce stock de sécurité dépend avant tout de l'importance des perturbations de l'ordonnancement initial

qui résultent du niveau de qualité en production et de l'organisation mise en place pour les retouches jugées nécessaires.

FIGURE 170

Distribution de probabilité du stock de sécurité maximal pour $\rho = 10$ et $p_0 = 20\%$ et distribution de probabilité dissymétrique à droite



SECTION II LIGNES DÉDIÉES À LA FABRICATION DE PRODUITS HÉTÉROGÈNES

Comme dans la section précédente, on examinera d'abord le problème de la conception d'une ligne de production ou d'assemblage de produits hétérogènes (§ II-1) puis celui de son utilisation dans son aspect d'ordonnancement (§ II-2, page 614).

Table des matières

II-1 Conception d'une ligne de production ou d'assemblage de produits hétérogènes

Index thématique

La conception de ce type de ligne est beaucoup plus complexe car, par définition (page 589), l'hétérogénéité conduit à ce que le temps opératoire de certains postes varie en fonction du type de produits (indice p). Plusieurs voies, non exclusives, peuvent être explorées :

- Le travail supplémentaire à effectuer sur certaines opérations peut être réalisé par du personnel en **renfort**, pour faire en sorte que le temps de cycle soit respecté, auquel cas, on se ramène au problème précédent, sur la base du travail minimal à effectuer sur ce poste. La gestion de ce renfort de personnel peut être difficile, car il doit être partagé entre plusieurs postes susceptibles de connaître des surcharges épisodiques.

1. *Note de la page précédente.* Dans les différents modèles du chapitre XI, on montre que le stock de sécurité, pour une probabilité de rupture donnée et dans le cas d'une demande suivant une loi Normale, dépend de l'écart-type de la demande. On sait par ailleurs que la variance de la demande d'une somme de demandes aléatoires indépendantes (portant sur des périodes consécutives) est égale à la somme des variances de ces demandes indépendantes; il s'ensuit que le stock de sécurité croît quand la période calendaire croît. Ceci reste vrai lorsque les variables aléatoires ne sont pas normales. L'une des caractéristiques du problème traité ici est que, contrairement à ceux classiques de gestion des stocks, les demandes d'un composant sur une période ne peuvent respecter l'hypothèse d'indépendance des demandes élémentaires puisque le retard de n rang d'un véhicule implique l'avance de 1 rang des $n - 1$ véhicules qui le suivent. On est là en présence d'une problématique méconnue par la littérature spécialisée du domaine. La recherche du « zéro stock » se traduit donc par la création d'une nouvelle problématique de gestion des stocks.

- On peut faire suivre un poste sur lequel le travail d'une opération varie en fonction du type de produits, d'un **stock-tampon** d'une taille suffisante pour éviter les phénomènes de saturation et de désamorçage. Dans ce cas, il faut que, dans la conception de la ligne, le travail moyen associé à cette opération soit défini au-dessus de la charge moyenne pour non seulement permettre de compenser les surcharges de travail par des sous-charges de travail mais encore de pouvoir faire face au problème posé, par une succession de produits impliquant une surcharge de travail. Ce stock-tampon ne pouvant être extensible, il est évident que l'ordonnancement ne peut ignorer totalement ce problème d'espacement entre produits demandant plus de travail que les autres sur certains postes.
- Lors de la conception de la ligne, on peut faire l'hypothèse que l'on trouvera toujours un ordonnancement évitant l'arrêt de la ligne par saturation ou désamorçage, et travailler à partir de charges moyennes. Dans cette perspective, on peut limiter, voire faire disparaître, le stock-tampon. C'est ce type d'approche, impliquant une bonne prise en compte des problèmes d'ordonnancement au stade de la conception de la ligne, que l'on privilégie de nos jours.

Lorsque l'opérateur se déplace sur la ligne avec le produit, l'amplitude de ses déplacements varie selon la quantité de travail à effectuer. Dans l'animation de la [figure 171 de la page 613](#), la ligne travaille avec un temps de cycle de 60 secondes et effectue des opérations d'assemblage sur des véhicules comportant ou non un toit ouvrant. Sur le second poste de cette ligne, le travail à effectuer sur un véhicule à toit ouvrant est de 90 secondes, contre 45 secondes pour un véhicule n'en comportant pas. Le dépassement de 30 secondes se traduit par un déplacement additionnel de l'opérateur; il est compensé si au moins les deux véhicules qui suivent un véhicule à toit ouvrant n'ont pas de toit ouvrant, comme l'illustre l'animation dans laquelle il a été choisi de ne pas mettre de stock-tampon en aval de ce poste à temps de travail variable. On peut ajouter que si les arrivées dans chaque station sont cadencées à la minute, celles du poste 3 s'effectuent 90 secondes après celles du poste 2 (ce qui implique une attente des véhicules sans toit ouvrant devant la troisième station).

La conception de la ligne dépend alors étroitement de la structure de la demande devant être traitée par la ligne (α_p , étant la part que représente le produit p dans la demande totale en volume).

La formulation du problème est une adaptation de celle proposée au [§ I-1.2, page 594](#). Une approche possible consiste à formuler le problème en travaillant sur une période donnée¹ mais les résultats peuvent varier en fonction de la période. Il est aussi simple de reprendre le principe des nomenclatures de planification (voir [page 465](#)) et de remplacer le temps opératoire de i qui varie maintenant en fonction du produit p (t_{ip}) par sa moyenne pondérée de ces temps opératoires,

1. Voir Nof et al. 1997, [318], p. 233 & sq. et Scholl, 1999, [373], p. 79 & sq.

FIGURE 171

Espacement entre produits hétérogènes permettant la compensation de la charge de travail sur un poste à durée de travail variable selon les produits

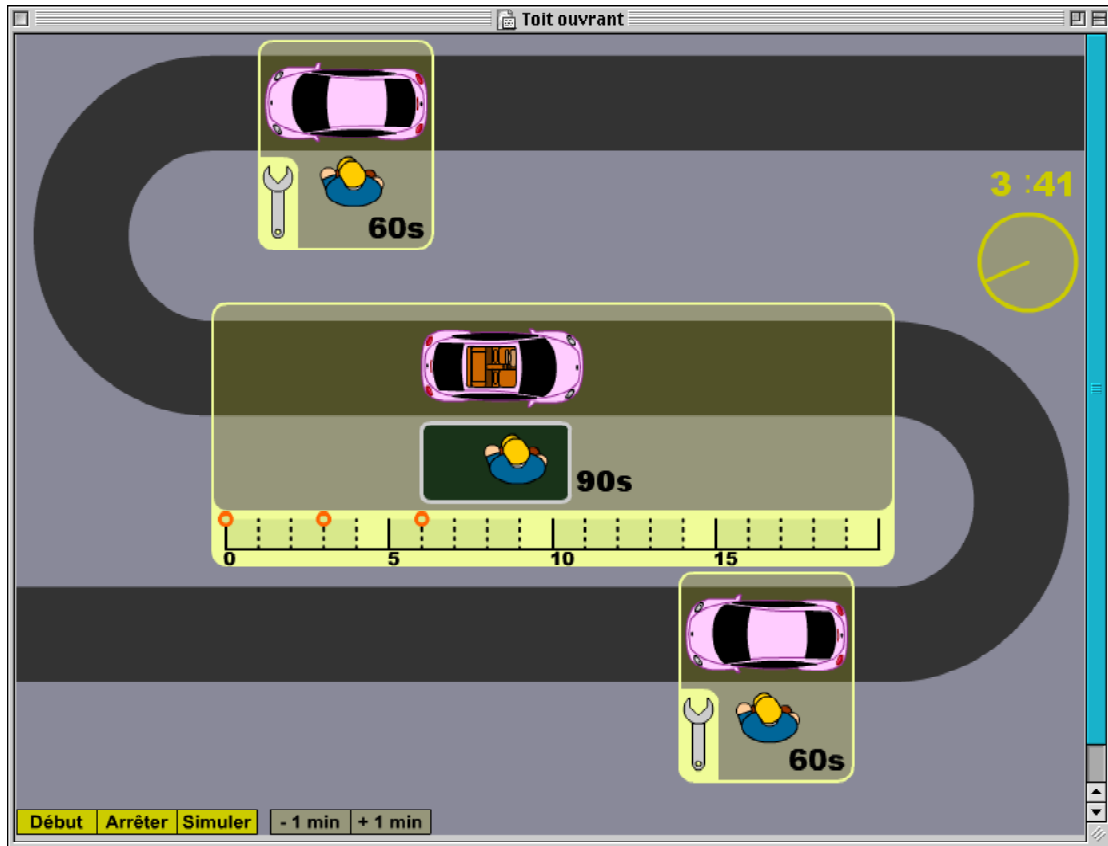


Table des matières

Index thématique

$t_i = \sum_p \alpha_p t_{ip}$, ce qui revient à remplacer $(\sum_i t_i x_{ik})$ dans la relation 114 de la page 595 par $(\sum_i (\sum_p \alpha_p t_{ip}) x_{ik})$ et conduit à la relation 122.

$$\sum_i (\sum_p \alpha_p t_{ip}) x_{ik} \leq c, \text{ pour } k = 1, \dots, K \tag{relation 122}$$

Au remplacement près de la relation 114 par la relation 122, les deux formulations du § I-1.2, page 594 sont inchangées. La pertinence de cette adaptation est conditionnée par le respect de deux hypothèses: l'absence de variation de la composition de la demande (stabilité des α_p) et l'existence d'ordonnancements permettant d'espacer suffisamment les produits à surcharge de travail.

Les hypothèses de travail formulées lors de la conception d'une ligne, c'est-à-dire plusieurs mois avant sa mise en service, sont rarement respectées. Pour limiter les risques de saturation et de désamorçage qu'implique le non-respect de ces hypothèses, on est nécessairement amené:

- à prendre des marges (par surestimation de la part de produits impliquant une surcharge de travail, dans la demande et donc à sous-estimer celle des autres, afin de respecter la contrainte $\sum_p \alpha_p = 1$) qui génèrent une sous-utilisation des postes à contenu de travail variable; en tout état de cause, cette saturation totale de ces contraintes est difficilement envisageable¹ en raison de leurs

interdépendances (un même véhicule peut être concerné par plusieurs contraintes) et de l'existence de perturbations conduisant à une modification du séquençement initial;

- à introduire un stock-tampon minimal qui peut avoir aussi pour objet de retarder la nécessité de redéfinir la ligne, en cas de dérive dans la structure de la demande;
- à prendre des options techniques, dans la conception de la ligne, qui en permettent une redéfinition rapide (boucles de rétroaction de la [figure 162](#)), ce qui implique des choix laissant une certaine marge de manœuvre et généralement plus onéreux;
- à fiabiliser le système productif pour réduire le décyclage et son incidence (on reviendra sur ce point au [§ II-3, page 619](#));
- à porter une grande attention aux techniques d'ordonnancement.

II-2 Ordonnancement sur ligne de production ou d'assemblage de produits hétérogènes

Dans le cas d'une fabrication / assemblage de produits hétérogènes sur une ligne, l'ordonnancement (appelé parfois **engagement** ou **programme de production**) est plus complexe que si l'on a affaire à des produits homogènes, dans la mesure où la variabilité du temps de travail sur certaines stations conduit à respecter un certain espacement entre les produits (comme on l'a illustré avec l'animation de la [figure 171, page 613](#)). Pour rendre plus concret notre raisonnement, nous nous appuyerons encore sur l'exemple de la construction automobile.

Dans de nombreuses industries travaillant à la commande, sur lignes de production ou d'assemblage, on dispose de carnets de commandes sur plusieurs jours de travail (dont une partie importante peut ne pas correspondre à des commandes de client final identifié) et il est évident que l'on ne fait pas d'ordonnancement sur la totalité des commandes. Le travail s'effectue en deux temps.

- On procède d'abord à une répartition globale des commandes en les affectant à des journées de production, en tenant compte de la date de livraison et de leurs caractéristiques. Cette procédure a été qualifiée d'**ordonnancement agrégé** dans la [figure 164 de la page 598](#); aucun séquençement des commandes n'est effectué à ce niveau. L'ensemble affecté à chacune des journées à venir tient compte de critères commerciaux mais aussi de critères de production, puisqu'il s'agit d'éviter que le problème d'ordonnancement détaillé ne soit trop difficile à résoudre et/ou trop coûteux.
- Seul l'ensemble du premier jour fait ensuite l'objet d'un **ordonnancement détaillé**. C'est à ce type d'ordonnancement que nous nous intéresserons dans ce [§ II-2](#).

Le jour suivant, l'ordonnancement agrégé est adapté pour tenir compte de nouvelles commandes, dans le cadre de l'horizon retenu pour cet ordonnancement. Dans la mesure du possible, on cherche à ne pas trop perturber la répartition des tout premiers jours car les informations correspondantes auront été transmises aux fournisseurs. Par exemple, le fournisseur de sièges de voiture est avisé du

1. Toutes les entreprises du secteur automobile gardent d'importantes marges de sécurité pour les raisons évoquées ici (Rachamadugu & Yano, 1994, [\[355\]](#)).

nombre prévisionnel de housses d'un certain type qui seront montées sur des sièges à livrer dans 3 jours mais, à ce moment-là, les informations permettant de définir l'encyclage ne sont pas encore disponibles.

L'ordonnancement doit tenir compte de contraintes techniques et de considérations économiques.

- Les contraintes techniques d'ordonnancement résultent de la variabilité du temps opératoire de certains postes de la ligne de montage, en raison d'un travail spécifique lié à une option à monter (par exemple, présence d'un toit ouvrant). Pour ces postes, qualifiés de **critiques en variabilité de temps opératoires**, un véhicule doté d'une option qui conduit à une quantité de travail, supérieure au temps de cycle, doit être suivi de véhicules ayant une quantité de travail inférieure au temps de cycle, jusqu'à ce que la surcharge de travail du premier véhicule soit compensée par le cumul des marges inutilisées par les véhicules suivants (ce qui a été illustré avec l'animation de la [figure 171, page 613](#)). Certaines contraintes sont techniquement intangibles tandis que d'autres sont levables au prix de renforts momentanés en personnel, sur les postes de la ligne réalisant ce travail supplémentaire optionnel.
- Sur certains postes de la ligne de production, qualifiés de **postes critiques en séquençement**, le changement d'une option de personnalisation du véhicule (couleur dans un poste de peinture, par exemple), conduit à supporter un coût de réglage. Par exemple, le type d'options «couleur du véhicule» peut comporter quelques dizaines d'options (les options d'un même type d'options étant nécessairement exclusives); si le nouveau véhicule arrivant en cabine de peinture a l'option «bleue» du type d'option «peinture» alors que la séquence (plus ou moins importante) de véhicules précédents avait l'option «rouge», il faut procéder au nettoyage de pistolet en cabine de peinture. Pour des raisons économiques, on cherche à limiter cette opération qui correspond à un temps de lancement, éventuellement masqué, fonction du séquençement retenu (voir [page 388](#)). Le temps opératoire n'est pas affecté par cet ordre de passage.

Plusieurs formulations de cet ordonnancement détaillé sont possibles et correspondent à des configurations différentes¹. Celle que nous retiendrons (adaptée de Giard, 1997, [184]) ne traite que les lignes cadencées par un temps de cycle prédéterminé, l'arrivée des produits dans chaque station s'effectuant avec la même cadence (ce qui n'est pas forcément vrai pour leurs sorties), et dans lesquelles l'espace de travail de l'opérateur sur une station n'empiète pas sur celui des stations adjacentes.

La détermination de l'ordonnancement de la production d'une journée (ou une demi-journée) peut faire appel à la programmation mathématique. Cette formali-

1. Scholl (1999, [373], p. 94 et sq.) ainsi que Nof, Wilhelm & Warnecke (1997, [318], p. 340 et sq.) présentent des modèles orientés vers le traitement de lignes non cadencées, ainsi qu'un modèle proposé par Yano et Rachamadugu (1991, [355]) concernant l'ordonnancement de lignes cadencées et intégrant la détermination des temps de renforts nécessaires pour passer outre des contraintes d'espacement; cette approche s'appuie sur une description des déplacements des opérateurs mais celle des renforts, entre les stations qui les sollicitent, ne sont pas pris en compte. Une autre formulation est tournée vers la définition d'une séquence-type lançant au moins une fois tous les types de produits et qui est susceptible d'être dupliquée au cours de la journée (*Minimum Part Set*); cette approche est pertinente lorsque la variété est faible.

sation permet de bien se mettre d'accord sur le problème à résoudre et facilite, si nécessaire, la mise au point d'heuristiques permettant de résoudre un problème d'ordonnement, habituellement de grande dimension, en un temps acceptable.

Soit x_{ij} une variable binaire valant 1 si le véhicule i ($i = 1, \dots, N$) a le rang j . Un seul véhicule i peut avoir le rang j , ce que traduit la [relation 123](#):

$$\sum_{i=1}^N x_{ij} = 1, \text{ pour } j = 1, \dots, N \quad \text{relation 123}$$

et le véhicule i se voit attribuer nécessairement un seul rang j , ce que traduit la [relation 124](#):

$$\sum_{j=1}^N x_{ij} = 1, \text{ pour } i = 1, \dots, N \quad \text{relation 124}$$

On note k l'un des postes de la ligne d'assemblage, en ne nous intéressant en fait qu'aux seuls postes affectés par cette variabilité de la charge de travail (sous-ensemble \mathcal{K}). La durée du travail requis par le véhicule i sur le poste de travail k est notée θ_{ik} et le temps de cycle est noté $\bar{\theta}$, l'arrivée des véhicules sur ce poste étant cadencée par ce temps de cycle. Si l'on note h , le rang du véhicule positionné sur le poste de travail k (avec $h = 1, \dots, N$), le temps de travail à exécuter sur ce

véhicule de rang h est $\sum_{i=1}^N \theta_{ik} x_{ih}$. L'écart entre cette durée et le temps de cycle

$\sum_{i=1}^N \theta_{ik} x_{ih} - \bar{\theta}$ correspond à un dépassement s'il est positif et, dans le cas contraire,

à une éventuelle possibilité de rattrapage d'une surcharge de travail antérieure.

Notons R_{kh} l'excédent de charge de travail à résorber après traitement du véhicule de rang h ($R_{k0} = 0$), sachant que ce report est limité par une quantité de travail $R_{k,max}$, liée au déplacement maximum du véhicule sur le convoyeur (comme illustré par l'animation de la [figure 171, page 613](#)). Ce report, qui ne peut être négatif, intègre, si elle existe, la charge de travail non résorbée après traitement du véhicule de rang $h - 1$. Il s'ensuit que cet excédent est:

$$R_{kh} = \text{Max} \left\{ 0, \text{Min} \left[R_{k,h-1} + \sum_{i=1}^N \theta_{ik} x_{ih} - \bar{\theta}, R_{k,max} \right] \right\}, \text{ ce que l'on traduit par la}$$

[relation 125](#).

$$W_{kh} \leq R_{k,max}; W_{kh} \leq R_{k,h-1} + \sum_{i=1}^N \theta_{ik} x_{ih} - \bar{\theta}; R_{kh} \geq 0; R_{kh} \geq W_{kh}$$

$$\text{pour } h = 1, \dots, N \text{ et } k \in K \quad \text{relation 125}$$

Dans cette formulation, on suppose que ce poste k est indépendant des postes adjacents, en ce sens qu'aucune compensation sur les temps opératoires n'est possible. Ceci implique qu'en régime de croisière, le poste $k + 1$ commencera¹

avec un décalage, par rapport au poste k , égal à $\bar{\theta}$, augmenté du plus grand écart possible $\theta_{ik} - \bar{\theta}$.

Cette formulation comporte $4N$ contraintes pour chaque poste $k \in K$, ce qui conduit à chercher à limiter la taille N de l'ensemble de véhicules à ordonnancer et le nombre K de postes critiques. Si plusieurs postes ont des contraintes «voisines», il suffit alors de ne s'intéresser qu'au plus pénalisant. Ce nombre élevé de contraintes pour un poste critique s'explique par la très grande variété postulée de temps opératoires sur ce poste qui oblige à vérifier que le temps opératoire de chacun des véhicules ne compromet pas un éventuel rattrapage de retards imputables à un ou plusieurs véhicules de rang inférieur. Le nombre de contraintes diminue très fortement si la variété du nombre de temps opératoire se limite à 2 que l'on notera $T_{k_{max}}$ (montage d'une option) et $T_{k_{min}}$ (pas de montage d'une option). Dans ce cas, l'espacement minimal τ_k entre deux véhicules ayant le temps opératoire $T_{k_{max}}$ est fourni par la [relation 126](#)¹:

$$\tau_k = (T_{k_{max}} - \bar{\theta}) / (\bar{\theta} - T_{k_{min}}) \tag{relation 126}$$

Bien évidemment τ_k doit être arrondi à la valeur immédiatement supérieure, en cas de résultat non entier. On peut alors remplacer la [relation 125 de la page 616](#) par la [relation 127](#) qui fait passer le nombre de contraintes d'espacement de $4N$ à $N - \tau_k$, pour $k \in K$.

Table des matières

$$\sum_{j=h}^{h+\tau_k} \sum_{i=1}^N \theta_{ik} x_{ij} < h \cdot \bar{\theta}, \text{ pour } h = 1, \dots, N - \tau_k \text{ et } k \in K \tag{relation 127}$$

Index thématique

Cette dernière solution amène deux remarques:

- Si la variété des temps opératoires est supérieure à deux pour un poste critique, on peut éventuellement se ramener à ce cas en retenant comme temps opératoire de toutes les options le temps le plus élevé $T_{k_{max}}$, ce qui permet de limiter la taille du problème mais peut être gênant si l'on s'approche des contraintes utilisées lors de l'équilibrage de la ligne.
- Les contraintes d'espacement peuvent être plus complexes. Si la zone de déplacement de l'opérateur permet de traiter deux véhicules en dépassement du temps de cycle, il faut adapter la [relation 126](#), pour exploiter une capacité de rattrapage accrue, comme cela est illustré dans l'animation de la [figure 171, page 613](#): $\tau_k = \frac{2(T_{k_{max}} - \bar{\theta})}{\bar{\theta} - T_{k_{min}}} + 1$, la [relation 127](#) restant inchangée. L'expres-

1. Note de la page précédente. C'est la solution retenue dans la simulation. On peut également faire commencer le travail sur la station $k+1$ aussitôt achevé le travail sur la station k (décalage θ_{ik}) mais se pose alors la question de savoir s'il faut alors propager ces variations, c'est-à-dire à faire commencer le travail sur la station $k+2$ avec un décalage $\theta_{ik} + \bar{\theta}$, etc. La solution la moins perturbante est celle retenue ici.

1. Exemple numérique: $\bar{\theta} = 60'$, $T_{k_{max}} = 75'$, $T_{k_{min}} = 55'$, $\tau_k = \frac{75 - 60}{60 - 55} = 3$, ce qui signifie que, pour rattraper les 15 secondes de dépassement dues au montage de l'option, il faut faire suivre ce véhicule de 3 véhicules sans option.

sion formelle de cette contrainte devient, pour l'exemple retenu, « pas plus de 2 véhicules avec option, sur tout ensemble de 6 véhicules consécutifs ».

Il faut maintenant introduire une fonction-objectif pour achever une formulation exploitable en programmation linéaire. L'introduction d'un point de vue économique ne doit prendre en compte que ce qui est lié à l'ordonnancement retenu. Celui-ci influe sur des coûts associés à des opérations (réglages, nettoyages...) réalisées sur certains postes de travail en raison de variations de spécifications des véhicules qui se suivent (par exemple, nettoyage de pistolets nécessités par un changement de couleur de peinture). D'autres coûts associés à l'ordonnancement peuvent être également utilisés comme, par exemple, les coûts liés à l'irrégularité de certains besoins en composants qui perturbe l'organisation de l'approvisionnement retenu. On se contentera ici de la première famille de coûts évoquée, sachant que des extensions sont possibles mais qu'elles risquent vite de buter sur la disponibilité de données fiables et pertinentes. On se limitera ici au cas d'un coût de réglage c_s lié au seul nombre de réglages effectué sur un poste s concerné par ce type de problème (sous-ensemble \mathcal{S}). Ceci implique que ce coût soit à peu près indépendant de la séquence de réglages associée à l'ordonnancement¹. Notons y_{js} la variable dichotomique valant 1 si le véhicule de rang j a un réglage différent de celui du véhicule précédent ($j-1$) sur le poste s . Dans ces conditions, la minimisation des coûts de lancement sur le sous-ensemble \mathcal{S} de postes affectés par la séquence retenue de véhicules est :

$$\text{Min} \left(\sum_{s \in \mathcal{S}} c_s \sum_{j=2}^N y_{js} \right) \quad \text{relation 128}$$

Il faut maintenant forcer la variable y_{js} à prendre la valeur 1 lorsqu'il y a changement de réglages sur le poste s . Notons β_{is} le numéro de réglage utilisé par le véhicule i sur le poste s . Le numéro de réglage du poste s pris par le véhicule de rang j dans l'ordonnancement est $\sum_{i=1}^N \beta_{is} \cdot x_{ij}$. Il s'ensuit que changement de

réglage entre le véhicule $j-1$ et le véhicule j arrive lorsque la différence

$\sum_{i=1}^N \beta_{is} \cdot x_{ij} - \sum_{i=1}^N \beta_{is} \cdot x_{i,j-1}$ n'est pas nulle. Pour forcer y_{js} à prendre la valeur 1 dans ce cas, il suffit d'appliquer les principes décrits au [tableau 350 de la page 1137](#) qui se traduisent ici par la [relation 129](#) :

$$-Ny_j \leq \sum_{i=1}^N \beta_{is} \cdot x_{ij} - \sum_{i=1}^N \beta_{is} \cdot x_{i,j-1} \leq Ny_{js}, \text{ pour } j = 2, \dots, N \text{ et } s \in \mathcal{S} \quad \text{relation 129}$$

1. Il est évident que le coût de nettoyage nécessaire pour passer du noir au blanc est supérieur à celui pour passer du noir au blanc. Ce problème d'ordonnancement (partiel) a été abordé au § I-2, page 388 du [chapitre V](#) et son inclusion dans le problème traité ici ne pose pas de problème particulier. Cela étant, pour un nombre suffisamment élevé de réglages de changement de peinture, l'usage d'un coût standard judicieusement calculé doit donner, après multiplication par le nombre de réglages, une valeur pas trop éloignée de celle obtenue avec l'usage de coûts dépendant de la séquence de couleurs. On peut ajouter qu'il n'est pas certain qu'un raffinement du modèle soit économiquement judicieux, le gain marginal obtenu risquant fort d'être inférieur au supplément de coût de recherche d'une solution, induit par l'accroissement de taille du modèle.

qui conduit à l'effet recherché parce que la fonction-objectif (relation 128) tend à rendre nuls le plus possible de y_{js} et que les y_{js} de la relation 129 ne peuvent être nuls que si numéro de réglage du poste s ne change pas et que dans les autres cas (second terme strictement positif ou négatif), y_j est nécessairement égal à 1.

Pour terminer, on peut prendre en considération la gestion de renforts qu'il faut introduire si le séquencement ne respecte pas l'espacement minimal induit par cette variabilité de (pris en compte à la relation 127, page 617). On peut imaginer, dans une formulation simplifiée, de mettre un renfort sur le poste k pendant le traitement du véhicule h , ce qui se traduit par un accroissement Z_{hk} du temps d'opérateurs disponible sur le poste k , qui permet de traiter tout ou partie de l'excédent

$R_{k,h-1} + \sum_{i=1}^N \theta_{ik} x_{ih} - \bar{\theta}$, si cette valeur est positive. Il suffit alors de remplacer

cette expression par $R_{k,h-1} + \sum_{i=1}^N \theta_{ik} x_{ih} - \bar{\theta} - Z_{hk}$. Il s'ensuit que cet excédent

devient : $R_{kh} = \text{Max} \left\{ 0, \text{Min} \left[R_{k,h-1} + \sum_{i=1}^N \theta_{ik} x_{ih} - \bar{\theta} - Z_{hk}, R_{k,max} \right] \right\}$, ce qui

conduit à la relation 130 :

$$W_{kh} \leq R_{k,max}; W_{kh} \leq R_{k,h-1} + \sum_{i=1}^N \theta_{ik} x_{ih} - \bar{\theta} - Z_{hk}; R_{kh} \geq 0; R_{kh} \geq W_{kh}$$

pour $h = 1, \dots, N$ et $k \in K$

relation 130

Le coût de ces renforts est alors intégré dans la fonction-objectif de la relation 128, ce qui conduit à la relation 131, dans laquelle c_k est le coût d'une unité de temps de renfort sur le poste k :

$$\text{Min} \left(\sum_{s \in S} c_s \sum_{j=2}^N y_{js} + \sum_{k \in K} c_k \sum_{h=1}^N Z_{hk} \right)$$

relation 131

Dans cette formulation, la gestion de ces renforts n'est pas prise en compte mais peut l'être en adaptant la démarche décrite au § I-3.1.2, page 558, du chapitre VIII, pour tenir compte de problèmes de transports entre les stations.

II-3 Organisation de la réactivité aux aléas de production

Les mécanismes de propagation du désamorçage et de la saturation d'une ligne, décrits au § I-3, page 600, restent valables dans le cas d'une ligne dédiée à la production de produits hétérogènes.

On a vu que, pour les produits homogènes, la reprise au plus tôt des problèmes de qualité conduit à un décyclage qui remet en cause la pertinence de l'approvisionnement de certains modules. Ceci reste vrai pour les produits hétérogènes mais s'ajoute en outre le risque du non-respect de contraintes d'espacement, qui provoque saturation et désamorçage. Pour limiter ce risque, on peut augmenter l'espacement requis entre certains produits, en tenant compte de la connaissance que l'on a des distributions de décyclage mais ceci implique une structure de la demande moins contraignante en ordonnancement que celle utilisée dans la

conception de la ligne. On peut également utiliser un stock de tri (page 604) avec des algorithmes privilégiant les contraintes d'espacement lorsque la restauration de l'ordonnancement initial n'est pas possible.

Pour terminer, il faut évoquer une autre approche de l'ordonnancement, s'appuyant sur le principe de différenciation retardée et utilisée par certains constructeurs automobiles (comme PSA), qui permet aussi de limiter l'impact du décyclage. Rappelons que, dans la métaphore du film utilisé dans cette industrie pour décrire le séquençage initial des véhicules, un film est une suite ordonnée d'images dans laquelle chaque image du film correspond à un véhicule répondant à une demande précise, caractérisée par une combinaison d'options de personnalisation, certaines sont à prendre nécessairement dans une liste fermée (de moteurs, de couleurs, etc.), d'autres correspondent à un élément facultatif (toit ouvrant, etc.). Dans la conception du film reposant sur le principe de différenciation retardée (évoquée ci-dessus), on définit le film lancé pour une journée par une suite d'images inachevées, les détails retenus dans ces images correspondant à des caractéristiques partagées par tous les véhicules, plus des caractéristiques de différenciation d'une première partie de la ligne (éventuellement délimitée par un stock de tri), en s'efforçant de respecter les contraintes des postes critiques en variabilité de temps opératoires de cette partie de ligne. À ce point, sur un film inévitablement perturbé, on complète les images en ajoutant de nouvelles caractéristiques de différenciation utilisées sur la seconde partie de la ligne, en s'efforçant toujours de respecter les contraintes des postes critiques en variabilité de temps opératoires de cette partie de ligne et, bien sûr, en tenant compte des caractéristiques de la demande à satisfaire pour la journée; ce processus se poursuit tant que toutes les images ne sont pas complétées. Cette approche est connue sous le nom de **baptême progressif**.

Chapitre X

FONDEMENTS DE LA PRISE DE DÉCISION EN GESTION DES STOCKS

De nos jours, une production sans stocks est inconcevable et le mot d'ordre «zéro stock» constitue un idéal impossible à atteindre, comme on le verra en analysant les rôles qu'ils jouent. Ceux-ci sont présents partout dans la chaîne logistique¹ et posent au gestionnaire de multiples problèmes: tenue d'inventaire, valorisation des stocks, problèmes physiques de stockage et de conservation, disponibilité satisfaisante dans le temps et l'espace.

La tenue d'un inventaire relève de la problématique des systèmes d'information. La valorisation des stocks est un problème de comptabilité de gestion, c'est-à-dire un problème de calcul économique orienté vers la comptabilité financière et le contrôle de gestion. Les problèmes physiques de stockage et de conservation relèvent à la fois de l'art de l'ingénieur (au sens large), dans ses aspects physiques, et de celui du logisticien en ce qui concerne le choix de l'implantation et le dimensionnement des aires de stockage (voir le § I-3, page 899, chapitre XIII). C'est au problème de la disponibilité satisfaisante dans le temps et l'espace, d'un article ou d'une prestation de service que l'on s'intéressera ici, en considérant comme des contraintes les réponses apportées aux autres problèmes.

Le domaine traité étant ainsi limité, nous examinerons, dans une section I, le stock et ses fonctions, avant d'aborder, dans une section II, une présentation générale des politiques de stock et de leurs fondements qui permettront de situer les différentes politiques de stock les unes par rapport aux autres et d'aborder les principales d'entre elles dans les deux chapitres suivants, principalement orientés vers l'approvisionnement externe.

La présentation qui va être faite des fondements des politiques de gestion des stocks dans ce chapitre et les suivants répond à une logique bien cartésienne de décomposition de problèmes complexes en problèmes élémentaires plus simples. L'avantage de ce parti pris est de faciliter l'analyse des approches disponibles. Son inconvénient majeur est de risquer de laisser croire que les problèmes d'approvisionnement peuvent se traiter indépendamment des autres problèmes rencontrés dans la chaîne logistique. Depuis une vingtaine d'années l'accent est sur l'intégration des approches.

- Depuis le début des années quatre-vingt, le Juste-À-Temps (voir chapitre VII, page 509) intègre ordonnancement, gestion des stocks de fabrication (voir page 632) et organisation logistique des flux. Cela étant, la détermination de

1. Voir la définition à la page 895.

la taille des lots lancés en fabrication s'appuie sur une réflexion basée sur un arbitrage entre coûts de lancement et coûts de possession du type de celle qui sera présentée au [chapitre XII](#).

- Les approches de la chaîne logistique (présentée en détail au § I-2, page 895, du [chapitre X](#)) visent à intégrer, notamment au travers des ERP (voir page 957), les préoccupations d'approvisionnement, de production, d'ordonnement de distribution et de partage de systèmes d'information allant des fournisseurs aux clients. Cela étant, la modélisation d'ensemble à des fins de préconisation est hors de portée et l'on doit faire appel à des modélisations partielles pour préparer des décisions de routine.

Ce que la vision intégratrice change dans ces modélisations partielles, c'est l'obligation de prise en compte d'hypothèses réalistes permettant un interfaçage cohérent des différents composants mobilisés dans l'architecture d'ensemble, au service d'une vision du fonctionnement souhaité de la chaîne logistique. La présentation que nous allons faire est relativement neutre mais l'usage des modèles présentés peut être bénéfique ou néfaste en fonction du réalisme des hypothèses sous-jacentes de ces modèles et de la pertinence de l'articulation des problèmes partiels dans une approche de chaîne logistique, cette articulation passant par des jeux de contraintes réciproques entre ces problèmes. On reviendra sur la chaîne logistique à la [section I](#), page 891, du [chapitre XIII](#).

SECTION I LE STOCK ET SES FONCTIONS

On verra tout d'abord (§ I-1) pourquoi les stocks sont en grande partie inévitables avant d'esquisser une définition du système-stock et en avoir déduit quelques conséquences importantes (§ I-2, page 625).

I-1 Les fonctions du stock

On peut regrouper les différentes fonctions assumées par les stocks en deux grandes familles: la non-coïncidence dans le temps et dans l'espace de la production et de la consommation et l'incertitude.

I-1.1 Non-coïncidence dans le temps et dans l'espace de la production et de la consommation

Fondamentalement, *le stock existe parce qu'il est impossible de produire instantanément là et quand la demande se manifeste, et ce à des coûts jugés acceptables*. Examinons les diverses implications concrètes de cette raison d'être fondamentale.

Il est tout d'abord évident qu'économiquement le **nombre d'usines** fabriquant un même produit est limité à la fois par le marché de ce produit et par la taille de ces usines. Les économies d'échelle liées à la taille d'une usine peuvent compenser largement les accroissements de coût de distribution dus à un plus grand éloignement du centre producteur des centres consommateurs. La minimisation de ces coûts de distribution passe par un arbitrage entre des coûts de transport (principalement liés aux moyens de transport mobilisés et à la fréquence des tournées...), aux coûts des entrepôts desservis (liés à leur nombre et leurs configurations) et aux coûts de possession d'un stock (notion sur laquelle nous revien-

drons). Cet arbitrage conduira à un dimensionnement de lots d'expédition et à différents stocks aux diverses étapes de la distribution (variables selon les circuits de distribution; sur ce point, voir le § I-3, page 899 du chapitre XIII).

Au **niveau de la fabrication**, la fonction essentielle des stocks est de régulariser la production pour permettre une utilisation économiquement satisfaisante des ressources productives en hommes et en machines.

- L'importance de certains temps de lancement milite en faveur d'une production d'un lot de plusieurs unités d'une même référence mais l'**économie d'échelle** qui en résulte est partiellement annulée par un coût de possession associé aux stocks ainsi constitués. Un arbitrage économique sera nécessaire pour dimensionner correctement les lots et sera étudié dans les chapitres suivants.
- Une demande fortement saisonnière conduit à la constitution de stocks pour lisser la charge et permettre d'**éviter le surdimensionnement du système productif** (point déjà évoqué à la page 48).

Enfin, dans certaines industries comme celle de l'agro-alimentaire, la constitution de stocks ne résulte pas d'un arbitrage de coûts entre stock et production, mais est la conséquence d'une saisonnalité de la production de matières premières périssables.

I-1.2 Incertitude

L'importance des stocks constitués en fonction des considérations développées au § I-2.1, est souvent considérablement accrue par l'incertitude. Celle-ci peut porter:

- sur les prix et des **stocks de spéculation** peuvent alors être constitués (plusieurs justifications peuvent être avancées pour légitimer ce type de stocks); on ne s'étendra pas sur les stocks de spéculation dont la détermination ne relève pas des problématiques étudiées ici;
- sur les quantités demandées et les délais d'obtention, et apparaissent alors des **stocks de sécurité**; la prise en compte de l'incertitude par les stocks de sécurité mérite quelques développements.

Des stocks de sécurité de composants, qu'ils fassent l'objet d'un approvisionnement interne (production) ou externe (achat), doivent être constitués en amont de certains postes de travail pour éviter toute rupture de charge consécutive à des incidents se produisant en amont dans le processus de production de ces composants approvisionnés (pannes de machine, absentéisme, durée d'exécution d'opérations plus longues que prévu...) ou celui de leur approvisionnement. Cette rupture de charge conduit à une mauvaise utilisation des ressources qui se traduit nécessairement par un accroissement des coûts mais, inversement, ces stocks ont également un coût. L'arbitrage entre les deux points de vue varie en fonction du type de production.

- Dans le cadre d'une *production pour stock* (définie à la page 48), il est important de mettre en œuvre, aux différentes étapes de la chaîne logistique, les moyens qui permettront d'éviter une rupture de stock des produits finis. Les stocks de produits finis sont alors des instruments privilégiés de gestion de l'incertitude sur la demande. Les stocks de composants achetés ou fabriqués

(en-cours de production) servent de protection sur les incertitudes en production pouvant conduire à une rupture de charge : ils permettent d'amortir les à-coups et de découpler les problèmes en limitant et retardant la propagation en cascade d'incidents conduisant à une mauvaise utilisation d'équipements souvent spécialisés et onéreux. Les techniques d'ordonnancement utilisées (voir [chapitre V](#)) jouent un rôle très important dans l'écoulement des flux et les risques de désamorçage sur certains postes ; lorsque c'est le cas, seule une approche simulatoire (voir [chapitre III](#), § I-2.1.1, [page 148](#)) permet de prendre correctement en compte simultanément les problèmes d'ordonnancement et de dimensionnement des stocks-tampons.

- Lorsqu'on est en *assemblage à la commande* (définie à la [page 48](#) ; voir également [page 465](#)) dans le cadre d'un assemblage réalisé en ateliers spécialisés ou sur des lignes d'assemblage (voir [chapitre IX](#)), les problèmes dépendent des références utilisées et du type de nomenclature mobilisée (voir [figure 141](#), [page 464](#)). Pour les références qui sont approvisionnées ou fabriquées pour stock, les problèmes ne sont guère différents de ceux rencontrés à l'alinéa précédent. s'ils sont consommés par un grand nombre de produits finis. Pour les autres références, on ne se trouve pas à proprement parler en présence d'un problème de gestion de stock mais d'un problème de production impliquant l'appel à des approches de type MRP (voir [chapitre VI](#)) ou de type JAT (voir [chapitre VII](#)).
- Lorsqu'on est en *production à la commande* (définie à la [page 49](#)), on se rapproche plus ou moins du cas précédent en fonction du nombre de références utilisées qui existent déjà.

Dès qu'une entreprise dépasse le stade artisanal, elle doit programmer l'utilisation de ses diverses ressources productives. Quelle que soit la qualité de cette programmation, des incidents se produiront inévitablement et en empêcheront la réalisation. Les incidents visés, ici, ne peuvent être assimilés aux aléas pris en compte dans les diverses gammes et correspondent à des pannes, des absences imprévues d'opérateurs, des ruptures d'approvisionnement, des problèmes de qualité... Dans la mesure où l'on a des flux passant d'un poste de travail à un autre, les incidents génèrent des perturbations qui se propagent progressivement dans le système. On peut retarder cette propagation en constituant, en amont des postes de travail, un « portefeuille » de commandes à exécuter, accompagné des stocks correspondants d'en-cours, et permettant d'absorber certains incidents. Dans le contexte des lignes de production, la nécessité d'opérer un découplage minimal par des stocks-tampons est illustrée à la [page 601](#).

Le mécanisme de **découplage** des problèmes par les stocks, longtemps privilégié, n'est pas le seul. Des alternatives existent avec le surdimensionnement d'autres ressources et leur déspecialisation (polyvalence des machines et des opérateurs) qui permettent, en cas d'incident, un remplacement des ressources défaillantes ; en outre, on cherchera à limiter l'occurrence des incidents en « fiabilisant » les moyens productifs. Les logiques de gestion dites du Juste-À-Temps présentées au [chapitre VII](#) rejettent la solution des stocks d'encours pour découpler les problèmes, et lui préfèrent la fiabilisation, la polyvalence et le surdimensionnement des ressources. La manière la plus judicieuse d'assurer ces découplages relève d'une réflexion stratégique et a toutes chances de correspondre

à un panachage de ces différentes solutions (stocks, surdimensionnement, polyvalence, fiabilité). Il est essentiel de bien comprendre que très souvent une action sur les stocks doit s'accompagner d'actions sur d'autres ressources pour qu'il n'y ait pas de dégradation de fonctionnement du système.

I-2 Définition du système-stock

Nous examinerons d'abord à quoi s'appliquent les outils développés par la théorie des stocks avant de procéder à une approche systématique des stocks. Avant de commencer, rappelons que cette problématique a déjà été abordée au [chapitre VIII](#) dans une optique de modélisation par la programmation mathématique, différente de celle développée ici dans la mesure où elle ne visait pas à produire des solutions analytiques.

I-2.1 Domaines d'application de la théorie des stocks

La notion de stock est applicable non seulement aux biens physiques (§ I-2.1.1) mais également à certains problèmes de détermination de capacité dans la production de service (§ I-2.1.2).

I-2.1.1 Stocks de biens physiques

Les biens que l'on stocke sont de natures diverses, matières premières, composants, produits finis et correspondent à des ressources matérielles qui transitent dans un système productif ou un système de distribution. La gestion des stocks est confiée aux responsables de la production ou aux commerciaux d'une entreprise suivant que la demande émane d'agents économiques extérieurs à l'entreprise ou non, mais ce clivage fonctionnel ne correspond pas à des problématiques différentes car, sur le fond, les problèmes posés restent similaires.

Table des
matières

I-2.1.2 Stock et potentiel de prestations de service à un moment donné

Certaines prestations de service peuvent, comme certains produits, être fabriquées sur stock ou à la commande (voir [chapitre I, § I-2.1, page 47](#)). On sera en présence d'une production de prestations de service sur stock dans le cas de traitement de dossiers qui doivent être traités dans une certaine fourchette de temps (*back office* bancaire, assurance, etc.). Dans ce cas, il n'y a pas à proprement parler de problème de gestion de stock mais plutôt un problème de conception du système productif pour l'obtention d'un niveau de service à un certain coût. On sera en présence d'une production de prestations de service à la commande lorsque l'exécution d'une demande ne peut être différée. Dans ce cas, l'analyse du potentiel de prestations de service offert à un moment donné fait appel à la problématique des stocks (et plus particulièrement aux modèles d'approvisionnement d'articles non stockables en gestion calendaire qui seront étudiés au [chapitre XI, § I-1.4.3, page 695](#)). Deux cas de figure se présentent :

Index
thématique

- La prestation est fournie «à domicile», c'est-à-dire que le prestataire de service se rend là où il est demandé, et se pose alors le problème du dimensionnement d'une équipe d'intervention (équipe d'entretien et de réparation dans une usine, si l'entretien curatif s'ajoute à l'entretien préventif, effectifs de sociétés de travail intérimaire, SAMU, etc.).
- L'utilisateur doit se rendre à un endroit pour consommer une prestation de service et se pose alors le problème d'accueil de cet endroit. La capacité d'un

hôpital, d'un train de voyageurs, d'un cinéma ou d'une salle de classe ont ceci de commun qu'elles offrent toutes à des usagers un espace (lits, sièges...) pour consommer une prestation de service (soin, transport, loisir, éducation...) pendant un temps donné et que le nombre d'usagers admis à bénéficier de ces prestations à un moment précis du temps est limité par l'espace disponible. Dans ce cas, le stock est une capacité de service rapportée à une unité appropriée: lit/jour d'hospitalisation, siège/séance de cinéma, élèves admis/année scolaire, places assises par train offertes pour un horaire donné...

Le raisonnement doit être tenu sur des ensembles homogènes (notion de classe en transport, de qualification pour des individus...). Dans les exemples évoqués ci-dessus, l'engagement sur le long terme varie: une fois dimensionné, un équipement sera conservé «en l'état» sur un horizon assez long; par contre, il est plus facile d'adapter rapidement le dimensionnement d'équipes. Formellement, les modèles utilisés seront toutefois similaires.

Les exemples que l'on retiendra ici porteront plutôt sur les biens, et l'analyse faite au § I-2.2 suivant n'est pertinente en totalité que si le stock porte sur des biens physiques.

I-2.2 Analyse du système-stock

L'analyse d'un stock quelconque peut s'effectuer à l'aide du schéma de principe suivant de la figure 172 dont on va analyser successivement les composants.

FIGURE 172

Analyse du système «stock»

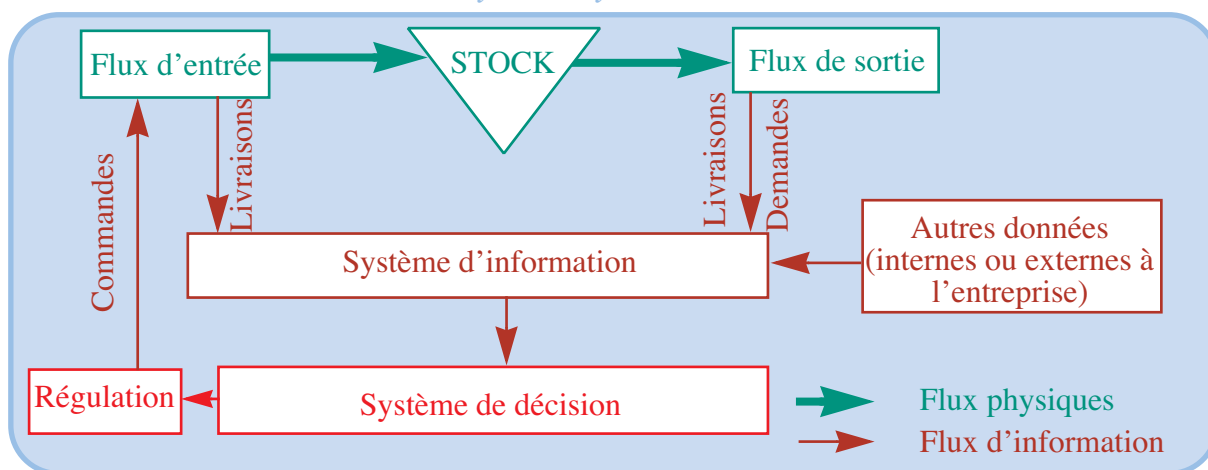


Table des matières

Index thématique

I-2.2.1 Le stock

Le stock est caractérisable par son seul niveau à chaque instant du temps, mais aucune action directe n'est possible sur le niveau de stock. Il en est normalement de même pour les flux de sortie, c'est-à-dire pour la demande sur laquelle il est généralement difficile d'agir, sur le court terme tout du moins. Le niveau du stock est contrôlé par des modulations appropriées des flux d'entrée, c'est-à-dire de l'approvisionnement du stock. Une comparaison peut être faite avec le volume d'eau contenu dans une baignoire dont le bouchon d'écoulement est retiré: l'eau qui s'écoule correspond à la satisfaction d'une demande sur laquelle on ne peut agir, le stock est caractérisable par le niveau d'eau dans la baignoire, et l'on ne

peut agir dessus qu'en ouvrant plus ou moins le robinet d'arrivée d'eau. Les actions ponctuelles sur la demande (promotion...) ne seront pas prises en compte dans le cadre de la définition de politiques d'approvisionnement pour un « régime de croisière »¹.

L'analyse de la chaîne logistique met en évidence l'existence de **stocks à étages** appelés encore **stocks multi-échelons** (voir [figure 173](#)), qui correspondent à un stockage en différents endroits d'une marchandise à des fins de distribution, selon une arborescence divergente des flux ou d'un bien à des stades différents de fabrication selon un montage en série ou selon une arborescence convergente des flux que l'on rencontre en assemblage ou encore toute combinaison de ces deux cas de figure; on reviendra sur ces stocks multi-échelons à la [page 897](#).

FIGURE 173
Différents types de stocks à étages

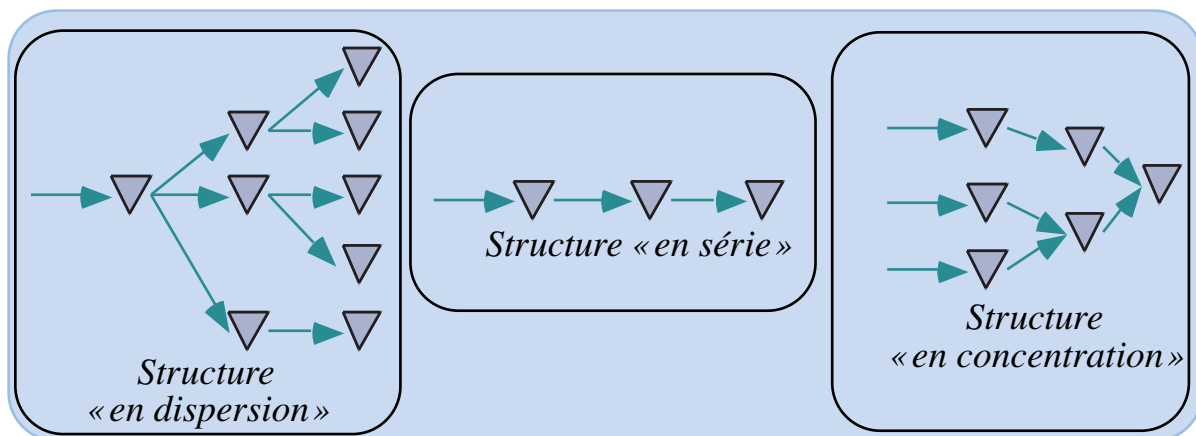


Table des matières

Index thématique

Les stocks à étages dans un contexte de fabrication ont été abordés au [chapitre VI](#). Les stocks à étages mettant en jeu des relations de type « client - fournisseur » peuvent être gérés de manière indépendante mais la tendance à l'intégration, que l'on observe depuis une quinzaine d'années, conduit à des arbitrages globaux plus intéressants pour les deux parties que la mise en œuvre des recommandations des politiques locales associées à chaque sous-système. Des démarches empiriques d'intégration ont vu le jour dans la grande distribution avec la prise en charge, par certains fournisseurs, de la gestion de certains linéaires; les économies réalisées par la transformation du problème en un problème de stocks à étages de distribution sont alors partagées entre les parties. Les efforts de modélisation de cette classe de problèmes en vue d'obtenir des solutions analytiques restent limités². Dans ce qui suit, on traitera principalement de systèmes - stocks considérés comme indépendants³.

1. À l'exception de celles qui seront abordées au [chapitre XII](#), § I-2.1.3, page 796, et § II-2.2.3, page 881.

2. Des réflexions théoriques voient le jour depuis quelques années, sous l'influence de la montée des préoccupations relatives à la chaîne logistique (voir, en particulier, l'imposant ouvrage coordonné par Tayur, Ganeshan & Magazine (1999, [410]). Cette classe de modèles dépasse nettement le propos introductif assigné à cet ouvrage.

3. La levée de cette hypothèse d'indépendance ([chapitre XII](#), § I-2.3, page 802 et § II-2.1, page 863) ne conduit pas à la prise en compte de stocks à étages.

I-2.2.2 Système d'information

Le système d'information permet de connaître, de façon plus ou moins continue, les flux d'entrée, de sortie, ou le niveau de stock. Ce dernier peut être appréhendé de trois manières différentes :

- à tout instant par la technique de l'**inventaire permanent** en tenant à jour un nombre d'unités détenues chaque fois que se produit un mouvement de stock en entrée ou en sortie,
- par intermittence régulière (**inventaire périodique**),
- lorsque certains événements se produisent, par exemple si le stock disponible devient inférieur à un niveau fixé à l'avance qui est matérialisé par une «réserve» (voir [page 634](#)).

Le coût d'un système d'information n'est jamais explicitement pris en compte dans l'étude des politiques de stocks, mais il est nécessaire de le réintégrer dans la comparaison des coûts des diverses politiques sous peine de fausser cette comparaison: l'inventaire permanent est, en général, plus coûteux que l'inventaire périodique, mais l'intégration réalisée par les systèmes d'information modernes et notamment les ERP (voir [page 957](#)) font que le choix d'une politique d'approvisionnement s'inscrit de plus en plus dans le cadre d'une approche d'inventaire permanent.

La modification d'un système d'information est une opération longue et souvent coûteuse, le système existant est le plus souvent une contrainte (sur le court ou moyen terme) dans le choix d'une politique de stock. On peut d'ailleurs remarquer que la modification du système d'information est plus souvent liée à des préoccupations de nature comptable et financière (informatisation de la facturation entraînant la création d'un inventaire permanent informatisé, par exemple) ou à la recherche d'une intégration via ERP qu'à la recherche d'une amélioration de la gestion des stocks.

I-2.2.3 Système de décision

Le système de décision permet, à partir des informations transmises sur l'état du système «stock» et sur la base d'autres informations (prévisions de la demande, en particulier), de prendre des décisions cohérentes avec les objectifs généraux de l'entreprise. Ces décisions portent «en régime de croisière» sur la modulation des flux d'entrée, c'est-à-dire qu'elles donnent des réponses appropriées aux deux questions fondamentales suivantes :

- quand approvisionner ?
- de combien approvisionner ?

Ces deux questions sont du reste intimement liées. Il est important de souligner que, normalement, une réflexion correctement conduite sur la politique à suivre en matière de gestion des stocks, doit aboutir à un ensemble de décisions de routine ne nécessitant aucune réflexion préalable. Ces décisions de routine, reposant sur une argumentation économique sophistiquée, peuvent dès lors, soit être prises par des agents d'exécution s'aidant de documents (tables, abaques ou nomogrammes¹) permettant de trouver la solution pertinente pour le cas de figure rencontré, soit être déclenchées automatiquement à la suite d'un traitement informatique. La préparation de ces décisions relève de la responsabilité des cadres.

I-2.2.4 Les flux d'entrée

Leur origine peut être interne à l'entreprise (fabrication) ou externe (achat). Lorsque l'approvisionnement est interne, la livraison peut s'étaler sur la durée de fabrication et le problème de stock n'est pas indépendant de celui de l'organisation de la production et de la politique retenue pour la chaîne logistique. L'approvisionnement externe implique habituellement une livraison unique de la totalité de la commande.

Un paramètre important de l'approvisionnement est le **délai d'obtention**, c'est-à-dire le temps qui s'écoule entre le moment où la personne responsable (sur le terrain) des stocks passe une commande, et celui où la marchandise est à sa disposition. Ce délai d'obtention comporte des délais administratifs de lancement de la commande, des délais d'acheminement de la commande au fournisseur, le cas échéant des délais de production (à l'intérieur de l'entreprise ou non), des délais de transport, de réception, de contrôle et de manutention pour la mise à disposition en magasin. Ce délai peut être considéré soit comme certain, c'est-à-dire concrètement avec une faible marge d'erreur relative, soit comme aléatoire, c'est-à-dire que la distribution de probabilité de durées possibles peut être établie. L'existence de délais d'obtention nécessite de disposer, au moment du déclenchement d'une commande, d'un stock suffisant pour satisfaire la demande durant ce délai d'obtention. Le calcul de ce stock est, comme on peut s'y attendre, plus complexe si le délai d'obtention est aléatoire que s'il en est certain. L'évolution de la chronocompétition (page 67) tend autant à réduire ces délais qu'à en limiter la variabilité.

Table des
matières

Index
thématique

En cas d'approvisionnement externe, il est fréquent que le prix d'achat des articles varie en fonction des quantités livrées, l'entreprise située en amont pouvant répercuter sur l'acheteur tout ou partie des économies d'échelle réalisées sur une commande importante, par rapport à une commande de faible importance (problème d'étalement de charges fixes sur un plus ou moins grand nombre d'unités). De même, en cas d'approvisionnement interne, le coût de fabrication peut varier avec les quantités à produire (appel aux heures supplémentaires par exemple).

Pour en terminer avec l'analyse des flux d'entrée, ajoutons que des contraintes supplémentaires peuvent peser sur les quantités commandées. En particulier, le conditionnement (en palettes, cartons...) et les usages commerciaux peuvent imposer de ne commander que des multiples entiers d'une unité de base (carton de 36 unités par exemple). Habituellement, la totalité des unités achetées par multiple d'une unité de base est tôt ou tard consommée, mais il peut ne pas en être toujours ainsi¹, surtout si le stock porte une prestation de service. La détermination du nombre de « travées » de sièges offerts dans un avion mixte « fret + passagers », affecté à une ligne donnée, correspond au choix d'une offre de transport & voyageur qui, si elle n'est pas consommée au cours d'un vol donné, doit être considéré comme perdue (d'où la mise en œuvre d'une conception permettant

1. Note de la page précédente. L'abaque ou le nomogramme sont des techniques de résolution graphique d'une équation faisant intervenir deux ou plusieurs variables. Ces techniques sont pratiquement abandonnées en raison de l'évolution technique et économique des moyens informatiques.

1. Cette classe de problème est souvent désignée sous le terme de *lump sum problem* dans la littérature spécialisée anglo-saxonne.

des ajustements de « dernière minute »). Plus prosaïquement, si vous achetez deux fois 20 minutes de temps de stationnement à un parcimètre, et revenez au bout de 30 minutes, vous ne pouvez tirer aucun parti des 10 minutes résiduelles.

I-2.2.5 Les flux de sortie

L'analyse de la demande est l'une des étapes les plus délicates de l'analyse d'un système de stock. Trois caractérisations de la demande peuvent être établies.

I-2.2.5.1 Modélisation de la demande

La demande s'exprimant pendant une période donnée peut être considérée comme certaine, c'est-à-dire que la quantité qui sera demandée sur cette période est connue à l'avance avec certitude (ou avec une marge d'erreur relative considérée comme négligeable). Mais elle peut aussi n'être connue qu'en probabilité et l'on parle alors de demande aléatoire. Dans ce dernier cas on connaît une distribution de probabilités de cette demande, soit à partir d'informations sur le passé, soit à partir de probabilités a priori. S'il n'est pas possible de connaître cette distribution de probabilités, on parlera de demande en univers incertain (incertain n'étant donc pas le contraire de certain). Dans ce cas, sauf à se ramener au cas précédent pour le truchement de probabilités subjectives, il ne reste plus, en théorie, qu'à traiter le problème de gestion par les techniques classiques dans ce domaine (de type critère du minimax...); néanmoins, l'application opérationnelle de telles démarches est exceptionnelle.

Si la demande s'étale sur plusieurs périodes, deux cas de figure doivent être soigneusement distingués¹:

- les caractéristiques de la demande sont les mêmes d'une période sur l'autre, c'est-à-dire que si la demande est certaine, son niveau est constant, et que si la demande est aléatoire, la loi suivie est non seulement la même, mais en outre conserve les mêmes valeurs pour ses paramètres caractéristiques. On parle alors de **processus statique** de demande, ou encore de **demande statique**;
- les caractéristiques de la demande évoluent au cours du temps pour une cause quelconque (saisonnalité de la demande, évolution tendancielle de la demande), et l'on parlera de **processus dynamique** de demande ou encore de **demande dynamique**.

L'analyse des chroniques de demande (voir le [chapitre XV](#), page 981) aide à décider dans quel cas de figure on se situe.

En définitive, les caractéristiques de la demande peuvent être résumées par le schéma de la [figure 174](#) et illustrées par le [tableau 174](#), page 631, pour le cas de problèmes multi-périodes.

Lorsque la demande est aléatoire, il est nécessaire, pour les besoins du calcul économique, de rechercher le processus théorique le plus approprié pour représenter la demande. Les lois statistiques auxquelles on fait appel sont discrètes (loi de Poisson, en particulier) ou continues (loi Normale en particulier) mais, dans ce dernier cas, la loi continue est très souvent utilisée pour approximer un processus discret: par exemple, la demande d'un quotidien est de nature discrète (on ne peut

1. On reviendra sur ce point au [chapitre XV](#), § I-2, page 987.

FIGURE 174
Typologies de la demande

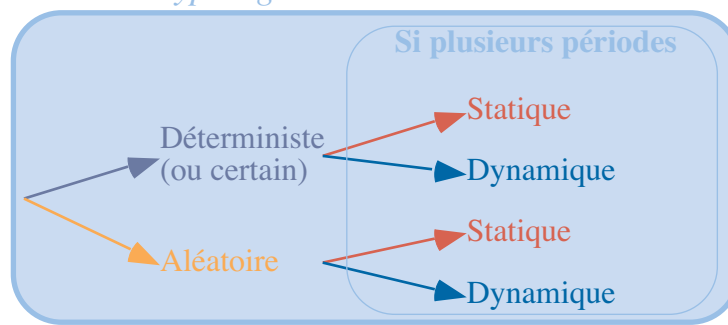


TABLEAU 174
Illustration des typologies de la demande

Demande	Statique	Dynamique																												
Certaine	<table border="1"> <tr><td>t</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td><td>...</td></tr> <tr><td>d_t</td><td>5</td><td>5</td><td>5</td><td>5</td><td>5</td><td>...</td></tr> </table>	t	1	2	3	4	5	...	d_t	5	5	5	5	5	...	<table border="1"> <tr><td>t</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td><td>...</td></tr> <tr><td>d_t</td><td>5</td><td>7</td><td>3</td><td>2</td><td>10</td><td>...</td></tr> </table>	t	1	2	3	4	5	...	d_t	5	7	3	2	10	...
t	1	2	3	4	5	...																								
d_t	5	5	5	5	5	...																								
t	1	2	3	4	5	...																								
d_t	5	7	3	2	10	...																								
Aléatoire	$\mathcal{L}(d_t) = \mathcal{N}(300 ; 20)$	$\mathcal{L}(d_t) = \mathcal{N}(300 \cdot 1,01^t ; 20\sqrt{1,01^t})$																												

Table des matières

Index thématique

qu’acheter un journal entier), mais celle-ci peut sans inconvénient être approximée par une distribution continue, comme la loi Normale¹.

Dans certains cas, la modélisation d’une demande aléatoire est complexe. Par exemple, la demande peut s’exprimer par bon de commande (la distribution statistique théorique du nombre de bons de commande par unité de temps pouvant être trouvée), chaque bon de commande pouvant porter sur un nombre variable d’unités d’un article donné (la distribution statistique théorique du nombre d’unités demandées par un bon de commande pouvant être également obtenue). La loi théorique de la demande du nombre d’unités d’un article donné pendant une période donnée s’obtient alors en «combinant» les deux distributions statistiques. La généralisation des techniques de saisie directe de données (en particulier dans le secteur de la grande distribution) et la montée en régime du eCommerce rendent cette modélisation indispensable dans la mesure où l’accroissement du délai de réponse du système est conditionné par une inférence correcte de distributions statiques définies pour de faibles unités de temps (en effet, pour des unités de temps d’une certaine importance, le théorème de la limite centrale joue presque toujours).

La connaissance de la distribution statistique par unité de temps permet de calculer assez facilement celle de la demande pour un délai d’obtention certain, mais le problème se complique si le délai d’obtention est lui-même aléatoire. Les réponses à ces problèmes relèvent de la statistique et non de la problématique des stocks. Par ailleurs, une tendance trop souvent rencontrée consiste à négliger les

1. Le caractère discret de la variable étudiée conduit, en toute rigueur, à utiliser une correction de continuité; sur ce point, voir Giard (1995, [182], chapitre III, § II-1.4.12).

problèmes d'inférence statistique et à vouloir implanter une « gestion scientifique des approvisionnements » sans connaissance de la demande, ce qui, à l'évidence, ne peut pas produire les résultats escomptés.

I-2.2.5.2 Demande interne ou externe

Une dernière distinction doit être opérée dans l'analyse de la demande d'un article selon qu'elle émane :

- de l'extérieur de l'entreprise et l'on parle de **stock de distribution** (l'article stocké est ensuite vendu à l'extérieur de l'entreprise à une autre entreprise s'il s'agit d'un bien intermédiaire, ou aux ménages s'il s'agit d'un bien final); dans la chaîne logistique, la demande est en aval et l'on est sur un problème de distribution;
- de l'intérieur de l'entreprise et l'on parle de **stock de fabrication** si la référence est fabriquée en interne ou achetée à l'extérieur; dans la chaîne logistique la demande est en amont et l'on est sur un problème d'approvisionnement, certains composants achetés pouvant éventuellement être revendus en l'état au titre des pièces détachées.

Cette nouvelle typologie de la demande n'est pas indépendante des classifications « déterministe ou aléatoire » et « statique ou dynamique ». Dans le cas d'un stock de distribution, il est fréquent que la demande émane de nombreux demandeurs et revête un caractère « aléatoire-statique »; dans ces conditions, l'application des politiques de gestion de stock que l'on examinera aux chapitres **XI** et **XII** donne généralement de bons résultats. Dans le cas d'un stock de fabrication, la prévision de la demande au niveau du composant n'a guère de sens (sauf pour la partie correspondant aux pièces détachées vendues en l'état à l'extérieur) et c'est au niveau du produit final qu'il faut faire porter l'effort de prévision. Le plus souvent, lorsque cette prévision est faite pour plusieurs périodes à venir et pour tous les produits finals, on en déduit la demande des composants qui s'analyse alors comme une demande « dynamique-certaine ». La gestion de ces stocks n'est plus indépendante et met en œuvre des procédures de planification des besoins en composants qui font appel à d'autres outils de calcul économique (ces problèmes sont traités au **chapitre VI**, page 455). Dans cette optique, le problème est autant un problème de planification de production qu'un problème de gestion des stocks.

L'indépendance des demandes n'implique pas qu'il y ait indépendance dans la gestion des références. En effet, lorsque l'on gère simultanément plusieurs références, il est inévitable qu'elles entrent en compétition dans la consommation de ressources rares telles que l'espace ou la trésorerie.

I-2.2.5.3 Cas des demandes non satisfaites

Les demandes non satisfaites peuvent être perdues (les demandeurs s'adressent ailleurs ou renoncent à consommer le bien ou la prestation de service) ou différées ou, enfin, partiellement perdues. Les conséquences financières diffèrent selon le cas de figure et, en règle générale, les modèles permettant la recherche de politiques optimales diffèrent également.

Cela étant, la notion de demande non satisfaite perdue demande à être précisée. S'agissant du résultat d'une confrontation entre une demande et de l'offre d'un système d'approvisionnement précis, il est possible que la demande non satisfaite

puisse être immédiatement rattrapée par un système d'approvisionnement complémentaire. Dans ce cas, la demande sera perdue pour le système initial et satisfaite pour le client du système « global ». Ce cas de figure sera explicitement abordé en gestion calendaire (chapitre XI, § I-1.4.33c, page 704 et § I-2.2, page 712).

SECTION II LES POLITIQUES DE GESTION DE STOCK

D'une manière générale, l'application du calcul économique à des problèmes de gestion aboutit à déterminer la valeur d'un certain nombre de variables qui ont une incidence directe sur un ou plusieurs critères de gestion retenus pour mesurer les « performances » de politiques de gestion vis-à-vis d'un (ou de plusieurs) objectif(s) de l'entreprise. Nous appliquerons cette logique en examinant les fondements des politiques de stock (§ II-2, page 638), après avoir brossé un panorama des principales politiques de stocks envisageables (§ II-1).

II-1 Typologie des politiques de gestion des stocks

Il ne saurait être question d'aborder dans les chapitres qui suivent toutes les politiques de stock envisageables, car l'objectif que nous poursuivons est une sensibilisation à une problématique d'autant plus complexe qu'elle prétend cerner de près le réel. On se contentera de présenter les principales politiques de stock (§ II-1.1). On examinera dans un second temps quelques principes à respecter dans le choix d'une politique de stock (§ II-1.2, page 635).

Table des
matières

II-1.1 Les principales politiques de gestion de stock

L'analyse du système-stock effectuée en section I mettait en évidence la très grande diversité des systèmes-stocks, mais celle-ci ne fait qu'expliquer la plus ou moins grande complexité de modèles de stocks permettant de définir des politiques optimales. Ce qui différencie fondamentalement les politiques de stock, c'est le type de régulation adopté et donc les réponses aux questions « quand ? » et « combien ? ». C'est sur cette base que nous fonderons notre typologie, et non (comme le font certains auteurs) sur la base de telle ou telle caractéristique d'une partie du système-stock (flux de sortie par exemple).

Index
thématique

II-1.1.1 Les fondements de la typologie retenue

II-1.1.1.1 Réponses à la question « Quand ? »

Trois grandes familles de réponses peuvent être apportées à la question « quand ? », du moins si l'on exclut les réponses fantaisistes (mais correspondant assez souvent à la réalité) du type « n'importe quand » ou « quand on a le temps ». La troisième réponse est un compromis entre les deux premières.

II-1.1.1.1a) Point de commande : s

L'approvisionnement du stock est déclenché lorsque l'on observe que le stock détenu (auquel on ajoute éventuellement les commandes attendues) descend en dessous d'un niveau s , que l'on appelle point de commande. Si le système d'information est du type inventaire permanent, une commande sera déclenchée au moment exact où le stock observé est égal à s . Notons qu'un inventaire permanent

n'implique pas la présence d'un ordinateur, ni même de tenue manuelle de cet inventaire à l'aide de fiches de mises à jour après chaque mouvement, car l'information que l'on cherche à saisir est le franchissement du point de commande. Dans cette optique, la **technique des deux casiers**, connue encore sous le nom de technique des deux magasins (*two-bins system*), répond parfaitement à cet objectif. Il s'agit d'une technique très fruste qui scinde physiquement en deux le stock d'un article : le premier stock est strictement dimensionné à s unités et constitue une réserve matériellement séparée du second stock (casier différent, ou tout autre moyen). On n'a le droit de puiser dans la réserve que lorsque le second stock est épuisé. La première unité demandée sur cette réserve déclenche alors le réapprovisionnement. Dans le système d'information implicitement retenu (voir § I-2.2.2, page 628), le niveau de stock n'est connu qu'à l'occasion du franchissement du point de commande.

Cette technique est appliquée généralement à des articles de très faible valeur (boulonnerie par exemple) mais on la retrouve aussi dans les pharmacies avec le système des élastiques.

II-1.1.11b) Gestion calendaire : T

L'approvisionnement du stock est déclenché à intervalle régulier T , et l'on parle alors de gestion calendaire des stocks.

II-1.1.11c) Gestion calendaire conditionnelle : T, s

Ce dernier cas de figure mélange les deux techniques précédentes : une commande est susceptible d'être passée à intervalle régulier T , à condition que le niveau R de stock possédé et attendu soit inférieur à un point de commande s . On rencontrera fréquemment ce type de décision dans les systèmes à inventaire périodique où le coût de commande est relativement important par rapport aux autres coûts. Des techniques plus sophistiquées encore sont utilisables : on peut, par exemple, déclencher une commande pour toute une famille de références à condition que l'une d'entre elles ait franchi son point de commande, l'examen des diverses positions de stock s'effectuant avec une périodicité commune.

II-1.1.1.2 Réponses à la question «Combien?»

Les réponses à la question «combien?» sont plus variées, les plus répandues sont les suivantes :

II-1.1.12a) Quantité fixe de commande : q

La commande porte sur une quantité q fixée à l'avance. Lorsque la demande est stationnaire, cette quantité est constante et est connue sous le nom de quantité économique de commande, si sa détermination résulte d'un calcul d'optimisation. Lorsque la demande est dynamique, la quantité commandée n'est pas constante, mais sa détermination peut, là encore, résulter d'un calcul d'optimisation (appel à la programmation dynamique), ce que l'on verra au **chapitre XII**.

II-1.1.12b) Niveau de rechargement : S

La quantité commandée est égale à la différence entre le stock observé et attendu R et un niveau de stock S que l'on appelle niveau de rechargement ; ce qui est alors constant, c'est la somme de la commande et du stock R . Le niveau de

recomplètement optimal est fixe lorsque la demande est stationnaire et que la politique de gestion des stocks est de type calendaire; dans ce cas, le montant de la commande n'est pas constant (ce qui différencie fondamentalement cette politique de commande de la précédente). Si, en outre, lorsque l'on passe la commande, les unités restant en stock n'ont plus d'utilité, le montant de la commande est alors fixe et égal à S et on ne parlera plus alors de niveau de remplissage mais de stock initial (cas des journaux quotidiens par exemple).

II-1.1.12c) *Quantité commandée variable en fonction du stock détenu: R_i, q_i*

Certaines politiques de stocks de type calendaire, traitant le cas de demandes stationnaires aléatoires, font dépendre la commande du niveau du stock détenu (et attendu), mais sans que la somme de la commande et du stock détenu (et attendu) soit constante, comme dans le cas précédent. Cette « modulation » de la commande conduit normalement à un coût global de fonctionnement du système inférieur à celui obtenu en utilisant la technique du niveau de remplissage, mais au prix d'un traitement numérique conséquent (utilisation combinée des chaînes de Markov et de la programmation dynamique).

II-1.1.2 Typologie retenue

On peut a priori combiner n'importe quelle variable de commande répondant à la question « quand? », avec n'importe quelle variable répondant à la question « combien? », mais nous ne nous intéressons dans le cadre de cette initiation qu'aux principales politiques de gestion des stocks.

La première d'entre elles est la politique de gestion calendaire à niveau de remplissage, que nous symboliserons par le couple (T, S) et auquel le **chapitre XI** sera consacré.

La seconde politique de gestion des stocks, que nous examinerons (au **chapitre XII**) est une politique à quantité économique de commande et point de commande. Cette politique, notée (q, s) , fait implicitement appel pour la détermination de s , et si la demande est aléatoire, à une politique (T, S) . On peut noter que cette politique est équivalente à une politique (S, s) si les demandes sont d'une unité à chaque fois ($\rightarrow S = q + s$).

Nous examinerons enfin, au **chapitre VIII**, une politique de gestion calendaire dans laquelle les quantités commandées varient d'une période à l'autre (et peuvent être nulles), en fonction d'une demande du type « dynamique-certain ».

II-1.2 Choix d'une politique de gestion de stock

Mettre en place une politique efficace de gestion du stock est une opération coûteuse parce qu'il faut tout d'abord analyser les différentes composantes du système-stock déjà en service. Ceci demande des informations quantitatives observées sur le passé (à moins de mettre en place un système d'information ad hoc), des moyens de calcul, des hommes compétents et disponibles, et enfin un certain temps d'analyse. À partir de ces éléments, il est vraisemblable que l'on pourra mettre en place une gestion du stock nettement plus efficace, c'est-à-dire permettant des économies.

Mais rien ne garantit que ces économies soient suffisantes pour justifier (c'est-à-dire couvrir) non seulement les coûts de diagnostic, mais aussi ceux de mutation du système (ces coûts sont trop souvent négligés ou sous-évalués) et éventuellement l'accroissement de coût (en régime de croisière) associé à une modification du système d'information (passage d'un inventaire périodique à un inventaire permanent par exemple). Cela explique que l'on n'a jamais intérêt à gérer de façon identique toutes les références, à moins d'être dans le cas d'un stock de fabrication de composants (stock multi-échelons) où l'interdépendance des références milite pour l'utilisation des techniques de planification des besoins en composants pour les composants ayant une certaine valeur et n'intervenant pas dans la phase finale d'un assemblage à la commande en application du principe de différenciation retardée. Pour savoir sur quels articles porter d'abord son attention, il est préférable de faire appel à une méthode classique en production, connue sous le nom de méthode ABC, que l'on présentera d'abord avant d'en examiner les applications pour le problème posé. On étudiera, enfin, l'intérêt respectif des deux familles de politiques que l'on a privilégiées.

II-1.2.1 La méthode ABC

Cette méthode permet d'opérer un classement des articles en trois groupes (notés A, B et C) d'importance décroissante. Cette méthode connaît d'autres appellations, dont la plus connue est peut-être celle de méthode des 20-80. Cette méthode est connue encore sous le nom de la loi de Pareto¹.

Le principe de base de cette méthode est des plus simples. On choisit un critère pour analyser ces articles, par exemple la consommation annuelle en euros, et l'on classe par valeur décroissante ces articles. Supposons, pour limiter l'exemple numérique que nous n'ayons que 10 articles, et que les consommations annuelles x_i soient celles du [tableau 175](#), dans lequel $N = 10$; les deux dernières colonnes correspondent au pourcentage cumulé respectivement du nombre de références visées et de la valorisation cumulée de ces références.

L'analyse de cet exemple montre que 20 % des articles réalisent 51 % des consommations annuelles, ce qui permet de classer en trois groupes les articles étudiés. Les bornes que l'on a retenues ici sont, en un sens, arbitraires mais elles traduisent bien l'importance respective pour l'entreprise de trois groupes d'articles. Il est très fréquent d'observer que 20 % des articles «font» 80 % de la valorisation totale du critère étudié, et donc que 80 % des articles ne correspondent qu'à 20 % de la valorisation totale du critère, ce qui a valu à cette méthode d'être souvent appelée méthode des 20-80 (ou des 25-75, ou...). Mais d'un point de vue opérationnel, une répartition judicieuse en trois groupes pose moins de problème qu'une répartition en deux groupes, les problèmes de «frontière» ayant alors moins d'importance.

1. Pareto, dans une étude sur la distribution des revenus en Italie, avait trouvé à la fin du XIX^e siècle que 80 % du revenu national allait à 20 % des titulaires de revenus. La distribution empirique trouvée s'est diffusée sous le nom de loi de Pareto, par analogie avec les lois de probabilité. Il ne s'agit pas à proprement parler d'une loi, au sens physique donné à ce terme. Pour en savoir plus, voir Giard, [182], p. 40.

TABLEAU 175
Exemple d'application de la méthode ABC

i	x_i	$z_i = \sum_{j=1}^i x_j$	i / N	z_i / z_{10}
1	20000	20000	10 %	29 %
2	15000	35000	20 %	51 %
3	10000	45000	30 %	66 %
4	8000	53000	40 %	78 %
5	5000	58000	50 %	85 %
6	4000	62000	60 %	91 %
7	3000	65000	70 %	96 %
8	1500	66000	80 %	98 %
9	1000	67000	90 %	99 %
10	500	68000	100 %	100 %

II-1.2.2 Applications de la méthode ABC

La méthode ABC peut être utilisée pour différents critères : valeur de stock, consommation annuelle, espace consommé, heures de manutention exigées, marges sur coût variable, etc., le choix du (ou des) critère(s) étant une affaire de bon sens et de connaissance des problèmes du terrain. L'utilisation de plusieurs critères peut faire apparaître un «noyau dur» d'articles appartenant au même groupe A quel que soit le critère utilisé, et l'on focalisera en priorité son attention sur ces articles.

Table des matières

Il convient de surcroît de ne pas se limiter à la seule méthode ABC, et de réfléchir aux coûts de rupture associés aux différents articles pour isoler ceux qui ont le plus fort coût de rupture. En effet, une pièce de rechange, par exemple, peut systématiquement appartenir au groupe C parce qu'elle est très peu demandée, a une faible valeur, etc., mais elle peut avoir un très fort coût de rupture parce qu'elle est usinée seulement à la demande et qu'elle concerne une machine critique de l'entreprise. Le bon sens le plus élémentaire conseille de réserver à ces articles «critiques» le même traitement privilégié que pour les articles du groupe A.

Index thématique

Ajoutons enfin que l'importance stratégique pour l'entreprise des articles du groupe A justifie bien souvent qu'on leur consacre un système d'informations assez «poussé» (inventaire permanent, prévisions commerciales...), ce qui permet la mise en place des politiques de gestion de stock les plus performantes, tandis que pour les articles du groupe C on se contentera de systèmes assez frustes. La baisse des coûts informatiques rend toutefois l'intérêt de cette stratification moins évident.

II-1.2.3 Politique calendaire ou politique « q, s »

Plusieurs arguments militent en faveur des politiques de gestion calendaires. Le premier d'entre eux est que ces politiques sont les seules à permettre une maîtrise complète du travail de passation des commandes et celle des transports, avec les conséquences sur le plan organisationnel que cela implique. Le deuxième argu-

ment est que de telles politiques permettent de regrouper plus facilement les commandes de différentes références à un même fournisseur. Un dernier argument peut être avancé lorsque la demande est saisonnière : si la période de révision calendaire correspond à la période de base retenue dans l'étude de la saisonnalité¹, il est alors facile de déterminer la politique de gestion calendaire optimale adaptée à chaque période de l'année (contrairement à ce qu'il est possible de faire analytiquement pour les politiques « q, s »).

Les arguments avancés en faveur des politiques « q, s » sont, habituellement, une plus grande facilité de modélisation et surtout l'obtention d'un coût moyen de gestion plus faible qu'avec les gestions calendaires. Ce dernier argument est fondé si l'on raisonne à coûts de commande identiques (c'est-à-dire en ne tenant pas compte d'un certain nombre de remarques qui viennent d'être faites). Cela étant, il faut noter que les politiques « T, S », dont la période de révision est voisine du temps moyen nécessaire pour «consommer» la quantité de commande de la politique « q, s », ont des performances très voisines. Dans cette optique, on peut être amené à passer par l'analyse d'une politique « q, s », pour déterminer une «bonne» politique « T, S », la détermination optimale simultanée des variables de commande T et S posant de redoutables problèmes numériques.

II-2 Les fondements méthodologiques de la modélisation des politiques de gestion de stock

On commencera par examiner les fondements de la démarche de modélisation économique conduisant à des résultats analytiques (§ II-2.1); cette démarche a déjà été partiellement appliquée au chapitre VIII mais en univers certain, avec peu de résultats analytiques, et lorsque l'on a travaillé en univers aléatoire, c'était essentiellement dans le cadre de simulations, non orientées par principe vers l'obtention de résultats analytiques. Pour éviter d'être trop abstrait, nous avons choisi d'illustrer la démarche en prenant appui sur le modèle le plus ancien en gestion des approvisionnements, le modèle de Wilson, qui sera présenté en détail au § I-1, page 772, du chapitre XII. Il est conseillé de ne lire ce § II-2.1 qu'après avoir pris connaissance du modèle de Wilson.

On examinera ensuite l'application qui est faite de cette démarche dans le cas des politiques d'approvisionnement (§ II-2.2, page 652).

II-2.1 La démarche générale des modèles économiques de gestion

La comptabilité de gestion, issue de la révolution industrielle, vise à établir des relations entre des charges et des activités (au sens large) avec l'objectif avoué de faciliter le contrôle de l'entreprise². La représentation du réel par les modèles de comptabilité de gestion n'a jamais été très bonne, tout d'abord pour des raisons de difficulté de mise en œuvre : finesse des «capteurs» mesurant des flux de production ou de consommation de produits ou de services dans une «entité» productive, difficultés de gestion de systèmes d'information «sophistiqués». À ces raisons contingentes qui expliquent pourquoi les entreprises ont rarement poussé très loin l'application de ces modèles, il faut ajouter des limites intrinsèques de ce mode de

1. Note de la page précédente. Voir sur ce point le § I-3, page 997 du chapitre XV.

2. Voir Bouquin (1997, [62]), Burlaud & Simon (2000, [78]).

représentation. En effet, une représentation « fine » de l'activité réelle de l'entreprise ne peut que se fonder sur des gammes, des nomenclatures, des programmes de fabrication, etc., ainsi que sur une prise en compte des incidents (pannes, défauts, absence de personnel, rupture d'approvisionnement...). Les modèles de comptabilité de gestion travaillent nécessairement à un niveau d'agrégation (sur le temps, les produits et les ressources) qui ne permet pas de réelles analyses causales entre les grandeurs manipulées, ce qui est une condition préalable pour aboutir à des prescriptions dans la prise de décisions opérationnelles répétitives. L'utilisation presque toujours implicite d'hypothèses simplificatrices (linéarité, stabilité « suffisante » des problèmes rencontrés et des réponses apportées...) permet néanmoins de se servir dynamiquement de ces modèles dans le cadre du contrôle de gestion. Mais dans ce contexte, l'origine *exacte* d'écarts ne peut être connue et donc aucune prescription précise ne peut être tirée de l'analyse. On peut ajouter que l'habitude prise par de nombreux gestionnaires de ne raisonner que sur des représentations en valeur leur a fait perdre tout contact avec le réel et les incite plus à agir sur des effets que sur leurs causes profondes. D'autres voies ont été explorées, depuis plus d'un siècle, pour aider à la prise de décision, notamment celle de la modélisation économique de gestion¹.

Un modèle est une représentation simplifiée de la réalité. Il repose sur une liste restreinte d'hypothèses simplificatrices décrivant une partie du monde réel et de son fonctionnement. Dans le cadre de modèles quantitatifs, les seuls auxquels on s'intéressera ici, ces hypothèses se traduisent concrètement par une ou plusieurs équations reliant plusieurs variables et paramètres représentant, dans le modèle, des entités du monde réel. La modélisation est sous-tendue par une analyse causale, se voulant très souvent explicative, dont la finalité ultime est l'aide à la prise de décision, la cohérence interne du modèle n'impliquant rien quant à la véracité des mécanismes décrits. La multiplicité de représentations de la réalité pose de redoutables problèmes de hiérarchie, cohérence, complémentarité, exhaustivité et de pertinence liée aux définitions et usages des modèles. On ne s'intéressera ici qu'au problème de l'établissement d'un modèle économique de gestion.

Par **modèle économique de gestion**, il faut entendre un modèle de gestion comportant un éclairage en valeur et orienté vers la préparation d'une prise de décision particulière de type programmable ou semi-programmable (voir [page 46](#)) pour *prendre* des décisions *opérationnelles* (gestion des approvisionnements, par exemple) et pour *éclairer* des décisions *tactiques* (certains modèles de planification, par exemple) ou des décisions *stratégiques* (modèles de localisation d'usine ou de dimensionnement d'installation, par exemple). En fait ce type de modèle s'appuie sur deux niveaux de modélisation: un niveau de description physique (§ II-2.1.1) et un niveau de description en valeur qui s'appuie *nécessairement* sur le précédent (§ II-2.1.2, [page 642](#)). On examinera enfin les précautions à prendre dans l'utilisation de ce type de modèle (§ II-2.1.3, [page 647](#)).

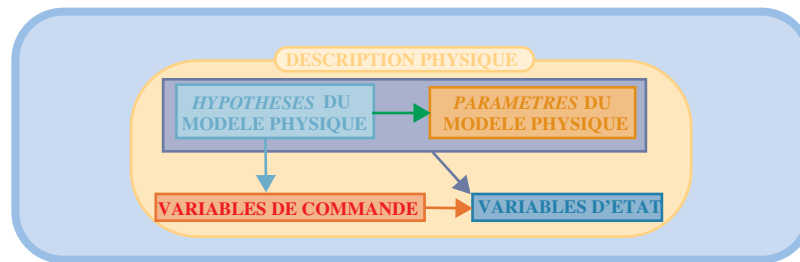
1. Ce paragraphe § II-2.1 s'appuie en grande partie sur un article de Giard & Pellegrin (1992, [198]).

II-2.1.1 Les bases de la description physique des modèles économiques de gestion

Au niveau physique, le modèle de gestion fait appel à trois catégories d'informations: variables de commande, variables d'état et paramètres physiques qui interagissent selon le schéma de principe de la [figure 175](#).

FIGURE 175

Description physique des modèles économiques de gestion



II-2.1.1.1 Les variables de commande

Une **variable de commande** correspond à une réponse possible à l'une des questions posées par le problème décisionnel auquel se réfère le modèle (par exemple, «quand réapprovisionner un article?» et «combien d'unités de cet article doit-on commander?»). En règle générale, l'interprétation physique d'une variable de commande est exempte d'ambiguïté pour le gestionnaire.

Dans le modèle de Wilson, le point de commande s (réponse à la question «quand approvisionner?») correspond à une valeur de position de stock dont le franchissement doit provoquer la commande et la quantité de commande q (réponse à la question «de combien approvisionner?») n'est autre que le nombre d'unités à commander pour l'article considéré.

II-2.1.1.2 Les paramètres physiques

Les **paramètres** physiques fournissent la base de description du processus physique sur lequel les variables de commande vont agir.

Dans le modèle de Wilson, le processus est simple et se décrit par deux catégories d'informations:

- La première est relative à la demande qui s'exprime sur l'article étudié. Le modèle de Wilson utilise une demande sur la période de temps retenue (l'année, par exemple) qui est constante et notée D . Cette information est à compléter par toute une série d'autres informations indispensables pour clarifier le processus physique. Les informations additionnelles ne figurent pas explicitement dans les équations du modèle et s'expriment par une liste d'hypothèses. D'une manière générale, l'explicitation de cette liste d'hypothèses n'est pas triviale et, bien souvent, la présentation de modèles de gestion souffre de lacunes fortes dans ce domaine, rendant moins claires les limites du modèle. Parmi les hypothèses sous-jacentes ici, on peut citer: le fait d'être en régime de croisière (i.e. reconduction périodique, jusqu'à la fin des temps, de cette demande, d'où découle l'hypothèse d'une permanence des demandeurs et de leurs besoins, mais aussi celle d'une stabilité de l'environnement technique et donc des produits de substitution possibles), le fait

d'être en univers certain et la linéarité de la demande (la demande D se distribue uniformément tout au long de la période de référence).

- La seconde est relative à l'exécution de la commande. Le modèle de Wilson retient un délai d'obtention L qui est certain. Parmi les hypothèses implicites additionnelles, on peut citer celle d'une livraison, en une fois, de la totalité de la commande.

La définition des variables de commande vient souvent compléter la représentation physique sous-jacente au modèle. Dans notre exemple, on peut noter que :

- Il n'y a pas de limite assignée à la quantité que l'on peut commander, ce qui revient à admettre que l'on dispose toujours du stockage requis et que des objets stockés ne subissent aucune altération.
- L'utilisation d'un point de commande a des implications organisationnelles fortes car, pour connaître avec précision le franchissement d'un point de commande, il faut disposer d'un système d'information de type inventaire permanent (manuel ou informatisé) ou utiliser des procédés physiques permettant de déceler cet événement (système des deux casiers).

Un point plus difficile à analyser, parce que relevant du «non dit», est le type de relations qu'entretiennent des objets de même nature, dont la gestion s'effectue en faisant appel à des modèles. C'est ainsi que le fait que le modèle de Wilson ne prenne pas en compte des contraintes portant sur des ressources rares consommées par plusieurs références (espace, argent...) revient à admettre, dans la définition de la politique de chacune d'entre elles, que de telles contraintes n'existent pas parce que leurs dotations sont suffisantes. À côté de cette absence d'interdépendance (portant sur la consommation de ressources partagées), intervient également, mais plus explicitement cette fois, la notion d'indépendance qui joue au niveau des variables de commande. L'absence de mention à d'autres références dans la définition des variables de commande d'une référence donnée implique leur indépendance; concrètement, pour le modèle de Wilson, la définition des variables de commande exclut toute commande portant simultanément sur plusieurs références, ce qui n'est pas sans incidence sur le plan organisationnel.

Cet exemple montre l'importance qu'il y a à faire porter une attention aussi importante aux paramètres du modèle relatif à la description du processus physique (D et L dans notre exemple) qu'à l'explicitation de la liste exhaustive des hypothèses sous-jacentes. Cette remarque est essentielle pour apprécier la distance qui sépare le réel du modèle (acceptabilité des hypothèses), pour définir la robustesse du modèle (sensibilité des prescriptions du modèle au respect plus ou moins grand de certaines hypothèses) et pour en déterminer l'usage (durée de validité des prescriptions du modèle). Cette remarque est également fondamentale pour s'assurer de la compatibilité des hypothèses du modèle physique et celles sous-jacentes dans la définition de coûts utilisés dans une phase de description en valeur. Nous reviendrons sur ces points.

II-2.1.1.3 Les variables d'état

Les **variables d'état** caractérisent le fonctionnement du système étudié en régime de croisière. Elles correspondent soit à un *dénombrement d'événements*, soit à un *indicateur* portant sur des données physiques. L'utilisation d'une variable d'état, dans un modèle, s'explique par l'hypothèse que son niveau n'est pas sans

influencer (un ou) plusieurs postes de charges de l'entreprise, ce que le «niveau de description en valeur» se chargera d'exploiter. Les modèles de gestion utilisent plusieurs variables d'état et celles-ci ne varient pas toutes dans le même sens lorsque l'on modifie l'une des variables de commande. Par ailleurs, les variables d'état prennent des valeurs qui varient en fonction de celles assignées aux variables de commande. Pour marquer cette dépendance, l'habitude assez répandue veut que la notation en usage pour les fonctions soit reprise pour désigner les variables d'état.

Reprenons le modèle de Wilson pour illustrer ce qui vient d'être dit. Deux variables d'état sont retenues dans ce modèle :

- La première est le nombre de commandes passées par période de référence que l'on notera $N(q)$ en ne faisant intervenir que la seule variable de commande q (dans le modèle de Wilson «de base», on montre que les variables d'état ne dépendent pas du point de commande s); l'événement faisant l'objet d'un dénombrement est, à l'évidence, générateur de dépenses.
- La seconde variable d'état est le stock moyen possédé sur le long terme que l'on notera $S(q)$ et dont l'interprétation la classe dans la catégorie des indicateurs (un stock moyen) car il ne s'agit pas de quelque chose de physiquement observable.

Le modèle, dans sa description physique, définit analytiquement chaque variable d'état, parfois au prix d'une démonstration peu triviale (par exemple, espérance mathématique du temps moyen d'attente d'un client dans un problème de file d'attente). Les relations analytiques du modèle de Wilson sont: $N(q)=D/q$ et $S(q)=q/2$. Il convient de remarquer que la définition de ces variables d'état est indépendante de leur valorisation.

II-2.1.2 Bases de la description en valeur des modèles économiques de gestion

Certains modèles, utilisables par des gestionnaires, comme ceux issus de la théorie des files d'attente, s'arrêtent à une description physique. Dans ce cas, les conséquences économiques des recommandations que l'on peut tirer du modèle sont inexistantes. Les modèles économiques de gestion poussent plus loin l'analyse et cherchent à définir les variables de commande en s'appuyant sur un éclairage économique des conséquences des valeurs retenues pour ces variables. Cette vision économique passe par l'utilisation d'une **fonction économique** qui est un indicateur en valeur associé au fonctionnement du sous-système étudié dépendant des valeurs prises par les variables de commande retenues. Cet indicateur, généralement un coût de fonctionnement de ce sous-système étudié, se définit comme une somme de variables d'état pondérées par des coûts unitaires appropriés. Nous reviendrons sur cette fonction économique à la [page 655](#).

Ces coûts unitaires se déterminent en faisant appel à la comptabilité de gestion. Ce sont donc des coûts standards ***dont l'objectif et la définition peuvent ne pas en autoriser l'usage sans réserve dans un modèle économique de gestion***. Pour comprendre les limites d'un coût, il importe d'explicitier ce qui le génère physiquement ainsi que les raisons qui sous-tendent les conventions de calcul du coût. En effet, l'usage de la fonction de coût implique une cohérence des visions qui n'a

rien d'automatique. La figure 176 illustre cette seconde étape de la création d'un modèle économique de gestion.

FIGURE 176
Modélisation en valeur du modèle économique de gestion

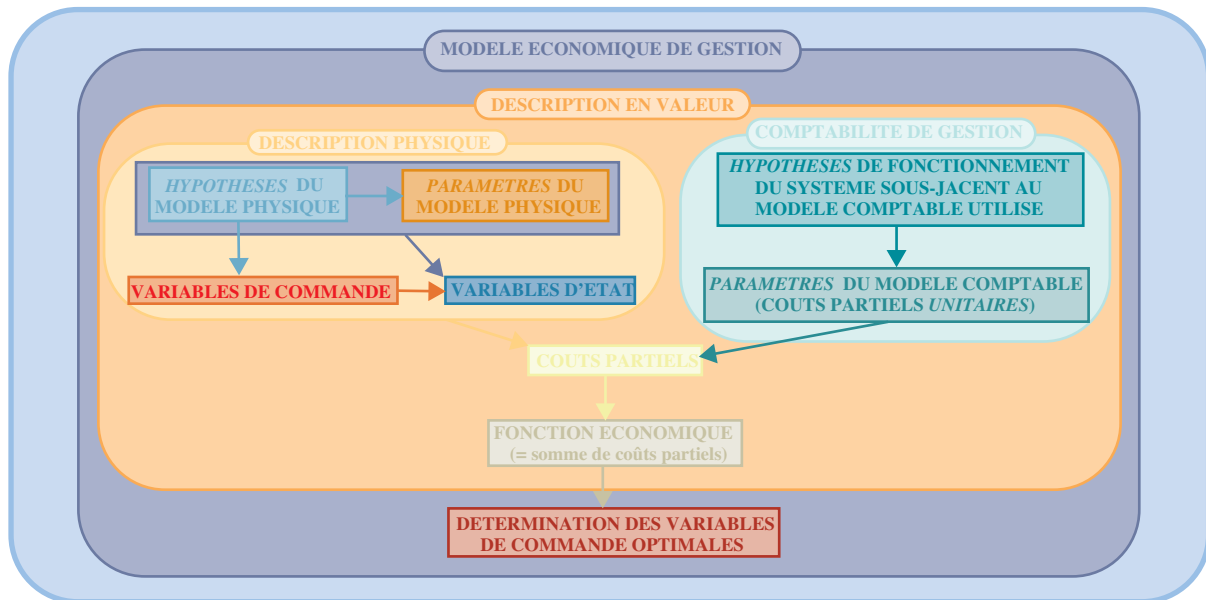


Table des matières

Index thématique

Presque toujours, la fonction de coût s'analyse comme une grandeur moyenne qui n'est pas directement observable parce qu'elle s'inscrit sur le long terme ou parce qu'elle somme des éléments hétérogènes (décaissements et « manque à gagner », par exemple). Le choix de cet indicateur se justifie par l'hypothèse que l'amélioration de sa valeur va dans le sens de performances accrues pour l'entreprise, sur un horizon donné. Le bien-fondé de cette relation causale implicite repose largement sur la pertinence des hypothèses relatives aux descriptions physiques et en valeur.

Les problèmes posés ne sont pas exactement de même nature, suivant que la variable d'état à valoriser est liée directement à la gestion du système productif (§ II-2.1.2.1.) ou qu'elle décrit la défaillance de ce système (§ II-2.1.2.2, page 644), ce qui n'a de sens que lorsque l'on quitte l'univers certain et nous amène sur d'autres modèles économiques de gestion que celui de Wilson.

II-2.1.2.1 Principes de valorisation des variables d'état décrivant la gestion du système productif

C'est le cas des deux variables d'état $N(q)$ et $S(q)$ du modèle de Wilson qui seront respectivement valorisées par un coût unitaire de commande c_c et un coût unitaire de possession c_p . Presque toujours, le coût unitaire utilisé est de la forme $c_1 + c_2/n$.

Le premier terme c_1 est un coût variable direct¹ parfaitement identifiable. On peut classer dans cette catégorie, pour le coût de commande c_c , des frais de timbre

1. Rappelons qu'une charge est dite **variable** lorsqu'elle varie en fonction du niveau d'activité; par opposition, les **charges fixes** sont insensibles au niveau d'activité, du moins pour un intervalle d'activités et un horizon. Une charge est dite **directe** lorsqu'elle est induite par la fabrication d'un produit unique et peut donc être imputée sans qu'il soit nécessaire de faire appel à une convention de répartition.

ou de télécopie et, pour le coût de possession c_p , la charge supplétive correspondant au coût d'opportunité associé à l'immobilisation financière du stock.

Le second terme, c_2/n , est le quotient d'une somme c_2 de charges indirectes observables sur une période, par un nombre n d'unités d'œuvre à l'origine de ces charges. Ce décompte peut être relatif à des opérations physiques de production (fabrication, assemblage) ou de logistique (manutention, stockage, transport) ou à des transactions informationnelles. Dans l'exemple de coût c_c de passation de commande, c_2 intègre les charges du personnel du service responsable de la gestion des commandes mais aussi les amortissements d'équipements utilisés et la location des bureaux occupés par ce service. Pour ce même exemple, le dénominateur n correspond à l'ensemble des commandes traitées par le service durant la même période de référence que celle utilisée pour les charges c_2 . Il faut alors noter, d'une part, que l'article dont on étudie l'approvisionnement peut n'intervenir que partiellement dans la définition de ce quotient et, d'autre part, que ce nombre n résulte de l'ensemble des politiques d'approvisionnements retenues pour toutes les références traitées. En outre, dans sa version initiale, le modèle de Wilson implique qu'une commande ne porte que sur un seul article¹.

En définitive, les coûts standards que l'on va utiliser dans un modèle économique de gestion reflètent une certaine organisation. Cela est très net pour le terme c_2/n ; c'est éventuellement le cas pour le terme c_1 si le coût variable direct n'est pas constant (par exemple, tarif dégressif en matière de télécopie). *Le problème majeur qui se pose est alors celui de la pertinence de l'usage d'un coût défini dans un certain contexte, pour transformer ce contexte* (on reviendra sur ce point au § II-2.1.3.1, page 647).

On peut ajouter, en poussant plus loin l'analyse, que l'organisation a vraisemblablement influencé la détermination de certains paramètres caractérisant le processus physique du modèle étudié. Le délai d'obtention, par exemple, intègre une durée de traitement administratif de la commande à passer. Il y a toutes les chances pour que cette durée excède notablement le temps requis par une gamme opératoire de cette « transaction » administrative. La différence se justifie par l'existence possible d'une file d'attente qui s'explique par le fait qu'il n'y a aucune raison pour que les différentes commandes se répartissent uniformément dans le temps et donc pour que les ressources mobilisées soient disponibles au moment où une nouvelle commande est déclenchée. Ce phénomène peut être observé, même si l'hypothèse d'univers certain est fondée. Il s'ensuit que le réexamen des politiques d'approvisionnement de nombreux articles peut modifier l'équilibre actuel et remettre en cause les valeurs utilisées pour les délais d'obtention.

II-2.1.2.2 Valorisation de variables d'état décrivant la défaillance du système productif

En règle générale, les modèles économiques de gestion s'intéressent au fonctionnement d'un système tourné vers la production ou la fourniture d'un bien ou d'un service. Pour un certain nombre de raisons, ce système peut ne pas être en

1. Si certaines commandes comportent plusieurs lignes de commande, un coût standard peut être calculé pour la ligne de commande (et donc la commande élémentaire du modèle de Wilson). En toute rigueur, ce calcul doit être mené pour chacun des fournisseurs et le coût standard établi n'a de sens que pour les fournisseurs auprès desquels des commandes nombreuses et régulières sont passées.

mesure de satisfaire la demande et donc être défaillant, ce qui n'est envisageable, dans un modèle de gestion, qu'à condition de faire intervenir des variables aléatoires¹ : demande d'une référence, délai de traitement d'une information, durée de fonctionnement d'un organe avant défaillance, temps opératoire. La défaillance du système peut se traduire par une production différée ou par une production perdue parce que la demande non satisfaite est perdue.

II-2.1.22a) Cas des demandes perdues

La défaillance du système productif peut priver l'entreprise d'une rentrée d'argent (marge non réalisée du fait d'une vente perdue, pénalité de retard...). Dans ce cas, la comptabilité de gestion est d'une faible utilité dans la mesure où l'échéancier de variations induites de flux de trésorerie est assez facile à déterminer, une fois définie l'importance des demandes perdues. Reste le problème de l'incidence de cette défaillance sur la demande future. En gestion des approvisionnements, dans le cadre d'une gestion des stocks de distribution, il est fréquemment proposé d'ajouter, à la marge non réalisée, une pénalité qui s'analyse comme une espérance mathématique d'un flux net de trésorerie actualisé d'un échéancier de marges futures. Cette pratique difficilement contournable pose le problème redoutable de l'évaluation de cette pénalité sur la base la plus objective possible. On peut noter, par ailleurs, qu'elle ne s'accompagne pas, du moins en ce qui concerne les modèles connus, d'une révision des paramètres caractéristiques de la demande (ce qui aurait le mérite de la cohérence).

II-2.1.22b) Cas de possibilité de rattrapage de la défaillance

Lorsqu'il est techniquement possible de faire face à la défaillance par une mobilisation de ressources (augmenter la taille du stock pour diminuer le risque de rupture en gestion des approvisionnements, mettre en place une politique de maintenance préventive en gestion de la maintenance...), la décision d'un niveau de service conduit, implicitement ou non, à effectuer un arbitrage entre le coût d'obtention de ce niveau de service et les conséquences économiques de la défaillance du système. Expliciter cet arbitrage, c'est associer un «coût standard» à la défaillance. Un tel standard soulève évidemment des objections :

- ses bases de calcul ne permettent pas de prendre en compte la totalité des conséquences de la défaillance : par exemple les effets, quelquefois catastrophiques, générés par des événements concomitants (présence dans un atelier de pannes simultanées mobilisant déjà une partie du personnel d'intervention, absence d'un opérateur spécialisé...);
- ce standard est nécessairement fonction d'un niveau de ressources mises en œuvre pour prévenir la propagation de la perturbation.

Il correspondra donc à une vision «privilegiée» de la réalité; on rejoint ici la provocation bien connue de Burlaud et Simon (1981, [76]) : «résultat d'un calcul interne, un coût est une opinion, non un fait»². La valorisation du coût de défaillance doit reposer sur les principes suivants :

1. On trouve quelques modèles en univers certain qui acceptent la défaillance (rupture de stock en gestion des approvisionnements, par exemple), mais ils ne présentent guère d'intérêt pratique.

2. Ce point de vue n'est pas nouveau, puisqu'en 1923, J.M. Clark assignait une dizaine de fonctions possibles au coût, et donc autant de règles de calcul différentes (voir Giard, 1990, [175]); il avait cependant fini par être oublié.

- L'évaluation doit être fondée sur l'**analyse du processus physique** qui accompagne la défaillance: propagation de la perturbation et réactivité du système productif à l'aléa. Ce processus de propagation est décrit au § I-3.1, page 600, du chapitre IX, et illustré par un exemple sur les conséquences d'un incident sur une ligne. Il amène quatre remarques:
 - La vitesse de propagation dépend fondamentalement des procédures de découplage mises en œuvre: stocks tampons, dérivations conduisant à mobiliser un équipement en réserve après la mise «en repli» du poste qui provoque la paralysie progressive du système productif, etc. Ce retour à la normale peut être plus complexe: par exemple, lorsque l'utilisation d'une procédure de découplage entraîne un fonctionnement en marche dégradée (perte de qualité, augmentation du temps de cycle...).
 - L'analyse de la propagation, assez facile dans le cadre d'une ligne de production, est plus complexe dans le cas d'une structure en *flow-shop* et, a fortiori, dans celui d'une structure en ateliers spécialisés (*job-shop*) car des procédures de découplage supplémentaires sont mobilisables pour retarder la propagation (modification d'ordonnancement, utilisation de gammes alternatives...).
 - Après l'intervention corrective, il y a retour à la normale à partir du moment où l'on retrouve l'état initial. Ce retour à l'état initial est nécessairement consommateur de ressources et cette consommation est facilement mesurable.
 - Lorsque la durée de l'indisponibilité du système productif ne peut être considérée comme certaine, il faut explicitement envisager différents scénarios possibles et leur probabilité de réalisation.
- Dans une optique décisionnelle, la **valorisation** des consommations de ressources ne peut être que **conventionnelle**. L'évaluation du coût de remise en état d'équipement ne soulève pas de difficultés majeures car elle repose sur une valorisation de consommations physiquement identifiables (heures de personnel, matières consommées, utilisation d'outillage...). Cette valorisation peut faire l'objet d'une **facturation** (entreprises extérieures) et n'est conventionnelle que dans la mesure où l'on utilise une estimation d'un montant moyen de facture. Dans le cas contraire, elle pose les problèmes classiques d'appel à des *coûts standards* mais ne conduit pas à des distorsions importantes en cas de forte répétitivité de l'utilisation de ces outils. Le vrai problème est celui posé par la valorisation des ressources consommées pour le fonctionnement des procédures de découplage et la restauration de l'état initial (récupération de la production perdue et des ponctions sur stocks, postérieurement à l'incident), sachant que les matières directes consommées dans le processus de production ne sont pas concernées, dans la mesure où l'incident suivi du retour à la normale ne modifie pas la consommation observée (sur une période assez longue). Deux logiques s'affrontent, selon le point de vue retenu:
 - Si l'on adopte un point de vue de trésorerie **et si** l'on dispose de capacités excédentaires (sur-dimensionnement des équipes de production et de maintenance), l'incident ne génère aucune charge additionnelle, le coût pourrait être considéré comme nul¹. Cette valeur nulle peut conduire à décider d'une politique de maintenance corrective consistant à attendre la

défaillance pour intervenir. Cette décision serait la conséquence indirecte du niveau de ressources permanentes excédentaires découlant du choix stratégique arbitrant entre des charges de structure (sur-dimensionnement de l'équipe d'intervention, taille des stocks tampons, équipements en réserve...) et les charges opérationnelles résultant de la défaillance de l'équipement. La politique de maintenance¹ (arbitrage entre maintenance préventive de périodicité et niveau à déterminer et maintenance corrective) se définit au niveau tactique et s'appuie sur un modèle économique dans lequel ces ressources permanentes sont prédéterminées, et donc pour un état donné des procédures de découplage, de dimension des équipes de fabrication et de maintenance, etc. De ces diverses considérations, il résulte que le plus « sage » est de valoriser la consommation de ces ressources en tenant compte de l'utilisation alternative qui pourrait en être faite. C'est sur une logique de coût d'opportunité que se fonde l'évaluation conventionnelle. L'utilisation du potentiel excédentaire devrait être alors facturée (coût de rupture) sur la base d'un taux horaire moyen calculé sur la base de l'utilisation effective moyenne prévisionnelle de ce potentiel excédentaire. Il peut découler de ce calcul une utilisation moyenne différente de celle calculée au niveau stratégique, d'où une rétroaction possible sur le niveau stratégique. La hiérarchie des modèles de décision apparaît nettement ici² et peut être illustrée par le schéma de la [figure 177 de la page 648](#).

- Si l'on adopte un point de vue de trésorerie et si l'on ne dispose *pas* de capacités excédentaires, l'incident génère des charges additionnelles (sous-traitance, heures supplémentaires...). Le caractère conventionnel de l'évaluation est analogue à celui rencontré dans le cas de la facturation.

Table des matières

Index thématique

II-2.1.3 Utilisation des modèles économiques de gestion

La compréhension de l'intérêt et des limites des modèles économiques de gestion passe d'abord par celle des mécanismes de création de ces modèles, ce que nous venons d'examiner. Il faut y ajouter une dose de vigilance sur la cohérence interne du raisonnement (§ II-2.1.3.1), un certain recul sur le réalisme de la modélisation qui pose la question du degré de sophistication nécessaire (§ II-2.1.3.2). Enfin, l'usage du modèle peut avoir des effets redoutablement pervers par les comportements qu'il peut engendrer (§ II-2.1.3.3).

II-2.1.3.1 Cohérence interne du raisonnement

La [figure 178 de la page 649](#) complète la [figure 175 de la page 640](#) en indiquant comment, en toute rigueur, ce modèle devrait être utilisé. Le modèle économique de gestion a pour objet de guider l'action en proposant des relations optimales pour les variables de commande. L'application généralisée de ces relations a des incidences sur certaines caractéristiques de la représentation physique de la réalité

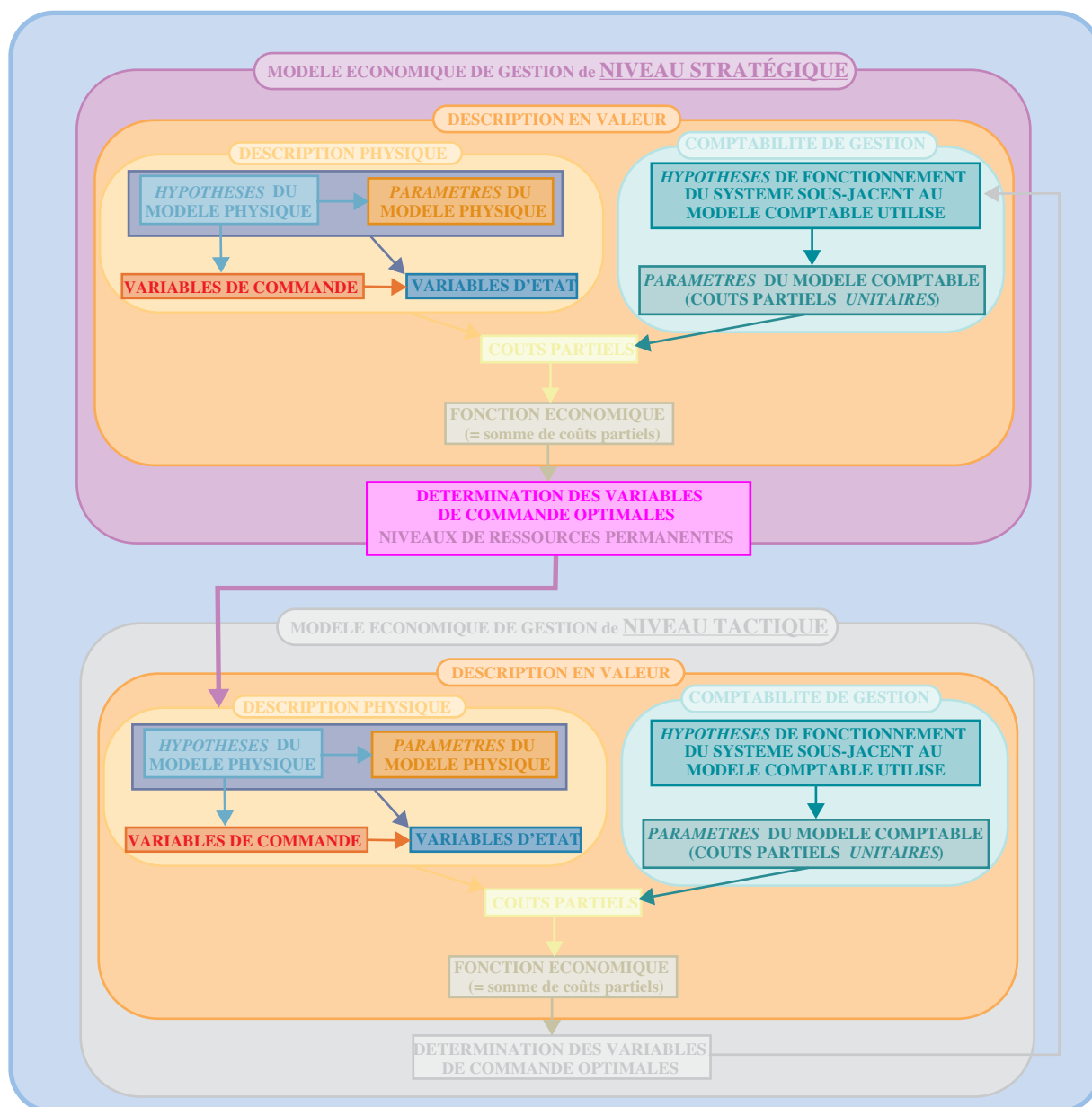
1. *Note de la page précédente*. Ce qui n'est pas sans rappeler le paradoxe du voyageur de Calais (et sa solution en univers aléatoire).

1. Voir Pellegrin (1997, [333]).

2. Le niveau de détail des représentations implicitement utilisées (découpage temporel plus ou moins fin, regroupement plus ou moins important de ressources et regroupement plus ou moins grand de produits) diffère pour les deux niveaux de décision.

FIGURE 177

Hiérarchie décisionnelle dans les modèles économiques de gestion

Table des
matièresIndex
thématique

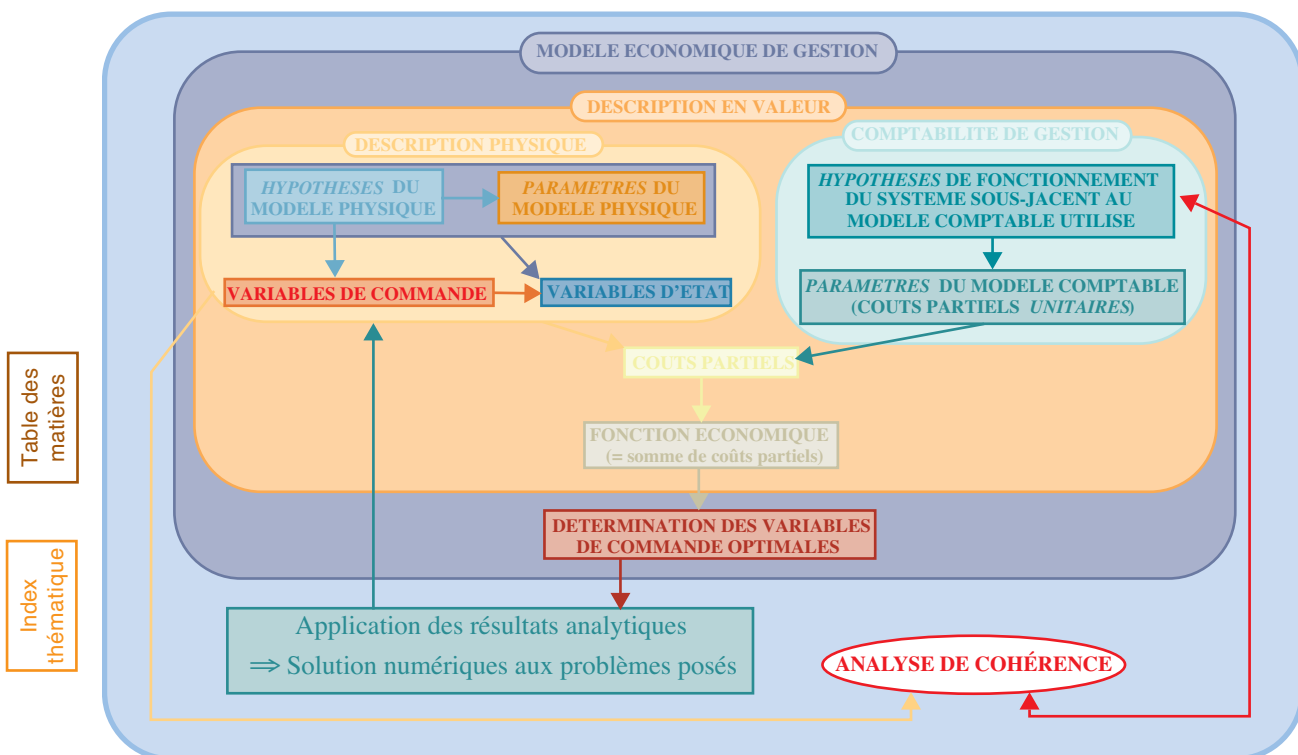
(volume de stockage impliqué par cette politique de commande, par exemple). Certaines conséquences peuvent ne pas être acceptables parce qu'elles violent des contraintes implicites du problème posé. Cette démarche n'a rien d'anormal car il est souvent judicieux de traiter d'abord un problème dont certaines contraintes sont relaxées en espérant que la solution trouvée s'avère acceptable au regard de ces contraintes. Il est donc souhaitable d'assortir toute solution numérique à un problème posé de la batterie la plus large possible d'indicateurs pour s'assurer de la faisabilité de la solution opérationnelle proposée. C'est ce que nous ferons dans les chapitres suivants.

Un autre problème méthodologique ne peut être éludé. Nous avons vu, [page 642](#), que les hypothèses sous-jacentes dans la construction de coûts standards par la comptabilité de gestion ne sont pas forcément cohérentes avec celles de la représentation physique du modèle économique de gestion. En toute rigueur, la pertinence de la solution proposée par ce modèle est compromise si les représentations

sous-jacentes divergent. Il conviendrait normalement de réviser les coûts standards pour tenir compte des modifications induites par l'usage des solutions numériques proposées, mais ces modifications peuvent, à leur tour, modifier ces solutions numériques¹. Ce bouclage itératif devrait permettre d'assurer assez rapidement la cohérence normalement recherchée. Cela étant, si conceptuellement ce bouclage est nécessaire, en pratique il est assez irréaliste de l'envisager. Sauf si les divergences sont trop fortes, il suffit généralement d'une certaine vigilance dans la révision périodique de ces coûts standards et des valeurs prises par les variables de commande, ces révisions périodiques conduisant à une convergence progressive, à supposer que le problème posé reste stable.

FIGURE 178

Analyse de la cohérence des représentations physiques sous-jacentes dans un modèle économique de gestion



Le dernier problème de cohérence à rappeler est celui de la cohérence entre les décisions de niveau stratégique, tactique et opérationnel, évoqué à la page 647 et conduisant à la figure 177 de la page 648.

1. Prenons le cas d'un article qui, dans la situation actuelle, est commandé quarante fois par an. Supposons que le nombre annuel moyen de commande soit de 200 et que le coût de commande pour cet article soit : $50 + 150000/200 = 800$. Avec une demande annuelle D égale à 4000 et un coût de possession égal à 160, la quantité économique de Wilson, pour cet article, est alors égale à 200, ce qui conduit à passer vingt commandes par an pour cette référence. Le nombre de commandes a donc été divisé par 2 et le nombre moyen annuel de commandes passe de 200 à 180. Deux situations sont alors envisageables :

- le temps dégagé est utilisé pour d'autres besoins ; dans ce cas, la diminution du nombre de commandes s'accompagne bien d'une économie de $20 \times 750 = 3000$;
- le temps dégagé n'est pas utilisé et alors le nouveau coût standard s'élève à $50 + 150000/180 = 883,33$; avec ce nouveau coût standard, la quantité économique passe alors à 217 unités ; cette nouvelle valeur conduit à un nouveau coût standard de $50 + 150000/(200 - 21,5) = 890,67$ lequel conduit, à son tour, à une valeur (« finale », compte tenu de la précision requise) de 218 unités, ce qui devrait conduire à une révision du coût standard.

II-2.1.3.2 Le réalisme des modèles

Les différentes équations d'un modèle permettent de quantifier les effets induits par une décision représentée par les valeurs prises par les variables de commande. Inversement, il est souvent possible de déterminer la valeur de ces variables pour obtenir un effet induit désiré. Cette détermination peut être analytique (application de « formule ») ou algorithmique, au sens où aucun résultat analytique n'est mobilisé, par exemple à l'aide des fonctionnalités offertes par les options « valeur cible » et « solveur » des tableurs. Deux attitudes extrêmes doivent être évitées en matière de modélisation.

- Tout d'abord, il ne faut jamais oublier que « la carte n'est pas le territoire » et que la pertinence de l'aide à la décision qu'apporte un modèle dépend fondamentalement de la pertinence des hypothèses qui le sous-tendent. L'absence de recul des utilisateurs, sur ce point, peut conduire à bien des déconvenues.
- La seconde attitude, toute aussi dangereuse pour le gestionnaire, consiste à « jeter le bébé avec l'eau du bain », autrement dit à refuser toute modélisation sous prétexte qu'aucun modèle ne rendra compte exhaustivement de la réalité. Agir ainsi conduit à fonder ses agissements sur un arbitraire total – souvent baptisé abusivement « bon sens » – ou à utiliser une rationalité implicite s'appuyant de fait sur une logique d'enchaînements causaux (pas forcément tous quantifiables). Dans ce dernier cas, avec un peu de chance, ce sont les facteurs importants qui sont retenus. Mais, s'il en est ainsi, pourquoi ne pas expliciter le raisonnement par un modèle, sauf si cette « mise à plat » est génératrice d'ennuis potentiels pour son auteur car expliquer une démarche, c'est accepter le risque d'être contredit. Dans cet esprit, la modélisation se doit d'aller rapidement à l'essentiel ; c'est une condition d'acceptabilité du modèle par ceux qui en décident l'utilisation de manière automatisée ou en aide à la décision. Elle doit également permettre de préciser l'importance relative effective de certains facteurs, l'intuition en la matière n'étant pas toujours bonne conseillère.

Une fois acceptée l'idée de décisions s'appuyant sur les enseignements de modèles économiques de gestion, se pose la question de savoir quel est le degré pertinent de raffinement des hypothèses à retenir dans la description d'un problème récurrent. Une autre façon de voir les choses est de s'interroger sur l'impact de l'abandon de certaines hypothèses permettant de mieux décrire la réalité. La question ainsi posée est celle de la **robustesse** des modèles, celle-ci étant appréhendée ici au travers des variables, paramètres et relations et non par rapport à la qualité des données utilisées.

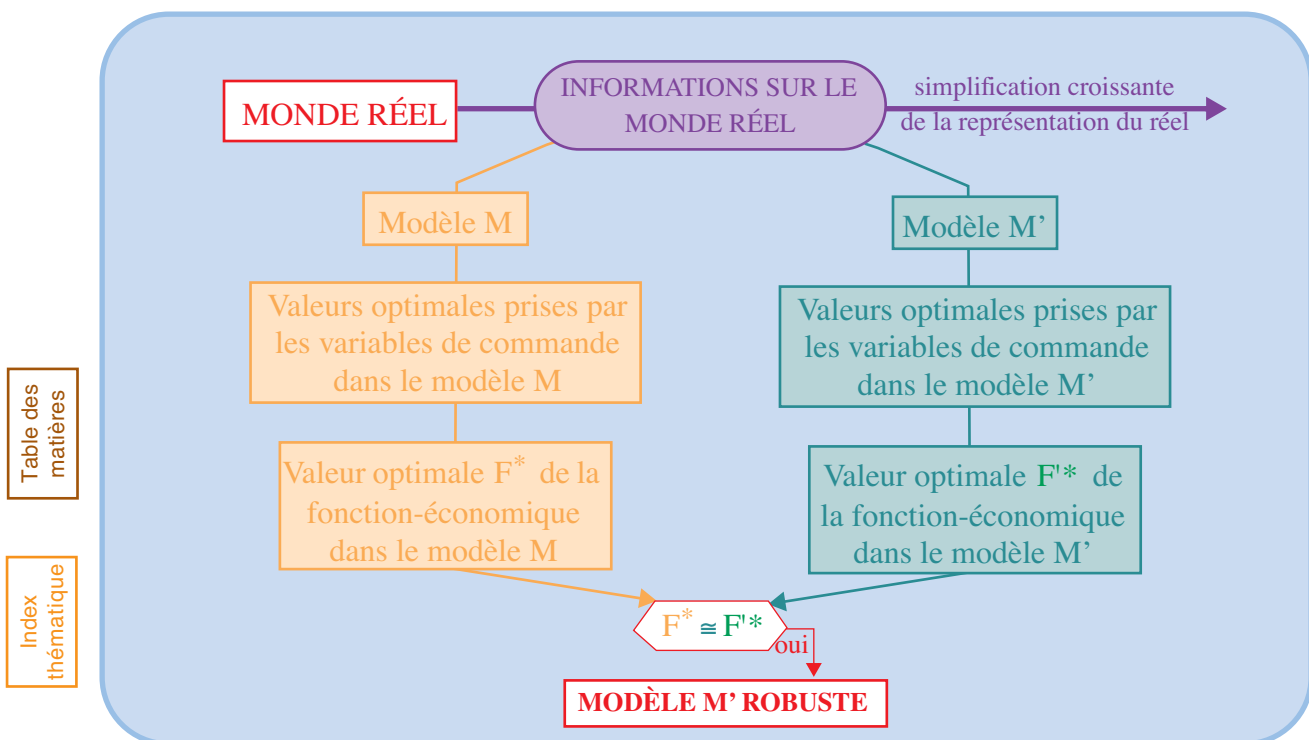
La **figure 179** illustre la manière dont se définit le problème. Presque toujours, le modèle utilisé, noté M' , est plus « simple » qu'un autre modèle, noté M , qui semblerait plus pertinent (univers aléatoire au lieu d'univers certain, contraintes non relaxées, connaissance meilleure des structures de coûts relatifs...) mais qui est plus difficile à mettre en œuvre pour des raisons de recueil de données et/ou de résolution numérique. Le modèle M' a les mêmes variables de commande que le modèle M . En outre, l'indicateur économique utilisé dans les deux cas est rigoureusement de même nature, dans la mesure où seule la définition de certaines variables d'état du modèle M peut être plus complexe que celle utilisée par le

modèle M' (passage d'une notion de moyenne à celle d'une espérance mathématique, par exemple).

On considérera que les résultats fournis par le modèle M' sont robustes par rapport au non-respect de certaines hypothèses du modèle M , si la dégradation de performances induite par l'utilisation du modèle M' peut être considérée comme négligeable. La robustesse fait ici référence à un autre modèle et non à une situation utopique de connaissance parfaite du réel; elle peut faire intervenir des conditions tenant compte de l'écart plus ou moins fort d'une hypothèse de M par rapport à M' (par exemple, la distance entre l'univers aléatoire et l'univers certain peut être mesurée par le coefficient de variation, pour certaines distributions).

FIGURE 179

Analyse de la robustesse d'un modèle économique de gestion



On peut ajouter qu'il est évident qu'un certain nombre de problèmes rencontrés seront plus complexes que ceux présentés aux deux chapitres suivants mais que certains d'entre eux pourront être facilement modélisables par un « mécano » des outils et démarches qui seront abordés.

II-2.1.3.3 Du bon usage du modèle économique de gestion

Il est tout d'abord évident que l'appel à ce type de modèle ne présente un intérêt pour faciliter la prise de décision de problèmes fortement répétitifs que si le modèle jouit d'une certaine robustesse (voir ci-dessus), que sa mise en œuvre n'est pas trop compliquée sur le plan du traitement des données (mais les progrès de l'informatique font que cette condition est facilement remplie) et si les données qu'il utilise (paramètres du modèle) sont assez fiables.

Un dernier écueil doit être souligné, celui de faire dire au modèle des choses qu'il ne dit pas. En effet, deux lectures du modèle sont possibles quant aux économies que son usage permet.

- La première, évidente, découle de l'application des solutions analytiques trouvées: pour un ensemble de paramètres donnés, cette application ne peut qu'améliorer la valeur prise par la fonction-objectif.
- La seconde beaucoup moins classique, consiste à réfléchir sur une amélioration de la valeur prise par la fonction-objectif en jouant sur la valeur de certains paramètres. Dans le modèle de Wilson, le coût de lancement peut être diminué par un certain nombre d'actions dont celle de type SMED (voir page 511). Autrement dit, *le modèle peut être utilisé pour réviser des hypothèses de travail communément admises* et en faciliter l'analyse d'impact économique. Ce type de lecture n'est non seulement pas assez fréquent mais, de surcroît la tentation est forte de considérer certaines hypothèses de travail comme immuables et d'en imputer la responsabilité au modèle.

L'usage qui a été fait du modèle de Wilson illustre parfaitement ce type d'erreur. Lors de sa création, au début du XXe siècle, l'industrie se caractérisait par une faible diversité de la production et l'attention était portée sur les temps unitaires de production et assez peu sur les temps de lancement qui restaient relativement importants, et conduisaient à des coûts de lancement assez élevés. L'application de la formule de Wilson conduisait mécaniquement à la production de séries longues, ce qui apparaissait comme parfaitement logique. L'évolution de la demande a conduit progressivement à une forte diversification de la production et les Japonais, au lendemain de la seconde guerre mondiale, ont porté une attention aussi importante aux temps de lancement qu'aux temps unitaires de production, permettant l'émergence du Juste-À-Temps. Au cours des années quatre-vingt, la majorité des universitaires, des cabinets de conseil et des praticiens se sont accordés à dire que la longueur des séries, qui pénalisait une bonne partie de l'industrie, était imputable au modèle de Wilson qu'il convenait de le rejeter et, avec lui, les modèles économiques de gestion. L'usage de ce modèle n'était sans doute pas pertinent pour un certain nombre de raisons évoquées ci-dessus mais le diagnostic était fallacieux à un double titre. Tout d'abord, rien n'interdisait d'infléchir la valeur des paramètres de la formule de Wilson. Ensuite, l'application des principes du Juste-À-Temps ne permet pas de faire l'économie de l'arbitrage entre un coût de possession et un coût de lancement, au cœur du modèle de Wilson. Un tel arbitrage est la seule justification au fait que les conteneurs du Juste-À-Temps transportent plusieurs unités d'un même article et que les lancements en fabrication ne sont souvent acceptés qu'à partir du moment où plusieurs kanbans de fabrication sont présents dans le centre de production de l'article (voir page 521).

II-2.2 La modélisation en gestion de stocks

L'application de la démarche décrite au § II-2.1 conduit à s'interroger sur les variables d'état retenues (§ II-2.2.1), la fonction économique choisie (§ II-2.2.2, page 653) et le système de coûts utilisé (§ II-2.2.3, page 655), sachant que les variables de commande ont déjà été présentées au § II-1.1.1, page 633.

II-2.2.1 Les variables d'états retenues

Ces **variables d'état**, au nombre de trois, caractérisent respectivement les flux d'entrée, le stock et les flux de sortie, éléments mis en évidence dans notre analyse

du système-stock (ce qui conduit à compléter la figure 172 de la page 626 pour aboutir à la figure 180):

- I_r , la **rupture de stock moyenne**, c'est-à-dire le nombre moyen d'unités non fournies au cours d'une période. À cette variable d'état I_r est associé le coût de rupture c_r .
- I_p , le **stock moyen possédé**, auquel on associe un coût de possession c_p .
- I_c , le **nombre moyen de commandes** passées au cours de la période de référence et auquel on associe le coût de commande c_c .

FIGURE 180
Les coûts du système « stock »

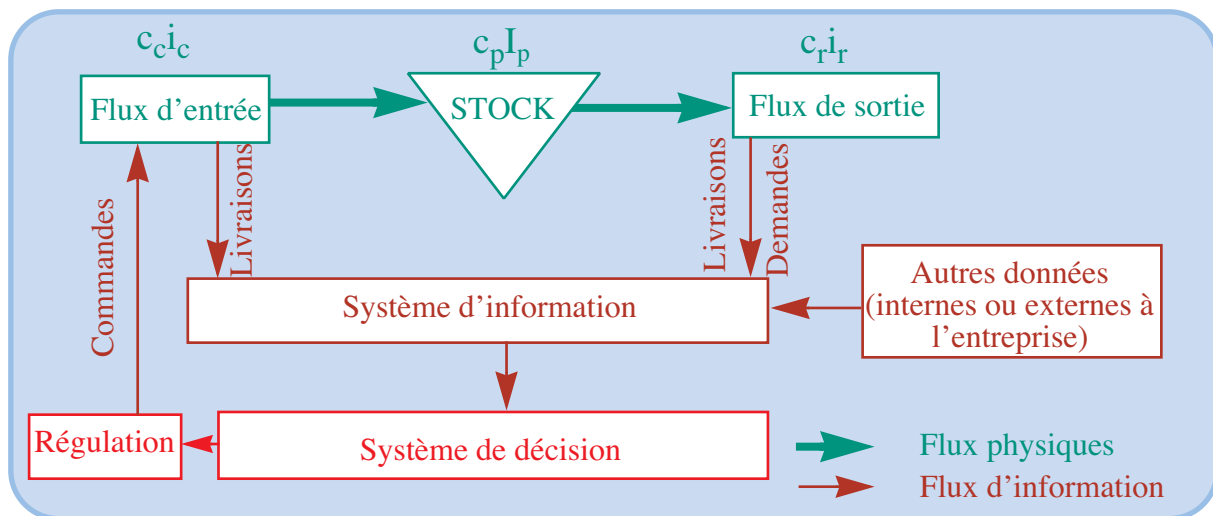


Table des matières

Index thématique

Le plus souvent, la notation des fonctions est utilisée pour repérer ces variables d'état, en faisant suivre leur désignation (I_r , I_p ou I_c) et la désignation entre parenthèses de la (ou des) variable(s) de commande caractérisant la politique de stock étudiée. Par exemple si le nombre moyen de commandes n'est influencé que par variable de commande « quantité commandée q », la notation retenue sera $I_c(q)$. Pour éviter des redites, on discutera de la définition de ces variables d'état en examinant les coûts-standards qui leur sont associés.

II-2.2.2 La fonction économique retenue dans les modèles de stocks présentés

De nombreux critères¹ peuvent être utilisés en gestion, et ne sont pas toujours compatibles les uns avec les autres. Certaines techniques (comme l'analyse multicritère) permettent une certaine explicitation des choix lorsqu'il en est ainsi². Il ne saurait être question ici de discuter de ces problèmes, et un seul critère sera retenu. Au critère classique de la maximisation d'une marge (ou d'un bénéfice), on préférera celui de la minimisation d'un coût pour trois raisons :

- Tout d'abord, un problème de maximisation de marge peut toujours se transposer sans difficulté en un problème de minimisation de coût, mais la réciproque n'est pas vraie. Le calcul de la marge maximale à partir du coût

1. Lesourne (1973, [276]) a proposé une présentation synthétique intéressante de ces divers critères.

2. Voir Roy (1985, [369]).

minimum trouvé est immédiat (faute de quoi cette transposition serait sans intérêt). Il en résulte qu'une double modélisation ne s'impose pas et que celle en termes de coûts doit prendre le pas, dans la mesure où certains problèmes de gestion de stock ne font intervenir que des coûts (ce point sera repris formellement au [chapitre XI, § I-1.3.2.3, page 685](#)).

- Ensuite, se ramener à un seul critère de gestion permet d'éviter de multiplier les modèles de référence à étudier. Nous avons dit que la recherche de politiques de stock s'effectue en faisant appel à des modèles qui constituent une représentation simplifiée de la réalité, s'appuyant sur une formalisation mathématique. S'il existe un moyen simple permettant de considérer que certains modèles sont des cas particuliers d'autres modèles, on gagne sur deux tableaux en n'étudiant que le modèle le plus général: tout d'abord, l'étude mathématique d'un seul modèle est plus rapide¹; ensuite elle évite la prolifération des modèles de référence, prolifération qui risque de masquer les différences fondamentales entre certains modèles et de rendre plus complexe leur analyse typologique.
- Un troisième argument, découlant du reste du précédent, réside dans la possibilité d'écrire des logiciels de portée générale et de faible encombrement, ce qui est un atout fondamental dans une perspective de prise de décision automatique.

Comme pour les variables d'état, la fonction de coût sera notée par une lettre, la lettre C, suivie, entre parenthèses, de la désignation de la (ou des) variable(s) de commande caractérisant la politique de stock étudiée. Ce coût revêt un caractère de coût moyen qui ne correspond pas à un coût effectivement observable. Il y a à cela deux raisons complémentaires.

- Le coût de fonctionnement d'un système se calcule sur une *période de référence* qui influera soit sur la définition d'une variable d'état, soit sur celle du coût standard unitaire qui lui est associé. Cette période peut correspondre à la périodicité constante d'une prise de décision (par exemple, le marchand de journaux quotidiens est approvisionné tous les jours et la période de référence pour mesurer le coût de la gestion de son approvisionnement peut sans difficulté correspondre au jour ouvrable). Lorsque cette périodicité n'est pas fixe, il faut définir arbitrairement une période de référence, l'année par exemple, pour pouvoir comparer le coût de diverses politiques. La variable d'état calculée sur cette période ne peut être qu'une moyenne caractérisant un régime de croisière conduisant à une valeur non observable. C'est ainsi que si l'on retient une période annuelle pour évaluer une politique caractérisée par la passation d'une commande tous les dix mois, certaines années n'auront qu'une commande, et les autres deux tandis que la variable d'état prendra la valeur moyenne de $12/10 = 1,2$ commande par an.
- Certaines données peuvent n'être connues qu'en probabilité (demande et délai d'obtention, en particulier). Dans ce cas, le jugement d'une politique de stock ne peut s'opérer qu'en raisonnant en espérance mathématique. En appliquant la politique d'approvisionnement proposée, le coût observé sur

1. Ce gain de temps peut dans certains cas être plus que compensé au départ par le temps passé à comprendre la généralité du modèle. Mais le bénéfice que l'on en retire sur le plan conceptuel justifie un jugement ne se fondant pas uniquement sur des considérations de temps.

l'intervalle de temps de référence dépendra des valeurs prises par les différentes variables aléatoires et n'aura donc aucune raison de correspondre à l'espérance mathématique de ce coût. Rappelons que le raisonnement en espérance mathématique ne se justifie que s'il fonde de très nombreuses décisions d'importance équivalente, une compensation se réalisant entre les écarts positifs et négatifs par rapport aux valeurs moyennes sur la base desquelles les décisions sont prises.

La fonction de coût moyen retenu est la somme des trois coûts partiels :

$$C = c_r \cdot I_r + c_p \cdot I_p + c_c \cdot I_c$$

Elle conduit à faire trois observations.

- Dans de nombreux modèles de gestion des stocks, la fonction de coût ne fait intervenir que deux de ces trois coûts partiels, les variables de commande n'ayant aucune influence sur le troisième. La modification de la valeur prise par une variable de commande entraîne nécessairement une diminution sur au moins l'un de ces coûts partiels et une variation en sens inverse sur un autre de ces coûts partiels. Par exemple, on peut diminuer le nombre moyen de commandes I_c , et donc le coût de commande moyen annuel, en augmentant les quantités commandées (= variable de commande retenue), mais alors le stock moyen possédé I_p s'accroît, entraînant une hausse de coût de possession moyen annuel.
- Le coût d'acquisition de l'article stocké n'intervient pas explicitement; on ne le fera intervenir que lorsqu'il variera en fonction des quantités commandées et / ou au cours du temps (on reviendra, sur ce point, au [chapitre XII, § I-2.1, page 783](#) et au [chapitre VIII, § II-2, page 567](#)).
- Cette fonction de coût somme des valeurs de nature hétérogène: coût supporté pour les coûts de commande et de possession, d'une part, et manque à gagner pour ceux de rupture, de l'autre. Cette hétérogénéité est la conséquence de la volonté de ne travailler qu'avec une seule fonction économique à laquelle on peut toujours se ramener.

Table des
matières

Index
thématique

II-2.2.3 Les coûts-standard utilisés

Ces coûts-standards sont définis pour chacune des trois variables d'état.

II-2.2.3.1 Le coût de possession

Le coût de possession correspond à un coût de détention auquel s'ajoute, le cas échéant, un coût de stockage.

II-2.2.31a) Coût de détention

Nous avons vu qu'un stock était constitué pour satisfaire une demande à venir au cours d'une période. Si cette demande est aléatoire, il n'y aura que rarement coïncidence entre le niveau du stock et celui de la demande et l'on assistera très souvent, en fin de période, soit à une rupture de stock, soit à un stock résiduel. Ce stock résiduel n'a pas du tout les mêmes conséquences pour l'entreprise, selon que son usage n'est que différé à la période suivante ou que les unités non demandées n'ont plus aucune utilité pour l'entreprise. La définition opérationnelle du coût de détention et celle du stock moyen possédé I_p en découlent. Dans le premier cas,

nous parlerons de ressource non stockable, et dans le second cas de ressource stockable. Examinons, en détail, ces deux cas de figure.

Cas d'une ressource non stockable

Ce cas se présente chaque fois que la demande est limitée dans le temps du fait d'une obsolescence technique ou commerciale. Ce sera le cas des vêtements de mode, des articles de consommation dont la demande se sature très vite en fonction du « déjà vu » (gadgets, articles où le « design » est important...), denrées périssables ou dont la consommation doit intervenir dans un laps de temps limité (primeurs, journaux...), pièces de rechanges achetées en même temps qu'une machine très spécialisée parce que les conséquences financières d'un long délai de remplacement risquent d'être catastrophiques (arrêt d'une chaîne d'assemblage, par exemple) et, enfin, c'est le cas des produits à évolution technologique très rapide (micro-informatique, par exemple).

Lorsque la demande est très localisée dans le temps, mais se reproduit périodiquement et que l'article considéré n'est pas périssable (maillots de bain, cartables, jouets...), il n'y a normalement pas lieu de classer ici cet article, à moins qu'il ne soit sensible à des phénomènes de mode (par exemple: lancement, à la télévision, de jouets sans intérêt intrinsèque et dont la demande « tombera » dès que le support publicitaire lui fera défaut) ou qu'il y ait un fort risque d'obsolescence technologique.

Dans ce premier cas de figure, le stock I_p sera égal au stock moyen résiduel de fin de période, et le coût de possession sera égal au coût d'acquisition d'une unité de l'article considéré, diminué de sa valeur de récupération (valeur de reprise des invendus pour les journaux, valeur de casse, valeur de solde...). Par exemple un quotidien acheté 1,80 \$ liduriens par un marchand de journaux et dont l'invendu est repris à 1,60 \$ liduriens, a un coût de possession de 0,20 \$ liduriens, lequel ne portera que sur le stock I_p d'invendus, et non sur la livraison tout entière. Si la date de récupération est fortement éloignée de la date de constitution initiale de stock, il convient de corriger la valeur de récupération par la technique de l'actualisation (voir [chapitre XVII](#), § I-3, page 1154).

On peut noter enfin que la décision définissant le niveau du stock initial constitue bien souvent une décision sur la longueur d'une série à fabriquer (nombre d'exemplaires du numéro du quotidien à tirer, nombre de sapins de Noël à couper...).

Cas d'une ressource stockable

Dans un supermarché, la demande mensuelle de boîtes de petits pois est aléatoire. En fin de période, toute boîte non vendue le sera le mois suivant, si bien qu'il n'y a aucune raison de calculer le coût de détention sur la base d'un coût d'acquisition net d'une valeur de récupération. Le problème pour cette catégorie d'articles est différent: la permanence de la demande rend nécessaire la constitution d'un stock, qui correspond à une immobilisation de capitaux. En « gelant » une certaine somme d'argent, l'entreprise se prive d'un placement dans un autre actif susceptible de lui rapporter de l'argent. Ne pas saisir cette opportunité a un coût pour l'entreprise. Ce coût, que les économistes appellent **coût d'opportunité**, n'est pas réel puisqu'il ne correspond pas à un décaissement mais à un manque à gagner, et

sa finalité est d'orienter les décisions de l'entreprise au mieux de ses intérêts; ces «dépenses fictives» correspondent à ce que les comptables appellent des **charges supplémentives**.

La définition opérationnelle de ce coût d'opportunité associé au stock pose deux problèmes:

- connaître le manque à gagner entraîné par une immobilisation de 1 \$ lidurien à longueur d'année, et donc calculer un **taux d'opportunité**;
- déterminer une somme monétaire moyenne immobilisée à longueur d'année, équivalente à une immobilisation dans le stock étudié (qui voit normalement son niveau fluctuer au cours du temps).

La détermination du taux d'opportunité est simple dans son principe: ce taux doit correspondre à la rentabilité de l'investissement le plus rentable que l'entreprise n'a pu réaliser faute de moyens financiers¹. Les diverses immobilisations de l'entreprise ont normalement une rentabilité supérieure à cette rentabilité marginale. L'évolution de cette dernière permet de remettre en cause une allocation de moyens décidée à un moment donné. En effet, le calcul économique fera apparaître comme rentable un stock de 1000 \$ liduriens rapportant 120 \$ liduriens, c'est-à-dire 12%, et affecté d'un coût d'opportunité de 110 \$ liduriens, c'est-à-dire calculé à partir d'un taux d'opportunité de 11%; mais si deux ans plus tard l'évolution conjointe des capacités financières et des projets d'investissement envisagés met le taux d'opportunité à 13%, notre stock de 1000 \$ liduriens ne peut plus apparaître comme rentable. On voit là le rôle fondamental de ce coût d'opportunité qui est d'assurer une certaine cohérence entre les décisions: la détection d'une rentabilité négative dans un calcul faisant intervenir un coût d'opportunité bien choisi indique qu'une remise en cause de l'allocation des moyens devrait être faite. On peut ajouter que la prise en compte d'une rentabilité moyenne (et non d'une rentabilité marginale comme nous l'avons fait) pour déterminer ce coût d'opportunité viderait celui-ci d'une grande partie de son intérêt, parce que la détection d'une rentabilité négative n'impliquerait alors pas nécessairement une mauvaise allocation des moyens (si la rentabilité moyenne est de 15%, et la rentabilité marginale de 10%, un certain nombre d'actifs ont une rentabilité comprise entre 10% et 15%).

Table des matières

Index thématique

Le stock moyen I_p sur lequel doit peser ce coût d'opportunité est relativement simple à déterminer. La position du stock est susceptible de varier à chaque instant du temps, mais pour simplifier, supposons que l'on ne s'intéresse qu'à la position en fin de journée. L'évolution du stock y_t d'un modèle de graveur de DVD donné chez un grossiste au cours de 10 jours est, par exemple, celle du **tableau 176 de la page 658** et son évolution peut être visualisée (**figure 181, page 658**) par une succession de rectangles chronologiquement ordonnés t dont la hauteur est proportionnelle à la position de fin de journée y_t (ce qui constitue une simplification de l'évolution réelle du stock).

Le stock moyen équivalent I_p à cette chronique sera le stock constant sur la période considérée et tel que la surface B qu'il délimite avec l'axe des temps soit égale à la surface A constituée par la succession de rectangles visualisant l'évolu-

1. Cette définition est à rapprocher de celle du taux d'actualisation présentée au **chapitre III, § III-1.2.2, page 205**.

FIGURE 181
Stock réel et stock moyen équivalent

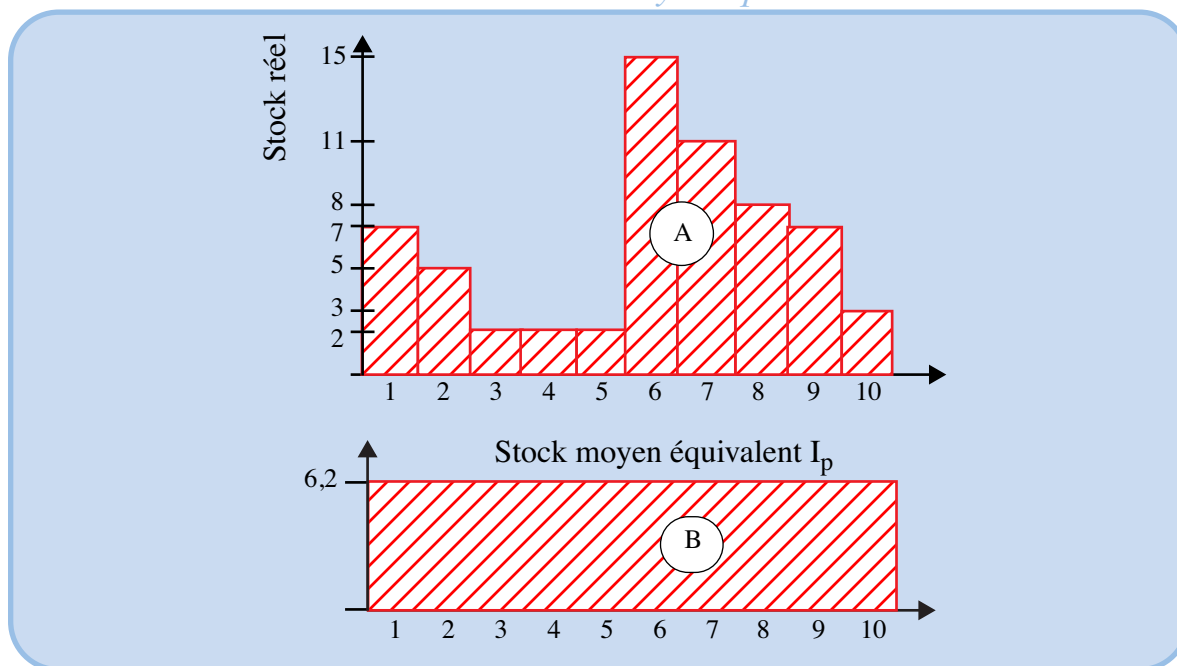


TABLEAU 176
Demandes observées pendant 10 jours consécutifs

t	y_t	t	y_t	t	y_t	t	y_t
1 (lundi)	7	4 (jeudi)	2	7 (mardi)	11	10 (vendredi)	3
2 (mardi)	5	5 (vendredi)	2	8 (mercredi)	8	Total	62
3 (mercredi)	2	6 (lundi)	15	9 (jeudi)	7	Moyenne	6,2

Table des matières

Index thématique

tion des stocks. Ce stock moyen se calcule comme la moyenne des stocks quotidiens, c'est-à-dire dans notre exemple 6,2. Les deux stocks ont bien entendu le même cumul d'articles-jours, c'est-à-dire 62, sur la période étudiée. C'est sur le stock moyen ainsi calculé que l'on fait porter le coût d'opportunité. Si le graveur de DVD est acheté 200,00 \$ liduriens par le grossiste et si le taux d'opportunité annuel est de 20%, un stock moyen annuel de 6,2 doit supporter un coût de détention de $6,2 \times 200 \times 0,2 = 248$ \$ liduriens/an. Mais, un stock moyen de 6,2 unités détenues sur 10 jours ne doit supporter que $10/365$ de cette somme, c'est-à-dire $6,2 \times 200 \times 0,2 (10/365) = 6,795$ \$ liduriens. Ce coût de possession peut s'analyser soit comme un coût unitaire annuel de détention de $200 \times 0,2 = 40$ \$ liduriens appliqué à un stock moyen annuel de $6,2 \times (10/365) = 0,16986$ graveur de DVD, soit comme un coût unitaire de détention défini sur 10 jours ouvrables: $40 (10/365) = 1,096$ \$ lidurien appliqué à un stock moyen de 6,2 défini pour une unité de temps de 10 jours. Pour des raisons de commodité, les modèles de stocks que nous examinerons n'adoptent pas tous la même convention.

Rappelons enfin que cette façon de procéder n'est valable que si l'on procède de la même façon pour un grand nombre d'articles pour qu'il y ait une compensation entre les positions hautes et basses des stocks.

II-2.2.31b) Coût de stockage

Le stockage des articles semi-finis ou finis a un coût pour l'entreprise, car il est générateur d'un certain nombre de charges fixes qui varient par palier : loyer d'entrepôts, impôts locaux, chauffage..., dépenses de magasinier, de gardiennage. D'autres charges sont variables et dépendent en grande partie de la valeur des stocks (assurances, vols, casse...) ou de leur volume (maintien des conditions de température dans un entrepôt frigorifique). Ces différentes dépenses sont relativement fixes sur le court terme et peuvent être ramenées à un coût standard unitaire de stockage (qui n'a aucune raison d'être le même pour tous les articles stockés), mais qui n'a de signification que pour un volume d'activité donné, comme l'illustre la [figure 182 de la page 660](#) où l'on peut constater que le coût standard est un coût moyen qui n'a de signification économique que pour un niveau d'activité donné¹.

Il convient cependant d'être prudent dans l'utilisation de coûts de possession qui incluent un coût standard de stockage. En effet, la recherche d'une « bonne » gestion des stocks basée sur des modèles intégrant des coûts de possession ainsi calculés se traduit par un arbitrage entre des coûts partiels, et implique donc la modification d'un certain nombre d'entre eux. Or, si un nombre plus faible d'unités en stock se traduit inévitablement par une diminution de coût de détention, il n'en est pas forcément de même pour le coût de stockage, car il faudrait alors que toutes les charges intégrées au coût standard soient érudables (c'est-à-dire susceptibles d'être supprimées), ce qui n'est pas toujours le cas. L'existence de charges fixes et leurs variations par palier font que la modification induite par la mise en œuvre d'une nouvelle politique de stock a des chances de ne pas supprimer certaines dépenses. Sur la [figure 182 de la page 660](#), lorsque l'on passe d'un niveau A à un niveau B, l'économie réalisée n'est pas de $(A - B) c_A$, mais de $(A \cdot c_A - B \cdot c_B)$. En toute rigueur, lorsque l'on change de situation de référence, le coût standard de stockage doit alors être recalculé sur la base d'un stock théorique différent, ce qui remet alors en cause la solution retenue (problème méthodologique introduit à la [page 649](#)).

Pour ces raisons, il est très souvent préférable de ne pas inclure de coût de stockage dans le coût de possession, bien que l'un des avantages de ce mode de calcul soit de faire prendre conscience aux responsables de la production et des ventes du coût réel des stocks.

Table des matières

Index thématique

1. Illustrons numériquement ce point en prenant un exemple dans lequel les charges fixes de stockage sont de 3000 \$ liduriens pour un stock moyen annuel $X < 5000$, de 6000 \$ liduriens pour $5000 \leq X < 12000$ et de 9000 \$ liduriens pour $X \geq 12000$ et le coût direct variable respectivement de 2,20 \$ liduriens, 2 \$ liduriens et 1,80 \$ lidurien pour chacune de ces trois plages. Le coût total annuel, pour une quantité $x_B = 6000$, est égal à 18000 \$ liduriens et de 26000 \$ liduriens, pour une quantité $x_A = 10000$. Supposons qu'actuellement l'entreprise calcule un coût standard sur la base de $x_A = 10000$ parce que cela correspond à des données observables. On obtiendra un coût standard de stockage $c_A = 2,60$ \$ liduriens. Si l'on utilise cette information dans un calcul économique visant à améliorer la gestion de ce stock et si le résultat de cette investigation conduit à préconiser une politique de stock telle que l'on se situe désormais à un stock moyen de 6000, l'entreprise sera censée économiser annuellement une somme de $(10000 - 6000) \times 2,6 = 10400$ \$ liduriens, alors que la différence des coûts effectifs est seulement de 8000 \$ liduriens. Comme on peut le constater, l'utilisation de coûts standards en calcul économique peut conduire à des conclusions aberrantes dès lors que l'équilibre proposé diffère de celui ayant servi de référence dans le calcul des standards.

FIGURE 182
Détermination des coûts en fonction des quantités stockées

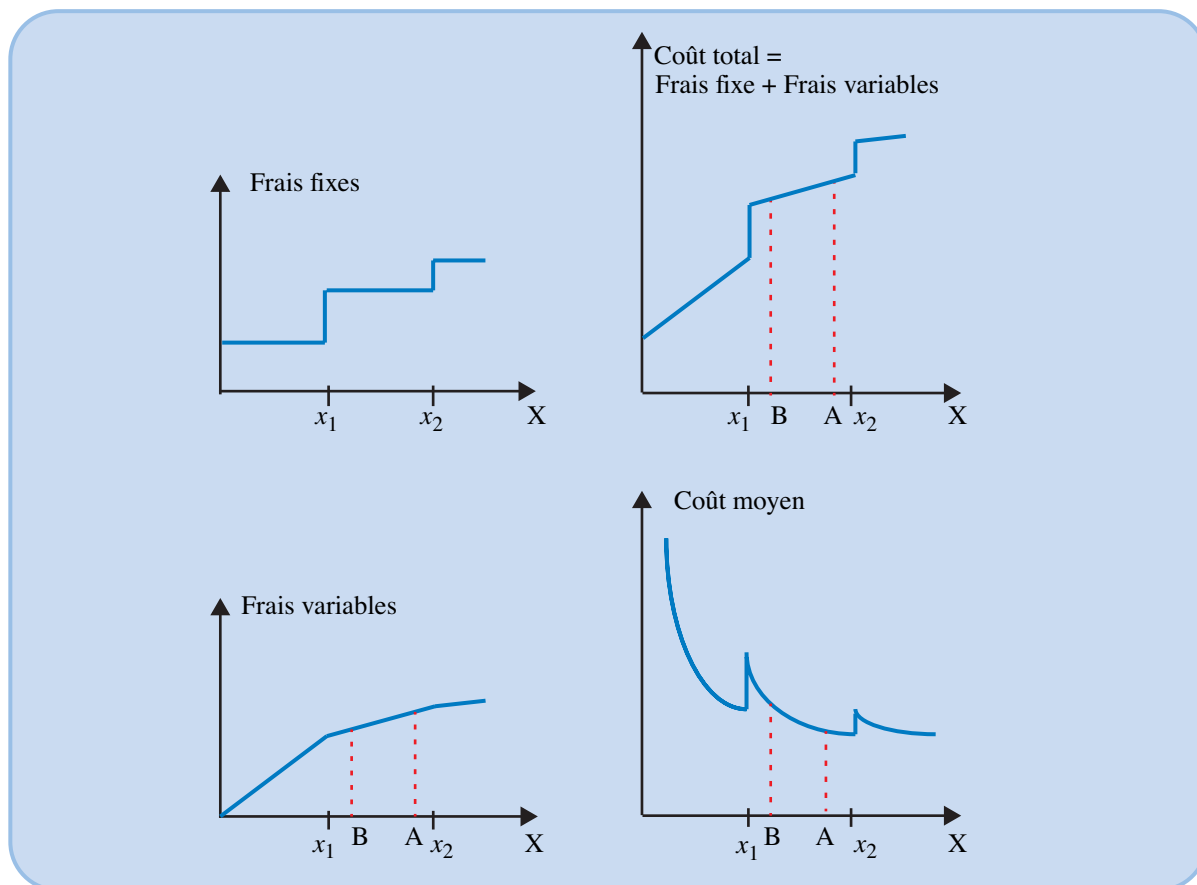


Table des matières

Index thématique

II-2.2.3.2 Les coûts de rupture

La rupture moyenne I_r est le nombre moyen d'unités d'un article donné que l'on n'a pas été en mesure de fournir pendant la période de référence. On l'appelle encore demande moyenne non satisfaite. On peut lui associer l'un des deux coûts de rupture unitaire suivants (ou éventuellement les deux ensemble): le premier c_r est indépendant de la durée de rupture, tandis que le second c_r' est proportionnel à cette durée de rupture. L'analyse des coûts de rupture nécessite de distinguer le cas où la demande est externe à l'entreprise, c'est-à-dire porte sur des produits finis et émane de clients, de celui où la demande est interne à l'entreprise, c'est-à-dire porte sur des matières premières, ou des produits semi-finis, ou des pièces de rechange et émane d'un service de l'entreprise à des fins de consommation interne.

II-2.2.32a) Cas d'une demande externe (stock de distribution)

Une rupture de stock en cas de demande externe entraîne, nous l'avons déjà vu, soit un report de la demande non satisfaite, soit des ventes manquées.

Cas des ventes manquées

Le coût de rupture est alors égal au manque à gagner qu'implique la non fourniture d'une unité demandée et indépendant de la durée de rupture.

Ce manque à gagner comprend tout d'abord la marge unitaire sur coût d'achat qui est alors normalement réalisée sur ce type d'article et qu'il ne faut pas confondre avec un bénéfice unitaire (conformément à la logique du *direct costing*). C'est par ce biais que l'on ramène les problèmes de maximisation de marge à des problèmes de minimisation de coûts. Par exemple, un quotidien vendu 2,50 \$ liduriens et acheté 1,80 \$ lidurien par le marchand de journaux a un coût de rupture de 0,70 \$ lidurien pour ce dernier.

À cette non-réalisation d'une marge unitaire peut s'ajouter une pénalité égale à la diminution des actifs incorporels de l'entreprise (ce que l'on appelle encore *goodwill*), lesquels intègrent tout ce qui est non matériel et assure la pérennité de l'entreprise (savoir-faire, image, clientèle...). Cette pénalité additionnelle correspond à un manque à gagner futur que l'on peut théoriquement calculer comme la diminution de l'espérance mathématique de la valeur actualisée de l'échéancier des marges sur coût d'achat. Pour reprendre notre exemple, il est vraisemblable que si un client ne trouve pas très régulièrement son quotidien chez son marchand de journaux habituel, il en changera. Pour ce marchand, la non-fourniture du dernier quotidien ne se traduit pas seulement par un manque à gagner de 0,70 \$ liduriens. Si le taux d'actualisation annuel réel (et non nominal) qu'il utilise implicitement est de 5% et si l'on suppose, pour simplifier, que le client est très régulier et que le quotidien paraît sept jours sur sept, la perte de *goodwill* sera

alors : $\sum_{t=1}^{\infty} 0,7 \cdot 1,05^{-t/365} = 5236,35$ \$ liduriens Il faut enfin pondérer cette somme

par une probabilité (subjective) de perte de clientèle consécutive à cette vente manquée ; si, dans notre exemple, on estime cette probabilité comme étant de l'ordre de 10%, l'espérance mathématique de perte du *goodwill* est $0,1 \times 5236,35 = 523,64$ et le coût de rupture est alors $0,7 + 523,64 = 524,36$ \$ liduriens. Il est évident que cet exemple est académique ; il n'en reste pas moins que le raisonnement présenté, pour difficile qu'il soit à mettre en œuvre, est fondé et peut être utilisé pour « approcher » un ordre de grandeur de ce coût de rupture.

On peut ajouter d'ailleurs que l'appréciation des actifs incorporels est très souvent implicitement prise en compte par le commerçant ou le chef d'entreprise qui tient à offrir à sa clientèle une gamme complète d'articles, même si certains articles ont intrinsèquement une rentabilité « douteuse ». En effet, une rupture de stock sur un article peut conduire un client à ne rien acheter de ce qu'il avait l'intention de prendre dans ce magasin.

Cas des ventes différées

Lorsque la vente est différée et non manquée, le coût de rupture ne doit pas inclure de marge sur coût d'achat, puisque la vente sera, en définitive, réalisée. En général, on n'y inclura pas de perte d'actif incorporel, encore que ce point de vue soit contestable dans le cas de ruptures de stock trop fréquentes. La vente différée s'accompagne généralement de l'ouverture d'un dossier, qui occasionne un coût fixe c_r . Dans certains cas, si la durée de rupture est importante, il y aura des relances de la clientèle, qui occasionneront des coûts complémentaires que l'on pourra souvent considérer comme très approximativement proportionnels au nombre d'unités en rupture et à la durée de rupture. Supposons par exemple que le grossiste en matériel de haute fidélité est approvisionné tous les 20 jours ouvra-

bles, et que sur l'un de ces cycles d'approvisionnement il soit en rupture de stock les 5 derniers jours avec les demandes non satisfaites y_i (non cumulées) du [tableau 177 de la page 662](#).

TABLEAU 177
Calcul de la rupture dans le cas de demandes différées
(en unité x jour)

i	Date	Demandes non satisfaites y_i	Durée de la rupture d_i	$d_i \cdot y_i$
1	16	1	5	5
2	17	0	4	0
3	18	1	3	3
4	19	0	2	0
5	20	1	1	1
Σ	9

Si le coût fixe d'ouverture d'un dossier est $c_r = 5$ \$ liduriens, et que le coût variable est $c_r' = 1$ \$ lidurien /unité et par jour, le coût total de rupture est de $3 \times 5 + 9 \times 1 = 24$ \$ liduriens, si l'on suppose que la demande est différée en totalité.

Les chapitres suivants seront avant tout orientés vers le cas des demandes non satisfaites perdues, ou différées si le coût de rupture peut être considéré comme fixe.

II-2.2.32b) Cas d'une demande interne (stock de fabrication)

Lorsque la demande de l'article est interne à l'entreprise, une rupture de stock en un endroit du circuit de production entraînera un chômage technique des postes de travail situés en aval. Si l'organisation de la production le permet, la conséquence de cette rupture de l'approvisionnement est limitée par une modification du planning des ateliers, et l'on peut considérer le coût de rupture comme approximativement constant. Ce cas de figure se rencontrera plus facilement dans les organisations en ateliers spécialisés que dans celles en ligne de production où la prévision de la demande est plus facile.

Dans le cas contraire, il faudra travailler avec un coût de rupture proportionnel à la durée de la rupture d'approvisionnement, c'est-à-dire, si nous reprenons l'exemple numérique précédent et le transposons à un atelier de 10 personnes dont la rémunération journalière (charges incluses) est $c_r' = 3000$ \$ liduriens, le coût de rupture sera alors à appliquer à 5 jours de chômage technique (= durée de la rupture) et non à la valeur 9 de «pièces-jours» non fournies. Une autre solution consiste à travailler sur une durée moyenne de rupture (dans notre exemple, cette moyenne est de $9/3 = 3$ jours). C'est cette dernière méthode que l'on utilise en général pour le calcul du coût de rupture de pièces de rechange. Certaines pièces de rechange fabriquées en même temps que certains appareils produits en petites séries (avions, certaines machines outils...) coûtent plus cher à fabriquer à la pièce ultérieurement; ce supplément de coût de fabrication doit bien sûr être ajouté au coût du chômage technique consécutif à la panne, pour calculer le coût de rupture. Cette technique de fabrication de pièces de rechange simultanément à la production de petites séries est connue sous le nom de **spare insurance**.

II-2.2.3.3 Les coûts de commande

Une politique de gestion de stock se caractérise notamment par sa fréquence (régulière ou variable) de passation des commandes. Au nombre moyen annuel I_c est associé un coût de passation de ces commandes. La définition du coût unitaire de commande c_c diffère selon que la commande déclenche un approvisionnement ou une fabrication. Ce clivage diffère de celui utilisé au paragraphe précédent (demande interne ou externe). Une demande de produits finis est nécessairement externe, mais elle peut correspondre à une fabrication (usine) ou à un approvisionnement (entreprise de distribution), tandis que la constitution d'un stock de matières premières correspond nécessairement à un approvisionnement mais n'est destinée qu'à satisfaire une demande interne.

Lorsque la commande correspond à un **ordre de fabrication**, le coût de commande est encore appelé **coût de lancement**. Le coût de commande est alors constitué d'un coût standard occasionné par la gestion des services du planning, auquel il faut ajouter des coûts de réglage de machines occasionnés par la fabrication d'une série différente de la précédente, ainsi que les rebuts de ces réglages. Ce coût de lancement est normalement indépendant de la longueur de la série à produire.

Lorsque la commande déclenche un **approvisionnement**, le coût de commande correspond à un coût administratif de gestion de la commande qui comprend le coût de la constitution d'un bordereau de commande par le magasinier et d'acheminement de ce bordereau au service qui passe la commande, ainsi que le coût de gestion de cette commande par ce service (envoi de la commande au fournisseur, réception de la facture, contrôle de conformité, transmission au service comptable pour liquidation) et les coûts de réception de la marchandise. S'y ajoute souvent, un forfait d'acheminement des marchandises du fournisseur (on reviendra sur ce point à la [page 772](#)). Ce coût de commande est considéré comme indépendant de l'importance de la commande. Lorsque la réception de la marchandise s'accompagne d'un contrôle de qualité utilisant les techniques de contrôle de réception par échantillonnage, ce coût est alors un coût fixe (sauf si une technique de contrôle progressif est utilisée) à intégrer dans le coût de commande, tandis que si un contrôle exhaustif est utilisé, le coût correspondant est généralement à peu près proportionnel au nombre d'unités contrôlées et sera alors incorporé au coût d'achat.

L'utilisation d'un coût de commande standard soulève les mêmes problèmes que ceux évoqués au [§ II-2.2.31b, page 659](#), à propos du caractère plus ou moins érudable de certaines charges prises en compte dans ce coût standard et peut se traduire par une non-réalisation d'économie de dépenses prévues lors d'une modification d'une politique de gestion de stock.

Chapitre XI

POLITIQUE DE GESTION CALENDRAIRE DES STOCKS «T, S»

La politique de gestion calendaire présente le double avantage d'être simple à mettre en œuvre et de permettre commodément de passer des commandes groupées à un même fournisseur. Son principe est simple : une commande est systématiquement passée à intervalle régulier auprès du fournisseur¹. Ce laps de temps séparant deux prises de décision successives est appelé **période de révision calendaire** et noté T . La quantité commandée varie habituellement d'une période à l'autre (sauf le cas étudié au § I-1, page 667), mais elle s'effectue toujours en référence avec un niveau de stock S , appelé **niveau de recomplètement**.

La période de révision calendaire sera ici considérée comme imposée, la seule variable de commande prise en compte étant S . Cette restriction n'est pas gênante dans la mesure où la détermination simultanée de valeurs optimales pour S et T conduit inéluctablement à recommander une périodicité inapplicable en pratique (5,47 jours ouvrables par exemple). D'un point de vue pratique, il est préférable de comparer le coût de différentes politiques optimales caractérisées par des périodes de révision calendaire opérationnelles (semaine, mois, trimestre, multiples entiers de jours ouvrables...)².

Cette politique conduit à passer une commande quelle qu'en soit l'importance, ce qui revient à ne pas prendre en considération le coût de commande. La détermination de la valeur optimale de S passe alors par un arbitrage entre les seuls coûts de possession et de rupture. On peut envisager de ne passer commande que si le stock disponible est inférieur à un seuil s (appelé **point de commande**), mais, dans ce cas, la politique suivie se caractériserait par 3 variables de commandes « S, s, T » et leur détermination optimale effectue un arbitrage entre les coûts de possession, de rupture et de commande. Cette politique, plus délicate à analyser, ne sera pas abordée ici. Nous réserverons l'appellation de politique de gestion calendaire à la seule politique « T, S », mais cette restriction est contestable, à certains égards. Il convient d'ajouter que l'intérêt de cette classe de modèles ne se limite pas à la prise de décisions opérationnelles en matière d'approvisionnement, mais aussi, comme on le verra, à celle de certaines décisions stratégiques ou tactiques

Table des
matières

Index
thématique

1. Il s'agit du fournisseur de l'usine, en ce qui concerne les composants qui ne sont pas gérés par un système de MRP ou en Juste-À-Temps, ou de l'usine ou le dépôt en ce qui concerne la distribution de produits finis (ce qui n'empêche pas que les informations de demande remontent au plus tôt les différents nœuds du réseau de distribution (voir page 931)).

2. On peut signaler qu'une aide à la détermination de la périodicité optimale sera présentée au chapitre XII, § I-2.3.3, page 826, et § II-2.1.3, page 868.

d'approvisionnement (décisions de capacité d'investissement, analyse de point mort en univers aléatoire).

On examinera dans une première section les modèles de base des politiques de gestion calendaire qui se caractérisent tous par: l'existence d'un seul étage de stock, l'hypothèse d'un délai d'obtention nul (ou sans conséquence sur l'optimisation) et l'indépendance mutuelle des articles dans la détermination des politiques optimales. La [section II, page 720](#), constitue une introduction à des modèles plus complexes, chacun d'entre eux levant une (et dans certains cas deux) des hypothèses de base de la section I. L'objectif poursuivi n'étant que d'introduire la problématique des stocks, des modèles plus élaborés de gestion calendaire levant simultanément plusieurs de ces hypothèses ne seront pas présentés.

La version CD-Rom de ce chapitre permet d'accéder directement à un logiciel exploitant les principales techniques décrites dans ce chapitre. La présence d'une icône en marge du texte (comme celle figurant dans cette page) indique la possibilité d'utilisation de la technique décrite dans le texte et le lien hypertextuel placé sur cette icône permet d'accéder à l'exemple numérique utilisé dans le texte. Vous avez la possibilité de créer vos propres exemples pour exploiter les possibilités offertes, mais ce logiciel n'a qu'une vocation pédagogique et ne prétend en aucun cas, concurrencer des logiciels professionnels¹.



SECTION I LES MODÈLES DE BASE DES POLITIQUES DE GESTION CALENDRAIRE DES STOCKS

À la distinction fondamentale des articles stockables et non stockables, correspondent des politiques optimales différentes. Dans les problèmes de gestion d'*articles non stockables*, le délai d'obtention est considéré comme nul parce qu'aucune demande n'est possible entre la prise de décision et la mise à disposition de la marchandise, ce qui fait que le stock de début de période est connu avec certitude. Ce cas de figure se rencontre dans l'approvisionnement de marchandises dont l'intérêt économique est limité à une période généralement très courte (journaux quotidiens, pain...) ou, au contraire, assez longue (décision de capacité à installer pour satisfaire une demande aléatoire).

Dans les problèmes de gestion d'*articles stockables*, on rencontre de plus en plus souvent le cas d'un délai d'obtention à considérer comme nul parce que l'approvisionnement s'effectue en temps masqué, une commande passée le soir à la fermeture d'un établissement étant livrée le lendemain à l'ouverture. La généralisation des approvisionnements à flux tendus fait que l'intérêt de cette classe de problèmes s'est considérablement renforcé. Là encore, le stock de début de période est connu avec certitude, que la demande non satisfaite soit perdue ou puisse être différée: en cas de rupture de stock, si les demandes non satisfaites sont perdues, on commande S unités qui sont immédiatement livrées, tandis que ***si ces demandes non satisfaites sont différées, on commandera en plus de ces S unités, le nombre de demandes non satisfaites à la période précédente.*** Si le délai d'obtention ne peut être considéré comme nul, on assiste à une interdépendance temporelle des décisions d'approvisionnement qui complique la détermination de la politique optimale, ce que l'on examinera en [section II, page 720](#).

Table des matières

Index thématique

1. Voir avertissement de la note du bas de la [page 8](#).

I-1 Gestion calendaire des articles non stockables

La détermination de la politique optimale diffère selon que la demande observée est approximée par une loi discrète (§ I-1.1) ou par une loi continue (§ I-1.2, page 672), sachant que cette dernière est souvent utilisée pour décrire une demande de nature discrète.

On examinera enfin dans un troisième paragraphe (§ I-1.3, page 677) les conséquences économiques de la solution optimale et un dernier paragraphe (§ I-1.4, page 688) sera consacré à des remarques sur la généralité du modèle proposé et sur son application au problème du point mort en univers aléatoire.

I-1.1 Détermination du stock initial S dans le cas d'une loi de demande discrète

I-1.1.1 Exemple introductif: le problème du pâtissier

L'une des spécialités du très célèbre pâtissier **LE VÔTRE** est le **Spécial Délice** dont le coût direct de fabrication est de 25 dollars liduriens (pour 6-8 personnes) et le prix de vente 60 dollars liduriens. La vente quotidienne de ce gâteau est, en semaine, de 2,5 en moyenne, et le relevé des demandes pendant trois mois laisse supposer que celle-ci suit une loi de Poisson, c'est-à-dire que l'on a la distribution de probabilités suivante du nombre X de gâteaux demandés au cours d'une journée (tronquée à $x = 10$, car la probabilité de ventes supérieures à 10 est inférieure à 0,0001).

Table des matières

TABLEAU 178

Distribution de probabilité de la demande quotidienne du Spécial Délice

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$P(X = x)$	0,0821	0,2052	0,2565	0,2138	0,1336	0,0668	0,0278	0,0099	0,0031	0,0009	0,0003

Index thématique

LE VÔTRE ne saurait envisager de vendre de la pâtisserie qui ne serait pas du jour, aussi les invendus sont-ils donnés à des œuvres. **LE VÔTRE**, en commerçant avisé, a demandé à un conseil en gestion de lui indiquer combien de **Spécial Délice** mettre en fabrication chaque jour pour maximiser son bénéfice (mais l'investigation ne se limite pas au **Spécial Délice**).

Dans l'optique retenue de minimisation des coûts, le coût de possession c_p associé à un invendu est de 25 dollars liduriens, tandis que le coût de rupture c_r est égal au manque à gagner consécutif à une vente ratée, c'est-à-dire la marge $60 - 25 = 35$ dollars. Une gestion rationnelle doit permettre de calculer le stock initial S (autrement dit le nombre de gâteaux à fabriquer) qui minimise l'indicateur de coût de gestion $C(S)$, somme du coût de possession associé au nombre moyen¹ de gâteaux invendus en fin de journée $I_p(S)$, et du coût de rupture associé au nombre moyen de ventes ratées au cours d'une journée² $I_r(S)$:

1. En toute rigueur, il s'agit d'une espérance mathématique; on utilisera le vocable de **rupture de stock moyenne** ou, plus simplement, celui de **rupture de stock**.

2. On parlera encore de **stock résiduel moyen**. Au cours d'une journée donnée, les deux événements «gâteau ayant manqué à la vente» et «gâteau n'ayant pas trouvé acheteur» sont incompatibles; on s'intéresse ici à des informations moyennes sur longue période.

$$C(S) = c_p \cdot I_p(S) + c_r \cdot I_r(S) \quad \text{relation 132}$$

ce qui donne ici: $C(S) = 25 \cdot I_p(S) + 35 \cdot I_r(S)$.

La valeur optimale S^* de l'approvisionnement initial est telle que le coût $C(S^*)$ est inférieur à celui associé aux stocks initiaux immédiatement inférieur ou supérieur ($S^* \pm 1$), c'est-à-dire qu'il est inférieur à $C(S^* + 1)$ et à $C(S^* - 1)$. Il faut donc

chercher S^* tel que: $\begin{cases} C(S^*) < C(S^* + 1) \\ C(S^*) < C(S^* - 1) \end{cases}$, ce qui peut encore s'écrire:

$$\begin{cases} C(S^* + 1) - C(S^*) > 0 \\ C(S^*) - C(S^* - 1) < 0 \end{cases} \quad \text{relation 133}$$

Cette relation 133 conduit à étudier comment se comporte l'évolution de la différence de coût de stocks successifs: $C(S + 1) - C(S)$. Arrivé à ce stade du raisonnement, on quitte la problématique des stocks, pour résoudre un problème mathématique.

I-1.1.2 Digression mathématique

L'étude de $C(S + 1) - C(S)$ passe par celle de $I_r(S + 1) - I_r(S)$ car nous verrons que l'on peut exprimer cette variation de coût en fonction de la seule variation de rupture moyenne (avec la relation 136 de la page 670).

L'espérance mathématique du stock défaillant $I_r(S)$ est une fonction mathématique comme une autre. L'étude du sens de variation d'une fonction constitue l'un des points essentiels de toute étude d'une fonction. Lorsque celle-ci est dérivable, on analyse pour ce faire la fonction dérivée. Lorsque cette fonction est discrète, il faut alors étudier le comportement de la différence $I_r(S + 1) - I_r(S)$, qui a la même signification que la fonction dérivée.

En effet, la dérivée $f'(x_0)$ en un point x_0 , d'une fonction quelconque $f(x)$ est la limite du rapport $f'(x_0) = \frac{f(x_0 + dx) - f(x_0)}{dx}$. Lorsque la variable x n'est suscep-

tible de varier que par palier «saut» $\Delta x = 1$, on a alors $\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = f(x_0 + 1) - f(x_0)$, qui est l'équivalent en formulation continue de $I_r(S + 1) - I_r(S)$ en formulation discrète.

Outre l'étude du sens de variation de $I_r(S)$, on examinera également la relation qui lie $I_p(S)$ et $I_r(S)$ ainsi que les modalités de calcul pratique de $I_r(S)$.

I-1.1.2.1 Calcul analytique de $[I_r(S + 1) - I_r(S)]$

Reprenons la distribution de probabilités de la loi de demande quotidienne du **Spécial Délice** et supposons que l'on veuille calculer la rupture moyenne $I_r(S = 4)$ associée au stock initial $S = 4$. On doit alors calculer l'espérance mathématique de $X - 4$ (pour des valeurs de X supérieures à 4), réalisé dans les colonnes 3 et 4 du tableau 179 et correspondant au calcul suivant:

$$\begin{aligned}
 I_r(S = 4) &= \sum_{x=5}^{10} (x-4) \cdot P(X = x) \\
 &= 1 \cdot P(X = 5) + 2 \cdot P(X = 6) + 3 \cdot P(X = 7) + 4 \cdot P(X = 8) \\
 &\quad + 5 \cdot P(X = 9) + 6 \cdot P(X = 10)
 \end{aligned}$$

De même, dans les colonnes 5 et 6 de ce **tableau 179**, on a calculé la rupture moyenne pour un stock initial $S = 5$:

$$\begin{aligned}
 I_r(S = 5) &= \sum_{x=6}^{10} (x-5) \cdot P(X = x) \\
 &= 1 \cdot P(X = 6) + 2 \cdot P(X = 7) + 3 \cdot P(X = 8) + 4 \cdot P(X = 9) + 5 \cdot P(X = 10)
 \end{aligned}$$

TABLEAU 179
Calcul direct du stock moyen possédé et de la rupture de stock

Données de la demande		Calcul de la rupture moyenne pour				$I_r(x) - I_r(x+1) = P(X > x)$ (7)	Calcul du stock moyen possédé pour $S = 4$	
		$S = 4$		$S = 5$			$4 - x$ (8)	$(4 - x) \cdot P(X = x)$ (9)
x (1)	$P(X = x)$ (2)	$x - 4$ (3)	$(x - 4) \cdot P(X = x)$ (4)	$x - 5$ (5)	$(x - 5) \cdot P(X = x)$ (6)			
0	0,0821	-	-	-	-	0,9179	4	0,3284
1	0,02052	-	-	-	-	0,7127	3	0,6156
2	0,2565	-	-	-	-	0,4562	2	0,5130
3	0,2138	-	-	-	-	0,2424	1	0,2138
4	0,1336	-	-	-	-	0,1088	0	-
5	0,0668	1	0,0668	-	-	0,0420	-	-
6	0,0278	2	0,0556	1	0,0278	0,0142	-	-
7	0,0099	3	0,0297	2	0,0198	0,0043	-	-
8	0,0031	4	0,0124	3	0,0093	0,0012	-	-
9	0,0009	5	0,0045	4	0,0036	0,0003	-	-
10	0,0003	6	0,0018	5	0,0015	0	-	-
Σ	1,0000	-	$I_r(4) = 0,1708$	-	$I_r(5) = 0,0620$	-	-	$I_p(4) = 1,6708$

Table des matières

Index thématique

Il ressort des calculs que le fait de faire passer le stock initial S , de 4 à 5, diminue la rupture moyenne en la faisant passer de 0,1708 à 0,0620. Mais on peut trouver directement ce résultat:

$$\begin{aligned}
 I_r(S = 4) - I_r(S = 5) &= \sum_{x=5}^{10} (x-4) \cdot P(X = x) - \sum_{x=6}^{10} (x-5) \cdot P(X = x) \\
 &= 1P(X = 5) + (2-1)P(X = 6) + (3-2)P(X = 7) + (4-3)P(X = 8) \\
 &\quad + (5-4)P(X = 9) + (6-5)P(X = 10) \\
 &= P(X = 5) + P(X = 6) + P(X = 7) + P(X = 8) + P(X = 9) + P(X = 10) \\
 &= \sum_{x=5}^{10} P(X = x) = P(X > 4)
 \end{aligned}$$

Autrement dit, la diminution de rupture moyenne $I_r(S)$ occasionnée en augmentant d'une unité un stock préalablement dimensionné à $S = 4$, est égale à la probabilité que la demande soit strictement supérieure au stock initial $P(X > 4)$. Ce que l'on vient d'établir n'est pas seulement vrai pour le cas particulier étudié, cette propriété se démontre sans difficulté d'une façon générale¹ (mais le lecteur de formation non scientifique peut sans inconvénient «sauter» cette démonstration).

Cette propriété est valable quelle que soit la distribution de probabilité de la loi de demande (par hypothèse discrète), puisqu'aucune restriction n'a été faite sur cette distribution.

$$I_r(S+1) - I_r(S) = -P(X > S) \quad \text{relation 134}$$

La colonne 7 du **tableau 179** donne la diminution de rupture moyenne que l'on obtient en accroissant d'une unité ce stock S .

I-1.1.2.2 Relation entre $I_r(S)$ et $I_p(S)$

Lorsque le coût de possession c_p n'est pas lié au temps, on a vu que le stock moyen sur lequel pèse le coût de possession est celui constaté en fin de période. Son espérance mathématique dans le cas discret est²:

$$I_p(S) = S - \bar{x} + I_r(S) \quad \text{stock moyen possédé calculé sur la base du stock résiduel de fin de période} \quad \text{relation 135}$$

On peut vérifier cette relation dans le **tableau 179**: $I_p(S=4) = 4 - 2,5 + 0,1708 = 1,6708$.

Le coût $C(S)$ peut s'écrire, en utilisant la **relation 135**, comme une fonction de la seule rupture moyenne $C(S) = c_p \cdot [S - \bar{x} + I_r(S)] + c_r \cdot I_r(S)$, ce qui conduit à la **relation 136**.

$$C(S) = c_p \cdot I_p(S) + c_r \cdot I_r(S) = c_p \cdot (S - \bar{x}) + (c_r + c_p) \cdot I_r(S) \quad \text{relation 136}$$

La **relation 135**, on le verra, reste vraie si la distribution de probabilités de la demande est continue. La **relation 136** qui découle directement de la **relation 135** est alors générale pour les articles non stockables.

$$\begin{aligned}
 1. \quad I_r(S) &= \sum_{x=S+1}^{\infty} (x-S) \cdot P(X=x) = \sum_{x=S+1}^{\infty} x \cdot P(X=x) - \sum_{x=S+1}^{\infty} S \cdot P(X=x) \\
 &= \left[(S+1) \cdot P(X=S+1) + \sum_{x=S+2}^{\infty} x \cdot P(X=x) \right] - \left[S \cdot P(X=S+1) + \sum_{x=S+2}^{\infty} S \cdot P(X=x) \right] = P(X=S+1) + \sum_{x=S+2}^{\infty} (x-S) \cdot P(X=x) \\
 I_r(S+1) &= \sum_{x=S+2}^{\infty} [x-(S+1)] \cdot P(X=x) = \sum_{x=S+2}^{\infty} (x-S) \cdot P(X=x) - \sum_{x=S+2}^{\infty} P(X=x) \\
 I_r(S) - I_r(S+1) &= \left[P(X=S+1) + \sum_{x=S+2}^{\infty} (x-S) \cdot P(X=x) \right] - \left[\sum_{x=S+2}^{\infty} (x-S) \cdot P(X=x) - \sum_{x=S+2}^{\infty} P(X=x) \right] = \sum_{x=S+1}^{\infty} P(X=x) = P(X > S) \\
 2. \quad I_p(S) &= \sum_{x=0}^{S-1} (S-x) \cdot P(X=x) = \sum_{x=0}^S (S-x) \cdot P(X=x) = \sum_{x=0}^S (S-x) \cdot P(X=x) - \sum_{x=S+1}^{\infty} (S-x) \cdot P(X=x) \\
 I_p(S) &= S \cdot \sum_{x=0}^{\infty} P(X=x) - \sum_{x=0}^{\infty} x \cdot P(X=x) - \left[- \sum_{x=S+1}^{\infty} (x-S) \cdot P(X=x) \right]
 \end{aligned}$$

Revenons sur l'interprétation de la **relation 135**. Deux points intéressants méritent d'être notés.

- Cette relation peut encore s'écrire $I_p(S) = S - [\bar{x} - I_r(S)]$, ce qui veut dire que le stock résiduel moyen $I_p(S)$ est égal au stock de départ S diminué de la demande moyenne satisfaite $[\bar{x} - I_r(S)]$, puisque la demande moyenne exprimée \bar{x} est nécessairement la somme de la demande moyenne satisfaite et de la rupture moyenne de stock $I_r(S)$, une demande exprimée ne pouvant qu'être satisfaite ou non satisfaite.
- Cette **relation 135** peut également s'écrire :

$$\bar{x} - I_r(S) = S - I_p(S) \quad \text{relation 137}$$

Demande moyenne satisfaite = Offre moyenne utilisée

Son interprétation vient d'être faite, en ce qui concerne la demande moyenne satisfaite. Le second membre s'interprète bien comme l'offre moyenne utilisée car l'offre initiale S se décompose nécessairement en une offre moyenne utilisée et une offre moyenne inutilisée, laquelle n'est autre que le stock résiduel moyen $I_p(S)$. Cette relation est donc une relation particulière d'équilibre entre une offre et une demande.

I-1.1.2.3 Calcul de $I_r(S)$

Il n'y a rupture de stock que si l'on a $x > S$. L'espérance mathématique du nombre de demandes non satisfaites, que l'on désignera également sous le nom de **rupture de stock moyenne**, est alors :

$$I_r(S) = \sum_{x>S} (x-S) \cdot P(X=x) = \sum_{x>S} x \cdot P(X=x) - S \sum_{x>S} P(X=x)$$

D'où la **relation 138** :

$$I_r(S) = \sum_{x>S} x \cdot P(X=x) - S \cdot P(X>S) \quad \text{relation 138}$$

Le premier terme du second membre de l'équation correspond à un «calcul tronqué» de moyenne, qui s'effectue plus ou moins facilement selon les distributions étudiées. On montre¹ par exemple, pour une loi de Poisson de paramètre λ , que $\sum_{x>S} x \cdot P(X=x) = \lambda \cdot P(X \geq S) = \lambda \cdot [P(X>S) + P(X=S)]$, d'où l'on tire :

$$I_r(S) = \lambda \cdot P(X=S) + (\lambda - S) \cdot P(X>S), \text{ pour } \mathcal{L}(X) = \mathcal{P}(\lambda) \quad \text{relation 139}$$

I-1.1.3 Détermination de la solution optimale

À partir de la **relation 136** ($C(S) = c_p \cdot (S - \bar{x}) + (c_r + c_p) \cdot I_r(S)$) on obtient :

$$\begin{aligned} C(S+1) - C(S) &= [c_p \cdot (S+1) - c_p \bar{x} + (c_r + c_p) \cdot I_r(S+1)] \\ &\quad - [c_p \cdot S - c_p \bar{x} + (c_r + c_p) \cdot I_r(S)] \\ &= c_p + (c_r + c_p) \cdot [I_r(S+1) - I_r(S)] \end{aligned}$$

Ce qui donne, compte tenu de la **relation 134** :

$$C(S+1) - C(S) = c_p + (c_r + c_p) \cdot [-P(X>S)]$$

1. Voir Hadley et Whitin (1966, [212]), p. 437, formule 3, ou encore p. 131-132.

Dans ces conditions, les inégalités de la [relation 133 de la page 668](#) deviennent :

$$c_p + (c_r + c_p) \cdot [-P(X > S^*)] > 0 ; \text{ d'où } \frac{c_p}{c_p + c_r} > P(X > S^*)$$

$$c_p + (c_r + c_p) \cdot [-P(X > S^* - 1)] < 0 ; \text{ d'où } \frac{c_p}{c_p + c_r} < P(X > S^* - 1)$$

La réunion de ces deux conditions conduit à la [relation 140](#) :

$$S^* \text{ optimal si : } P(X > S^*) < \frac{c_p}{c_p + c_r} < P(X > S^* - 1) \quad \text{relation 140}$$

Cette [relation 140](#) peut s'énoncer comme suit : «le niveau optimal S^* du stock initial correspond à la valeur la plus faible possible de S qui a une probabilité de rupture supérieure à la valeur calculée pour le critère».

$$S^* = \text{minimum de } S \text{ tel que : } P(X > S) < \frac{c_p}{c_p + c_r} \quad \text{relation 141}$$

Elle peut encore s'écrire sous d'autres formes¹ qui peuvent être plus faciles à utiliser selon les tables statistiques disponibles :

$$\left\{ \begin{array}{l} P(X \leq S^* - 1) < \frac{c_r}{c_p + c_r} < P(X \leq S^*) \\ P(X < S^*) < \frac{c_r}{c_p + c_r} < P(X < S^* + 1) \\ P(X \geq S^* + 1) < \frac{c_p}{c_p + c_r} < P(X \geq S^*) \end{array} \right. \quad \text{relation 142}$$

Dans notre exemple numérique, on a : $\frac{c_p}{c_p + c_r} = \frac{25}{25 + 35} = 0,4167$. Le calcul des probabilités $P(X > S)$ a été effectué colonne 7 du [tableau 179 de la page 669](#), où l'on trouve : $P(X > 2) = 0,4562$ et $P(X > 3) = 0,2424$. Or : $0,2424 < 0,4167 < 0,4562$, d'où : $S^* = 3$ (et non 2). On examinera au [§ I-1.3, page 677](#), les conséquences économiques d'un tel choix.

I-1.2 Détermination du stock initial S dans le cas d'une loi de demande continue

I-1.2.1 Exemple introductif: le problème du marchand de journaux²

L'**Univers** est un quotidien vendu 2,50 dollars liduriens dont le système de distribution est le suivant: le vendeur de journaux l'acquiert à 1,80 dollar, et ses invendus lui sont repris à 1,60 dollar pour l'inciter à gérer sa commande de journaux au mieux des intérêts de la société distributrice (comme toute tarification qui se respecte). L'analyse de ces données conduit à un coût de rupture égal au

1. Le lecteur non familiarisé avec ces transformations peut se reporter à Giard (1995, [182]), chapitre III, §I.2.1.1, p. 133.

2. Il est d'usage chez les spécialistes anglo-saxons de recherche opérationnelle d'identifier un modèle par un exemple d'utilisation caractéristique. C'est ainsi que l'on parle du problème du voyageur de commerce ou du problème du marchand de journaux ou... Nous avons adopté cette démarche en raison de ses vertus pédagogiques indéniables.

manque à gagner consécutif à une vente perdue, c'est-à-dire à $2,50 - 1,80 = 0,70$ dollar, le coût de possession est égal à la perte enregistrée par un invendu, c'est-à-dire $1,80 - 1,60 = 0,20$ dollar.

La **MAISON DE LA PRESSE** d'Alphaville, soucieuse de rationaliser sa gestion, a fait procéder à l'étude de la demande¹ quotidienne de l'**Univers** et a trouvé que l'approximation par une loi Normale de moyenne $\bar{x} = 300$ et d'écart type $\sigma = 20$ était satisfaisante. Le problème posé est celui de la définition du nombre d'exemplaires à commander, c'est-à-dire de la définition du stock de début de période, qui minimise la fonction «indicateur de coût de gestion $C(S)$ » qui se définit, là encore (relation 132 de la page 668), comme: $C(S) = c_p \cdot I_p(S) + c_r \cdot I_r(S)$.

L'approximation de la loi de demande par une loi continue modifie, par rapport à ce que nous avons vu au § I-1.1, page 667, les formulations du stock moyen possédé $I_p(S)$ et de la rupture moyenne $I_r(S)$. Il convient alors de remplacer la notion de probabilité $P(X = x)$ par son équivalent continu $f(x) \cdot dx$ et la sommation \sum_0^S par l'intégration \int_0^S . En formulation continue, le coût moyen de gestion de la période se décrit donc par la relation 143 (qui est l'équivalent de la relation 136 de la page 670, trouvée pour le cas discret):

$$C(S) = c_p \cdot I_p(S) + c_r \cdot I_r(S) = c_p \cdot \int_0^S (S-x) \cdot f(x) dx + c_r \cdot \int_S^{\infty} (x-S) \cdot f(x) dx$$

relation 143

Une condition nécessaire pour que ce coût soit minimal est que sa dérivée première par rapport à S soit nulle. Il faut donc calculer cette dérivée.

I-1.2.2 Digression mathématique

Nous abordons ici des problèmes similaires à ceux étudiés au § I-1.1.2, page 668.

I-1.2.2.1 Calcul de la dérivée de $I_r(S)$ par rapport à S

Le calcul de la dérivée de $I_r(S)$, par rapport à S , présente comme particularité de porter sur une fonction faisant l'objet d'une intégration, dans laquelle, de surcroît, la variable S intervient sur l'une des bornes de l'intégrale. Sur le plan mathématique, la solution de ce problème passe par une généralisation d'un résultat classique connu sous le nom de formule de Leibniz et que nous nous

contentons de reproduire ici: $K = \int_{a(S)}^{b(S)} g(x, S) dx$. La généralisation de cette formule de Leibniz donne:

1. La demande est égale à la vente s'il y a des invendus, mais dans le cas contraire, il faut procéder à l'enregistrement des demandes non satisfaites que l'on doit ajouter ensuite au stock initial pour obtenir la demande. Il convient toutefois de noter que cette demande n'est pas indépendante des habitudes anciennes de commande; un niveau trop bas peut avoir découragé une clientèle potentielle (on retrouve ici implicitement un problème de perte de goodwill que l'on devrait inclure dans le coût de rupture).

$$\frac{dK}{dS} = \int_{a(S)}^{b(S)} \frac{\partial g(x, S)}{\partial S} dx + g[b(S), S] \cdot \frac{db(S)}{dS} - g[a(S), S] \cdot \frac{da(S)}{dS} \quad \text{relation 144}$$

L'application de cette formule au problème posé est immédiate :

- $K = I_r(S) = \int_S^\infty (x-S) \cdot f(x) dx$;
- $g(x, S) = (x-S) \cdot f(x)$, dont la dérivée par rapport à S est : $\frac{\partial g(x, S)}{\partial S} = -f(x)$;
- $a(S) = S$, dont la dérivée par rapport à S est : $\frac{da(S)}{dS} = 1$;
- $b(S) = \infty$, que l'on peut considérer ici comme une constante H aussi grande que l'on voudra (la notion d'une demande infinie n'ayant aucun sens concret) et dont la dérivée par rapport à S sera en conséquence nulle : $\frac{db(S)}{dS} = 0$.

L'application de la [relation 144](#) donne :

$$\frac{dI_r(S)}{dS} = \int_0^\infty [-f(x)] dx + [(H-S) \cdot f(H)] \cdot 0 - [(S-S) \cdot f(S)] \cdot 1$$

D'où :

$$\frac{dI_r(S)}{dS} = -\int_S^\infty f(x) dx = -P(X > S) \quad \text{relation 145}$$

Cette [relation 145](#) est l'équivalent, dans le cas continu, de la [relation 134](#) de la [page 670](#) établie pour le cas discret.

I-1.2.2.2 Relation entre $I_p(S)$ et $I_r(S)$

On montre sans difficulté que la [relation 135](#) de la [page 670](#) établie pour une loi discrète reste vraie lorsque la loi de demande est continue :

$$I_p(S) = \int_0^S (S-x)f(x)dx = \int_0^\infty (S-x)f(x)dx - \int_S^\infty (S-x)f(x)dx$$

$$= S - \bar{x} - \left[-\int_S^\infty (x-S)f(x)dx \right] = S - \bar{x} + I_r(S)$$

⇒ relations [135](#) et [136](#)

$I_p(S) = S - \bar{x} + I_r(S)$, stock moyen possédé calculé sur la base du stock résiduel en fin de période

$$C(S) = c_p(S - \bar{x}) + (c_p + c_r)I_r(S)$$

I-1.2.2.3 Calcul de $I_r(S)$

Une relation analogue à la [relation 138](#) de la [page 671](#) s'établit sans difficulté dans le cas continu :

$$I_r(S) = \int_S^\infty (x-S)f(x)dx = \int_S^\infty x \cdot f(x)dx - S \int_S^\infty f(x)dx$$

$$I_r(S) = \int_S^\infty x \cdot f(x)dx - S \cdot P(X > S) \tag{relation 146}$$

Le premier terme du second membre de l'équation correspond encore à un calcul «tronqué» de moyenne, qui s'effectue plus ou moins facilement selon les distributions étudiées. On montre¹ que :

$$I_r(S) = \sigma \{ f(t_S) - t_S P(t > t_S) \} = \sigma g(t_S), \text{ pour } \mathcal{L}(X) = \mathcal{N}(\bar{x}, \sigma) \text{ avec } t_S = (S - \bar{x}) / \sigma$$

$$\text{et } f(t_S) = e^{-t_S^2/2} / \sqrt{2\pi} \tag{relation 147}$$

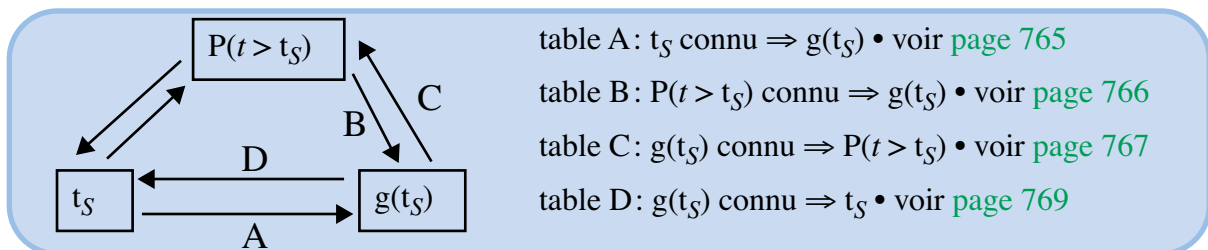
La quantité entre { }, que l'on a notée également g(t_S) dans la relation 147, est telle qu'à une valeur g(t_S) ne peut correspondre qu'une valeur et une seule de t_S. En statistique, des tables existent qui permettent de trouver, par simple lecture, la valeur de t_S correspondant à une valeur donnée de P(t > t_S), ou l'inverse. On peut donc constituer des tables établissant la correspondance entre deux des grandeurs suivantes: t_S, g(t_S) et P(t > t_S), comme l'illustre la figure 183. Les tables reliant t_S à P(t > t_S) existent déjà². Les quatre autres tables possibles qui présentent un intérêt opérationnel pour des calculs sur calculette, sont fournies aux pages 765 à 769. Leur usage sera expliqué aux pages 677 (table A et B) et 679 (tables C et D)

FIGURE 183

Relations entre t_S, P(t > t_S) et g(t_S)

Table des matières

Index thématique



Sous Excel, le calcul de g(t_S) pour une valeur t_S mise dans la cellule B1 est effectué en tapant «=EXP(-B1*B1/2)/RACINE(2*PI())-B1*(1-LOI.NORMALE(B1;0;1;1))» dans la cellule B2 dans laquelle on veut calculer g(t_S).

1. Pour la loi Normale $\mathcal{N}(\bar{x}, \sigma)$ de densité de probabilité h(x), la densité de probabilité de la loi Normale centrée

réduite $\mathcal{N}(0,1)$ étant alors notée f(t) : h(x) = $\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-\bar{x})^2}{2\sigma^2}}$ et f(t) = $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{t^2}{2}}$ avec $t = \frac{x-\bar{x}}{\sigma}$ implique :

$h(x) = \frac{1}{\sigma} f\left(\frac{x-\bar{x}}{\sigma}\right)$. On en déduit que $I_r(S) = \int_S^\infty (x-S)h(x)dx = \int_S^\infty x \cdot h(x)dx - S \cdot P(X > S)$, ce qui conduit, en posant $t_S = \frac{S-\bar{x}}{\sigma}$

$\int_{t_S}^\infty x \cdot h(x)dx = \bar{x} \cdot P(t > t_S) + \sigma \cdot f(t_S)$, d'où: $I_r(S) = \sigma \cdot f(t_S) - \sigma \frac{S-\bar{x}}{\sigma} P(t > t_S) = \sigma [f(t_S) - t_S P(t > t_S)]$.

Des résultats analytiques ont également été établis pour la loi Gamma (voir Burton, [81]).

2. Voir **Giard**, *Statistique appliquée à la gestion*, 7^e édition, p. 517 à 519, [182].



	A	B	C	D
1	ts =	1		
2	g(ts)	0,08332		B2
3				=EXP(-B1*B1/2)/RACINE(2*PI())- B1*(1-LOI.NORMALE(B1;0;1;1))

Calcul direct de g(ts)

I-1.2.3 Détermination de la solution optimale

On a vu au § I-1.2.2.2, que la relation 136 de la page 670 ($C(S) = c_p \cdot (S - \bar{x}) + (c_r + c_p) \cdot I_r(S)$) reste valable dans le cas continu. La recherche de l'optimum s'effectue alors facilement en utilisant la relation 145 de la page 674

$$\left(\frac{dI_r(S)}{dS} = -\int_S^{\infty} f(x) dx = -P(X > S) \right) : \frac{dC(S)}{dS} = c_p + (c_p + c_r)[-P(X > S)].$$

Cette dérivée étant nulle à l'optimum, on en déduit la relation 148.

$$S^* \text{ optimal si: } P(X > S^*) = \frac{c_p}{c_p + c_r}, \text{ ou } P(X < S^*) = \frac{c_r}{c_p + c_r} \quad \text{relation 148}$$

Cet optimum est un minimum, car la dérivée seconde de $C(S)$ est toujours positive, puisque la dérivée de $P(X > S)$, fonction de répartition, n'est autre que la densité de probabilité, dont la valeur est toujours positive (ou nulle).

Que la loi de demande soit discrète ou continue, on remarque que la politique optimale d'approvisionnement se détermine à partir d'une probabilité de rupture optimale faisant intervenir des coûts relatifs. Il en est ainsi dans la plupart des modèles de gestion des stocks présentés dans cet ouvrage¹.

Le problème de la **MAISON DE LA PRESSE** se résout alors par simple consultation d'une table de la loi Normale²: $P(X > S^*) = \frac{c_p}{c_p + c_r} = \frac{0,2}{0,2 + 0,7} = 0,222$, d'où:

$t_S = 0,7655 = \frac{S - 300}{20} \rightarrow S^* = 315,3 \approx 315$. L'approvisionnement périodique optimal est donc $S^* = 315$.

Il convient de noter que l'on a utilisé ici, ce qui est classique³, une distribution continue pour décrire la distribution d'une variable de nature discrète (le journal se vend à l'unité). En pareil cas, il convient d'introduire la correction de continuité pour calculer la probabilité de rupture; dans ces conditions, $P(X > 315) =$

1. Dans le cas contraire, au lieu de travailler sur une fonction de répartition, on travaille sur une fonction qui jouit des mêmes propriétés et, pour cette raison, est appelée **pseudo-fonction de répartition**.

2. Ici, on a utilisé la table 3-C de notre ouvrage *Statistique appliquée à la gestion* (1995, [182]), p. 519, qui retient 3 chiffres significatifs pour la probabilité, raison pour laquelle on a fourni les résultats avec 3 chiffres significatifs. L'usage d'un tableur permet d'atteindre sans problème la précision numérique désirée.

3. Voir Giard (1995, [182]), p. 153.

$P\left(X > \frac{315 + 0,5 - 300}{20}\right) = P(T > 0,775) = 21,92\%$ en calcul exact (tableur) et

21,77 %, si l'on arrondit la valeur de T à 0,78 pour utiliser directement une table «classique» à 2 chiffres après la virgule. Il s'ensuit que l'on n'atteindra qu'exceptionnellement la «probabilité de rupture optimale», en cas de variable de nature discrète décrite par une distribution continue (observation déjà faite dans le cas des distributions discrètes avec l'exemple de **LE VÔTRE**). *Le logiciel qui vous est proposé utilise la valeur exacte de la valeur de T associée à une probabilité et tient compte de l'impact de la correction de continuité dans la recherche la valeur de S* : pour $S = 315$, la probabilité de rupture exacte avec correction de continuité est de 21,92 %; pour $S = 314$, elle est de 23,42 % et pour $S = 316$, elle est de 20,46 %, ce qui conduit à conserver $S = 314$ dont la probabilité de rupture étant la plus proche de celle visée.

I-1.3 Les conséquences économiques de la solution optimale

Les conséquences économiques de la solution optimale peuvent s'apprécier à partir d'indicateurs physiques (qui peuvent, du reste, remettre en cause la possibilité d'application de la solution proposée) et d'indicateurs en valeur. Ces indicateurs sont utilisables pour évaluer les conséquences de n'importe quelle politique d'approvisionnement (optimale ou non) et en vérifier les possibilités d'application (voir page 648).

Table des
matières

I-1.3.1 Indicateurs physiques

On retiendra cinq indicateurs: la rupture moyenne de stock (§ I-1.3.1.1), la demande moyenne satisfaite (§ I-1.3.1.2, page 678), le pourcentage moyen de demandes non satisfaites (§ I-1.3.1.3, page 679), le stock moyen possédé (§ I-1.3.1.4, page 680) et la probabilité de rupture (§ I-1.3.1.5, page 680). Deux d'entre eux sont des variables d'état dont la connaissance est nécessaire pour le calcul d'indicateurs en valeur.

Index
thématique

I-1.3.1.1 La rupture moyenne de stock $I_r(S)$

Cet indicateur permet d'évaluer l'importance de la défaillance du système qui découle de l'adoption de la politique d'approvisionnement proposée. Une défaillance jugée excessive peut conduire à une perte de goodwill (éventuellement négligée dans les calculs) et, ce faisant, à une remise en cause de la solution envisagée.

Dans le cas du **Spécial Délice**, le calcul de $I_r(S)$ s'effectue à partir de la relation 5, puisque la loi de demande est une loi de Poisson :

$$I_r(S^* = 3) = 2,5 \cdot P(X = 3) + (2,5 - 3) \cdot P(X > 3) = 0,413$$

Sur 260 jours ouvrables $0,413 \times 260 = 107$ clients, en moyenne, partiront du magasin sans le gâteau qu'ils sont venus chercher (ce qui ne veut pas dire qu'ils seront forcément partis sans rien).

Le calcul de la rupture moyenne du quotidien l'**Univers** est plus simple puisque des tables ont été constituées à cet effet. Mais nous allons cependant effectuer le calcul direct, à l'aide de la relation 147 de la page 675, pour bien faire comprendre comment a été constituée la table A de la page 765. La variable centrée réduite

correspondant à la valeur optimale S^* est, nous l'avons vu, $t_S = 0,7655$. L'application de la [relation 147](#) conduit à: $f(t_S) = \frac{e^{-0,7655^2/2}}{\sqrt{2\pi}} = 0,29762$. La lecture d'une table normale donne $P(t > 0,7655) = 0,2218$ (qui diffère légèrement du 0,2222 obtenu au [§ I-1.2.3, page 676](#), dans le processus de recherche de S^*), d'où:

$$g(t_S) = 0,29762 - 0,7655 \times 0,2218 = 0,1278$$

$$I_r(S) = \sigma \cdot g(t_S) = 20 \times 0,1278 = 2,556$$

Il est en réalité préférable d'utiliser la correction de continuité¹. La variable centrée réduite est alors $t_S = (315,5 - 300)/20 = 0,775$, ce qui conduit à une valeur de $g(t_S = 0,775) = 0,12559$, et une rupture moyenne de 2,512. **Cette correction de continuité sera systématiquement utilisée dans les exemples présentés dans cet ouvrage.**



	A	B	C
1		Avec correction de continuité	Sans correction de continuité
2	xbarre =	300	300
3	sigma =	20	20
4	S =	315	315
5	t _S =	0,775	0,75
6	g(t _S)	0,12559	0,13117
7	I _r (S) =	2,512	2,623

Table des matières

Index thématique

Remarquons enfin que l'utilisation de la table A, [page 765](#), permettait de trouver directement pour $t_S = 0,77$ la valeur 0,12669 (au lieu de 0,1256) pour $g(t_S)$, d'où une rupture moyenne $I_r(S) = 2,534$ (au lieu de 2,512), un coût moyen de 5,2805 (inférieur de 4% au coût exact). De même, l'utilisation de la table B, [page 766](#), permettait de trouver directement pour $P(t > t_S) = P(X > S^*) = 0,222$, la valeur 0,12770 pour $g(t_S)$ et donc $I_r(S^*) = 20 \times 0,12770 = 2,554$, valeur peu différente des valeurs trouvées avec ou sans correction de continuité. Quelle que soit la méthode de calcul retenue, l'ordre de grandeur est le même. Aussi peut-on dire qu'en moyenne, sur 260 jours ouvrables, quelque 663 exemplaires de ce quotidien manqueront.



I-1.3.1.2 La demande moyenne satisfaite

Nous avons dit, en commentant la [relation 135, page 670](#), que la demande moyenne satisfaite est égale à la demande moyenne exprimée (\bar{x}) diminuée de la demande moyenne non satisfaite ($I_r(S)$) pour le pâtissier, cet indicateur est donc de $2,5 - 0,413 = 2,087$ demandes satisfaites par jour, ce qui conduit, sur 260 jours ouvrables par an, à une demande moyenne annuelle satisfaite de 542,6 clients. Pour le marchand de journaux, si l'on retient la rupture moyenne calculée avec correction de continuité, la demande moyenne satisfaite chaque jour se

1. Sur ce problème de correction de continuité, voir, par exemple, Giard (1995, [182]), p. 153. Il est à noter qu'elle ne s'impose réellement qu'avec un écart-type inférieur à 10.

monte à $300 - 2,513 = 297,487$ clients, ce qui conduit à une demande moyenne annuelle satisfaite de 77347 journaux.

I-1.3.1.3 Pourcentage moyen de demande non satisfaites

L'information fournie par la demande moyenne non satisfaite ($I_r(S)$) doit être complétée par l'importance relative que cette rupture représente par rapport à la demande moyenne (\bar{x}). Cet indicateur, qui ne dépend pas de la longueur de la période retenue, est noté $\beta(S)$ et se définit¹ comme :

$$\beta(S) = \frac{I_r(S)}{\text{demande moyenne}} \times 100 \quad \text{relation 149}$$

Ce pourcentage de demandes non satisfaites est, dans l'exemple du marchand de journaux ($I_r(S) = 2,51$ avec correction de continuité) :

$$\beta(S) = \frac{2,51}{300} 100 = 0,84\%$$

Pour le pâtissier, le pourcentage de demandes non satisfaites s'élève à 16,5%, comme vous pouvez le vérifier. Dans le cas d'une demande approximée par une loi Normale $\mathcal{N}(\bar{x}, \sigma)$, on a vu que l'on peut écrire $I_r(S) = \sigma \cdot g(t_S)$. On en tire une nouvelle formulation pour ce pourcentage de demandes non satisfaites :

$$\beta(S) = \frac{\sigma}{\bar{x}} \cdot g(t_S) \cdot 100 \quad \text{relation 150}$$

Le rapport σ / \bar{x} est connu en statistique sous le nom de coefficient de variation ; dans l'exemple du marchand de journaux, il est égal à $20 / 300 = 0,0667$. On peut encore écrire cette dernière relation de la façon suivante, permettant de calculer $g(t_S)$ à partir d'une valeur imposée $\beta(S)$ exprimée en pourcentage :

$$g(t_S) = \frac{\bar{x}}{\sigma} \cdot \frac{\beta(S)}{100} \quad \text{relation 151}$$

Cette relation permet d'utiliser les tables C et D (pages 767 et 769) pour résoudre des problèmes posés en termes de pourcentage de demandes non satisfaites :

- Les tables C et D, qui ont comme argument d'entrée $g(t_S)$, permettent de calculer directement le stock initial (table D, page 769) et sa probabilité de rupture (table C, page 767), et donc le coût de rupture implicite. Supposons par exemple que le marchand de journaux se fixe comme objectif un pourcentage de demandes non satisfaites de 1,5%, on a alors : $\beta(S) = 1,5 = 0,06667 \cdot g(t_S) \cdot 100$ et $g(t_S) = \frac{0,015}{0,06667} = 0,225$. La lecture de la table D donne $t_S = 0,416$ d'où la valeur de S : $0,416 = \frac{S-300}{20} \rightarrow S \approx 308$.
- La table C donne la probabilité de rupture correspondante $\alpha(S = 308) = 33,87\%$. Le coût de rupture implicite est alors tel que : $0,2/(0,2 + c_r) = 0,3387$,

1. La multiplication par 100 est destinée à fournir un pourcentage au lieu d'une fraction.

ce qui donne un coût de rupture de 1,37 dollar lidurien et donc une perte de goodwill de 0,67 dollar.

- Outre l'utilisation citée au § I-1.3.1, la table B permet un calcul direct du pourcentage de demandes non satisfaites sans pour autant calculer $I_r(S)$. Dans notre exemple, la probabilité de rupture à laquelle on aboutit après arbitrage entre des coûts de possession et des coûts de rupture est de 22,22%. La lecture de la table B donne en lecture directe la valeur $g(t_S)$ correspondante :

$$P(X > S) = 22,22\% \rightarrow g(t_S) = 0,12770$$

$$D'où: \beta(S) = \frac{20}{300} \times 0,12770 \times 100 = 8,51\%.$$

I-1.3.1.4 Le stock moyen possédé $I_p(S)$

Dans le cas d'articles non stockables, le stock moyen possédé correspond au stock résiduel moyen. Cet indicateur permet de se faire une idée du «gâchis» engendré par la politique d'approvisionnement retenue puisque, par hypothèse, tout article non vendu au cours de la période ne peut l'être au cours de la période suivante. Cet indicateur s'obtient à partir de la rupture moyenne de stock déjà calculée et de la [relation 135, page 670](#), valable aussi bien pour les variables discrètes que les variables continues.

- Pour le pâtissier, on aura donc: $I_p(S^* = 3) = (3 - 2,5) + 0,413 = 0,913$. Autrement dit, sur 260 jours ouvrables, **LE VÔTRE** donnera aux œuvres de l'ordre de $260 \times 0,913 = 237$ **Spécial Délice** (qui lui auront coûté $237 \times 25 = 5925$ dollars liduriens).
- Pour le marchand de journaux, on aura, en utilisant les résultats obtenus sans correction de continuité: $I_p(S = 315) = (315 - 300) + 2,556 = 17,556$ journaux. Tandis que si l'on utilise les résultats obtenus avec correction de continuité, c'est un stock résiduel moyen de 17,512 que l'on obtient. Sur 260 jours ouvrables, c'est quelque 4550 exemplaires de l'**Univers** qui seront retournés. Mais cette remarque doit être tempérée par le fait que ces retours représentent seulement $17,5/315 \approx 5,5\%$ des livraisons.

I-1.3.1.5 Probabilité de rupture $\alpha(S)$

La probabilité de rupture, que nous noterons $\alpha(S)$, est un indicateur de niveau de service très utile. Nous avons vu que l'arbitrage entre un coût de possession et un coût de rupture conduit à une détermination de S qui passe par le calcul de la probabilité de rupture. Ce calcul amène les cinq remarques.

I-1.3.15a) Non coïncidence stricte entre la probabilité de rupture requise et la probabilité de rupture effective

La recherche du niveau de stock S , à partir de la probabilité $\alpha(S)$ ne conduit habituellement pas à la définition d'un niveau de stock ayant une probabilité de rupture strictement égale à $\alpha(S)$. Ceci est évident pour les demandes suivant une loi discrète; nous avons vu par exemple que le problème posé par la pâtisserie **LE VÔTRE** conduit à une probabilité de rupture idéale de 41,7% et que le stock retenu en définitive correspond à une probabilité de rupture de 24,2%. Mais il en est de même pour les lois continues dans la mesure où celles-ci sont utilisées pour

décrire des phénomènes de nature discrète (on n'achète pas une fraction de journal). Par exemple, dans le problème du marchand de journaux, la probabilité de rupture requise était de 22,22%, alors que celle effectivement réalisée par un stock de 315 est, en utilisant la correction de continuité, de 21,92% (voir la fin du § I-1.2.3, page 677).

I-1.3.15b) Recherche du coût de rupture implicite

Dans certains cas, le coût de rupture peut être considéré comme délicat à quantifier, notamment en raison de la difficulté de mesurer objectivement la perte de goodwill. Pour ces raisons, on peut être tenté d'imposer comme contrainte de fonctionnement au système-stock une probabilité de rupture fixée a priori.

La détermination du coût de possession ne soulevant pas les mêmes problèmes, il est facile de calculer le coût de rupture implicitement choisi par celui qui impose au système cette contrainte de fonctionnement, et permettre ainsi de juger du réalisme de cette contrainte. Supposons par exemple que la Direction de la **MAISON DE LA PRESSE** d'Alphaville n'accepte pas une probabilité de rupture de plus de 1% pour le quotidien l'**Univers**, on a alors, pour la même valeur de coût de possession

($c_p = 0,2$): $\frac{0,2}{0,2 + c_r} = 0,01 \rightarrow c_r = 19,8$ dollars liduriens. L'estimation de la diminution de Goodwill est donc: $19,8 - 0,7 = 19,10$ dollars.

Si le taux d'actualisation est bien de 5% en termes réels, nous avons vu que la perte certaine d'un client conduit à une diminution de goodwill de 5236,35 dollars liduriens. Si l'on suppose, par exemple, qu'il y a une probabilité de 0,9 pour qu'une demande non satisfaite émane d'un client régulier, on peut alors dire que la Direction attache implicitement à p , probabilité qu'un client régulier n'ayant pas trouvé son journal soit définitivement perdu, une valeur telle que: $5236,35 \times 0,9 \times p = 19,10$ dollars liduriens. La valeur de p que l'on en tire est 0,4% et il ne reste plus qu'à en évaluer la vraisemblance.

Table des
matières

Index
thématique

I-1.3.15c) Probabilité de rupture et exercice annuel

La probabilité de rupture $\alpha(S)$ est définie pour une période de révision calendaire donnée (qui ne comporte qu'une journée pour le problème du marchand de journaux). Lorsque l'on désire caractériser la politique de stock retenue sur une période de temps différente, l'exercice annuel par exemple, en gardant cette notion de probabilité de rupture, il faut faire appel au raisonnement statistique.

Reprenons le problème du marchand de journaux et supposons que l'on cherche à caractériser sa gestion sur 260 jours. Le fait de soumettre à une demande aléatoire de loi $\mathcal{N}(300; 20)$ un stock initial de 315 exemplaires du journal l'**Univers** constitue une épreuve statistique indépendante des précédentes et à l'issue de laquelle l'événement «rupture de stock» peut se produire avec une probabilité de 22%. Cette épreuve est répétée 260 fois, le nombre k de jours où l'événement «rupture de stock» se produit suit la loi binomiale $\mathcal{B}(260; 0,22)$. C'est à partir de cette distribution de probabilité qu'il faut caractériser la possibilité de rupture de stock sur une année. On peut approximer cette loi binomiale par une loi Normale de moyenne $260 \times 0,22 = 57,2$ et de variance $260 \times 0,22 \times 0,78 = 42,9$, c'est-à-dire par la loi $\mathcal{N}(57,2; 6,5)$. On aura donc en moyenne 57,2 jours de rupture par an et,

par exemple, une probabilité de 2,1 % de dépasser les 70 jours de rupture dans l'année (calcul avec correction de continuité).

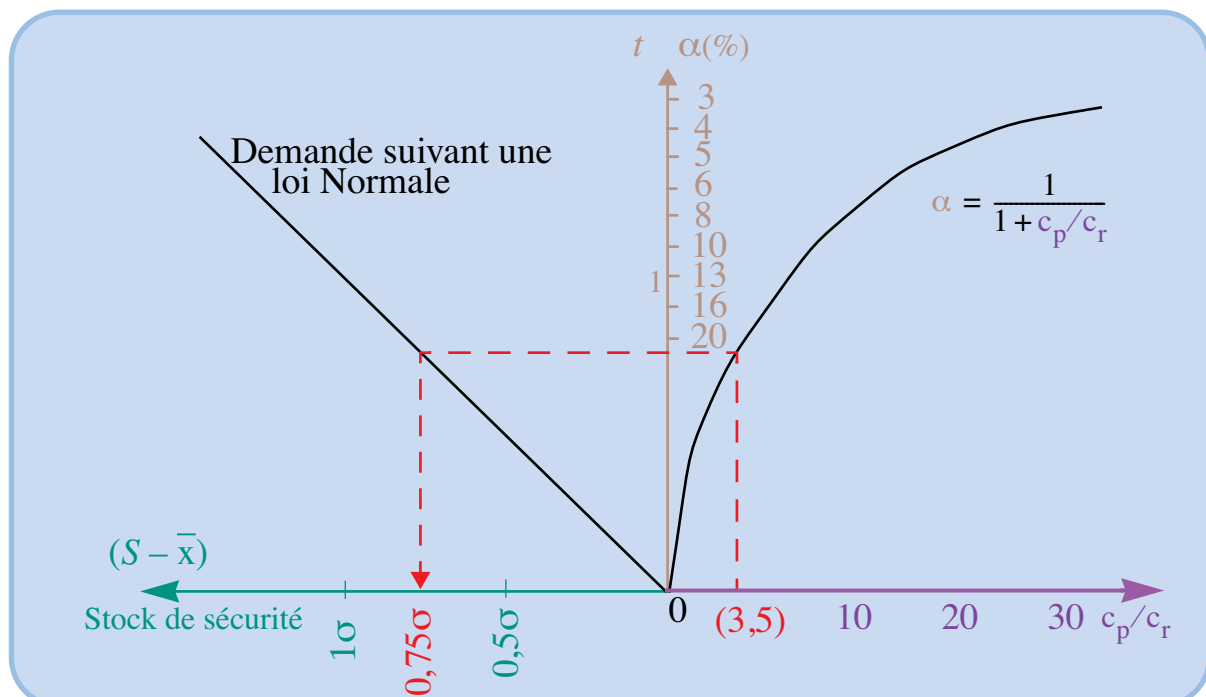
Rappelons que nous avons vu que le pourcentage de demandes non satisfaites $\beta(S)$ est indépendant du découpage temporel retenu ; autrement dit, c'est le même sur une année que sur un jour ouvrable.

I-1.3.15d) Probabilité de rupture et stock de sécurité

Le stock de sécurité est la différence entre le stock initial S (ou le niveau de reconstituer s'il s'agit d'un article stockable) et la demande moyenne \bar{x} . Cette différence est habituellement positive, mais il peut très bien en être autrement. Lorsque la demande suit une loi Normale, on a, par définition de la variable centrée réduite : $t_S = \frac{S - \bar{x}}{\sigma} \rightarrow S - \bar{x} = \text{stock de sécurité} = t_S \cdot \sigma$, et le stock de sécurité se détermine manuellement sans difficulté sur un graphique gaussio-arithmétique (puisque l'axe représentatif des probabilités est établi à partir d'une graduation arithmétique des valeurs de variables centrées réduites). Par ailleurs, la probabilité de rupture ne dépend que du rapport entre le coût de possession et le coût de rupture : $P(X > S) = \frac{c_p}{c_p + c_r} = \frac{1}{1 + c_r/c_p}$. On peut donc établir l'abaque de la [figure 184](#), qui permet de déterminer graphiquement le niveau de stock de sécurité (d'où l'on tire la valeur de S , en y ajoutant \bar{x}) à partir du rapport c_r/c_p pour des articles dont la demande suit une loi Normale. Cet abaque n'a été construit que pour des coûts de rupture supérieurs à des coûts de possession (d'où une probabilité de rupture inférieure à 50%, compte tenu de la [relation 148 de la page 676](#)).

FIGURE 184

Relations entre le stock de sécurité, la probabilité de rupture et les coûts de possession et de rupture dans le cas d'une demande suivant une loi Normale



Il est possible d'utiliser de tels documents dans le cadre d'une gestion «manuelle» des stocks (par l'agent d'exécution, chargé sur le terrain de cette gestion), mais les progrès de l'informatique ont rendu totalement dépassé l'appel à ces outils graphiques qui ne présentent plus d'intérêt que pour illustrer des relations entre paramètres. Dans l'exemple du marchand de journaux, on a $c_r/c_p = 0,7/0,2 = 3,5$; on obtient alors en lecture graphique sur le schéma (droites en pointillés), la valeur du stock de sécurité, après avoir gradué la partie gauche de l'axe horizontal de façon à avoir la valeur de l'écart-type de la loi de demande, en dessous du σ porté sur cet axe.

I-1.3.15e) Liaison existant entre $\alpha(S)$, $\beta(S)$, S et c_r

La figure 185 illustre les relations qui existent entre S , $\beta(S)$, $\alpha(S)$ et c_r (en supposant, dans la liaison de c_r avec les autres paramètres, que la politique implicitement suivie est optimale).

FIGURE 185
Relation entre S , $\alpha(S)$, $\beta(S)$ et c_r (pour $c_p = 0,2$)

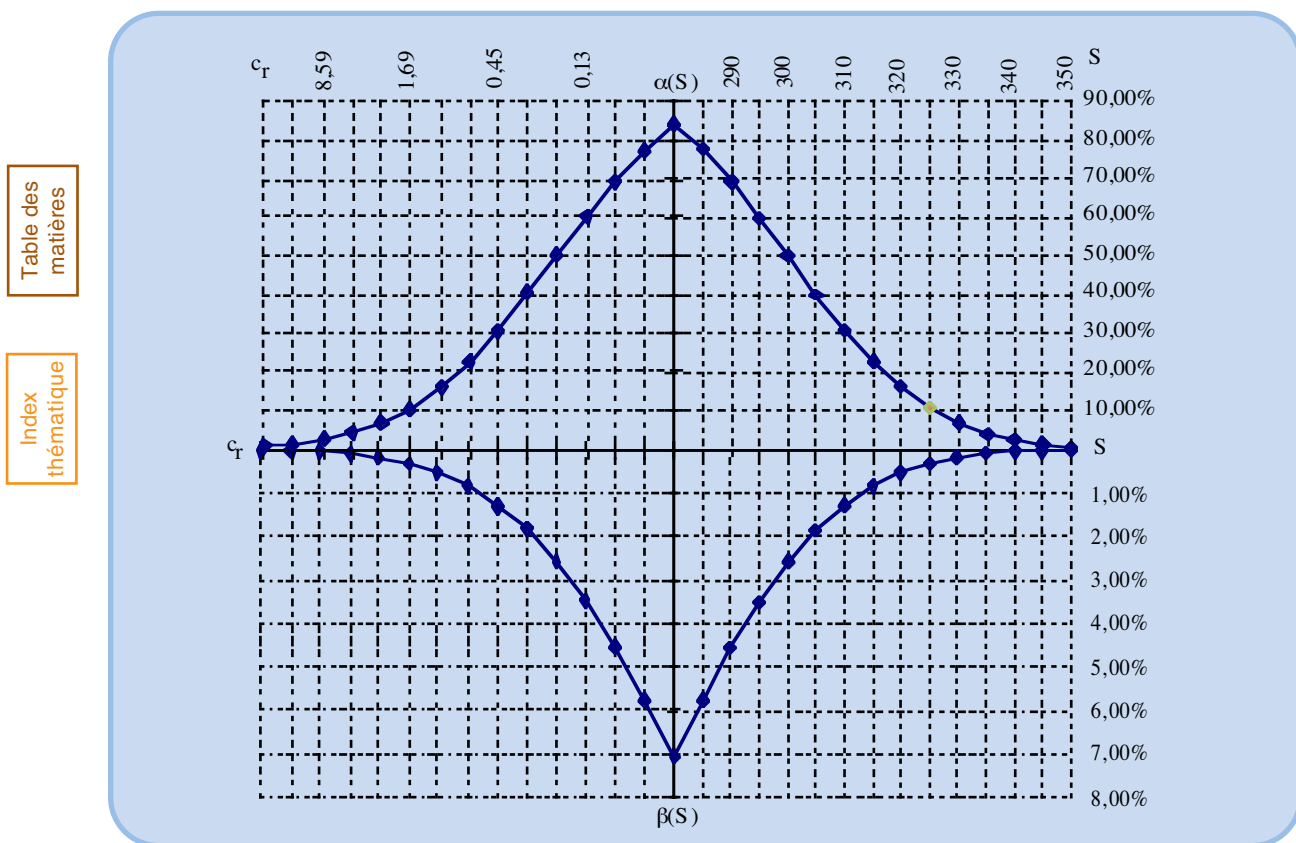


Table des matières
Index thématique

I-1.3.2 Indicateurs en valeur

Trois indicateurs peuvent être calculés et le dernier uniquement dans le cas d'un approvisionnement pour vente à des tiers.

I-1.3.2.1 Dépense moyenne d'acquisition

Cet indicateur évalue le décaissement moyen associé à l'approvisionnement en tenant compte de la valeur de récupération du stock résiduel.

La politique optimale suivie par la **MAISON DE LA PRESSE** a conduit à acheter, chaque jour, 315 journaux, soit une dépense de $315 \times 1,8 = 567$ dollars liduriens. Étant donné que, chaque jour, 17,512 journaux sont restitués, un avoir de $17,512 \times 1,6 = 28,02$ dollars liduriens est crédité à la **MAISON DE LA PRESSE**. La « facture moyenne » quotidienne à régler, que l'on désignera encore sous le vocable de dépense moyenne d'acquisition, s'élèvera donc à $567 - 28,02 = 538,98$ dollars liduriens. Pour une année de 260 jours ouvrables, la **MAISON DE LA PRESSE** réglera donc une facture moyenne de $538,98 \times 260 = 140\,135$ dollars liduriens.

Pour le pâtissier, le problème est un peu différent, d'une part parce que la valeur de récupération des gâteaux est nulle et, d'autre part, parce que l'approvisionnement est interne. Dans ces conditions, la dépense moyenne d'acquisition quotidienne correspond au coût direct de fabrication : $3 \times 25 = 75$ dollars liduriens. Pour une année de 260 jours ouvrables, le pâtissier dépensera donc $75 \times 260 = 19\,500$ dollars liduriens.

I-1.3.2.2 Indicateur de coût moyen $C(S)$

On peut également souhaiter calculer la valeur prise à l'optimum par l'indicateur de coût moyen que l'on a cherché à minimiser. On peut partir de la [relation 136 de la page 670](#), mais il est instructif de connaître les valeurs prises par les coûts partiels.

Le [tableau 180](#) explique, pour le pâtissier **LE VÔTRE**, la détermination de l'indicateur de coût moyen quotidien, ce qui conduit à un indicateur de coût moyen annuel de $260 \times 37,29 = 9\,696$ dollars liduriens.

TABLEAU 180

*Calcul de l'indicateur de coût moyen associé à la politique $S = 3$ pour **LE VÔTRE***

coût associé à la rupture moyenne $c_r I_r(S) = 35 \times 0,4132$	14,46
+ coût associé au stock résiduel moyen $c_p I_p(S) = 25 \times 0,9132$	+ 22,83
= indicateur de coût moyen quotidien de gestion $C(S)$	= 37,29

Table des matières

Index thématique

Le [tableau 181](#) explique, pour la **MAISON DE LA PRESSE**, la détermination de l'indicateur de coût moyen quotidien, ce qui conduit à un indicateur de coût moyen annuel de $260 \times 5,26 = 1\,368$ dollars liduriens.

TABLEAU 181

*Calcul de l'indicateur de coût moyen associé à la politique $S = 315$ pour la **MAISON DE LA PRESSE** d'Alphaville*

coût associé à la rupture moyenne $c_r I_r(S) = 0,7 \times 2,512$	1,76
+ coût associé au stock résiduel moyen $c_p I_p(S) = 0,2 \times 17,512$	+ 3,50
= indicateur de coût moyen quotidien de gestion $C(S)$	= 5,26

Dans nos deux exemples, les articles étudiés sont destinés à la vente à des tiers. L'indicateur de coût $C(S)$ n'a pas de signification concrète car il est la somme d'un manque à gagner (associé à la rupture de stock) et d'un coût lié au stock résiduel, que l'entreprise a effectivement à supporter. Cet indicateur constitue, comme on l'a dit au [chapitre X, page 655](#), un artifice de présentation utilisé pour se ramener

systématiquement à une catégorie unique de problème à résoudre. Lorsqu'il y a vente à des tiers, l'indicateur synthétique pertinent sur le plan financier est celui de la marge nette $B(S)$; celle-ci se déduit directement de l'indicateur de coût $C(S)$.

On remarquera que, dans un cas comme dans l'autre, l'optimum ne se caractérise pas par une égalité des coûts partiels de rupture et de possession.

I-1.3.2.3 Marge nette moyenne $B(S)$

Lorsque le coût de rupture n'est autre que la marge unitaire que l'on n'a pas encaissée en manquant la vente d'une unité, on montre, pour une valeur quelconque du stock initial S (qu'il soit optimal ou non), que la **marge totale sur la période**¹ se calcule comme suit:

$$B(S) = c_r \cdot \bar{x} - C(S) = c_r \cdot \bar{x} - \{c_p \cdot I_p(S) + c_r \cdot I_r(S)\} \quad \text{relation 152}$$

Cette relation peut encore s'écrire:

$$B(S) = c_r \cdot [\bar{x} - I_r(S)] - c_p \cdot I_p(S) \quad \text{relation 153}$$

ce qui permet de constater que la marge nette moyenne est égale au produit de la marge unitaire par la demande moyenne satisfaite, diminué du coût associé au stock résiduel moyen, ce qui semble parfaitement logique.

Cette relation est vraie si le coût de rupture est calculé sur la pénurie constatée en fin de période (c'est-à-dire est indépendant de la durée de la rupture) et si la demande est perdue². Cette relation se démontre sans difficulté, que la loi de demande soit discrète ou continue. Pour l'établir, il faut formuler le problème en termes de bénéfice et non de coût. Deux démonstrations sont possibles mais peuvent être «sautées» sans inconvénient.

Table des matières

I-1.3.23a) Première démonstration

Index thématique

Notons: v , le prix de vente ($v = 2,50$ pour l'**Univers**), a , le prix d'achat ($a = 1,8$ pour le vendeur de journaux), et r , le prix de reprise ($r = 1,6$ dollar lidurien). Le coût de rupture est $c_r = v - a (= 2,5 - 1,8 = 0,7)$ et $c_p = a - r (= 1,8 - 1,6 = 0,2)$. L'acquisition initiale de S journaux conduit à une dépense $S \cdot a$ et à une espérance

mathématique de recettes s'élevant à $v \int_0^S x f(x) dx$, si la demande est inférieure à S

et à $v \cdot S \cdot P(X > S)$, dans le cas contraire. Il convient également de tenir compte de la recette sur les invendus ($S - x$) que l'on encaisse si la demande est inférieure à

S . L'espérance mathématique de cette recette est $r \int_0^S (S - x) f(x) dx$. L'expression de

l'espérance mathématique de la marge $B(S)$ réalisée en dimensionnant le stock initial au niveau S est donc:

1. Il s'agit bien d'une marge et non d'un bénéfice (lequel s'obtiendrait en agrégeant les marges de différents articles, et en y retranchant l'ensemble des charges fixes) car il importe de raisonner en se basant sur les principes du *direct costing* pour déterminer la politique optimale, et surtout pas sur ceux du coût de revient complet (dont les éléments de calculs deviennent caducs si l'optimum diffère de la solution de référence implicitement prise en compte dans le coût de revient complet).

2. Si les demandes non satisfaites le sont en totalité à un coût plus élevé, on obtient une relation voisine qui sera étudiée à la page 706.

$$B(S) = -S \cdot a + v \int_0^S x \cdot f(x) dx + v \cdot S \int_S^{\infty} f(x) dx + r \int_0^S (S-x) f(x) dx$$

$$B(S) = -a \cdot [(S-\bar{x}) + \bar{x}] + v \left(\bar{x} - \int_S^{\infty} x \cdot f(x) dx \right) + v \cdot S \int_S^{\infty} f(x) dx + r \left((S-\bar{x}) - \int_S^{\infty} (S-x) f(x) dx \right)$$

$$B(S) = (v-a)\bar{x} - \left[(a-r)(S-\bar{x}) + v \int_S^{\infty} (S-x) f(x) dx - r \int_S^{\infty} (S-x) f(x) dx \right]$$

$$B(S) = (v-a)\bar{x} - [(a-r)(S-\bar{x}) + (v-r)I_r(S)] \quad \text{relation 154}$$

Compte tenu du fait que $c_r = v - a$ et $c_p = a - r$, on en déduit que $v - r = (v - a) + (a - r) = c_r + c_p$ et que: $B(S) = c_r \cdot \bar{x} - \{c_p \cdot (S - \bar{x}) + (c_p + c_r)I_r(S)\}$. L'expression entre $\{ \}$ n'est autre que la somme des coûts de possession et de rupture en vertu de la [relation 136](#), ce qui achève la démonstration de la [relation 152](#).

On peut ajouter que la recherche de S^* à partir de la maximisation de la marge donne la même solution (obtenue en égalant à zéro la dérivée de $B(S)$ par rapport

$$\text{à } S): P(X < S^*) = \frac{v-a}{v-r} = \frac{v-a}{v-a+a-r} = \frac{c_r}{c_r+c_p}.$$

I-1.3.23b) Seconde démonstration

On peut également répartir des observations faites en commentant la [relation 154](#). Compte tenu de la définition de la demande moyenne satisfaite, on peut écrire:

$$\begin{aligned} B(S) &= c_r \left[\int_0^S x \cdot f(x) dx + S \int_S^{\infty} f(x) dx \right] - c_p \cdot I_p(S) \\ &= c_r \left[\bar{x} - \int_S^{\infty} x \cdot f(x) dx + S \int_S^{\infty} f(x) dx \right] - c_p \cdot I_p(S) \\ &= c_r \cdot \bar{x} - c_r \cdot I_r(S) - c_p \cdot I_p(S) = c_r \cdot \bar{x} - C(S) \end{aligned}$$

L'application de la [relation 152 de la page 685](#) à nos exemples numériques donne pour la valeur optimale S^* , et compte tenu du coût minimal $C(S^*)$ qui lui est associé:

- $B(S) = 2,5 \times 35 - 37,29 = 50,21$ dollars liduriens pour le pâtissier **LEVÔTRE**.
- $B(S) = 300 \times 0,7 - 5,26 = 204,74$ dollars liduriens pour la Maison de Presse d'Alphaville

La marge nette annuelle, sur la base de 260 jours ouvrables, s'élèvera donc à $260 \times 50,21 = 13\,054$ dollars liduriens pour le pâtissier et à $260 \times 204,74 = 53\,232$ dollars liduriens pour la **MAISON DE LA PRESSE** d'Alphaville. Ces sommes correspondent à ce que peuvent espérer tirer ces commerçants de ces activités. Rappelons qu'il ne s'agit pas d'un bénéfice, les charges fixes n'ayant pas été prises en considération.

Ajoutons enfin que, le coût de rupture revêtant la signification de manque à gagner dans les deux problèmes étudiés, il est facile de calculer la marge moyenne annuelle non réalisée pour rupture de stock. Il suffit en effet de multiplier par 260 le coût associé à la rupture moyenne quotidienne. On obtient alors un manque-à-gagner annuel de $260 \times 1,76 = 457$ dollars liduriens, associé à la stratégie d'approvisionnement de 315 journaux chaque jour. De même, la marge moyenne annuelle du pâtissier, non réalisée pour rupture de stock, s'élève à $260 \times 14,46 = 3760$ dollars.

Le **tableau 182** et la **figure 186** montrent comment évoluent différents indicateurs physiques et financiers en fonction des valeurs prises par S . On peut remarquer que l'optimum trouvé est relativement plat (une erreur de ± 10 exemplaires dans la détermination de S est sans effet sensible), mais ceci est lié à un ordre de grandeur très voisin des coûts unitaires de rupture et de possession.

FIGURE 186

Évolution des coûts partiels de gestion et du coût total de gestion

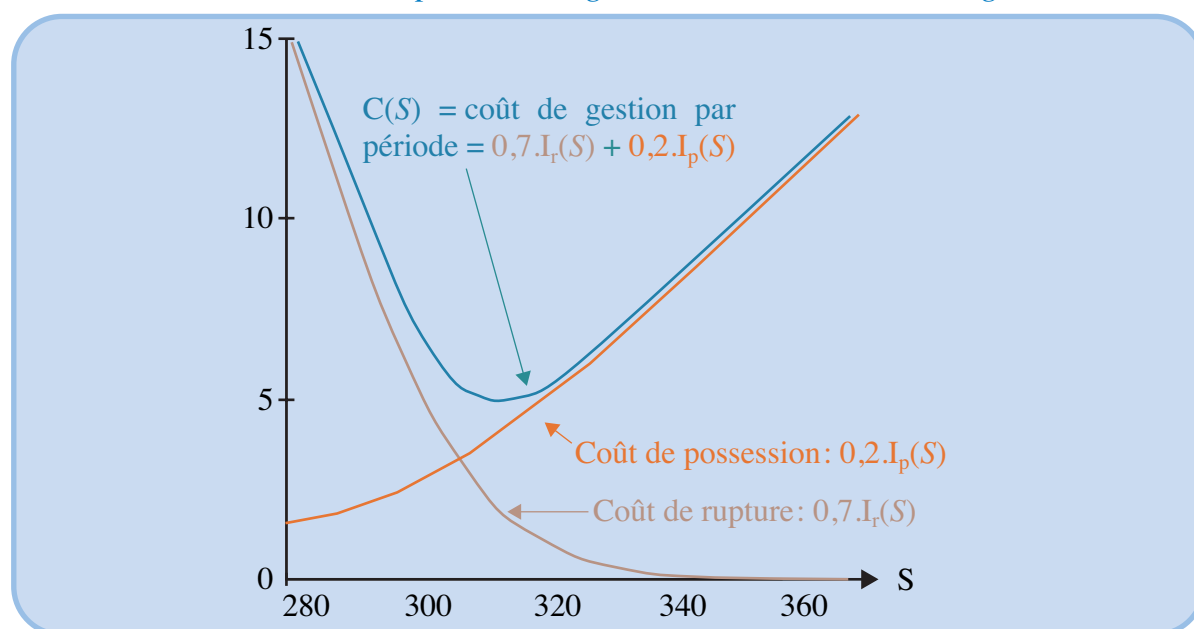


Table des matières

Index thématique

TABLEAU 182

Évolution des coûts et de la marge en fonction du stock initial[†]

Variable de commande	Indicateurs de niveau de service		Variables d'état		Paramètres économiques			
	$\alpha(S)$	$\beta(S)$	$I_r(S)$	$I_p(S)$	Coût		Marge	
S					$0,7 \cdot I_r(S)$	$0,2 \cdot I_p(S)$	$C(S)$	$B(S)$
280	83,52	7,08	21,24	1,25	14,87	0,25	15,12	194,88
284	78,08	6,00	18,00	2,01	12,60	0,40	13,00	197,00
288	71,74	5,00	15,00	3,01	10,50	0,60	11,10	198,90
292	64,62	4,09	12,27	4,28	8,59	0,86	9,45	200,55
296	56,95	3,28	9,84	5,85	6,89	1,17	8,06	201,94
300	49,00	2,58	7,74	7,73	5,42	1,55	6,96	203,04
304	41,10	1,98	5,94	9,93	4,16	1,99	6,14	203,86
308	33,54	1,48	4,44	12,44	3,11	2,49	5,60	204,40
310	29,98	1,27	3,81	13,80	2,67	2,76	5,43	204,57
312	26,6	1,08	3,24	15,24	2,27	3,05	5,32	204,68
314	23,42	0,91	2,73	16,74	1,91	3,35	5,26	204,74

TABLEAU 182 (SUITE)
Évolution des coûts et de la marge en fonction du stock initial[†]

Variable de commande	Indicateurs de niveau de service		Variables d'état		Paramètres économiques			
	$\alpha(S)$	$\beta(S)$	$I_r(S)$	$I_p(S)$	Coût			Marge
S					$0,7 \cdot I_r(S)$	$0,2 \cdot I_p(S)$	$C(S)$	$B(S)$
316	20,47	0,77	2,31	18,30	1,62	3,66	5,28	204,72
318	17,75	0,64	1,92	19,92	1,34	3,98	5,33	204,67
320	15,27	0,53	1,59	21,59	1,11	4,32	5,43	204,57
324	11,03	0,36	1,067	25,07	0,75	5,01	5,76	204,24
328	7,71	0,23	0,69	28,69	0,48	5,74	6,22	203,78
332	5,21	0,15	0,45	32,44	0,32	6,49	6,80	203,20
336	3,4	0,09	0,27	36,27	0,19	7,25	7,44	202,56
338	2,71	0,07	0,21	38,21	0,15	7,64	7,79	202,21
342	1,68	0,04	0,12	42,121	0,08	8,42	8,51	201,49
346	1,00	0,02	0,06	46,07	0,04	9,21	9,26	200,74
350	0,58	0,01	0,03	50,04	0,02	10,01	10,03	199,97

†. Avec usage de la correction de continuité.

I-1.3.3 Analyse synthétique des conséquences de la politique optimale d'approvisionnement

L'ensemble des indicateurs qui viennent d'être présentés figure dans le [tableau 183 de la page 689](#) (loi de demande discrète) et [tableau 184 de la page 690](#) (loi de demande continue). L'intérêt de cette « photographie » des conséquences de la politique proposée est de permettre au décideur de vérifier que la solution proposée est bien applicable (certaines contraintes pesant sur le problème ayant pu être relaxées, c'est-à-dire omises, pour faciliter l'analyse de la solution). Rappelons que l'icône du micro-ordinateur en marge indique que, si vous travaillez sur la version CD-Rom de l'ouvrage, vous pouvez en cliquant sur cette icône, accéder directement au logiciel de calcul des politiques de stock, avec les paramètres correspondant au problème pris en exemple.

Table des matières

Index thématique

I-1.4 Remarques

Trois remarques complémentaires peuvent être faites sur le modèle d'approvisionnement d'articles non stockables que nous venons d'analyser en détail. La première a trait à une présentation possible du problème par l'analyse marginaliste. La deuxième concerne son application à des problèmes de minimisation d'une dépense. La dernière vise son utilisation dans l'étude de problèmes de point mort en univers aléatoire.

I-1.4.1 Interprétation marginaliste du résultat trouvé

On aurait pu trouver directement les relations [148](#) et [140](#) en faisant appel à l'analyse marginale (au sens donné à ce terme par la théorie économique). On a, en effet, intérêt à augmenter d'une unité le stock de départ, jusqu'au moment où *l'espérance mathématique du coût de possession de cette unité supplémentaire devient égale à l'espérance mathématique du coût de rupture*.

Or la dernière unité du stock S a une probabilité de ne pas être utilisée strictement égale à $P(X < S)$. L'espérance mathématique du coût de possession de cette unité marginale est donc $c_p P(X < S)$. De même cette dernière unité, si elle n'est

Tableau 183
Analyse de la politique optimale de la **Maison de la Presse pour l'Univers**



Conséquences physiques de la politique d'approvisionnement pour l'Univers	Politique optimale	
	par période de révision calendaire	par an (sur 260 périodes calendaires)
Stock S de début de période	315	-
Stock de sécurité	15	-
Demande moyenne satisfaite	297,488	77 346,907
Rupture moyenne de stock	2,512	653,093
Pourcentage de demandes non satisfaites	0,84%	0,84%
Probabilité de rupture par période de révision calendaire	21,92%	-
Nombre moyen annuel de périodes en rupture de stock	-	56,984
Stock résiduel moyen	17,512	4 553,093
Conséquences financières de la politique d'approvisionnement		
Dépense d'acquisition nette moyenne	538,98	140 135,05
Coût de commande / Charges fixes calendaires	0,00	0,00
Coût de rupture	1,76	457,17
Coût de possession	3,50	910,62
Indicateur de coût moyen	5,26	1 367,78
Marge nette moyenne	204,74	53 232,22

Table des matières

Index thématique

pas intégrée au stock de départ (qui est alors de $(S - 1)$, aura une probabilité $P(X \geq S)$ de faire défaut; l'espérance mathématique du coût de rupture de cette unité marginale est donc $c_r P(X \geq S)$. Le stock initial est optimal si ces espérances mathématiques sont égales : $c_p \cdot P(X < S) = c_r \cdot P(X \geq S) = c_r \cdot [1 - P(X < S)]$, d'où $P(X < S) = \frac{c_r}{c_r + c_p}$. Cette dernière relation est bien équivalente à la [relation 148 de la page 676](#).

Il convient cependant de noter que le raisonnement marginaliste n'est applicable que parce que les hypothèses que l'on a retenues pour le calcul de $I_p(S)$ et de $I_r(S)$ font que ces stocks ne dépendent que de l'état du système en fin de période (il n'en sera plus de même au § I-2).

I-1.4.2 Généralité du modèle de base présenté

Les exemples que nous avons retenus jusqu'ici concernaient un problème de détermination d'un niveau optimal de *production* (pour le pâtissier) et un problème d'*approvisionnement* optimal d'un distributeur (pour le marchand de journaux). Dans les deux cas, une marge pouvait directement être associée à l'article pour lequel le problème de stock se posait mais, il n'en est pas toujours ainsi.

- On peut noter tout d'abord que certains problèmes de stock concernent l'approvisionnement de facteurs productifs qui concourent avec d'autres à la

TABLEAU 184

Analyse de la politique optimale du pâtissier LE VÔTRE pour le Spécial Délice



Conséquences physiques de la politique d'approvisionnement pour le Spécial Délice	Politique optimale	
	par période de révision calendaire	par an (sur 260 périodes calendaires)
Stock S de début de période	3	-
Stock de sécurité	0,500	-
Demande moyenne satisfaite	2,087	542,569
Rupture moyenne de stock	0,413	107,431
Pourcentage de demandes non satisfaites	16,53%	16,53%
Probabilité de rupture par période de révision calendaire	24,24%	-
Nombre moyen annuel de périodes en rupture de stock	-	63,030
Stock résiduel moyen	0,913	237,431
Conséquences financières de la politique d'approvisionnement		
Dépense d'acquisition nette moyenne	75,00	19 500,00
Coût de commande / Charges fixes calendaires	0,00	0,00
Coût de rupture	14,46	3 760,08
Coût de possession	22,83	5 935,77
Indicateur de coût moyen	37,29	9 695,85
Marge nette moyenne	50,21	13 054,15

production de biens ou de services et ne font donc pas directement l'objet d'une vente. C'est le cas, par exemple, de certaines pièces détachées qui sont achetées en même temps que des machines, du fait des conséquences financières relativement lourdes d'un réapprovisionnement tardif, qu'elles soient liées à un arrêt de la production (coût du personnel payé à ne rien faire, coût associé à une modification inopinée d'un programme de production, préjudice commercial...) ou au réapprovisionnement lui-même. Ce type de constitution de stock de précaution est connu sous le terme de *spare insurance*, dans la littérature spécialisée. Plus prosaïquement, le problème sera similaire pour l'approvisionnement en farine du pâtissier **LE VÔTRE** (mais il s'agira alors d'un problème d'approvisionnement d'articles stockables, puisque le sac de farine non utilisé en fin de période calendaire le sera au cours de la période suivante).

- La notion de marge n'intervient également pas dans certains problèmes de détermination d'une capacité optimale de production, même si celle-ci est orientée vers la production d'un seul bien ou service destiné à la vente. Il faudra pour cela qu'en cas d'insuffisance de la capacité offerte, il y ait une possibilité d'assurer la production (à un coût évidemment supérieur).

Ce sera le cas par exemple d'un service de restauration d'entreprise qui, décidant de fournir un repas à tout employé se présentant à la cantine, utilise une restauration de type classique à concurrence de S repas et satisfait toute demande excédant S par des plats surgelés; le problème est bien alors un problème de mini-

misation de coût de production dans lequel la recette unitaire n'intervient pas. Signalons enfin que d'autres problèmes de capacité optimale, en particulier ceux impliquant un choix d'investissement, font intervenir la notion de marge et procèdent également de la logique des modèles d'approvisionnement d'articles non stockables.

Nous allons partir, une fois de plus, d'un exemple introductif avant de formaliser le problème, pour obtenir une solution analytique qui sera appliquée au problème posé.

I-1.4.2.1 Exemple introductif

La société **MECANOR**, entreprise lidurienne spécialisée dans la mécanique générale, doit remplacer l'une de ses machines-outils.

Les renseignements recueillis auprès du Centre d'Etude de Technique de la branche, sur le modèle T99 qu'elle envisage d'acquérir, laissent penser que la pièce critique de ce modèle est un axe qu'un technicien de l'usine peut remplacer sans problème, mais dont le délai d'approvisionnement est normalement de 5 jours ouvrables. Il semblerait, par ailleurs, que sur la durée de vie «normale» de ce matériel, la distribution de probabilités du nombre de ruptures d'axe puisse raisonnablement être approximée par une loi de Poisson de moyenne 2. **MECANOR** peut acheter des axes de rechange en même temps que la machine, et ce pour un prix unitaire a de 500 dollars liduriens. La valeur de récupération r des axes inutilisés lors de la radiation de la machine est évaluée à 4 dollars liduriens, et correspond à la valeur du métal. Par ailleurs, le chef d'atelier estime qu'un arrêt de 5 jours de ce type de machine entraîne une dépense improductive c_r de 3000 dollars liduriens, du fait de la mauvaise utilisation de facteurs productifs qu'il entraîne; une rupture coûte alors 3500 dollars liduriens, si l'on suppose que le coût d'acquisition reste le même. Le problème posé est celui de la détermination du nombre de pièces de rechange que **MECANOR** a intérêt à acheter en même temps que la machine.

Table des
matières

Index
thématique

I-1.4.2.2 Analyse du problème

Deux formulations du problème sont possibles, mais toutes les deux conduisent à la même solution analytique.

I-1.4.2.2a) Première formulation du problème

Supposons que **MECANOR** décide d'acheter $S = 3$ pièces de rechange, elle débourse de manière certaine une somme de $500 \times 3 = 1500$ dollars, et d'une manière générale $500 S$. Si le nombre X de ruptures est inférieur à 3, par exemple, s'il est égal à 1, **MECANOR** récupérera $4 \times (3 - 1) = 8$ dollars, et d'une manière générale $r(S - X)$ dollars. Par contre, si le nombre de ruptures est supérieur à 3, par exemple s'il est égal à 6, **MECANOR** devra supporter une dépense de $3500 \times (6 - 3) = 10500$ dollars en sus de la dépense initiale de 1500 dollars, et d'une manière générale $(c_r + a)(X - S)$. Résumons dans le tableau synoptique 185 ces différents cas de figure.

Il ne reste plus qu'à calculer l'espérance mathématique de la dépense totale $C(S)$, en pondérant ces différentes dépenses par leurs probabilités d'occurrence avant d'en effectuer la sommation.

TABLEAU 185
Première formulation du problème du réapprovisionnement de pièces de rechange

Demande	Exemple numérique			Cas général		
	$X < 3$	$X = 3$	$X > 3$	$X < S$	$X = S$	$X > S$
Dépense initiale	500×3	500×3	500×3	aS	aS	aS
Valeur de récupération	$-4(3 - X)$	0		$-r(S - X)$	0	
Coût des unités manquantes		0	$(3000 + 500)(X - 3)$		0	$(c_r + a)(X - S)$

$$C(S) = 500 \cdot S - 4 \sum_{x < S} (S - x) \cdot P(X = x) + 3500 \sum_{x > S} (x - S) \cdot P(X = x)$$

On retrouve, dans cette formulation, l'expression analytique du stock résiduel moyen $I_p(S)$ et de la rupture moyenne $I_r(S)$:

$$C(S) = 500 \cdot S - 4 \cdot I_p(S) + 3500 \cdot I_r(S)$$

En utilisant la relation 135 de la page 670, on obtient :

$$C(S) = 500(S - 4[S - \bar{x} + I_r(S)]) + 3500 \cdot I_r(S) = 4 \cdot \bar{x} + 496 \cdot S + 3496 \cdot I_r(S)$$

Dans le cas général, on a¹ :

$$C(S) = r \cdot \bar{x} + (a - r) \cdot S + (c_r + a - r) \cdot I_r(S) \tag{relation 155}$$

On est donc en présence d'une fonction de coût qui ne dépend que de $I_r(S)$, comme dans le cas de l'étude du problème du pâtissier. Il est alors facile, en utilisant les résultats analytiques obtenus au § I-1.1, page 667, d'établir que :

$$C(S + 1) - C(S) = (a - r) + (c_r + a - r) \cdot [-P(X > S)]$$

d'où : S^* optimal si $P(X > S^*) < \frac{a - r}{c_r + a - r} < P(X > S^* - 1)$ et en posant $c_p = a - r$, on

retrouve les relations 140 à 142 (page 672) précédemment établies.

Si la variable aléatoire X suit une loi continue au lieu d'une loi discrète, on établit de même que la solution optimale est obtenue en utilisant la relation 148 de la page 676.

I-1.4.22b) Seconde formulation du problème

La formulation que l'on vient de présenter s'articule sur le stock initial S , mais on peut également en proposer une autre dont le «pivot» est la demande X . Cette seconde formulation n'ajoute rien sur le plan opérationnel, mais elle permet tout d'abord d'illustrer le fait que la genèse d'un même modèle peut procéder de démarches initiales différentes. D'autre part, elle conduit directement à une expression analytique du coût qui est identique, à une constante additive près, à celle introduite dès le début de ce chapitre et, de ce fait, illustre la généralité de ce type de formulation.

Le point de base du raisonnement est la constatation que, quelle que soit la politique d'approvisionnement retenue (S), une demande X conduit à une dépense

1. Cette relation 155 peut encore s'écrire $C(S) = a \cdot S - r \cdot I_p(S) + (c_r + a) \cdot I_r(S)$, en utilisant la relation 135 de la page 670.

Table des matières

Index thématique

minimale de $500X$ et, d'une manière générale, de aX . Cela dit, il faut, là encore, dissocier le cas de figure où la demande est inférieure à S de celui où elle lui est supérieure.

- Supposons tout d'abord que la demande X soit égale à 1, pour un stock initial S de 3 pièces de rechange. **MECANOR** doit financer en plus de la première unité (déjà prise en compte avec le coût de $500 \cdot X$), les $3 - 1 = 2$ dernières au coût unitaire de 500, duquel il convient de défalquer la valeur de récupération.
- Supposons maintenant qu'il y a rupture de stock de pièces détachées, parce que la demande X est supérieure à S ; prenons $X = 6$ pour fixer les idées. Pour satisfaire les $(6 - 3)$ dernières demandes, il faudra consentir à un supplément de dépense de $(6 - 3)3000 = 9000$ dollars, en plus des 500 dollars déjà pris en compte pour chacune d'entre elles au début du raisonnement. D'une manière générale, il faudra ajouter pour les $(X - S)$ dernières demandes un supplément de dépense de $c_r(X - S)$. Résumons, dans le tableau synoptique 186, ces différents cas de figure :

TABLEAU 186

Seconde formulation du problème du réapprovisionnement de pièces de rechange

Demande	Exemple numérique			Cas général		
	$X < 3$	$X = 3$	$X > 3$	$X < S$	$X = S$	$X > S$
Coût (minimal) d'acquisition des unités utilisées	$500X$	$500X$	$500X$	aX	aX	aX
Coût des unités inutilisées	$(500 - 4)(3 - X)$	0		$(a - r)(S - X)$	0	
Coût de rupture des unités manquantes		0	$3000(X - 3)$		0	$c_r(X - S)$

Table des matières

Index thématique

Il ne reste plus qu'à calculer l'espérance mathématique de la dépense totale $C(S)$: $C(S) = a \cdot \bar{x} + (a - r) \sum_{x < S} (S - x) \cdot P(X = x) + c_r \cdot \sum_{x > S} (x - S) \cdot P(X = x)$
 $C(S) = a \cdot \bar{x} + (a - r) \cdot I_p(S) + c_r \cdot I_r(S)$ et, en posant, là encore, $c_p = a - r$, on obtient :

$$C(S) = a \cdot \bar{x} + [c_p \cdot I_p(S) + c_r \cdot I_r(S)] \quad \text{relation 156}$$

On retrouve alors, à la constante additive $a \cdot \bar{x}$ près, la formulation «classique» du coût moyen de gestion, somme d'un coût moyen de possession et d'un coût moyen de rupture. En réalité, cette formulation a une interprétation différentielle puisque c_r est le coût unitaire supplémentaire qu'il faut supporter en cas de rupture de stock, tandis que c_p , qui s'analyse comme une valeur d'acquisition nette d'une valeur de récupération, s'interprète bien comme la dépense unitaire des unités acquises inutilement.

On peut ajouter qu'en remplaçant, dans la relation 156, \bar{x} par $S + I_r(S) - I_p(S)$, qui découle directement de l'application de la relation 135 de la page 670, on obtient bien la relation 155 :

$$C(S) = a \cdot [S + I_r(S) - I_p(S)] + [(a - r) \cdot I_p(S) + c_r \cdot I_r(S)]$$

$$C(S) = a \cdot S + [-a + (a - r)] \cdot I_p(S) + (c_r + a) \cdot I_r(S)$$

$$C(S) = a \cdot S - r \cdot I_p(S) + (c_r + a) \cdot I_r(S) \text{ CQFD}$$

I-1.4.2.3 Solution numérique du problème introductif

L'application de la [relation 142 de la page 672](#) à notre exemple numérique, en utilisant comme coût de possession $c_p = 500 - 4 = 496$ et comme coût de rupture $c_r = 3000$:

$$P(X < S^*) < \frac{3000}{3000 + 496} < P(X < S^* + 1)$$

La consultation de la table de Poisson, pour une moyenne égale à 2, donne:

$$P(X < 4) = 0,8571 < 0,8581 < P(X < 5) = 0,9473$$

L'approvisionnement optimal est donc de $S^* = 4$ unités. La rupture moyenne de stock est alors, en application de la relation 6:

$$I_r(S = 4) = 2P(X = 4) + (2 - 4)P(X > 4) = 2 \times 0,0902 - 2 \times (1 - 0,9473) = 0,0751$$

Le stock résiduel est, en application de la [relation 135 de la page 670](#):

$$I_p(S = 4) = 4 - 2 + 0,0751 = 2,0751$$

L'espérance mathématique du coût de gestion est alors, en application de la [relation 156 de la page 693](#) ($C(S) = a \cdot \bar{x} + [c_p \cdot I_p(S) + c_r \cdot I_r(S)]$):

$$C(S = 4) = 500 \times 2 + (496 \times 2,0751 + 3000 \times 0,0751) = 2254,69$$

On peut également chercher à compléter cette information de coût moyen par celle de la distribution de probabilités de la dépense effective pour **MECANOR**, pour un approvisionnement initial de $S = 4$ pièces (en reprenant la formulation du [tableau 185 de la page 692](#)):

TABLEAU 187

Établissement de la distribution de probabilité de la dépense totale

i	Nombre x_i de pièces à changer	Stock y_i résiduel	Rupture z_i	Dépense totale $d_i = 500 \cdot 4 - 4 \cdot y_i + 3500 \cdot z_i$	$P(D \geq d_i) = P(X \geq x_i)$
1	0	4	0	1984	100,00 %
2	1	3	0	1988	86,47 %
3	2	2	0	1992	59,40 %
4	3	1	0	1996	32,33 %
5	4	0	0	2000	14,29 %
6	5	0	1	5500	5,27 %
7	6	0	2	9000	1,66 %
8	7	0	3	12500	0,46 %
...

L'analyse synthétique des conséquences de cette politique optimale est reprise dans le [tableau 188](#) dont la structure diffère de celle des tableaux [183](#) et [184](#) ([page 689](#)) du fait qu'il n'y a pas de périodicité associée à la période calendaire de cette catégorie de problème.

TABLEAU 188
Analyse de la politique optimale d'approvisionnement de pièces détachées de
MECANO



Politique optimale d'approvisionnement	Axes (Mecanor)
Stock de début de période	4
Stock de sécurité	2
Demande moyenne satisfaite	1,925
Rupture moyenne de stock	0,075
Pourcentage de demandes non satisfaites	3,76%
Probabilité de rupture de stock	5,27%
Stock résiduel moyen	2,075
Coût moyen de gestion	2 254,69

I-1.4.3 Point mort en univers aléatoire et demandes non satisfaites perdues

Le modèle du point mort est l'un des plus connus de la gestion et la démarche qu'il sous-tend reste à la base de bon nombre d'analyses de rentabilité. Comme tout modèle, son adéquation au réel dépend du réalisme de ses hypothèses. Son amélioration passe donc par le remplacement d'hypothèses restrictives par d'autres hypothèses susceptibles de mieux rendre compte de la réalité. C'est ainsi¹ que :

- l'hypothèse du coût variable proportionnel et de charges fixes uniques a été abandonnée au profit de celle du coût variable non proportionnel et des charges fixes variant par palier,
- l'hypothèse de l'indépendance entre le prix et la quantité vendue a été remplacée par celle d'une liaison entre ces deux variables,
- l'hypothèse du produit unique a été abandonnée conduisant à une approche de point mort multi-produits,
- l'hypothèse d'un univers aléatoire a été substituée à celle d'un univers certain.

Le modèle du point mort en univers aléatoire, sous sa forme classique, suppose que la demande qui s'adresse à l'entreprise sur la période de référence retenue (l'année en général) est connue en probabilité pour le (ou les) produit(s) vendu(s). Par contre, une hypothèse implicite, limitant la portée du modèle, n'a pas été soulignée par les tenants de l'approche probabiliste. Implicitement, toute demande exprimée est satisfaite, ce qui implique l'une des trois conditions suivantes :

- une unité demandée est produite immédiatement là où s'exprime la demande,
- une unité demandée est prélevée immédiatement sur un stock existant situé là où s'exprime la demande,
- une unité demandée peut être livrée ultérieurement (demande non satisfaite différée).

1. Les implications d'une approche bayésienne du problème ont été largement traitées, notamment par Teller (1977, [411] et 1983, [412]).

Autrement dit, le cas des demandes non satisfaites perdues n'est pas envisagé et c'est là que le recours aux modèles de gestion des approvisionnements s'avère indispensable pour intégrer les conséquences des politiques d'approvisionnement dans le calcul du point mort. Pour illustrer ce propos, on s'appuiera ici sur le modèle de gestion calendaire d'articles non stockables, correspondant au cas de figure le plus simple. Dans un premier temps, on introduira un exemple concret pour illustrer l'intérêt du problème posé et, dans un second temps, on présentera les solutions analytiques et numériques au problème posé. Dans un dernier temps, on envisagera quelques extensions possibles.

I-1.4.3.1 Exemple introductif: le cas du restaurant universitaire d'Alphaville

Le Directeur du **RU** (restaurant universitaire) d'Alphaville a des problèmes liés à l'existence d'un déficit qu'il lui faut résorber. Pour ce faire, il envisage une dégradation du niveau de service (il lui semble acceptable de descendre éventuellement à 1% de demandes non satisfaites) et une hausse tarifaire qui, pour des raisons évidentes de commodité, doit être un multiple de 0,1 dollar lidurien. Par ailleurs, des actions « commerciales » ou de « production » (utilisation de surgelés conduisant à un coût variable de 9 dollars liduriens / repas) peuvent être envisagées.

Actuellement, chaque repas servi procure une recette unitaire $v = 10$ dollars liduriens, qui comprend une subvention de 2 dollars liduriens/repas servi. Le nombre S de repas préparés chaque jour est actuellement de 3 200 et le **RU** est ouvert le midi seulement, pendant $n = 250$ jours par an. On supposera, pour simplifier dans un premier temps, d'une part que les caractéristiques probabilistes de la fréquentation du **RU** sont les mêmes à longueur d'année, autrement dit que la demande aléatoire est statique (ce qui implique qu'elle ne connaît pas de cycle en cours de semaine) et, d'autre part, qu'il n'y a pas d'inflation. Plusieurs menus sont proposés à chaque repas, mais la clientèle étudiante se reporte sans problème sur un autre menu lorsque le menu initialement choisi n'est plus disponible. La nourriture non servie a une valeur moyenne de récupération de $r = 1$ dollar liduriens (fruit...), qui vient en déduction des achats de matières premières le lendemain.

TABLEAU 189

Compte de résultats simplifié du restaurant universitaire pour l'exercice 2003

CHARGES		PRODUITS	
Variation de stock	100000	Produit des ventes des tickets	5984000
Achat matières	4170000	Subvention (2\$/ticket)	1496000
Charges de structure y	3473000	<i>Résultat d'exploitation (perte de l'exercice)</i>	263000
	7743000		7743000

Le compte de résultats simplifié de l'exercice 2003 (tableau 189) amène les commentaires suivants.

- Les charges de structure y (= 3 473 000 dollars liduriens) correspondent principalement aux charges de personnel et aux amortissements; elles peuvent être considérées comme fixes si le nombre de repas préparés est compris entre 2 700 et 3 500 par jour. Le nombre annuel de repas préparés est de

- $3200 \times 250 = 800000$ / an. La valeur de nourriture récupérée d'un jour sur l'autre est estimée à 50000 dollars liduriens, pour cet exercice.
- Déterminons le coût variable de fabrication d'un repas. Pour fabriquer 800000 repas, le **RU** a dépensé 4170000 dollars liduriens en matières et prélevé 100000 dollars liduriens de matières sur ses stocks, mais il faut tenir compte également du fait qu'il a évité de dépenser 50000 dollars liduriens (une pomme non consommée un jour n'a pas à être rachetée pour le lendemain), somme qui dépend étroitement de la politique de service suivie (si l'on avait décidé de ne servir que 3000 repas, la récupération aurait été plus faible et les achats de matières proportionnellement plus importants); le coût de revient variable s'élève donc à :

$$a = (100000 + 4170000 + 50000) / 800000 = 5,40 \text{ dollars liduriens / repas}$$
 - L'analyse de la *demande effective* de repas (qui diffère de la demande *satisfaite*) permet¹ de considérer que l'on est en présence d'un processus aléatoire stationnaire, que l'on peut caractériser par la loi Normale $\mathcal{N}(3040 ; 215)$.

I-1.4.3.2 Solutions analytiques et numériques du problème posé

On peut commencer par noter que *le raisonnement du point mort en univers certain conduit à un diagnostic erroné de la situation*. En effet, avec une marge unitaire de $10 - 5,4 = 4,60$ dollars liduriens et des charges fixes de 3473000 dollars, le point mort s'établit à $3473000 / 4,6 = 755000$ repas par an, alors que la demande moyenne annuelle s'élève à $3040250 = 760000$, ce qui conduit normalement à une situation bénéficiaire et donc à prétendre que si le **RU** fait des pertes, c'est qu'il est mal géré. Cette double assertion, que bien des conseillers en gestion feraient leur, repose sur un modèle inapproprié. En effet, nous allons voir que ce *déficit est structurel*, même si la politique de niveau de service est remise en cause.

Pour vérifier que le déficit est «normal», il suffit de calculer l'espérance mathématique de ce déficit pour le niveau de service retenu. Le problème posé s'apparente à celui du marchand de journaux. Le coût de rupture est égal à la marge non réalisée du fait de la vente manquée d'un repas : $c_r = v - a = 10 - 5,4 = 4,6$ \$. Le coût de possession d'un repas non servi est égal à la valeur d'acquisition $a = 5,4$ \$ diminuée de la valeur de récupération $r = 1$ dollar lidurien : $c_p = 5,4 - 1 = 4,40$ dollars liduriens / repas. Pour le niveau de service imposé ($S = 3200$), la valeur de la variable centrée réduite correspondante est : $t_S = [3200 - 3040] / 215 = 0,744$, il est alors facile de calculer que $I_r(S)$, la rupture moyenne quotidienne de stock (c'est-à-dire le nombre quotidien moyen d'étudiants qui n'ont pu manger au **RU**), est égale à 28,37 et que $I_p(S)$, stock résiduel moyen d'une journée (c'est-à-dire le nombre moyen quotidien de repas non servis) est égal à 188,37. Ces informations se retrouvent dans le [tableau 191, page 699](#).

1. En pratique, les informations disponibles sont relatives à la demande satisfaite (repas servis) et non à la demande exprimée (= demande satisfaite + demande non satisfaite, cette dernière étant impossible à connaître sauf mise en place d'une collecte spécifique d'informations difficile à justifier). Le report de ces informations sur un papier gaussien-arithmétique permet de déterminer graphiquement les paramètres de la demande exprimée et l'usage de technique de régression linéaire, d'automatiser les calculs. Cette démarche est décrite dans Giard (1995, [182]), dans l'exercice (corrigé) n° 27, p. 412 et l'usage de la régression linéaire sur droite de Henry, pour déterminer la moyenne et l'écart-type de la loi Normale est décrit au chapitre VI, §I-3.3, p. 277 de cet ouvrage.

La marge par période $B(S)$ est (relation 152, page 685) : $B(S) = c_r \cdot \bar{x} - [c_p \cdot I_p(S) + c_r \cdot I_r(S)]$, ce qui donne ici : $4,6 \times 3040 - (4,4 \times 188,37 + 4,6 \times 28,37) = 13024,66$ dollars liduriens. Sur 250 jours ouvrables, l'activité du **RU** permet de dégager 3256164,66 dollars liduriens par an, ce qui ne couvre pas des charges fixes s'élevant à 3473000 dollars. On peut ajouter que l'espérance mathématique de déficit $(3473000 - 3256164,66) = 216835,24$ dollars est tout à fait comparable au déficit observé de 263000 dollars liduriens (ce déficit est une variable aléatoire d'espérance mathématique 216835,24 et dont on observe une réalisation : les 263000 dollars observés).

La généralisation analytique de ce raisonnement de **point mort en univers aléatoire** conduit à dire que le point mort est dépassé si :

$$n[c_r \cdot \bar{x} - \{c_p \cdot I_p(S) + c_r \cdot I_r(S)\}] > y \quad \text{relation 157}$$

où n est le nombre annuel de périodes calendaires et y les charges fixes annuelles.

Ce diagnostic effectué à l'aide d'un modèle de stock peut être également obtenu en partant des mêmes informations et en utilisant le langage comptable, ce qui est de nature à faciliter la communication. Il suffit tout simplement d'établir, en espérance mathématique, un compte de résultat caractérisant le régime de croisière. La valeur de nourriture récupérée au cours d'une année est égale à $250 \times 1 \times 188,37 = 47092$ dollars liduriens, et vient en déduction du coût variable de fabrication de $250 \times 3200 \times 5,4 = 4320000$ dollars liduriens, ce qui donne un achat annuel moyen de matière égal à 4272907 dollars liduriens. Pour calculer les recettes quotidiennes (subvention comprise), il faut multiplier par 10 dollars liduriens la demande quotidienne moyenne satisfaite qui peut se calculer, en vertu de la relation 136 de la page 670 :

- soit en retranchant à $S (= 3200)$ le stock résiduel moyen $I_p(S) (= 188,37)$,
- soit en retranchant à la demande moyenne $\bar{x} (= 3040)$, la rupture moyenne $I_r(S) (= 28,37)$,

ce qui donne 3011,63 et donc une recette quotidienne de 30116,3 et une recette annuelle 250 fois plus forte, égale à 7529072 dollars liduriens. On en tire l'espérance mathématique du compte de résultat simplifié associé du « régime de croisière » (tableau 190).

L'ensemble des implications physiques et financières figure dans le tableau 191 ; elles seront reprises dans le tableau 193 de la page 705, à des fins de comparaison avec d'autres politiques d'approvisionnement.

TABLEAU 190
Espérance mathématique du compte de résultats simplifié du restaurant universitaire en régime stationnaire

CHARGES		PRODUITS	
Achat matières	4272907	Recettes (y compris subventions)	7529072
Frais fixes	3473000	Résultat comptable (déficit)	216835
	7745907		7745907

TABLEAU 191
 Comparaison des politiques d'approvisionnement (optimale ou non) du restaurant universitaire d'alphaville



Conséquences physiques de la politique d'approvisionnement pour "RU d'Alphaville"	Politique optimale		Politique non optimale (S imposé)	
	par période de révision calendaire	par an (sur 250 périodes calendaires)	par période de révision calendaire	par an (sur 250 périodes calendaires)
Stock S de début de période	3 045	-	3 200	-
Stock de sécurité	5	-	160	-
Demande moyenne satisfaite	2 956,949	739 237,336	3 011,629	752 907,184
Rupture moyenne de stock	83,051	20 762,664	28,371	7 092,816
Pourcentage de demandes non satisfaites	2,73%	2,73%	0,93%	0,93%
Probabilité de rupture par période de révision calendaire	48,98%	-	22,77%	-
Nombre moyen annuel de périodes en rupture de stock	-	122,449	-	56,920
Stock résiduel moyen	88,051	22 012,664	188,371	47 092,816
Conséquences financières de la politique d'approvisionnement				
Dépense d'acquisition nette moyenne	16 354,95	4088 737,34	17 091,63	4272 907,18
Coût de commande / Charges fixes calendaires	13 892,00	3473 000,00	13 892,00	3473 000,00
Coût de rupture	382,03	95 508,25	130,51	32 626,95
Coût de possession	387,42	96 855,72	828,83	207 208,39
Indicateur de coût moyen	14 661,46	3665 363,97	14 851,34	3712 835,34
Marge nette moyenne	- 677,46	-169 363,97	- 867,34	-216 835,34

Table des matières

Index thématique

La généralisation de cette démarche, pour aboutir au compte de résultat analytique (avant impôt), valable quel que soit le choix retenu pour la variable de commande S est synthétisée dans le [tableau 192 de la page 700](#).

On peut pousser plus loin l'analyse du problème et se demander s'il est possible d'éviter une hausse tarifaire en modifiant le niveau de service. Pour ce faire, il suffit de rechercher la politique optimale (du point de vue du gérant du **RU**) et d'examiner si, pour ce niveau de service optimal, l'équilibre est atteint ou non. L'application de la [relation 148 de la page 676](#), déterminant la politique optimale, conduit à une mise en fabrication quotidienne de 3045 repas (avec correction de continuité) et à un déficit moyen annuel de 169364 (voir [tableau 193 de la page 705](#)), ce qui constitue un butoir en dessous duquel il est impossible de descendre (en espérance mathématique). Deux remarques complémentaires doivent être faites:

TABLEAU 192
Généralisation du raisonnement du point mort en univers aléatoire

	CHARGES	PRODUITS
Si déficit	Achats matières $n.[a.S - r.I_p(S)]$	Recettes (y compris subventions) $n.v.[S - I_p(S)]$
	Charges fixes y	Résultat d'exploitation (<i>déficit</i>) $y - n.[(v - a).S + (r - v).I_p(S)]$
	Total $y + n.[a.S - r.I_p(S)]$	Total $y + n.[a.S - r.I_p(S)]$
	CHARGES	PRODUITS
Si bénéfice	Achats matières $n.[a.S - r.I_p(S)]$	Recettes (y compris subventions) $n.v.[S - I_p(S)]$
	Charges fixes y	
	Résultat net d'exploitation $n[(v - a).S + (r - v).I_p(S)] - y$	
	Total $n.v.[S - I_p(S)]$	Total $n.v.[S - I_p(S)]$

- tout d'abord, les résultats analytiques permettent d'obtenir immédiatement les conséquences de n'importe quelle politique d'approvisionnement du **RU**, sans faire appel aux méthodes de Monte Carlo pour simuler la réalité,
- ensuite, la politique minimisant le déficit ($S = 3045$) est inacceptable, car elle suppose que les usagers puissent accepter sans réagir une dégradation sensible du service rendu, cette politique conduisant à une probabilité de 49% pour qu'il y ait une rupture de stock (= demande de repas supérieure aux 3045 disponibles) et à un pourcentage de demandes non satisfaites égal à 2,7% et donc nettement supérieur au 1% que l'intendant souhaite ne pas dépasser.

La recherche d'une solution numérique au problème de la hausse peut s'effectuer par tâtonnement pour une valeur de S donnée, ce qui ne pose aucune difficulté pratique avec l'aide du tableur ou du logiciel d'accompagnement. Mais une réflexion analytique complémentaire est des plus utiles. La hausse tarifaire modifiant le coût de rupture c_r , il est préférable d'écrire ce dernier comme la différence entre la recette v et le coût d'acquisition a ($\rightarrow c_r = v - a$). La contrainte d'équilibre précédemment trouvée s'écrit alors (en passant à l'égalité):

$$z = n\{(v - a) \cdot \bar{x} - [c_p \cdot I_p(S) + (v - a) \cdot I_r(S)]\} - y = 0$$

Cette équation comporte deux inconnues (les variables de commande v et S), ce qui conduit à une indétermination. Celle-ci est levée en assignant une valeur à l'une des variables et en recherchant ensuite la (ou les) valeur(s) de l'autre variable qui rend(ent) nulle la fonction z ¹. Cette dernière, notons-le, s'interprète comme le résultat (positif ou négatif) de l'exercice.

Dans le problème posé, on retiendra la contrainte du 1% de demandes non satisfaites pour assigner à S une valeur, laquelle est égale (voir [tableau 193, page 705](#)) à 3191, tandis que la rupture moyenne s'élève à 30,48 (et non exactement 30,4 du

1. Pour une valeur donnée de v et si z peut être nul, on a normalement deux valeurs possibles de S (et exceptionnellement, une seule), ce qui se comprend fort bien si l'on remarque que z a une représentation graphique de type parabolique; par contre, pour une valeur donnée de S , il n'existe qu'une valeur positive v qui rend nul z (qui est alors de la forme $\alpha_v + \beta$).

fait de l'utilisation de la correction de continuité) et le stock résiduel moyen est de 181,48. On a alors :

$$250 [(v - 5,4) \times 3040 - (4,4 \times 181,4 + (v - 5,4) \times 30,48)] - 3 \times 473000 = 0$$

D'où l'on tire $v = 10,28$ dollars liduriens, que l'on arrondit à 10,30 dollars pour satisfaire la contrainte d'une hausse qui soit un multiple de 0,1 dollar. On peut indiquer que l'application de cette hausse conduit à un résultat bénéficiaire d'environ 14000 dollars liduriens (comme on peut le vérifier en remplaçant v par 10,3 dans la fonction z ; voir également le [tableau 193 de la page 705](#)).

I-1.4.3.3 Quelques extensions possibles

Trois remarques complémentaires importantes peuvent être faites. La première est de nature théorique et concerne le lien entre l'approche développée ici et l'approche classique du point mort probabiliste. La deuxième est d'ordre opérationnel et vise le traitement d'une demande aléatoire non stationnaire. La troisième est liée au cas étudié et s'attaque à des implications stratégiques du point mort, avec demandes non satisfaites perdues.

I-1.4.33a) Lien entre les approches probabilistes avec et sans demandes non satisfaites perdues

En travaillant en espérance mathématique, comme nous l'avons fait ici, l'éclairage probabiliste du problème posé s'en trouve estompé, dans la mesure où la solution proposée conduit, comme en univers certain d'ailleurs, à répondre par l'affirmative ou par la négative à la question de savoir si les conditions générales d'exploitation assurent la rentabilité de l'activité envisagée. Il est cependant évident qu'une réponse tranchée ne peut être apportée si l'on travaille en univers aléatoire, puisque la marge réalisée annuellement est une variable aléatoire, que les demandes non satisfaites soient différées ou non. Le calcul de la probabilité de dépasser le point mort, qui a fait tout l'intérêt de l'approche probabiliste, se complique singulièrement avec la prise en compte de politiques d'approvisionnement pouvant conduire à des demandes non satisfaites perdues.

Dans notre problème, la variable aléatoire «marge annuelle» Z est la somme des variables aléatoires W_t caractérisant chacune des 250 «marges quotidiennes», mais comme ces dernières ont été considérées comme indépendantes et caractérisées par la même distribution de probabilités (hypothèse d'une demande aléatoire statique), se pose un problème de détermination de la loi suivie par la somme de 250 variables aléatoires identiques (problème qualifié de «convolution» par les statisticiens). Ce type de problème a une solution analytique pour certaines distributions de probabilités : il est bien connu, par exemple, qu'une somme de lois de Poisson suit elle-même une loi de Poisson et qu'une somme de lois normales suit elle-même une loi Normale (dans les deux cas, si l'hypothèse d'indépendance est vérifiée). L'ennui c'est qu'ici aucun résultat analytique ne peut être invoqué, puisque la marge quotidienne W_t dépend linéairement de la demande satisfaite Y_t (avec, par définition, $Y_t \leq S$). Avec une hausse tarifaire de 0,3 dollar et une valeur de récupération portant sur $S - Y_t$ repas, on a en effet :

$$W_t = 10,3 \cdot Y_t - 5,4 \cdot S + 1 \cdot (S - Y_t) = 9,3 \cdot Y_t - 4,4 \cdot S$$

et en général :

$$W_t = (v - r) \cdot Y_t - (a - r) \cdot S$$

où Y_t , et donc W_t , suivent « presque » une loi Normale tronquée ($Y_t = X_t$ si $X_t < S$; sinon $Y_t = S$). À défaut d'une solution analytique, qui présenterait l'intérêt d'être applicable quel que soit le nombre de variables aléatoires « élémentaires » cumulées, on peut toujours faire appel au théorème de la limite centrale, puisque le nombre de ces variables aléatoires, indépendantes et de même type, excède la trentaine. On peut alors écrire :

$$Z = \sum_{t=1}^{250} W_t = \sum_{t=1}^{250} (9,3 \cdot Y_t - 4,4 \cdot S)$$

et compte tenu des résultats classiques portant sur les transformations linéaires de variables aléatoires: $V(W_t) = 9,3^2 V(Y_t)$ et $E(W_t) = 9,3E(Y_t) - 4,4S$.

La demande quotidienne moyenne satisfaite $E(Y_t)$ étant égale à 3009,52 pour le niveau de service retenu ($S = 3191$ pour avoir 1% de demandes non satisfaites, d'où un stock résiduel moyen de 181,48). On en déduit que la marge quotidienne moyenne se monte à $9,3 \times 3009,52 - 4,4 \times 3191 = 13948,16$ d'où un résultat d'exploitation annuel de $250 \times 13948,16 = 3487039$ (se reporter au [tableau 193 de la page 705](#) pour connaître toutes les implications de ce choix).

On peut généraliser analytiquement ce que l'on vient de trouver, compte tenu de la définition de la variable Y_t et, quelle que soit la valeur retenue pour la variable de commande S :

$$W_t = v \cdot Y_t - a \cdot S + r(S - Y_t) = (v - r)Y_t - (a - r)S$$

La variance de la marge sur coût variable quotidienne W_t peut être calculée sans trop de problèmes, dans la mesure où la demande satisfaite Y_t est elle-même fonction de la demande effective X_t qui suit une loi Normale; on démontre¹, en effet, que l'on peut dans ce cas utiliser la relation suivante:

1. Note de la page 703. Si $f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-t^2/2}$ est la densité de probabilité de la variable centrée réduite t suivant une

loi Normale $\mathcal{N}(0,1)$ et connaissant le résultat classique $\int_{-\infty}^{+\infty} t^2 \cdot f(t) dt = +1$, ainsi que le résultat suivant, beaucoup moins « classique » (voir, par exemple, Hadley & Whitin, 1966, [212], p. 444, relation 3) :

$\int_{t_S}^{+\infty} t^2 \cdot f(t) dt = P(T > t_S) + t_S f(t_S)$. On peut alors écrire: $\int_{-\infty}^{t_S} t^2 \cdot f(t) dt = 1 - [P(T > t_S) + t_S f(t_S)] = P(T < t_S) - t_S f(t_S)$. Par

ailleurs, nous savons que si la variable aléatoire X suit la loi $\mathcal{N}(\bar{x}; \sigma)$, sa densité de probabilité $g(x)$ est alors:

$g(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\left(\frac{x-\bar{x}}{\sigma}\right)^2/2} = \frac{1}{\sigma} f(t)$. avec $t = \left(\frac{x-\bar{x}}{\sigma}\right)$ on en déduit: $x = \bar{x} + t\sigma$, $g(x) = \sigma f(t)$, $dx = \sigma dt$. Alors :

$$\int_{-\infty}^{t_S} t^2 \cdot f(t) dt = \int_{-\infty}^S \left(\frac{x-\bar{x}}{\sigma}\right)^2 \cdot \sigma_X \cdot f(x) \cdot \left(\frac{dx}{\sigma}\right) \Rightarrow \int_{-\infty}^S (x-\bar{x})^2 \cdot g(x) \cdot dx = \sigma^2 \int_{-\infty}^{t_S} t^2 \cdot f(t) dt = \sigma^2 [P(T > t_S) - t_S f(t_S)].$$

Par ailleurs, la variable aléatoire Y , « demande satisfaite » est une fonction de la variable aléatoire X , « demande exprimée », puisque $y = x$ si $x > S$ et $y = S$ dans le cas contraire. Désignons par $y = h(x)$ cette fonction liant les variables X et Y . On peut remarquer que cette dernière fonction n'est pas dérivable pour tout x (l'exception étant $X = S$), on ne peut donc utiliser les résultats classiques des fonctions inverses. Mais, étant donné que très souvent des demandes de nature discrète sont « modélisables », par des modèles continus, on peut alors écrire, pour une variation discrète Δx (valant 1 dans notre exemple): $P(X = x) = P\left(X > x + \frac{\Delta x}{2}\right) - P\left(X < x - \frac{\Delta x}{2}\right) \approx f(x) \cdot \Delta x$. Sachant que :

$\sum_{-\infty}^{+\infty} (y - \bar{y})^2 P(Y = y) = \sum_{-\infty}^{+\infty} (y - \bar{x})^2 P(Y = y) = V(Y)$, on peut écrire: $V(Y) = \sum_{-\infty}^S (x - \bar{x})^2 P(X = x) + (S - \bar{x})^2 P(X > S)$. En posant $\sum_{-\infty}^S (x - \bar{x})^2 P(X = x) = \sum_{-\infty}^S (x - \bar{x})^2 \cdot f(x) \cdot \Delta x$, on a: $V(Y) = \sigma_X^2 \{P(T < t_S) - t_S f(t_S)\} + (S - \bar{x})^2 P(X > S)$, en négligeant la correction de continuité.

$$V(Y_t) = \sigma^2[P(X < S) - t_s \cdot f(t_s)] + (S - \bar{x})^2 P(X > S) \quad \text{relation 158}$$

Dans notre exemple où la probabilité de rupture est le critère retenu (1 % de demandes non satisfaites conduisant à $S = 3191$), on a $P(X_t > 3191) = 24,05 \%$ et une valeur de variable centrée réduite de 0,70233 (valeurs calculées en faisant appel à la correction de continuité), on trouve alors :

$$V(Y_t) = 215^2 \left[0,7595 - \frac{0,70233}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-0,70233^2/2} \right] + 0,2405(3191 - 3040)^2 = 30470$$

La variance de la marge quotidienne sur coût variable est alors $V(W_t) = 9,3^2 V(Y_t) = 2635385$ et celle de la marge annuelle sur coût variable est : $V(Z) = 250 \times 2635385 = 658846268$, d'où un écart-type de 25668. L'application du théorème de la limite centrale nous permet donc de dire que la marge annuelle sur coût variable Z suit une loi Normale de moyenne 3487032 et d'écart-type 25668. Nous pouvons alors calculer la probabilité d'un résultat net d'exploitation positif :

$$P(Z > 3473000) = P\left(T > \frac{3473000 - 3487039}{25668}\right) = P(T > -0,547) \cong 71 \%$$

Il n'est donc pas certain de retrouver un équilibre avec cette proposition de hausse tarifaire. De plus, pour «éponger» la perte de l'exercice passé et être presque certain d'un retour à l'équilibre, c'est à une hausse de 0,8 dollar qu'il faut procéder (voir [tableau 193, page 705](#)).

Table des matières

I-1.4.33b) Introduction de l'hypothèse d'une demande aléatoire non stationnaire

Dans la réalité, les caractéristiques de la demande aléatoire de repas ne sont pas stables dans le temps : les caractéristiques de la fréquentation du restaurant universitaire varient aussi bien au cours de la semaine (existence d'un cycle hebdomadaire) qu'au cours de l'année (saisonnalité).

Index thématique

La prise en compte de cette non-stationnarité pose, sur le plan pratique de délicats problèmes d'inférence statistique, mais n'amène guère de complication sur le plan de l'analyse du point mort en univers aléatoire avec prise en compte de demandes non satisfaites perdues.

En effet, la marge annuelle étant la somme des marges quotidiennes, il suffit d'utiliser les propriétés classiques des sommes de variables aléatoires pour obtenir les caractéristiques de la marge annuelle. En outre, la même logique d'approvisionnement (politique optimale ou même niveau de service imposé) peut, sans problème, être appliquée systématiquement à chaque ensemble homogène de périodes.

Illustrons ce propos d'un exemple numérique, en supposant qu'une étude statistique ait permis d'établir que la demande quotidienne effective X_{1t} s'adressant à notre restaurant universitaire, se caractérise les lundis, mardis et mercredis, par une loi Normale de moyenne 3180 et d'écart-type 150, tandis que celle des deux derniers jours de la semaine X_{2t} se caractérise par une loi Normale de moyenne 2900 et d'écart-type 240. Si l'on souhaite calculer la marge annuelle découlant de l'adoption d'une hausse tarifaire unitaire de 0,3 dollar lidurien et d'une politique systématique de niveau de service de 1 % de demandes non satisfaites, on est alors conduit ([tableau 193, page 705](#)) à mettre en fabrication $S_1 = 3248$ repas en début

de semaine (d'où une demande quotidienne moyenne satisfaite de 3 148,27) et $S_2 = 3091$ repas en fin de semaine (d'où une demande quotidienne moyenne satisfaite de 2 871,04). L'espérance mathématique de la marge réalisée quotidiennement les trois premiers jours de la semaine s'élève alors à 14 987,76 et celle des deux derniers jours à 13 100,31. Comme il y a dans l'année 150 jours ouvrables du premier type (lundi à mercredi) et 100 du second type, on en déduit que l'espérance mathématique de la marge annuelle s'élève à : $150 \times 14\,987,74 + 100 \times 13\,100,31 = 3\,558\,195$ dollars liduriens.

De la même façon, on peut calculer la probabilité que le point mort soit dépassé. La variance de la demande quotidienne satisfaite des jours ouvrables du premier type s'élève à : $V(Y_{1t}) = 13\,037$ et celle du second type à $V(Y_{2t}) = 39\,789$. Comme précédemment, la variance des marges quotidiennes s'en déduit par une multiplication par $9,3^2(100 \times 11\,789 + 150 \times 43\,743) = 513\,275\,634$, d'où un écart-type de 22 656. Il est alors facile de vérifier qu'il est à peu près certain (probabilité égale à 99,992 %, pour une valeur de variable centrée réduite égale à $-3,76$) que le point mort sera dépassé, l'espérance mathématique du résultat net d'exploitation étant de $3\,558\,195 - 3\,473\,000 = 85\,195$ (voir le [tableau 193](#)).

I-1.4.33c) Quelques implications stratégiques du point mort en univers aléatoire avec demandes non satisfaites perdues

L'observation suivant laquelle, si l'on s'était trouvé en univers certain et non en univers aléatoire, notre restaurant universitaire se serait trouvé en situation bénéficiaire, conduit à faire observer que la dispersion plus ou moins forte de la demande fera que l'on s'écartera moins ou plus d'une situation bénéficiaire (à politique de niveau de service donnée). Puisque la dispersion de la demande est génératrice de gaspillage et d'insatisfaction, on peut envisager des politiques visant à réduire cette dispersion.

Dans cette perspective, des actions tarifaires pourront jouer sur la demande en la «fidélisant». On pourra, par exemple, adopter une politique tarifaire discriminatoire, l'utilisateur régulier payant moins cher que l'utilisateur occasionnel (carte d'abonnement hebdomadaire personnalisée ou non, par exemple). Dans d'autres domaines que celui envisagé ici (service), une politique de rabais sur quantité (en particulier par la technique des lots) aura le même effet.

Cela dit, les implications stratégiques de cette observation ne sont pas seulement d'ordre commercial. Il faut remarquer, en effet, que le gaspillage est fondamentalement lié à l'inadéquation de l'offre à la demande et qu'il y a peut-être lieu d'envisager de limiter ce gaspillage en cherchant une meilleure adéquation de l'offre à la demande. Le service de la Production est alors interpellé et une remise en cause stratégique peut s'avérer également nécessaire dans ce domaine et conduire à un rattrapage total de la demande qui est **perdue pour le système productif normal**, en le complétant par un système productif additionnel, plus onéreux mais capable de répondre aux pointes de demande.

Dans notre exemple, on peut imaginer d'utiliser des plats surgelés, mais il serait stupide de ne faire appel qu'à eux, compte tenu d'un coût de production plus important (par exemple, 9 dollars liduriens pour un repas surgelé contre 5,40 dollars pour un repas «classique»). Se pose alors un problème de structure optimale de production, à savoir quel nombre S de repas «classiques» mettre en

TABLEAU 193
 Point mort en univers aléatoire
 – tarification d'équilibre et demandes aléatoires non stationnaires –

Problème étudié		Demande aléatoire stationnaire détermination d'une politique de tarification d'équilibre					Demandes aléatoires non stationnaires		
Distribution statistique de la demande		$\mathcal{N}(3040; 215)$					$\mathcal{N}(3180; 150)$	$\mathcal{N}(2900; 240)$	
Revenu unitaire		10 \$		10,30 \$	10,80 \$		10,30 \$	10,30 \$	
Politique retenue		S = 3200	optimale	$\beta(S) = 1\%$	$\beta(S) = 1\%$	$\beta(S) = 1\%$	$\beta(S) = 1\%$	$\beta(S) = 1\%$	
INDICATEURS JOURNALIERS	PHYSIQUES	Production quotidienne: S	3200	3045	3191		3248	3091	
		Stock de sécurité: $S - \bar{x}$	160	5	151		68	191	
		Espérance mathématique de la demande satisfaite: $\bar{x} - I_r(S)$	3011,63	2956,95	3009,52		3148,28	2871,04	
		Espérance mathématique de la demande non satisfaite: $I_r(S)$	28,37	83,05	30,48		31,72	28,96	
		% de demandes satisfaites: $\beta(S) = I_r(S)/\bar{x}$	0,93 %	2,73 %	1 %		1 %	1 %	
		Probabilité de rupture de stock: $P(X > S)$	22,77%	48,98%	24,05%		32,40%	21,25%	
	FINANCIERS	Espérance mathématique du stock résiduel: $I_p(S)$	188,37	88,05	181,48		99,72	219,96	
		Espérance mathématique des coûts variables: $aS - rI_p(S)$	17091,63	16354,95	17049,92		17439,48	16471,44	
		Espérance mathématique des coûts de rupture: $c_r I_r(S)$	130,51	382,03	140,20	149,34	164,58	155,45	141,88
		Espérance mathématique des coûts de possession: $c_p I_p(S)$	828,83	387,42	798,51		438,79	967,81	
		Espérance mathématique de l'indicateur des coûts de gestion: $C(S) = c_p I_p(S) + c_r I_r(S)$	959,34	769,46	938,71	947,85	963,08	594,24	1109,69
		Espérance mathématique de la marge sur coût variable: $B(S) = c_r \bar{x} - C(S)$	13024,66	13214,54	13045,30	13948,16	15492,92	14987,76	13100,31
	INDICATEURS ANNUELS	PHYSIQUES	Nombre annuel de périodes calendaires: n	250	250	250	250	250	150
Espérance mathématique du nombre de jours en rupture de stock: n. $P(X > S)$			56,92	122,45	60,13		48,59	21,25	
FINANCIERS		Espérance mathématique des dépenses annuelles variables: $n(aS - rI_p(S))$	4272907	4088737	4262481		2615921	1647144	
		Espérance mathématique des coûts annuels de possession: $nc_p I_p(S)$	207208	96856	199626		65818	96781	
		Espérance mathématique des coûts annuels de rupture: $nc_r I_r(S)$	32627	95508	35050	37335	41145	23317	14188
		Espérance math. de l'indicateur de coût annuel de gestion: $nC(S)$	239835	192364	234675	236961	240771	89136	110969
		Espérance mathématique de la marge annuelle sur coûts variables: $nB(S)$	3256165	3303636	3261325	3487039	3863229	2248164	1310031
		Coûts fixes annuels: y	3473000	3473000	3473000	3473000	3473000	3473000	
		Espérance mathématique du résultat d'exploitation: $nB(S) - y$	-216835	-169364	-211675	14039	390224	2248164 + 1310031 - 3473000 = 85195	
Espérance mathématique de la valeur des ventes perdues: $nV_r(S)$	70928	207626	76195	78480	82290	49015 + 29825 = 78840			

Table des matières

Index thématique

fabrication chaque jour pour minimiser le coût de production (ou, ce qui revient au même, pour maximiser la marge), sachant que toutes les demandes excédentaires seront satisfaites par des repas surgelés.

La résolution de ce problème de détermination d'une offre optimale (S) passe encore par l'utilisation d'une légère variante du modèle de gestion des stocks d'articles non stockables. La formulation du problème posé, pour la période calendaire de base, est la suivante :

- la demande X étant satisfaite en totalité par l'une des deux formes de restauration, il s'ensuit que :
 - la recette est vX (ce qui donne ici : $10X$),
 - l'espérance mathématique de la recette est $v\bar{x}$ (ce qui donne ici : $10\bar{x}$);
- la mise en fabrication de S repas, au coût unitaire a , conduit à une dépense certaine de aS (ce qui donne ici : $5,4S$);
- si la demande est inférieure à la production initiale S , il faut tenir compte de la valeur de récupération des repas non servis qui ont une valeur de récupération unitaire v ; il s'ensuit que :
 - la valeur de récupération de $(S - X)$ repas non servis (pour $X \leq S$) est $r(S - X)$ (ce qui donne ici : $1 \cdot X$),
 - l'espérance mathématique de la valeur de récupération des repas non servis est $rI_p(S)$ (ce qui donne ici : $1 \cdot I_p(S)$);
- si la demande est supérieure à la production initiale S , il faut tenir compte du coût de production des repas surgelés, d'un coût unitaire b ; il s'ensuit que
 - le coût de production de $(X - S)$ repas surgelés (pour $X > S$) est $b(X - S)$ (ce qui donne ici : $9(X - S)$),
 - l'espérance mathématique du coût de fabrication des surgelés est $bI_r(S)$ (ce qui donne ici : $9I_r(S)$).

Ceci conduit à la marge suivante :

$$\begin{aligned} &vX - aS + r(S - X), \text{ pour } X \leq S \\ &vX - aS - b(X - S), \text{ pour } X > S \end{aligned}$$

d'où l'on tire l'espérance mathématique de marge : $v\bar{x} - aS + rI_p(S) - bI_r(S)$, que l'on peut encore écrire, en vertu de la [relation 135 de la page 670](#) :

$$\begin{aligned} &(v - a)\bar{x} + a\bar{x} - aS + r\{S - \bar{x} + I_r(S)\} - bI_r(S) \\ &(v - a)\bar{x} - [(a - r)(S - \bar{x}) + (b - r)I_r(S)] \end{aligned} \quad \text{relation 159}$$

Cette [relation 159](#) ressemble à la [relation 154 de la page 686](#) (qui justifiait la généralité de la [relation 152 de la page 685](#)), à une légère différence près. Dans la fonction de coût entre crochets, $(b - r)$ remplace $(v - r)$, ce qui conduit à avoir $b - r = (b - a) + (a - r) = c_r + c_p$ et revient à utiliser comme coût de rupture le supplément de coût engendré par la satisfaction d'une demande par le système de secours (surgelé) et non par le système de production normal. La détermination de la politique optimale reste inchangée ([relation 148, page 676](#)), avec ici $c_r = b - a$, ce qui

$$\text{donne } P(X > S^*) = \frac{(5,4 - 1)}{(9 - 5,4) + (5,4 - 1)} = 55\%.$$

On peut ajouter que le fait que, avec ce système productif, la demande soit maintenant satisfaite en totalité, n'exclut nullement l'appel aux actions commer-

TABLEAU 194

Analyse de la politique optimale du restaurant universitaire d'alphaville en cas de rattrapage des demandes perdues.

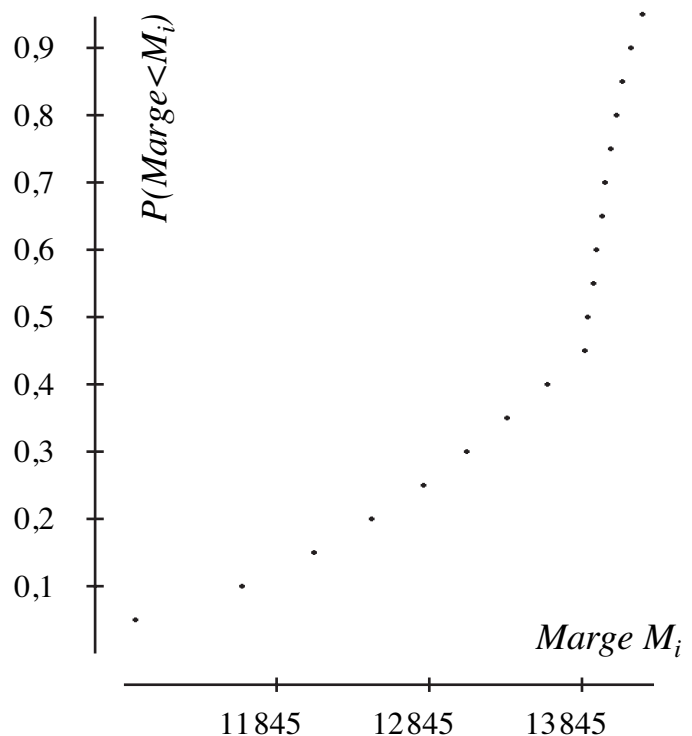


Conséquences physiques de la politique d'approvisionnement pour "RU d'Alphaville"	Politique optimale	
	par période de révision calendaire	par an (sur 250 périodes calendaires)
Stock S de début de période	3 012	-
Stock de sécurité	- 28	-
Demande moyenne satisfaite	2 939,777	734 944,184
Rupture moyenne de stock	100,223	25 055,816
Pourcentage de demandes non satisfaites	3,30%	3,30%
Probabilité de rupture par période de révision calendaire	55,09%	-
Nombre moyen annuel de périodes en rupture de stock	-	137,722
Stock résiduel moyen	72,223	18 055,816
Conséquences financières de la politique d'approvisionnement		
Dépense d'acquisition nette moyenne	17 094,59	4273 646,53
Coût de commande / Charges fixes calendaires	13 892,00	3473 000,00
Coût de rupture	360,80	90 200,94
Coût de possession	317,78	79 445,59
Indicateur de coût moyen	14 570,59	3642 646,53
Marge nette moyenne	- 586,59	-146 646,53

Table des matières

Index thématique

$P(X < x_i) = P(\text{Marge} \leq M_i)$	x_i	Marge M_i associé à x_i
5%	2686	10917
10%	2764	11619
15%	2817	12096
20%	2859	12474
25%	2895	12798
30%	2927	13086
35%	2957	13356
40%	2986	13617
45%	3013	13860
50%	3040	13887
55%	3067	13914
60%	3094	13941
65%	3123	13970
70%	3153	14000
75%	3185	14032
80%	3221	14068
85%	3263	14110
90%	3316	14163
95%	3394	14241



cialées envisagées précédemment, car toute réduction de la dispersion de la demande se traduit automatiquement par une diminution du coût de production.

I-2 Gestion calendaire des stocks d'articles stockables à délai d'obtention nul

Les articles stockables sont de loin les plus nombreux, aussi cette section revêt-elle une importance toute particulière. Dans un § I-2.1, page 708, on présentera les caractéristiques du problème, puis on en donnera la solution exacte dans un § I-2.2, page 712. Cette solution est cependant délicate à mettre en œuvre, aussi examinerons-nous dans un § I-2.3, page 717, une solution approchée qui est tout à fait satisfaisante tant que la probabilité de rupture de stock n'est pas trop élevée. Rappelons, avant d'aborder ces différents points que, lorsqu'une gestion de type calendaire est suivie pour des articles stockables, le niveau S du stock que l'on cherche périodiquement à « retrouver » est appelé **niveau de rechargement** (et parfois **niveau de rétablissement**) et non stock initial (comme dans le § I-1). En outre, la commande passée pour un approvisionnement en début de période n'est plus fixe, comme dans le cas d'articles non stockables, mais variable. Si le stock résiduel est positif, on commandera la différence entre le niveau de rechargement S et ce stock résiduel. Mais, si le stock résiduel est nul parce que la demande de la période qui vient de s'écouler a été supérieure à S , on commandera alors S unités si les demandes non satisfaites sont perdues et un nombre S augmenté du nombre de demandes non satisfaites si celles-ci sont différées. Dans tous les cas de figure, on a retrouvé comme stock de début de période le niveau de rechargement S , parce que le délai d'obtention est nul.

I-2.1 Les données du problème

On partira d'un exemple pour mettre en évidence les hypothèses que l'on est amené à faire dans le processus de modélisation au terme duquel un niveau de rechargement optimal S^* sera défini.

I-2.1.1 Exemple introductif: le problème du remplacement des ampoules d'éclairage

La demande moyenne hebdomadaire d'ampoules de 60 watts de **LUMINOR**, magasin spécialisé dans l'éclairage, est de 300 ampoules et l'on peut raisonnablement estimer que la demande hebdomadaire suit une loi Normale d'écart-type 20. Le réapprovisionnement se fait en début de semaine chez le grossiste de la ville. Le coût de possession se limite au coût de détention, avec un taux de 20% pour calculer le taux d'opportunité. Les ampoules ordinaires sont achetées 3 dollars liduriens et revendues 3,50 dollars (valeurs hors TVA). Le coût annuel de possession d'une ampoule est donc $3 \times 0,2 = 0,6$ dollar, ce qui conduit à un coût hebdomadaire de possession $c_p = 0,6 / 52 = 0,0115$ dollar. Le coût de rupture que l'on retiendra est égal à la marge non réalisée en ne vendant pas une ampoule, c'est-à-dire $c_r = 3,5 - 3 = 0,5$ dollar. Le problème qui se pose est la détermination du niveau de rechargement optimal S , que **LUMINOR** doit chercher à atteindre au début de chaque semaine. Le coût de gestion hebdomadaire est toujours $C(S) = c_p I_p(S) + c_r I_r(S)$, mais si la rupture moyenne reste celle utilisée jusqu'ici (cf. relations 138 et 139, page 671, et relations 146 et 147, page 675), il n'en est plus de même pour le stock moyen possédé $I_p(S)$, qui n'est plus le stock résiduel

moyen. Ceci implique en particulier que la [relation 135 de la page 670](#), liant $I_p(S)$ et $I_r(S)$ ($I_p(S) = S - \bar{x} + I_r(S)$), n'est plus vérifiée : elle sera remplacée par la [relation 173 de la page 718](#).

I-2.1.2 Hypothèses de calcul du stock moyen possédé

Le coût de possession comprend principalement un coût d'opportunité. Il porte sur un stock moyen calculé comme le quotient du nombre d'unités-jours observées par ce nombre de jours (voir [chapitre X, page 656](#)). Pour un stock initial S donné, la loi de demande X au cours de la période définit la distribution de probabilités du stock en fin de période sans renseigner sur l'évolution du stock au cours de cette période. L'analyse du problème conduit à distinguer deux cas de figure, selon que la demande exprimée est supérieure ou non au niveau de rechargement S . On supposera, pour fixer les idées et sans préjuger de la solution optimale que l'on trouvera ultérieurement, que ce niveau de rechargement a été arbitrairement fixé à 320.

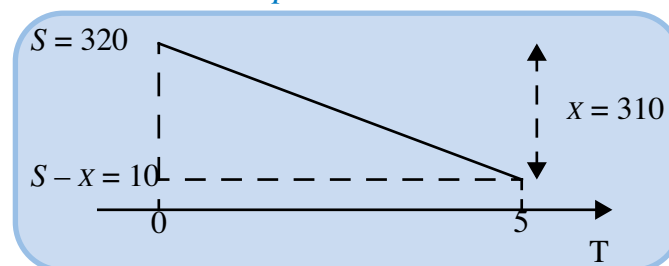
I-2.1.2.1 Cas d'une demande inférieure au niveau de rechargement S – pas de rupture de stock

Supposons qu'une demande hebdomadaire soit de 310, événement dont la probabilité d'occurrence est égale à 1,8%. Le stock de fin de période est alors de $320 - 310 = 10$ ampoules. Pour calculer le stock moyen il faut faire des hypothèses sur l'évolution de l'inventaire permanent tout au long de la semaine (de 5 jours ouvrables) débutant à 320 ampoules et se terminant à 10 ampoules.

La solution que l'on adopte habituellement est l'**interpolation linéaire**¹, c'est-à-dire que la demande de 310 ampoules est également répartie sur les 5 jours, d'où

FIGURE 187

Evolution postulée du stock au cours de la période calendaire, en l'absence de rupture de stock



une consommation journalière de 62 ampoules. Ceci conduit à la reconstitution suivante de l'inventaire permanent de fin de journée de $(320 - 62) = 258$ ampoules le premier jour, 196 le deuxième, 134 le troisième, 72 le quatrième et 10 ampoules le dernier jour. Toutefois, le stock moyen ne sera pas calculé comme la moyenne de ces stocks de fin de journée, c'est-à-dire $(258 + 196 + 134 + 72 + 10) / 5 = 134$ ampoules car on poursuit jusqu'au bout la logique de l'interpolation linéaire pour calculer le stock à chaque instant du temps et en calculer la moyenne, ce qui conduit à un stock moyen égal à la moyenne arithmétique des stocks de début et

1. D'autres hypothèses de calcul sont envisageables, mais conduisent à des solutions analytiques plus complexes à mettre en œuvre. Voir sur ce point : Naddor (1966, [313]), p. 144.

de fin de période, c'est-à-dire ici $(320 + 10) / 2 = 165$. Donc, d'une façon générale pour une demande x inférieure à S , le stock moyen possédé est égal à :

$$x < S \Rightarrow \text{stock moyen possédé} = \frac{S + (S - x)}{2} = S - \frac{x}{2} \quad \text{relation 160}$$

I-2.1.2.2 Cas d'une demande supérieure au niveau de reapprovisionnement S (rupture de stock)

On examinera successivement deux hypothèses de calcul du stock $I_p(S)$. La seconde hypothèse est une simplification de la première et présente l'avantage sur celle-ci de conduire à des solutions analytiques générales, c'est-à-dire permettant d'utiliser des tables statistiques «classiques».

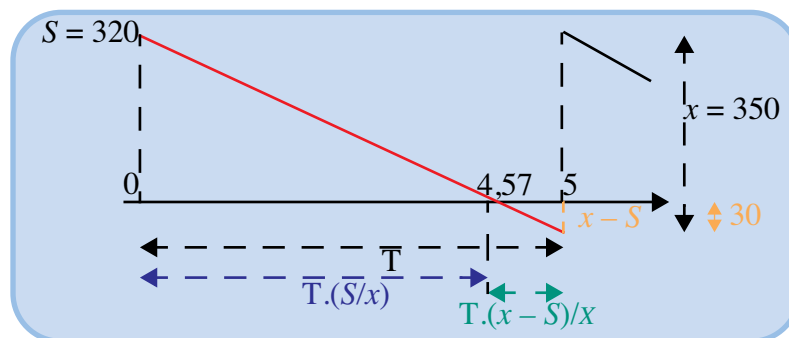
I-2.1.22a) Première hypothèse de calcul : l'interpolation linéaire

Supposons, pour reprendre notre exemple, que la demande d'ampoules sur une autre période de 5 jours soit de 350, pour un même stock initial de 320. Le stock de fin de période est nul. Le problème qui se pose pour le calcul de $I_p(S)$ est celui de savoir depuis quand ce stock est nul.

Si l'on garde toujours l'hypothèse d'interpolation linéaire, la demande journalière aura été de $350 / 5 = 70$ ampoules et la rupture de stock se sera produite au bout de $320 / 70 = 4,57$ jours. Le stock moyen calculé comme la moyenne arithmétique du stock de début (= 320) et du stock de fin de période (= 0), c'est-à-dire $(320 + 0) / 2 = 160$ est en réalité un stock moyen calculé sur une période de 4,57 jours, et non 5 jours. Le stock moyen sur 5 jours est égal à la moyenne pondérée du stock moyen sur chacune des deux périodes.

FIGURE 188

Évolution postulée du stock au cours de la période calendaire en cas de rupture de stock - usage de l'interpolation linéaire stricte



$$\begin{aligned} \text{Stock moyen possédé} &= [160] \frac{4,57}{5} + [0] \frac{5 - 4,57}{5} = [160] \frac{4,57}{5} = \left[\frac{320 + 0}{2} \right] \cdot \frac{320}{350} \cdot 5 \\ &= \left[\frac{320}{2} \right] \cdot \frac{320}{350} = 146,29 \end{aligned}$$

D'une façon générale, en remplaçant 320 par S et 350 par x , on aura :

$$x > S \Rightarrow \text{stock moyen possédé} = \frac{S}{2} \cdot \frac{S}{x} \quad \text{relation 161}$$

Le calcul rigoureux du stock possédé permet de trouver une solution analytique au problème posé, c'est-à-dire une valeur du niveau de reapprovisionnement S^* qui minimise le coût de gestion $C(S)$ du système-stock. Mais cette solution analytique présentée au § II-2, page 729 est assez difficile à mettre en œuvre car elle reste spécifique au problème posé, ce qui revient à dire qu'aucune table générale ne peut être constituée (comme celles introduites au § I-1.2, page 672).

I-2.1.22b) Seconde hypothèse de calcul: la rupture de stock se produit en fin de période

D'un point de vue mathématique, les difficultés que l'on vient d'évoquer sont liées à l'existence du facteur correctif S/x . Une seconde hypothèse de calcul permet de résoudre ces difficultés en éliminant ce facteur correctif: il suffit de convenir que les ruptures de stock se produisent très exactement en fin de période. Ceci implique dans notre exemple que la rupture de stock de 30 ampoules s'est produite à la date 5 au lieu de la date 4,57. Cette solution approchée se traduit donc

FIGURE 189

Évolution du stock au cours de la période calendaire: interpolation linéaire et hypothèse simplificatrice de la rupture de stock en fin de période

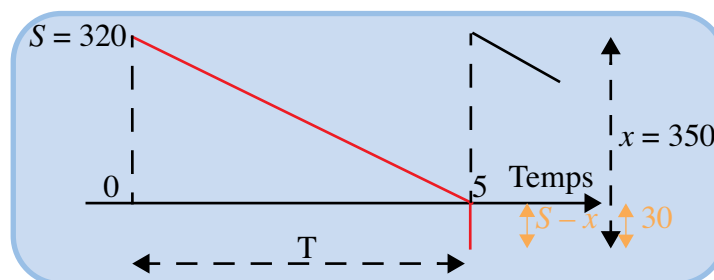


Table des matières

Index thématique

par une évolution de la demande correspondant à celle de la figure 189, et donc par un stock moyen de 160 ampoules au lieu de 146,29. Cette différence peut sembler importante, mais il faut bien voir que la solution approchée ne vise que le cas de rupture de stock se produisant avec une probabilité d'occurrence pas trop forte; il s'ensuit que, dans le calcul de l'espérance mathématique du stock moyen possédé, cette rupture de stock a un poids relativement faible. On peut ajouter que, plus la rupture de stock est forte, plus grande est l'erreur de calcul (facteur S/x négligé) commise sur le stock moyen possédé correspondant à ce niveau de demande, mais que cet accroissement de l'erreur est plus que compensé par la baisse de probabilité d'occurrence d'une rupture de stock plus forte¹.

$$x > S \Rightarrow \text{stock moyen possédé} = \frac{S+0}{2} = \frac{S}{2} \quad \text{relation 162}$$

Dans ce chapitre (cf. relation 173 de la page 718), et dans le chapitre suivant, on utilisera pour les articles stockables la relation 162 de préférence à la relation 161. Aussi faudrait-il comprendre lorsqu'on parlera de «stock moyen possédé, avec hypothèse simplificatrice», que ce sont la relation 160 et la relation 162 que l'on aura retenues dans le calcul de l'espérance mathématique de ce stock:

1. Pour toutes les distributions statistiques «classiques», à l'exception de la distribution uniforme, à condition toutefois que la demande soit supérieure au mode de la distribution.

$$\text{stock moyen posséd\é, avec hypoth\ese simplificatrice} = \begin{cases} (S-x/2) & \text{si } x < S \\ S/2 & \text{si } x \geq S \end{cases}$$

I-2.2 Étude de la solution optimale exacte

L'indicateur de coût de gestion du système par période de révision est toujours celui de la [relation 132 de la page 668](#) ($C(S) = c_p \cdot I_p(S) + c_r \cdot I_r(S)$). Pour le calcul du stock moyen possédé, il faut maintenant dissocier le cas où la demande x est strictement inférieure au niveau de recombplètement S de celui où elle est supérieure ou égale à S , afin de pouvoir calculer correctement l'espérance mathématique du stock moyen possédé.

$$\text{- Dans le cas continu, on a: } I_p(S) = \underbrace{\int_0^S \left(S - \frac{x}{2}\right) \cdot f(x) dx}_{\text{cas où } x < S} + \underbrace{\int_S^\infty \frac{S^2}{2x} \cdot f(x) dx}_{\text{cas où } x > S}, \text{ d'o\u00f9}$$

l'on tire¹:

$$I_p(S) = \left[S - \frac{\bar{x}}{2} + \frac{I_r(S)}{2} \right] - \frac{S \cdot P(X > S)}{2} + \frac{S^2}{2} \int_S^\infty \frac{f(x)}{x} dx \quad \text{relation 163}$$

L'expression entre crochets correspond au stock moyen possédé calculé avec l'hypothèse simplificatrice ([relation 173 de la page 718](#)). L'expression qui n'est pas entre crochets étant nécessairement négative, le stock moyen possédé en utilisant l'hypothèse simplificatrice est surestimé de cette quantité.

$$\text{- Dans le cas discret, on a: } I_p(S) = \sum_{x=0}^{S-1} \left(S - \frac{x}{2}\right) P(X=x) + \sum_{x=S}^\infty \frac{S^2}{2x} P(X=x),$$

d'où:

$$I_p(S) = \left[S - \frac{\bar{x}}{2} + \frac{I_r(S)}{2} \right] - \frac{S \cdot P(X > S)}{2} + \sum_{x=S}^\infty \frac{S^2}{2x} P(X=x) \quad \text{relation 164}$$

La recherche de l'optimum dans le cas continu passera toujours par l'étude de la dérivée de $C(S)$ par rapport à S , ce qui implique qu'il faudra calculer les dérivées de $I_p(S)$ et de $I_r(S)$ par rapport à S . Le calcul de la dérivée de $I_p(S)$ est immédiat².

$$\frac{d I_p(S)}{dS} = \int_0^S f(x) dx + S \int_S^\infty \frac{f(x)}{x} dx \quad \text{relation 165}$$

1. $I_p(S) = \int_0^S \left(S - \frac{x}{2}\right) \cdot f(x) dx + \int_S^\infty \frac{S^2}{2x} \cdot f(x) dx = \int_0^S \left(S - \frac{x}{2}\right) \cdot f(x) dx - \int_S^\infty \left(S - \frac{x}{2}\right) \cdot f(x) dx + \int_S^\infty \frac{S^2}{2x} \cdot f(x) dx$
 $= S + \frac{\bar{x}}{2} - \frac{S}{2} \int_S^\infty f(x) dx + \frac{1}{2} \int_S^\infty (x-S) \cdot f(x) dx + \int_S^\infty \frac{S^2}{2x} \cdot f(x) dx = S - \frac{\bar{x}}{2} - \frac{S \cdot P(X > S)}{2} + \frac{I_r(S)}{2} + \int_S^\infty \frac{S^2}{2x} \cdot f(x) dx$

Arrivé à ce stade du raisonnement, nous distinguerons dans la recherche de l'optimum le cas où le coût de rupture est proportionnel au temps de celui où il est indépendant du temps.

I-2.2.1 Cas du coût de rupture indépendant du temps

I-2.2.1.1 Solution analytique

C'est l'hypothèse que nous avons privilégiée jusqu'à présent et qui s'applique parfaitement à l'exemple choisi: il est vraisemblable, en effet, qu'une rupture de stock en ampoules de 60 watts se traduira par des ventes perdues, et l'on voit mal une mise en place d'un suivi des demandes différées¹.

En combinant la relation 145 de la page 674 $\left(\frac{d I_r(S)}{dS} = -\int_S^\infty f(x)dx\right)$ et la relation 165, l'optimum est tel que: $\frac{d C(S)}{dS} = \frac{d (c_p \cdot I_p(S) + c_r \cdot I_r(S))}{dS} = 0$, ce qui conduit² à la relation 166:

$$\frac{\int_S^\infty f(x)dx}{1 + S^* \int_{S^*}^\infty \frac{f(x)}{x} dx} = \frac{c_p}{c_r + c_p} \tag{relation 166}$$

Table des matières

Index thématique

Cette dernière relation est difficilement opérationnelle sans l'aide logistique d'un ordinateur, car elle dépend étroitement des paramètres de la loi de demande (en effet on ne peut pas se ramener à une formulation générale du type variable

2. Note de la page 712. En effet, L'utilisation de la formule de Leibniz (relation 144 de la page 674) pour $\int_0^S (S-x)f(x)dx$, conduit à poser $g(S,x) = (S-x)f(x)$ $a(S) = 0$ et $b(S) = S$, d'où l'on tire: $\frac{\partial g(S,x)}{\partial S} = f(x)$, $\frac{d a(S)}{dS} = 0$ et

$$\frac{d b(S)}{dS} = 1 \text{ puis: } \frac{\int_0^S (S-x)f(x)dx}{\partial S} = \int_0^S f(x)dx + \left[(S-S)f(S) \right] \cdot 1 - \left[S-\frac{0}{2}f(0) \right] \cdot 0 = \int_0^S f(x)dx + \frac{S}{2}f(S)$$

De même, pour $\int_S^\infty \frac{f(x)}{2x} dx$, en posant $g(S,x) = \frac{S^2}{2x} f(x)$, $a(S) = S$ et $b(S) = \infty$, on obtient: $\frac{\partial g(S,x)}{\partial S} = \frac{2S}{2x} f(x) = \frac{S \cdot f(x)}{x}$,

$$\frac{d a(S)}{dS} = 1 \text{ et } \frac{d b(S)}{dS} = 0, \text{ puis: } \frac{\int_S^\infty \frac{f(x)}{2x} dx}{\partial S} = \int_S^\infty \frac{S \cdot f(x)}{x} dx + \left[\left(\frac{S^2}{2H} \right) f(H) \right] \cdot 0 - \left[\left(\frac{S^2}{2S} \right) f(S) \right] \cdot 1 = S \int_S^\infty \frac{f(x)}{x} dx - \frac{S}{2} f(S)$$

D'où: $\frac{d I_p(S)}{dS} = \left[\int_0^S f(x)dx + \frac{S}{2} \cdot f(S) \right] + \left[\int_S^\infty \frac{f(x)}{x} dx - \frac{S}{2} \cdot f(S) \right]$, ce qui conduit à la relation 165.

1. Lorsqu'une rupture de stock se traduit par une vente perdue, le coût de rupture n'a aucune raison de dépendre de la durée de la rupture, contrairement au cas des demandes différées.

2. En effet, $\frac{d C(S)}{dS} = c_p \left[\int_0^S f(x)dx + S \int_S^\infty \frac{f(x)}{x} dx \right] + c_r \left[-\int_S^\infty f(x)dx \right] = c_p \left[1 - \int_S^\infty f(x)dx + S \int_S^\infty \frac{f(x)}{x} dx \right] + c_r \left[-\int_S^\infty f(x)dx \right] = 0$

$$\frac{d C(S)}{dS} = c_p - (c_r + c_p)P(X > S) + c_p \cdot S \int_S^\infty \frac{f(x)}{x} dx = 0, \text{ d'où l'on tire } P(X > S^*) = \frac{c_p}{c_r + c_p} \left(1 + S^* \int_{S^*}^\infty \frac{f(x)}{x} dx \right), \text{ puis la relation 166.}$$

centrée réduite). Le premier membre de cette relation est susceptible de prendre des valeurs comprises entre 0 et 1. On remarque en outre qu'elle est nulle lorsque S est très grand et est égale à 1, lorsque S est nul. Le premier membre est donc de nature tout à fait comparable à une probabilité de rupture de stock.

De même, lorsque la loi de demande est discrète, on démontre¹ que l'optimum est atteint pour :

$$\frac{P(X > S^*)}{1 + \left(S^* + \frac{1}{2}\right) \sum_{x > S^*} \frac{P(X=x)}{x}} < \frac{c_p}{c_r + c_p} < \frac{P(X > S^* - 1)}{1 + \left(S^* - \frac{1}{2}\right) \sum_{x > S^* - 1} \frac{P(X=x)}{x}} \quad \text{relation 167}$$

I-2.2.1.2 Résolution numérique du problème posé

Le programme mis au point pour trouver la valeur de S conformément à la [relation 166 de la page 713](#), donne un niveau de rechargement optimal égal à 340, pour une valeur du critère égale à $0,0115 / (0,0115 + 0,5) = 0,0228$. On peut préférer tenir compte de l'impact de la correction de continuité qui conduit à une probabilité de rupture de 0,0214 pour $S = 340$ et à 0,02413 pour $S = 339$, ce qui conduit alors à préférer cette dernière valeur, la probabilité de rupture étant la plus proche de celle visée. Rappelons que le logiciel tient compte de l'impact de la correction de continuité. Le [tableau 195](#) montre comment varie numériquement ce premier membre en fonction de S . Il fournit également la rupture moyenne (calculée à l'aide de la [relation 147 de la page 675](#)) : $I_r(S) = 0,170$. Par contre, le calcul du stock moyen possédé nécessite, là encore, l'utilisation d'un algorithme spécial (utilisé pour établir le [tableau 195](#)). La valeur obtenue est $I_p(S) = 190,02$, pour $S = 340$ et $I_p(S) = 189,09$, pour $S = 339$. Il s'ensuit que le coût minimal de gestion du système est : $C(S) = 190,03 \times 0,0115 + 0,170 \times 0,5 = 2,19 + 0,35 = 2,28$, dans le premier cas et 2,27 pour $S = 339$.

I-2.2.2 Cas du coût de rupture proportionnel au temps

À partir du moment où l'on constate une demande $x = 350$, supérieure à $S = 320$, on aura en fin de période une rupture de stock de : $(x - S) = 350 - 320 = 30$. Le calcul d'une pénurie moyenne $I_r(S)$ s'inspire exactement des mêmes principes que ceux utilisés précédemment pour le calcul du stock possédé

1. En effet, on a :

$$I_p(S) = \sum_{x=0}^{S-1} \left(S - \frac{x}{2}\right) P(X=x) + \sum_{x=S}^{\infty} \frac{S^2}{2x} P(X=x)$$

$$I_p(S) = \sum_{x=0}^{S-1} \left(S - \frac{x}{2}\right) P(X=x) + \frac{S}{2} P(X=S) + \sum_{x=S+1}^{\infty} \frac{S^2}{2x} P(X=x) \quad \text{et} \quad I_p(S+1) = \sum_{x=0}^S \left(S+1 - \frac{x}{2}\right) P(X=x) + \sum_{x=S+1}^{\infty} \frac{(S+1)^2}{2x} P(X=x)$$

$$I_p(S+1) = \left[\sum_{x=0}^{S-1} \left(S - \frac{x}{2}\right) P(X=x) + P(X < S) + \left(1 + \frac{S}{2}\right) P(X=S) \right] + \sum_{x=S+1}^{\infty} \frac{S^2}{2x} P(X=x) + \left[\sum_{x=S+1}^{\infty} \frac{S^2}{2x} P(X=x) + \left(S + \frac{1}{2}\right) \cdot \sum_{x=S+1}^{\infty} \frac{P(X=x)}{x} \right]$$

$$\text{d'où } I_p(S+1) - I_p(S) = \left(S + \frac{1}{2}\right) \sum_{x > S} \frac{P(X=x)}{x} + P(X \leq S), \quad \text{or } C(S+1) - C(S) = c_p [I_p(S+1) - I_p(S)] + c_r [I_r(S+1) - I_r(S)]$$

ce qui donne, compte tenu de la [relation 134](#), et de ce que l'on vient d'établir :

$$C(S+1) - C(S) = c_p \left[\left(S + \frac{1}{2}\right) \sum_{x > S} \frac{P(X=x)}{x} + 1 - P(X > S) \right] + c_r [-P(X > S)] = (c_p + c_r) [-P(X > S)] + c_p \left[1 + \left(S + \frac{1}{2}\right) \sum_{x > S} \frac{P(X=x)}{x} \right]$$

$$C(S) - C(S-1) = (c_p + c_r) [-P(X > S-1)] + c_r \left[1 + \left(S - \frac{1}{2}\right) \sum_{x > S-1} \frac{P(X=x)}{x} \right] \quad \text{et compte tenu de la } \text{relation 133}, \text{ on retrouve la relation 166.}$$

TABLEAU 195

Analyse de l'incidence des différentes hypothèses retenues dans le calcul du stock moyen possédé et de la rupture moyenne

S	Détermination de S* (%)			I _p (S) avec hypothèse de coût de possession			I _r (S) avec hypothèse de coût de rupture		Coût de gestion C(S)				
	$\int_0^S f(x)dx$	$1 - \left(\int_0^S f(x)dx \right) / \left(1 + \int_0^S \frac{f(x)}{x} dx \right)$	$\int_0^S \frac{f(x)}{x} dx$	Indépendant du temps (§ I-1.2.2)	dépendant du temps		Indépendant du temps (§ I-1.2.1)	Dépendant du temps (relation 169)	$0,0115 \cdot I_{p1}(S) + 0,5 \cdot I_{r1}(S)$	$0,0115 \cdot I_{p2}(S) + 0,5 \cdot I_{r1}(S)$	$0,0115 \cdot I_{p3}(S) + 0,5 \cdot I_{r1}(S)$	$0,0115 \cdot I_{p3}(S) + 0,5 \cdot I_{r2}(S)$	$\int_0^S \frac{f(x)}{x} dx$
					Avec hypothèse simplificatrice (relation 162)	Sans hypothèse simplificatrice (relation 161)							
	I _{p1} (S)	I _{p2} (S)	I _{p3} (S)	I _{r1} (S)	I _{r2} (S)								
300	50	66,13	97,63	7,979	153,99	150,43	7,98	0,43	4,08	5,77	5,73	1,95	0,476
302	53,98	68,03	97,93	9,019	155,51	152,39	7,02	0,39	3,61	5,30	5,27	1,95	0,440
304	57,93	70,01	98,21	10,14	157,07	154,35	6,14	0,35	3,19	4,88	4,85	1,96	0,403
306	61,79	72,04	98,47	11,34	158,67	156,33	5,34	0,33	2,80	4,50	4,47	1,97	0,367
308	65,54	74,12	98,69	12,61	160,30	158,29	4,61	0,29	2,45	4,15	4,13	1,97	0,332
310	69,15	76,22	98,9	13,96	161,98	160,26	3,96	0,26	2,14	3,85	3,83	1,98	0,298
312	72,57	78,31	99,06	15,37	163,69	162,23	3,37	0,23	1,86	3,57	3,56	1,99	0,265
314	75,8	80,39	99,22	16,86	165,43	164,21	2,86	0,21	1,62	3,34	3,32	2,00	0,234
316	78,81	82,42	99,35	18,40	167,20	166,18	2,40	0,18	1,41	3,13	3,12	2,01	0,205
318	81,59	84,38	99,46	20,01	169,00	168,16	2,01	0,16	1,24	2,96	2,95	2,02	0,179
320	84,13	86,25	99,56	21,67	170,83	170,14	1,67	0,14	1,09	2,81	2,80	2,03	0,154
322	86,43	88,01	99,65	23,37	172,69	172,12	1,37	0,12	0,95	2,68	2,67	2,05	0,132
324	88,49	89,65	99,72	25,12	174,56	174,11	1,12	0,11	0,85	2,57	2,57	2,06	0,112
326	90,32	91,16	99,78	26,91	176,46	176,09	0,91	0,09	0,77	2,49	2,49	2,08	0,095
328	91,92	92,51	99,82	28,73	178,37	178,08	0,73	0,08	0,70	2,42	2,42	2,09	0,079
330	93,32	93,73	99,86	30,59	180,29	180,07	0,59	0,07	0,65	2,38	2,37	2,11	0,065
332	94,52	94,80	99,89	32,47	182,23	182,06	0,46	0,06	0,60	2,33	2,33	2,13	0,054
334	95,54	95,73	99,91	34,37	184,18	184,05	0,37	0,05	0,58	2,31	2,31	2,15	0,044
336	96,41	96,53	99,94	36,29	186,14	186,04	0,29	0,04	0,56	2,29	2,29	2,17	0,035
338	97,13	97,21	99,95	38,22	188,11	188,03	0,22	0,03	0,55	2,28	2,28	2,18	0,028
340	97,72	97,77	99,96	40,17	190,09	190,03	0,17	0,03	0,55	2,28	2,28	2,21	0,022
342	98,21	98,23	99,97	42,13	192,07	192,02	0,13	0,02	0,55	2,28	2,28	2,23	0,018
344	98,61	98,62	99,98	44,10	194,05	194,02	0,10	0,02	0,56	2,29	2,29	2,25	0,014
346	98,93	98,94	99,99	46,07	196,04	196,01	0,07	0,01	0,57	2,30	2,30	2,27	0,011
348	99,18	99,18	99,99	48,05	198,03	198,01	0,05	0,01	0,58	2,31	2,31	2,29	0,008
350	99,38	99,38	99,99	50,04	200,02	200,01	0,04	0,01	0,60	2,33	2,33	2,31	0,006

Table des matières

Index thématique

moyen I_p(S). Autrement dit, la pénurie moyenne passe de 0 à la date 4,57 jours (moment où la rupture de stock se manifeste) à 30 à la date 5 (fin de la période de révision calendaire), ce qui fait que la pénurie moyenne est de (0 + 30)/2 = 15 sur une période de (5 - 4,57) = 0,43 jour, et de 0 pendant les 4,57 premiers jours. La pénurie moyenne sur la période des 5 jours est alors :

$$x = 50 \text{ et } S = 320 \Rightarrow \text{rupture de stock} = 0 \frac{4,57}{5} + 15 \frac{5-4,57}{5} = 1,29$$

et d'une façon générale: $x > S \Rightarrow$ rupture de stock $= 0 \cdot \frac{S}{x} + \frac{0+x-S}{2} \cdot \frac{x-S}{x}$, d'où:

$$x \geq S \Rightarrow \text{rupture de stock} = \frac{(x-S)^2}{2x} \quad \text{relation 168}$$

Dans ces conditions, l'espérance mathématique de la rupture moyenne est:

$$I_r(S) = \int_S^{\infty} \frac{(x-S)^2}{2x} \cdot f(x) dx \quad \text{relation 169}$$

La dérivée de cette rupture moyenne par rapport à S est¹:

$$\frac{d I_r(S)}{dS} = \int_S^{\infty} \frac{(S-x)}{x} \cdot f(x) dx = - \int_S^{\infty} f(x) dx + S \int_S^{\infty} \frac{f(x)}{x} dx$$

La valeur optimale de S est alors définie² par la **relation 170**:

$$\frac{c_r}{c_r + c_p} = \int_0^{S^*} f(x) dx + S^* \int_{S^*}^{\infty} \frac{f(x)}{x} dx \quad \text{relation 170}$$

Le second membre de cette relation est une fonction monotone croissante, variant entre 0 et 1, qui possède donc sur le plan formel les propriétés caractéristiques d'une fonction de répartition³, ce qui rapproche cette relation de la **relation 148 de la page 676**, dont elle ne diffère que d'un terme. L'évolution de ce second membre en fonction de S , toujours pour une demande suivant une loi Normale $\mathcal{N}(300,20)$ est donnée au **tableau 195, page 715**; on peut y constater que l'adjonction d'un terme à la fonction de répartition a pour conséquence d'abaisser la valeur du niveau de rechargement puisque, pour une même valeur critique $0,2 / (0,2 + 0,7) = 0,22$, le niveau de rechargement optimal est de 311 unités contre 316 unités avec une utilisation directe de la fonction de répartition.

1. En effet, L'utilisation de la formule de Leibniz (**relation 144 de la page 674**) pour $\int_S^{\infty} \frac{(x-S)^2}{2x} f(x) dx$, conduit à

poser $g(S,x) = \frac{(x-S)^2}{2x} f(x)$ $a(S) = S$ et $b(S) = \infty$, d'où l'on tire: $\frac{\partial g(S,x)}{\partial S} = \frac{-2(x-S)}{2x} f(x) = \frac{(S-x)}{x} f(x)$, $\frac{d a(S)}{dS} = 1$ et

$\frac{d b(S)}{dS} = 0$ puis:

$$\frac{\int_S^{\infty} \frac{(x-S)^2}{2x} f(x) dx}{S} \frac{dS}{dS} = \int_S^{\infty} \frac{(S-x)}{x} f(x) dx + \left[\frac{(H-S)^2}{2H} f(H) \right] \cdot 0 - \left[\frac{(S-S)^2}{2S} f(S) \right] \cdot 1 = S \int_S^{\infty} \frac{f(x)}{x} dx - \int_S^{\infty} f(x) dx$$

2. En effet, à l'optimum on a:

$$\frac{d C(S)}{dS} = c_p \cdot \frac{d I_p(S)}{dS} + c_r \cdot \frac{d I_r(S)}{dS} = c_p \cdot \left[\int_0^S f(x) dx + S \int_S^{\infty} \frac{f(x)}{x} dx \right] + c_r \cdot \left[- \int_S^{\infty} f(x) dx + S \int_S^{\infty} \frac{f(x)}{x} dx \right] = 0$$

$$\frac{d C(S)}{dS} = c_p \left[\int_0^S f(x) dx + S \int_S^{\infty} \frac{f(x)}{x} dx \right] + c_r \left[- \left(1 - \int_0^S f(x) dx \right) + S \int_S^{\infty} \frac{f(x)}{x} dx \right] = 0, \text{ d'où la relation 170.}$$

3. Naddor (1966, [313]), p. 166-169. On parlera alors de pseudo-fonction de répartition.

I-2.3 Étude de la solution optimale approchée

Nous établirons tout d'abord la relation caractérisant l'optimum, puis donnerons la solution numérique de l'exemple introductif du § I-2.1.1, page 708.

I-2.3.1 Détermination analytique de la solution optimale

L'indicateur de coût de gestion du système par période de révision est toujours :

$$C(S) = c_p \cdot I_p(S) + c_r \cdot I_r(S)$$

Pour le calcul du stock moyen possédé $I_p(S)$, il faut, là encore, dissocier le cas où la demande x est strictement inférieure au niveau de rechargement, de celui où elle est supérieure ou égale à S . Dans le cas discret on aura donc :

$$I_p(S) = \sum_0^{S-1} \left(S - \frac{x}{2} \right) \cdot P(X = x) + \sum_S^{\infty} \frac{S}{2} \cdot P(X = x)$$

$$I_p(S) = \sum_0^{S-1} \left(S - \frac{x}{2} \right) \cdot P(X = x) + \frac{S}{2} \cdot P(X \geq S) \quad \text{relation 171}$$

tandis que, pour une demande continue, le stock moyen possédé s'écrira :

$$I_p(S) = \int_0^S \left(S - \frac{x}{2} \right) f(x) dx + \frac{S}{2} P(X > S) \quad \text{relation 172}$$

Table des matières

En raisonnant sur le cas discret, on peut exprimer le stock moyen possédé $I_p(S)$, en fonction du stock *résiduel* moyen de fin de période (introduit lors de l'étude d'articles non stockables).

Index thématique

$$I_p(S) = \sum_0^{S-1} \left(\frac{S}{2} + \frac{S}{2} - \frac{x}{2} \right) \cdot P(X = x) + \frac{S}{2} \cdot \sum_S^{\infty} P(X = x)$$

$$I_p(S) = \frac{1}{2} \sum_0^{S-1} (S - x) \cdot P(X = x) + \frac{S}{2} \cdot \left[\sum_0^{S-1} P(X = x) + \sum_S^{\infty} P(X = x) \right]$$

$$I_p(S) = \frac{1}{2} \left[\sum_0^{S-1} (S - x) \cdot P(X = x) + (S - S) P(X = S) \right] + \frac{S}{2} \sum_0^{\infty} P(X = x)$$

$$I_p(S) = \frac{1}{2} \left[\underbrace{\sum_0^S (S - x) \cdot P(X = x)}_{\text{Stock résiduel moyen de fin de période}} + \underbrace{S}_{\text{Stock initial}} \right]$$

Cette relation qu'il est facile d'établir également dans le cas continu montre que le stock moyen possédé dans le cas d'un article stockable est la moyenne arithmétique du niveau de rechargement et du stock résiduel moyen possédé en fin de période. Un raisonnement « naïf » aurait permis d'aboutir directement à ce résultat, mais les hypothèses sous-jacentes (interpolation linéaire et hypothèse simplificatrice d'une rupture de stock instantanée en fin de période) n'auraient pu, alors, être mises en évidence. De ce fait, les limites de cette approche ne seraient pas apparues.

À partir de la [relation 135 de la page 670](#) ($I_p(S) = S - \bar{x} + I_r(S)$), qui relie le stock résiduel moyen avec la rupture de stock, on obtient un stock moyen possédé calculé comme une moyenne du stock initial S et du stock résiduel, ce qui conduit

à: $I_p(S) = \frac{1}{2}[S + \{S - \bar{x} + I_r(S)\}]$, d'où l'on tire la [relation 173](#).

$$I_p(S) = S - \frac{\bar{x}}{2} + \frac{I_r(S)}{2} \quad \text{stock moyen possédé calculé sur la base de la moyenne des stocks de début et de fin de période et de l'hypothèse simplificatrice (rupture de stock se produisant en fin de période)} \quad \text{relation 173}$$

C'est cette [relation 173](#), et non la [relation 135](#), qu'il convient d'utiliser en cas d'articles stockables. Par ailleurs nous avons vu, avec la [relation 136](#), qu'il est possible d'exprimer le coût de gestion $C(S)$, en fonction de la seule rupture moyenne. Il en est de même si l'article est stockable. Il suffit de remplacer $I_p(S)$ par sa valeur établie par la [relation 173](#), dans la relation définissant l'indicateur de coût de gestion:

$$C(S) = c_p \cdot I_p(S) + c_r \cdot I_r(S) = c_p \left[S - \frac{\bar{x}}{2} + \frac{I_r(S)}{2} \right] + c_r I_r(S)$$

$$C(S) = c_p \cdot \left[S - \frac{\bar{x}}{2} \right] + \left(c_r + \frac{c_p}{2} \right) \cdot I_r(S) \quad \text{relation 174}$$

Les [relations 173](#) et [174](#), valables quelle que soit la valeur S , permettent d'utiliser les tables mises en annexe pour calculer $I_p(S)$ et $C(S)$ à partir de la valeur de $I_r(S)$, si la demande suit une loi Normale.

Si la loi de demande est continue, l'optimum s'obtient sans difficulté¹.

$$P(X > S^*) = \frac{c_p}{c_r + c_p/2} \quad \text{ou} \quad P(X < S^*) = \frac{c_r - c_p/2}{c_r + c_p/2} \quad \text{relation 175}$$

Cette [relation 175](#), valable seulement dans le cas d'articles stockables (et en adoptant l'hypothèse simplificatrice de la [relation 162 de la page 711](#)), est l'équivalent de la [relation 148 de la page 676](#) établie pour le cas d'articles non stockables. Ces relations concernent des lois de demandes continues (ou des lois de demandes discrètes approximées par des lois continues). Le raisonnement suivi au § I-1.3.2.3, page 685, dans le cas d'approvisionnement d'articles non stockables, pour les lois de demandes discrètes, est transposable sans difficulté au cas d'articles stockables. On obtient alors les [relations 176](#):

1. À l'optimum, on a $\frac{dC(S)}{dS} = c_p \cdot \frac{dI_p(S)}{dS} + c_r \cdot \frac{dI_r(S)}{dS}$. Avec la [relation 145 de la page 674](#) ($\frac{dI_r(S)}{dS} = -\int_S^\infty f(x)dx = -P(X > S)$)

et la [relation 174](#) ci-dessus, on obtient: $\frac{dC(S)}{dS} = c_p + \left(c_r + \frac{c_p}{2}\right) \cdot \frac{dI_r(S)}{dS} = c_p + \left(c_r + \frac{c_p}{2}\right) \cdot \left(-\int_S^\infty f(x)dx\right) = 0$, d'où la [relation 175](#).

$$P(X > S^*) < \frac{c_p}{c_r + c_p/2} < P(X > S^* - 1)$$

$$P(X \geq S^* + 1) < \frac{c_p}{c_r + c_p/2} < P(X \geq S^*)$$

$$P(X \leq S^* - 1) < \frac{c_r - c_p/2}{c_r + c_p/2} < P(X \leq S^*)$$

$$P(X < S^*) < \frac{c_r - c_p/2}{c_r + c_p/2} < P(X < S^* + 1)$$

relation 176

Ajoutons enfin :

- le fait qu'une probabilité ne puisse être négative implique que le coût de rupture ne puisse être inférieur à la moitié du coût de possession (calculé sur la période de révision calendaire T) ;

$$c_r > c_p/2$$

relation 177

- la [relation 152 de la page 685](#) ($B(S) = c_r \cdot \bar{x} - C(S)$) reste valable¹ pour calculer la marge $B(S)$ associée à un niveau de rechargement quelconque S , à condition que :
 - c_r corresponde bien à la marge unitaire
 - et que l'on s'accorde bien sur le fait que cette marge est nette du coût des immobilisations.

Table des
matières

I-2.3.2 Résolution numérique du problème posé

La [relation 175](#) permet de calculer la probabilité de rupture

$$P(X > S^*) = \frac{0,01154}{0,5 + 0,01154/2} = 2,28\%$$

ce qui correspond (après lecture d'une table normale) à une valeur de variable centrée réduite 2,00, d'où la valeur optimale S^* du niveau de rechargement.

$$t_s = 2 = \frac{S - 300}{20} \rightarrow S^* = 340$$

Cette valeur est la même que celle obtenue dans le cas de l'utilisation de la solution optimale exacte (§ I-2.2.1.2, page 714). L'usage de la correction de continuité (non effectué dans la recherche de la solution optimale) conduit à $S^* = 339$, valeur qui sera retenue dans les résultats de synthèse présentés dans le [tableau 196 de la page 721](#). On peut ajouter, en comparant les colonnes 2 et 3 du [tableau 195 de la page 715](#), que le nombre d'ampoules commandées est pratiquement le même² dans la solution optimale et dans la solution approchée pour des niveaux de rechargement supérieurs à 320 (2 ampoules d'écart au plus).

1. Reprise de la démonstration du § I-1.3.23b, page 686, dans laquelle seule la définition de $I_p(S)$ change.

2. Cette observation n'a rien de général, elle résulte seulement de la valeur relativement faible de c_p par rapport à c_r .

Index
thématique

En utilisant la table A (page 765) et la correction de continuité ($t = (340,5 - 300)/20 = 2,025$), on obtient: $I_r(S) = 0,159$, valeur inférieure à celle fournie au § I-2.2.1.2, page 714, où la correction de continuité n'était pas prise en compte. Le stock moyen possédé est donc, d'après la relation 173 de la page 718 :

$$I_p(S^*) = 340 - \frac{300}{2} + \frac{0,159}{2} = 190,08$$

La demande moyenne satisfaite par semaine est égale à $300 - 0,159 = 299,84$. Le pourcentage de demandes non satisfaites est $\beta(S) = 0,159/300 = 0,5\%$. L'indicateur de coût moyen de gestion hebdomadaire est d'après la relation 174 :

$$C(S^*) = 0,01154 \left(340 - \frac{300}{2} \right) + 0,159 \left(0,5 + \frac{0,01154}{2} \right) = 2,27$$
 et la marge moyenne

hebdomadaire, en utilisant la relation 152: $B(S^*) = 300 \times 0,5 - 2,27 = 147,73$.

Pour illustrer la remarque faite à la fin du § I-2.3.1, page 717, on peut noter qu'avec une demande moyenne satisfaite de 299,841 et une marge unitaire de 0,5 dollar lidurien, notre marchand perçoit, en moyenne, 149,92 dollars / semaine; si l'on défalque le coût des immobilisations, c'est-à-dire le produit du stock moyen possédé 190,08 par le coût de possession hebdomadaire 0,01154 (ce qui donne 2,19 dollars) de cette marge brute de 149,92 dollars, on retrouve les 147,73 dollars liduriens de marge nette calculée pour $B(S^*)$.

Ajoutons enfin que le stock résiduel moyen au moment où l'on passe la commande (ou au moment où l'on reçoit la livraison, puisque le délai d'obtention est nul, par hypothèse) se calcule sans problème grâce à la relation 135 de la page 670; il s'élève à $340 - 300 + 0,159 = 40,159$. La commande moyenne, portant sur la différence entre le niveau de rechargement (340) et le stock résiduel moyen lors de la passation de commande (40,159), sera donc de $340 - 40,159 = 299,84$, si les demandes non satisfaites sont perdues. On peut remarquer, et c'est logique, que la commande moyenne est égale à la demande moyenne satisfaite. Par contre, si les demandes non satisfaites sont différées, il faut ajouter la rupture moyenne et l'on trouve bien que la commande moyenne est égale à la demande moyenne exprimée.

Sur la base de 52 semaines ouvrables, l'ensemble des implications de la solution optimale pour LUMINOR est donné dans le tableau 196 de la page 721.

La solution d'un problème similaire se posant à LUMINOR pour un lampadaire halogène acheté 300 et vendu 400, la demande suivant une loi de Poisson de paramètre 12 est donnée dans le tableau 197 de la page 721.

SECTION II QUELQUES EXTENSIONS DES MODÈLES DE BASE

Nous avons indiqué au début de ce chapitre que les modèles de base étudiés en section I ont en commun les trois hypothèses suivantes: stock à un seul étage, délai d'obtention nul (ou ne jouant aucun rôle dans la recherche de l'optimum) et indépendance des articles entre eux pour la définition des politiques optimales. Nous leverons successivement ces trois hypothèses en introduisant tout d'abord la possibilité de stock à étages (§ II-1), puis celle d'un délai d'obtention non nul

TABLEAU 196
Analyse de la politique optimale de **LUMINOR** pour les ampoules de 60W

Conséquences physiques de la politique d'approvisionnement pour les ampoules de 60 W	Politique optimale	
	par période de révision calendaire	par an (sur 52 périodes calendaires)
Stock S de début de période	339	-
Stock de sécurité	39	-
Demande moyenne satisfaite	299,818	15 590,560
Rupture moyenne de stock	0,182	9,440
Pourcentage de demandes non satisfaites	0,06%	0,06%
Probabilité de rupture par période de révision calendaire	2,41%	-
Nombre moyen annuel de périodes en rupture de stock	-	1,255
Stock moyen possédé	189,091	189,091
Conséquences financières de la politique d'approvisionnement		
Dépense d'acquisition nette moyenne	899,46	46 771,68
Coût de commande / Charges fixes calendaires	0,00	0,00
Coût de rupture	0,09	4,72
Coût de possession	2,18	113,45
Indicateur de coût moyen	2,27	118,17
Marge nette moyenne	147,73	7 681,83

TABLEAU 197
Analyse de la politique optimale de **LUMINOR** pour les lampadaires halogènes

Conséquences physiques de la politique d'approvisionnement pour le lampadaire halogène	Politique optimale	
	par période de révision calendaire	par an (sur 52 périodes calendaires)
Stock S de début de période	21	-
Stock de sécurité	9	-
Demande moyenne satisfaite	11,988	623,386
Rupture moyenne de stock	0,012	0,614
Pourcentage de demandes non satisfaites	0,10%	0,10%
Probabilité de rupture par période de révision calendaire	0,61%	-
Nombre moyen annuel de périodes en rupture de stock	-	0,315
Stock moyen possédé	15,006	15,006
Conséquences financières de la politique d'approvisionnement		
Dépense d'acquisition nette moyenne	3 596,46	187 015,85
Coût de commande / Charges fixes calendaires	0,00	0,00
Coût de rupture	1,18	61,38
Coût de possession	17,31	900,35
Indicateur de coût moyen	18,49	961,74
Marge nette moyenne	1 181,51	61 438,26

(§ II-2, page 729). La dernière hypothèse sera remplacée par celle de l'existence d'une contrainte portant sur un facteur rare (dotation budgétaire, espace de stockage) consommé simultanément par plusieurs articles (§ II-3, page 753).

II-1 Introduction aux stocks à étages en gestion calendaire

Dans la réalité, de très nombreux stocks sont à étages. La description de leur fonctionnement par des modèles peut s'avérer très complexe, surtout si ces



modèles cherchent à cerner de près la réalité. On se contentera ici d'une introduction à cette catégorie de problème, en examinant le cas le plus simple: celui de stocks en série (voir [chapitre X, figure 174, page 631](#)), en limitant leur nombre à trois, et en se plaçant dans le seul cas d'approvisionnement d'articles non stockables. On est en présence d'une application du principe de différenciation retardée. Il convient de souligner qu'ici l'existence du second étage n'exclut pas la possibilité d'une rupture de stock, contrairement à ce que nous avons vu au [§ I-1.4.33c, page 704](#) (possibilité de *rattrapage intégral et immédiat*, par un système productif de secours, des demandes perdues par le système productif normal). Par ailleurs, le cas de stocks à étages en univers certain est à relier aux techniques de planification de type MRP étudiées au [chapitre VI, page 455](#).

II-1.1 Exemple introductif

Le fabricant de vêtements féminins **NEW GIRL** est spécialisé dans le vêtement de mode. La mode des vêtements amples lui permet de limiter le nombre de tailles à 3, référencées par les lettres S, M ou L. La préparation d'une collection passe par le choix d'un certain nombre de modèles et celui de tissus. Pour la taille M d'un modèle de la nouvelle collection, et l'un des coloris du tissu vedette de la prochaine saison, les commerciaux de **NEW GIRL**, s'appuyant sur leur expérience et une enquête réalisée auprès d'un échantillon représentatif de détaillants, estiment que les ventes de cet article devraient tourner aux alentours de 10000 unités et qu'une loi Normale d'écart-type 2000 est acceptable pour résumer la distribution de probabilités des ventes. En première analyse, le problème de production qui se pose est de savoir combien de robes produire.

En réalité, la décision à prendre est plus complexe, d'une part parce que **NEW GIRL** achète des tissus dont le réapprovisionnement est trop long pour satisfaire en temps utile les demandes susceptibles d'être différées dont la vente est nécessairement limitée dans le temps (mode de l'hiver prochain) et, d'autre part, parce qu'il n'est pas forcément intéressant de transformer immédiatement tout le tissu en robes. Deux stocks sont donc constitués: un stock S_1 de robes et un stock S_2 de tissu (longueur de tissu convertie en équivalent-robes) que l'on peut «convertir» dans un délai raisonnable en robes. Une robe revient à $a_1 = 150$ dollars liduriens, dont $a_2 = 50$ dollars de tissu; elle est revendue $v = 350$ dollars et soldée à $r_1 = 90$ dollars. Le coût de rupture c_r est égal à la marge: $c_r = v - a_1 = 350 - 150 = 200$ dollars liduriens. Une «unité - robe» non vendue a donc un coût de possession $c_{p1} = a_1 - r_1 = 150 - 90 = 60$ tandis qu'une «unité - tissu» non utilisée est soldée (vente à des forains...) à $r_2 = 20$ dollars a un coût de possession $c_{p2} = a_2 - r_2 = 50 - 20 = 30$ dollars liduriens. **Ce second étage ne se justifie que si $c_{p1} > c_{p2}$** car, dans le cas contraire, il est plus avantageux d'avoir des invendus-robes que des invendus-tissus. On supposera enfin qu'une rupture de stock du modèle étudié se traduit par une probabilité de 30% de rattrapage de la vente par le système de secours basé sur le tissu stocké.

Cette probabilité fait que si l'on a retenu pour S_1 , par exemple, la valeur 11000, une demande de 13000, c'est-à-dire de 2000 robes supplémentaires, ne sera satisfaite qu'à concurrence de $11000 + 2000 \times 0,3 = 11600$. Inversement un stock S_2 de 600 est correctement «calibré» pour une demande supplémentaire de $600 / 0,3 = S_2 / p = 2000$ robes. Cette remarque nous conduira à distinguer trois cas de figure

dans la demande: demande inférieure à S_1 , demande comprise entre S_1 et $S_1 + S_2 / p$, et demande supérieure à $S_1 + S_2 / p$. Le problème posé est alors celui de la détermination des stocks S_1 et S_2 .

II-1.2 Analyse du problème

L'analyse de ce problème peut s'effectuer en utilisant deux approches: celle du coût différentiel et l'approche directe. Après les avoir examinées toutes les deux, nous verrons en quoi la première approche est préférable à la seconde, puis une solution du problème par l'approche marginaliste.

II-1.2.1 Résultats analytiques

Le coût d'exploitation du système $C(S_1, S_2)$ s'analyse comme la somme de deux coûts:

$$C(S_1, S_2) = C(S_1) + C(S_2/S_1) \quad \text{relation 178}$$

- où:

$$C(S_1) = c_{p1} \cdot I_p(S_1) + c_r \cdot I_r(S_1) = c_{p1} \int_0^{S_1} (S_1 - x)f(x)dx + c_r \int_{S_1}^{\infty} (x - S_1)f(x)dx \quad \text{relation 179}$$

dépend du stock de produits finis S_1 et pas du stock S_2 de produits semi-finis ou de matières premières,

- et où $C(S_2 / S_1)$ est un coût différentiel associé au stock de produits semi-finis S_2 , sachant que le stock de produits finis est au niveau S_1 (la notation probabiliste est adoptée ici, aussi S_2 / S_1 ne signifie pas « S_2 divisé par S_1 »).

Table des matières

L'analyse de ce dernier coût est relativement simple, à condition de procéder méthodiquement. Il convient, en effet, de tenir compte de trois cas de figure: la demande sur la période peut être inférieure à S_1 ou comprise entre S_1 et $S_1 + S_2 / p$, ou enfin supérieure à $S_1 + S_2 / p$:

Index thématique

- **Cas 1.** $x < S_1$: le stock supplémentaire S_2 ne servira pas et le coût associé à cet événement est $c_{p2} \cdot S_2$, avec une probabilité $P(x < S_1)$,

- **Cas 2.** $S_1 < x < S_1 + S_2 / p$: le stock résiduel de produits semi-finis en fin de période est égal au stock départ S_2 diminué de la fraction p de la demande ($x - S_1$). Le coût de possession c_{p2} portera donc sur $S_2 - p \cdot (x - S_1)$ et son espé-

rance mathématique est $c_{p2} \int_{S_1}^{S_1 + S_2/p} [S_2 - p(x - S_1)]f(x)dx$. La satisfaction de

la fraction p de la demande ($x - S_1$) permet d'éviter le coût de rupture c_r qui est pris en compte dans le calcul de $C(S_1)$ pour $x > S_1$, tant que la demande reste inférieure à $S_1 + S_2 / p$. Il convient donc d'intégrer au coût $C(S_2 / S_1)$

cette diminution de coût imputable à S_2 : $-p \cdot c_r \int_{S_1}^{S_1 + S_2/p} (x - S_1)f(x)dx$

- **Cas 3.** $x > S_1 + S_2 / p$: dans ce cas, la totalité du stock S_2 est utilisée, ce qui diminue de $c_r S_2$ la perte enregistrée dans le cas où seul le stock S_1 existe, avec une probabilité $P(x > S_1 + S_2 / p)$. L'espérance mathématique de cette

$$\text{économie de dépenses est: } -c_r \cdot S_2 \int_{S_1 + S_2/p}^{\infty} f(x) dx$$

En définitive on a :

$$C(S_2/S_1) = c_{p2} \left[S_2 \int_0^{S_1} f(x) dx + \int_{S_1}^{S_1 + S_2/p} [S_2 - p(x - S_1)] f(x) dx \right] - c_r \left[p \int_{S_1}^{S_1 + S_2/p} (x - S_1) f(x) dx + S_2 \int_{S_1 + S_2/p}^{\infty} f(x) dx \right] \quad \text{relation 180}$$

La première expression entre crochets correspond au stock moyen résiduel du produit semi-fini $I_p(S_2)$ qui peut encore s'écrire, en utilisant les notations classi-

$$\text{ques } I_p(S) = \left[\int_0^S (S - x) f(x) dx \right] \text{ et } I_r(S) = \left[\int_S^{\infty} (x - S) f(x) dx \right] :$$

$$I_p(S_2) = S_2 P(X < S_1 + S_2/p) - p \{ I_r(S_1) - I_r(S_1 + S_2/p) \}$$

Stock moyen résiduel du 2^o étage relation 181

La seconde expression entre crochets de la [relation 180](#) correspond à la diminution moyenne de rupture de stock que l'on peut encore écrire :

$$p \{ I_r(S_1) - I_r(S_1 + S_2/p) \} + S_2 P(x > S_1 + S_2/p) \quad \text{diminution moyenne de rupture de stock imputable au second étage} \quad \text{relation 182}$$

Dans ces conditions, la *rupture moyenne totale* obtenue avec les deux étages est donnée par la [relation 183](#) :

$$I_r(S_1, S_2) = I_r(S_1) - [p \{ I_r(S_1) - I_r(S_1 + S_2/p) \} + S_2 P(x > S_1 + S_2/p)]$$

Rupture moyenne de stock (stock à 2 étages) relation 183

le *coût différentiel* $C(S_2 / S_1)$ de la [relation 180](#) se simplifie pour devenir :

$$C(S_2/S_1) = c_{p2} [S_2 P(X < S_1 + S_2/p) - p \{ I_r(S_1) - I_r(S_1 + S_2/p) \}] - c_r [p \{ I_r(S_1) - I_r(S_1 + S_2/p) \} + S_2 P(x > S_1 + S_2/p)] \quad \text{relation 184}$$

et le *coût total* (en reprenant les relations [178](#) et [179](#), page 723) :

$$C(S_1, S_2) = c_{p1} \cdot I_p(S_1) + c_{p2} [S_2 P(X < S_1 + S_2/p) - p \{ I_r(S_1) - I_r(S_1 + S_2/p) \}] + c_r [I_r(S_1) - \{ p \{ I_r(S_1) - I_r(S_1 + S_2/p) \} + S_2 P(x > S_1 + S_2/p) \}] \quad \text{relation 185}$$

La *dépense totale* sera égale au coût de fabrication des robes qui sont produites à partir des stocks S_1 (dépense certaine) et de tout ou partie de S_2 (en moyenne

$S_2 - I_p(S_2)$) au coût c_{p1} , auquel il faut ajouter l'achat du tissu inutilisé $I_p(S_2)$ et soldé ($c_{p2}I_p(S_2)$) et retrancher la valeur des robes soldées $r_1I_p(S_1)$.

$$a_1[S_1 + \{S_2 - I_p(S_2)\}] + c_{p2}I_p(S_2) - r_1I_p(S_1) \quad \text{relation 186}$$

La *marge totale* sera égale (relation 187) à la recette unitaire v multipliée par la demande moyenne satisfaite ($\bar{x} - I_r(S_1, S_2)$), moins la dépense totale. Elle peut être également calculée (relation 188) comme le produit de la demande moyenne satisfaite ($\bar{x} - I_r(S_1, S_2)$) par la marge unitaire c_r , moins le coût de gestion de la

$$B(S) = v[\bar{x} - I_r(S_1, S_2)] - [a_1[S_1 + \{S_2 - I_p(S_2)\}] + c_{p2}I_p(S_2) - r_1I_p(S_1)]$$

relation 187

$$B(S) = c_r[\bar{x} - I_r(S_1, S_2)] - C(S_1, S_2)$$

relation 188

La recherche du coût minimum implique que les dérivées partielles de la fonction de coût $C(S_1, S_2)$ par rapport à S_1 et à S_2 soient nulles. Examinons tout d'abord la dérivée par rapport à S_2 :

$$\frac{\partial C(S_1, S_2)}{\partial S_2} = 0 = \frac{\partial C(S_1)}{\partial S_2} + \frac{\partial C(S_2/S_1)}{\partial S_2} = 0 + \frac{\partial C(S_2/S_1)}{\partial S_2}, \text{ puisque } S_2 \text{ n'intervient}$$

pas du tout dans le coût $C(S_1)$.

On montre après quelques calculs¹ que :

$$P\left(X > S_1^* + \frac{S_2^*}{p}\right) = \frac{c_{p2}}{c_r + c_{p2}}, \text{ ou encore } P\left(X < S_1^* + \frac{S_2^*}{p}\right) = \frac{c_r}{c_r + c_{p2}} \quad \text{relation 189}$$

Cette dernière relation est comparable à la relation 148 de la page 676, à ceci près que la probabilité n'est pas calculée à partir d'une demande satisfaite : $P(X < S_1)$, mais à partir d'une demande partiellement satisfaite : $P(X < S_1 + S_2/p)$.

La recherche du coût minimum implique également que l'on ait :

$$\frac{\partial C(S_1, S_2)}{\partial S_1} = \frac{\partial C(S_1)}{\partial S_1} + \frac{\partial C(S_2/S_1)}{\partial S_1} = 0$$

On sait déjà (relation 147, page 675) que $\frac{\partial C(S_1)}{\partial S_1} = -c_r + (c_r + c_{p1}) \cdot P(X < S_1)$.

Il ne reste plus qu'à calculer la seconde dérivée², qui conduit à :

$$\frac{\partial C(S_2/S_1)}{\partial S_1} = p(c_{p2} + c_r)[P(X < S_1 + S_2/p) - P(X < S_1)]$$

On a donc³ :

$$P(X < S_1) = \frac{(1-p)c_r}{(1-p)c_r + c_{p1} - pc_{p2}}, \text{ ou } P(X > S_1) = \frac{c_{p1} - pc_{p2}}{(1-p)c_r + c_{p1} - pc_{p2}}$$

relation 190

On peut ajouter que $S_1 + S_2/p > S_1$ implique d'avoir une valeur de p telle que

$$P(X > S_1) > P(X > S_1 + S_2/p) \Rightarrow \frac{c_{p2}}{c_r + c_{p2}} > \frac{c_{p1} - pc_{p2}}{(1-p)c_r + c_{p1} - pc_{p2}}.$$

II-1.2.2 Généralisation

L'intérêt de la formulation différentielle réside dans sa récurrence. Si l'on ajoute un 3^e étage, susceptible de récupérer une fraction q (avec $q < p$) de la demande lorsque celle-ci est comprise entre $S_1 + S_2/p$ et $S_1 + S_2/p + S_3/q$, on

1. *Note de la page 725.* Il faut calculer les dérivées partielles par rapport à S_2 des 4 fonctions intervenant dans le coût différentiel $C(S_2/S_1)$ défini par la relation 184 de la page 724, en utilisant la formule de Leibniz :

- le calcul de $\frac{\partial \left[\int_0^{S_1} f(x) dx \right]}{\partial S_2}$ conduit, à poser $g(S_2, x) = S_2 f(x)$, $a(S_2) = 0$ et $b(S_2) = S_1$, d'où l'on tire $\frac{\partial g(S_2, x)}{\partial S_2} = f(x)$,

$$\frac{d a(S_2)}{d S_2} = 0 \text{ et } \frac{d b(S_2)}{d S_2} = 0 ; \text{ d'où } \frac{\partial \left[\int_0^{S_1} f(x) dx \right]}{\partial S_2} = \int_0^{S_1} f(x) dx + 0 - 0$$

- le calcul de $\frac{\partial \left\{ \int_{S_1}^{S_1+S_2/p} (S_2 - p(x - S_1)) f(x) dx \right\}}{\partial S_2}$ conduit, à poser $g(S_2, x) = (S_2 - p(x - S_1)) f(x)$, $a(S_2) = S_1$ et $b(S_2) = S_1 + S_2/p$, d'où l'on tire $\frac{\partial g(S_2, x)}{\partial S_2} = f(x)$, $\frac{d a(S_2)}{d S_2} = 0$ et $\frac{d b(S_2)}{d S_2} = \frac{1}{p}$, d'où :

$$\frac{\partial \left\{ \int_{S_1}^{S_1+S_2/p} (S_2 - p(x - S_1)) f(x) dx \right\}}{\partial S_2} = \int_{S_1}^{S_1+S_2/p} f(x) dx + \frac{1}{p} \cdot [S_2 - p(S_1 + \frac{S_2}{p} - S_1)] f(S_1 + \frac{S_2}{p}) - 0 = \int_{S_1}^{S_1+S_2/p} f(x) dx$$

- le calcul de $\frac{\partial \left\{ \int_{S_1}^{S_1+S_2/p} p(x - S_1) f(x) dx \right\}}{\partial S_2}$ conduit, à poser $g(S_2, x) = p(x - S_1) f(x)$, $a(S_2) = S_1$ et $b(S_2) = S_1 + S_2/p$, d'où

l'on tire $\frac{\partial g(S_2, x)}{\partial S_2} = 0$, $\frac{d a(S_2)}{d S_2} = 0$ et $\frac{d b(S_2)}{d S_2} = \frac{1}{p}$, d'où :

$$\frac{\partial \left\{ \int_{S_1}^{S_1+S_2/p} p(x - S_1) f(x) dx \right\}}{\partial S_2} = 0 + \frac{1}{p} p \left(S_1 + \frac{S_2}{p} - S_1 \right) f \left(S_1 + \frac{S_2}{p} \right) - 0 = \frac{S_2}{p} f \left(S_1 + \frac{S_2}{p} \right)$$

- le calcul de $\frac{\partial \left\{ \int_{S_1+S_2/p}^{\infty} f(x) dx \right\}}{\partial S_2}$ conduit, à poser $g(S_2, x) = S_2 f(x)$, $a(S_2) = S_1 + S_2/p$ et $b(S_2) = \infty$, d'où l'on tire

$$\frac{\partial g(S_2, x)}{\partial S_2} = f(x), \frac{d a(S_2)}{d S_2} = \frac{1}{p} \text{ et } \frac{d b(S_2)}{d S_2} = 0 ; \text{ d'où } \frac{\partial \left\{ \int_{S_1+S_2/p}^{\infty} f(x) dx \right\}}{\partial S_2} = \int_{S_1+S_2/p}^{\infty} f(x) dx - \frac{S_2}{p} f \left(S_1 + \frac{S_2}{p} \right)$$

Il s'ensuit que : $\frac{\partial C(S_2/S_1)}{\partial S_2} = c_{p2} \left[\int_0^{S_1} f(x) dx + \int_{S_1}^{S_1+S_2/p} f(x) dx \right] - c_r \cdot \left[\frac{S_2}{p} \cdot f \left(S_1 + \frac{S_2}{p} \right) + \left(\int_{S_1+S_2/p}^{\infty} f(x) dx - \frac{S_2}{p} \cdot f \left(S_1 + \frac{S_2}{p} \right) \right) \right]$ et

$$\frac{\partial C(S_2/S_1)}{\partial S_2} = c_{p2} \int_0^{S_1+S_2/p} f(x) dx - c_r \int_{S_1+S_2/p}^{\infty} f(x) dx = (c_r + c_{p2}) \int_0^{S_1+S_2/p} f(x) dx - c_r, \text{ d'où la relation 189.}$$

obtient alors comme diminution de la rupture moyenne imputable à la présence de ce 3^e étage :

$$q \int_{S_1+S_2/p}^{S_1+S_2/p+S_3/q} \left(x - S_1 - \frac{S_2}{p}\right) f(x) dx + S_3 \int_{S_1+S_2/p+S_3/q}^{\infty} f(x) dx$$

tandis que l'accroissement du coût de possession est :

2. Note de la page 725. Il faut calculer les dérivées partielles par rapport à S_1 des 4 fonctions intervenant dans le coût différentiel $C(S_2/S_1)$ défini par la relation 184 de la page 724, en utilisant la formule de Leibniz :

- le calcul de $\frac{\partial \left[\int_0^{S_1} S_2 f(x) dx \right]}{\partial S_1}$ conduit, à poser $g(S_1, x) = S_2 f(x)$, $a(S_1) = 0$ et $b(S_1) = S_1$ d'où l'on tire $\frac{\partial g(S_1, x)}{\partial S_1} = 0$,

$$\frac{d a(S_1)}{d S_1} = 0 \text{ et } \frac{d b(S_1)}{d S_1} = 1 ; \text{ d'où } \frac{\partial \left[\int_0^{S_1} S_2 f(x) dx \right]}{\partial S_1} = 0 + 1 \cdot S_2 f(S_1) - 0 = S_2 f(S_1)$$

- le calcul de $\frac{\partial \left\{ \int_{S_1}^{S_1+S_2/p} (S_2 - p(x - S_1)) f(x) dx \right\}}{\partial S_1}$ conduit, à poser $g(S_1, x) = (S_2 - p(x - S_1)) f(x)$, $a(S_1) = S_1$ et

$$b(S_1) = S_1 + S_2/p, \text{ d'où l'on tire } \frac{\partial g(S_1, x)}{\partial S_1} = f(x), \frac{d a(S_1)}{d S_1} = 1 \text{ et } \frac{d b(S_1)}{d S_1} = 1, \text{ d'où : } \frac{\partial \left\{ \int_{S_1}^{S_1+S_2/p} (S_2 - p(x - S_1)) f(x) dx \right\}}{\partial S_1} =$$

$$p \int_{S_1}^{S_1+S_2/p} f(x) dx + \left[S_2 - p \left(S_1 + \frac{S_2}{p} - S_1 \right) \right] f \left(S_1 + \frac{S_2}{p} \right) + \left[S_2 - p(S_1 - S_1) \right] f(S_1) = p \int_{S_1}^{S_1+S_2/p} f(x) dx - S_2 f(S_1)$$

- le calcul de $\frac{\partial \left\{ \int_{S_1}^{S_1+S_2/p} p(x - S_1) f(x) dx \right\}}{\partial S_1}$ conduit, à poser $g(S_1, x) = p(x - S_1) f(x)$, $a(S_1) = S_1$ et $b(S_1) = S_1 + S_2/p$, d'où

$$\text{l'on tire } \frac{\partial g(S_1, x)}{\partial S_1} = -p \cdot f(x), \frac{d a(S_1)}{d S_1} = 1 \text{ et } \frac{d b(S_1)}{d S_1} = 1, \text{ d'où :}$$

$$\frac{\partial \left\{ \int_{S_1}^{S_1+S_2/p} p(x - S_1) f(x) dx \right\}}{\partial S_1} = -p \int_{S_1}^{S_1+S_2/p} f(x) dx + \left[S_2 - p \left(S_1 + \frac{S_2}{p} - S_1 \right) \right] f \left(S_1 + \frac{S_2}{p} \right) - p(S_1 - S_1) f(S_1) = -p \int_{S_1}^{S_1+S_2/p} f(x) dx + S_2 f(S_1 + S_2/p)$$

- le calcul de $\frac{\partial \left\{ S_2 \int_{S_1+S_2/p}^{\infty} f(x) dx \right\}}{\partial S_1}$ conduit, à poser $g(S_1, x) = S_2 f(x)$, $a(S_1) = S_1 + S_2/p$ et $b(S_1) = \infty$, d'où l'on tire

$$\frac{\partial g(S_1, x)}{\partial S_1} = 0, \frac{d a(S_1)}{d S_1} = 1 \text{ et } \frac{d b(S_1)}{d S_1} = 0 ; \text{ d'où } \frac{\partial \left\{ S_2 \int_{S_1+S_2/p}^{\infty} f(x) dx \right\}}{\partial S_1} = 0 + 0 - S_2 f(S_1 + S_2/p) = -S_2 f(S_1 + S_2/p)$$

$$\text{D'où : } \frac{\partial C(S_2/S_1)}{\partial S_1} = c_{p2} \left[S_2 f(S_1) + p \int_{S_1}^{S_1+S_2/p} f(x) dx - S_2 f(S_1) \right] - c_r \left[\left(-p \int_{S_1}^{S_1+S_2/p} f(x) dx + S_2 f(S_1 + S_2/p) \right) - S_2 f(S_1 + S_2/p) \right]$$

$$\frac{\partial C(S_2/S_1)}{\partial S_1} = p(c_{p2} + c_r) \int_{S_1}^{S_1+S_2/p} f(x) dx = p(c_{p2} + c_r) [P(X < S_1 + S_2/p) - P(X < S_1)]$$

Table des matières

Index thématique

$$c_{p3} \left[S_3 \int_0^{S_1 + S_2/p} f(x) dx + \int_{S_1 + S_2/p}^{S_1 + S_2/p + S_3/q} \left(S_3 - q \left(x - S_1 - \frac{S_2}{p} \right) f(x) dx \right) \right]$$

En ajoutant les dérivées partielles du coût différentiel introduit par la présence du troisième étage, on trouve à l'optimum :

$$P\left(X > S_1 + \frac{S_2}{p} + \frac{S_3}{q}\right) = \frac{c_{p3}}{c_r + c_{p3}} \quad (\text{adaptation de la relation 189}) \quad \text{relation 191}$$

$$P\left(X > S_1 + \frac{S_2}{p}\right) = \frac{pc_{p2} - qc_{p3}}{(p-q)c_r + pc_{p2} - qc_{p3}}$$

(adaptation de la relation 190) relation 192

$$P(X > S_1) = \frac{c_{p1} - pc_{p2}}{c_r(1-p) + c_{p1} - pc_{p2}} \quad (\text{relation 190})$$

II-1.2.3 Application directe du raisonnement marginaliste

On aurait pu trouver directement ces trois relations en utilisant le raisonnement marginaliste (cf. § I-1.4.1, page 688) et donc en évitant bien des calculs !

Dans le cas d'un stock à **deux** étages :

- La présence du second stock a un coût de rupture qui est de $(1-p)c_r$, puisque le second étage permet de «rattraper» la fraction p de la demande. La probabilité d'occurrence de ce coût est toujours $P(X \geq S_1)$ et donc l'espérance mathématique de ce coût marginal est $(1-p)c_r P(X \geq S_1)$.
- Par ailleurs, si l'on détient pour rien la dernière robe stockée, ce qui a une probabilité $P(X < S_1)$ de se réaliser, on a un coût de possession qui serait seulement de c_{p1} si le second étage du magasin n'existait pas ; toutefois, en augmentant d'une unité le stock S_1 , on diminue d'une unité le stock S_2 mais en termes de vente, une unité du second étage (qui, elle aussi, n'aurait pas été vendue si $X < S_1$) est égale à une fraction p d'une unité du premier étage, ce qui fait que l'on doit diminuer c_{p1} de $p \cdot c_{p2}$ seulement.

Dans ces conditions, le coût de possession de l'unité marginale est $(c_{p1} - pc_{p2})P(X < S_1)$. Pour que le stock S_1 soit optimal, nous avons vu (au § I-1.4) que les espérances mathématiques du coût de possession et de rupture doivent être égales, et donc que : $(c_{p1} - pc_{p2})P(X < S_1) = (1-p)c_r P(X \geq S_1) = (1-p)c_r [1 - P(X < S_1)]$, d'où la relation 190. La relation 189 de la page 725 s'obtient également sans aucune difficulté en faisant appel au raisonnement marginaliste (reprise directe du raisonnement tenu au § I-1.4.1, page 688).

3. Note de la page 725. $-c_r + (c_r + c_{p1})P(X < S_1) + p(c_{p2} + c_r)[P(X < S_1 + S_2/p) - P(X < S_1)] = 0$

$-c_r + [(1-p)c_r + c_{p1} - pc_{p2}]\{P(X < S_1) + p(c_{p2} + c_r)P(X < S_1 + S_2/p)\} = 0$, d'où, en utilisant la relation 189 de la page 725 :

$-c_r + [(1-p)c_r + c_{p1} - pc_{p2}]\left\{P(X < S_1) + p(c_{p2} + c_r) \frac{c_r}{c_{p2} + c_r}\right\} = 0$

Dans le cas du stock à **trois** étages, les égalités des espérances mathématiques des coûts marginaux de possession et de rupture entre 2 étages successifs sont, en suivant un raisonnement similaire :

$$c_r(1-p)P(X \geq S_1) = (c_{p1} - pc_{p2})P(X < S_1)$$

$$c_r(p-q)P\left(X \geq S_1 + \frac{S_2}{p}\right) = (pc_{p2} - qc_{p3})P\left(X < S_1 + \frac{S_2}{p}\right)$$

$$c_rP\left(X \geq S_1 + \frac{S_2}{p} + \frac{S_3}{q}\right) = c_{p3}P\left(X < S_1 + \frac{S_2}{p} + \frac{S_3}{q}\right)$$

II-1.3 Solution numérique de l'exemple introductif

D'après la [relation 190 de la page 725](#), on peut écrire :

$$P(X > S_1^*) = \frac{70 - (0,3 \times 30)}{(1 - 0,3) \times 200 + 70 - (0,3 \times 30)} = 23,74\%$$

Une lecture de table de la loi Normale et une interpolation donnent comme valeur de la variable centrée réduite correspondant à cette probabilité de rupture $t = 0,7148$. On en tire $S_1 = 10000 + 0,7148 \times 2000 = 11430$ qui est le nombre de robes à fabriquer.

La [relation 189, page 725](#), permet d'écrire :

$$P\left(X \geq S_1^* + \frac{S_2^*}{p}\right) = P\left(X > 11430 + \frac{S_2^*}{0,3}\right) = \frac{200}{200 + 30} = 13,04\%$$

Cette probabilité correspond à une valeur de la variable centrée réduite de 1,12434, d'où une valeur de stock $11430 + \frac{S_2^*}{0,3}$ de 12249. On en tire $S_2^* = 246$.

La politique de **NEW GIRL** consiste donc à fabriquer 11 430 robes de la taille M, et à constituer un stock de tissu permettant de fabriquer ultérieurement 246 autres robes. Le [tableau 198 de la page 730](#) retrace l'ensemble des conséquences de cette politique.

II-2 Gestion calendaire d'articles stockables à délai d'obtention non nul

Pour les articles stockables, l'existence d'un délai d'obtention empêche de définir la politique optimale d'une période sans tenir compte de ce qui se passe dans les périodes précédentes, comme nous l'avons fait dans la première section. Cette interdépendance temporelle n'est pas trop lourde de conséquences lorsque la demande non satisfaite peut être différée, car une solution analytique permettant de créer facilement des tables de décisions peut être trouvée. Il n'en est plus de même lorsque la demande non satisfaite est perdue pour le système d'approvisionnement étudié (même si elle est rattrapable en totalité par un système d'approvisionnement «de secours»), car la solution dépend du niveau de recomplètement observé lors de la passation de la commande.

TABLEAU 198

Politique optimale d'approvisionnement de **NEW GIRL**

Conséquences physiques de la politique d'approvisionnement	par période de révision calendaire
Probabilité de rupture de stock de l'étage 1	23,74%
Stock de robes (S1)	11430
Probabilité de rupture de stock de l'étage 2	13,04%
S1+S2/p	12249
S2	246
Rupture moyenne de stock de l'étage 1	278,45
Diminution moyenne de rupture de stock due à l'étage 2	76,39
Rupture moyenne de stock totale	202,06
% de demandes non satisfaites	2,02%
Stock résiduel moyen de l'étage 1	1708,45
Stock résiduel moyen de l'étage 2	169,31
Demande moyenne satisfaite	9797,94
Conséquences financières de la politique d'approvisionnement	
Coût de gestion moyen	165 083,96
Dépense totale moyenne	1 594 361,28
Marge totale moyenne	1 834 916,04

II-2.1 Cas des demandes différées

II-2.1.1 Exemple introductif

Le dépôt régional de **MAXITYRE**, fabricant de pneumatiques automobiles, pratique une gestion calendaire de ses stocks, le délai de révision calendaire étant de 20 jours ouvrables ($T = 20$) et le délai d'obtention de 10 jours ouvrables ($L = 10$). Le pneu qui connaît le plus grand succès dans sa gamme « automobile » est le CRT, pneu à carcasse radiale. On étudiera la politique optimale suivie pour la référence CRT 12 qui correspond à la dimension la plus demandée et dont la demande annuelle suit la loi $\mathcal{N}(2600 ; 180)$. La demande X_T pendant la période de révision calendaire T suit alors la loi $\mathcal{N}(120 ; 49,92)$ et la demande X_L pendant le délai d'obtention suit la loi $\mathcal{N}(100 ; 33,30)$. L'unité de demande utilisée ici est la paire de pneus, achetée 390 dollars liduriens HT et vendue aux garagistes 500 dollars. Le dépôt de **MAXITYRE** a décidé de poursuivre une politique commerciale agressive sur ce créneau fortement concurrentiel. Le dépôt est ouvert 5 jours par semaine et 52 semaines par an, c'est-à-dire 260 jours ouvrables par an. Le coût de possession est calculé sur la base d'un taux d'opportunité de 20 %, ce qui donne $c_p = 0,2 \times 390 = 78$ dollars liduriens/an; d'où un coût de possession de $78 \times (20 / 260) = 6$ dollars sur la période de révision calendaire. Le problème posé est celui de la détermination de la politique optimale d'approvisionnement si l'on suppose que toute demande non satisfaite est différée et que le coût d'une demande différée (constitution de dossier...) est de 10 dollars liduriens / article.

II-2.1.2 Analyse du problème

La commande passée sera égale à la différence entre le niveau de reapprovisionnement S et la position de stock, que nous avons définie (page 471) comme étant le stock détenu, plus les livraisons attendues (ce cas ne se produisant que si le délai d'obtention est supérieur à la période de révision calendaire, cas qui n'est pas exclu dans cette analyse) moins les demandes non satisfaites. La position de stock peut fort bien être négative; dans notre exemple si le niveau de reapprovisionnement est de 130 paires, et si la rupture de stock est de 20 paires au moment où la commande est passée (d'où une position de stock de -20), **MAXITYRE** commandera 150 paires.

Si aucune demande n'arrivait entre le moment où la commande est passée et la livraison, qui se produit par hypothèse au début d'une période de révision calendaire, un stock de S unités serait alors disponible, comme dans le cas du délai d'obtention nul. Ce cas limite a peu de chances de se produire et la position de stock sera $S - X_L$, c'est-à-dire le niveau de reapprovisionnement diminué de la demande durant le délai d'obtention. En fin de période de révision calendaire, la position de stock sera celle du début de période diminuée de la demande X_T durant cette période, c'est-à-dire $S - X_L - X_T$. Ce stock en fin de période n'est pas influencé par la décision d'approvisionnement prise pendant la période de révision calendaire, car elle n'aura d'effet qu'après cette date.

La détermination de la politique optimale passera donc par la recherche du coût minimum de gestion pendant la période de révision calendaire, coût qui ne dépendra que de S , X_L et X_T .

Pour formaliser correctement le problème posé, il est préférable de faire appel à des graphiques explicitant les différents cas de figure possibles. On notera R_t la position des stocks à la date t . Si à la date t une livraison est effectuée, on notera R_{tv} , la position de stock en t avant livraison, et R_{tp} , la position de stock après livraison.

Les figures du [tableau 199 de la page 732](#) ne reprennent pas les données de l'exemple introductif ($T = 20$, $L = 10$) mais des données différentes ($T = 5$ et $L = 2$), pour rendre plus facile la lecture des positions de stock R_{tp} et R_{tv} (remplacement de t par une date ne comportant qu'un seul chiffre).

Ajoutons enfin que l'hypothèse simplificatrice de rupture de stock se produisant nécessairement en fin de période (cf. § I-2.1.2, page 709) sera retenue pour le calcul du stock moyen possédé. La solution analytique que l'on trouvera sera donc approchée, et d'autant plus proche de la solution exacte que la probabilité de rupture sera faible¹.

L'espérance mathématique du coût de gestion pendant la période de révision calendaire est donc, dans le cas continu et si l'on note f_T et f_L les fonctions de densité de probabilité des demandes pendant un temps T et un temps L : (la

1. On peut ajouter que certains auteurs comme Hadley & Whitin (1966, [212]), p. 235, ou Johnson & Montgomery (1974, [245]), p. 57 aboutissent à une solution analytique différente, en partant d'hypothèses simplificatrices plus fortes.

TABLEAU 199

Analyse de l’approvisionnement calendaire d’articles stockables à délai d’obtention non nul – cas des demandes différées –

		Calcul du stock moyen possédé et de la rupture moyenne entre $t = L = 2$ et $t = T + L = 7$	
		Stock possédé entre $t = 2$ et $t = 7$: $(R_{2p} + R_{7v})/2$, avec	
		<ul style="list-style-type: none"> • R_{7v} stock observé à la date t avant livraison • R_{2p} stock observé à la date t après livraison 	
		Pas de rupture de stock en $t = 7$ (demande $x_T < R_{2p}$)	Rupture de stock en $t = 7$ (demande $x_T > R_{2p}$)
		<ul style="list-style-type: none"> • $R_{7v} = R_{2p} - x_T = S - x_L - x_T$ • rupture de stock: 0 	<ul style="list-style-type: none"> • $R_{7v} = 0$ • rupture de stock: $x_T - R_{2p}$
Pas de rupture de stock en $t = L = 2$ après livraison: $x_L < S$	Stock moyen possédé	$\frac{(S - x_L) + (S - x_L - x_T)}{2} = S - x_L - \frac{x_T}{2}$	$\frac{(S - x_L) + 0}{2} = \frac{S - x_L}{2}$
	Rupture moyenne	0	$x_T - (S - x_L) = x_T + x_L - S$
Rupture de stock en $t = L = 2$ après livraison: $x_L > S$	Stock moyen possédé	Impossible d’avoir $R_{7v} > R_{2\&p}$	
	Rupture moyenne	$x_T - (S - x_L) = x_T + x_L - S$	

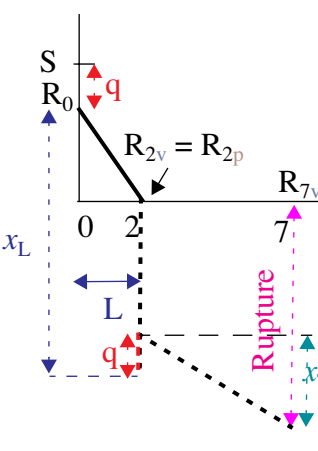
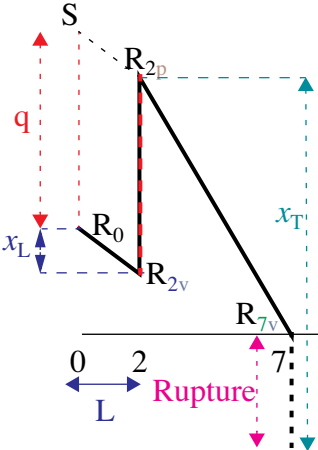
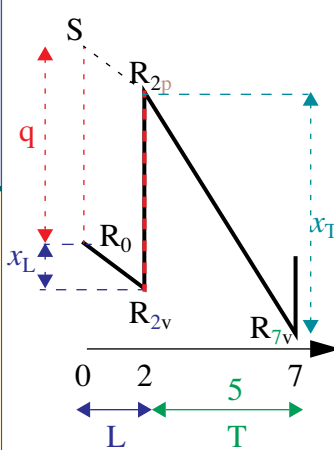


Table des matières

Index thématique

première expression entre crochets représentant le stock moyen possédé et la seconde, la rupture moyenne):

$$\begin{aligned}
 C(S) = & c_p \int_0^S \left\{ \int_0^{S-x_L} \left(S - x_L - \frac{x_T}{2} \right) f_T(x_T) dx_T \right\} f_L(x_L) dx_L \\
 & + \left\{ \int_{S-x_L}^{\infty} \left(\frac{S-x_L}{2} \right) f_T(x_T) dx_T \right\} f_L(x_L) dx_L \\
 & + c_r \int_0^S \left\{ \int_{S-x_L}^{\infty} (x_T + x_L - S) f_T(x_T) dx_T \right\} f_L(x_L) dx_L \\
 & + \int_S^{\infty} \left\{ \int_0^{\infty} (x_T + x_L - S) f_T(x_T) dx_T \right\} f_L(x_L) dx_L
 \end{aligned}$$

La solution optimale est obtenue¹ pour :

$$\int_0^S \left\{ \int_0^{S-x_L} f_T(x_T) dx_T \right\} f_L(x_L) dx_L = \frac{c_r - (c_p/2)P(X_L < S)}{c_r + c_p/2} \tag{relation 193}$$

Cette relation 193 amène quatre remarques.

II-2.1.2.1 Indépendance des demandes et condition d'optimalité

Table des matières

La double intégration s'interprète comme la probabilité que la demande durant la période T + L soit inférieure à S. Or, mathématiquement la densité de probabilité de S, pour une loi définie sur la période T + L, est $f_{T+L}(S)$:

Index thématique

$$\frac{\partial}{\partial S} \int_0^S f_{T+L}(x_{T+L}) dx_{T+L} = f_{T+L}(S)$$

tandis que l'on démontre² que :

$$\frac{\partial}{\partial S} \int_0^S \left\{ \int_0^{S-x_L} f_T(x_T) dx_T \right\} \cdot f_L(x_L) dx_L = \int_0^S f_L(x_L) \cdot f_T(S-x_L) dx_L$$

Il n'y a, a priori, aucune raison d'avoir : $f_{T+L}(S) = \int_0^S f_L(x_L) \cdot f_T(S-x_L) dx_L$ sauf

s'il y a indépendance en probabilité entre la demande durant la période T et la demande durant la période L. Si l'on suppose que la position de stock n'influe pas sur la demande (achats de précaution ou de spéculation), on pourra faire raisonnablement cette hypothèse.

Dans ces conditions, la relation 193 se transforme pour donner la relation 194 de la page 735 :

1. Note de la page 733. D'une manière générale, on démontre que :

$$\frac{\partial}{\partial S} \int_a^{f(S)} \left[\int_b^{g(S, x_L)} h(S, x_L, x_T) \cdot dx_T \right] dx_L = \int_a^{f(S)} \left[\int_b^{g(S, x_L)} \left\{ \frac{\partial h(S, x_L, x_T)}{\partial S} \right\} \cdot dx_T \right] dx_L + \frac{\partial f(S)}{\partial S} \int_b^{g(S, f(S))} h\{S, f(S), x_T\} \cdot dx_T + \int_a^{f(S)} \left[h\{S, x_L, g(S, x_L)\} \cdot \frac{\partial g(S, x_L)}{\partial S} \right] dx_L$$

D'où l'on tire :

$$\bullet \frac{\partial}{\partial S} \int_0^{S-x_L} \left[\int_0^{S-x_L-\frac{x_T}{2}} f_T(x_T) dx_T \right] \cdot f_L(x_L) dx_L = \int_0^{S-x_L} \left[\int_0^{S-x_L} f_T(x_T) dx_T \right] \cdot f_L(x_L) dx_L + 1 \cdot \int_0^{S-x_L} \left(S-x_L-\frac{x_T}{2} \right) \cdot f_T(x_T) \cdot f_L(S) dx_T + \int_0^{S-x_L} \left(S-x_L-\frac{S-x_L}{2} \right) \cdot f_T(S-x_L) \cdot f_L(x_L) \cdot 1 \cdot dx_L = \int_0^{S-x_L} \left[\int_0^{S-x_L} f_T(x_T) dx_T \right] \cdot f_L(x_L) dx_L + \int_0^{S-x_L} \left(\frac{S-x_L}{2} \cdot f_T(S-x_L) \cdot f_L(x_L) \right) dx_L$$

$$\bullet \frac{\partial}{\partial S} \int_0^{S-x_L} \left[\int_{S-x_L}^{\infty} \frac{S-x_L}{2} \cdot f_T(x_T) dx_T \right] \cdot f_L(x_L) dx_L = \int_0^{S-x_L} \left[\int_{S-x_L}^{\infty} \frac{1}{2} \cdot f_T(x_T) dx_T \right] \cdot f_L(x_L) dx_L + 1 \cdot \int_{S-x_L}^{\infty} \left[\frac{S-S}{2} \cdot f_T(x_T) \cdot f_L(S) \right] dx_T - \int_0^{S-x_L} \left[\frac{S-x_L}{2} \cdot f_T(S-x_L) \cdot f_L(x_L) \cdot 1 \right] dx_L = \int_0^{S-x_L} \left[\int_{S-x_L}^{\infty} \frac{1}{2} \cdot f_T(x_T) dx_T \right] \cdot f_L(x_L) dx_L - \int_0^{S-x_L} \left[\frac{S-x_L}{2} \cdot f_T(S-x_L) \cdot f_L(x_L) \cdot 1 \right] dx_L$$

$$\bullet \frac{\partial}{\partial S} \left(\int_a^{f(S)} \left[\int_b^{g(S, x_L)} h(S, x_L, x_T) \cdot dx_T \right] dx_L + \int_0^{S-x_L} \left[\int_{S-x_L}^{\infty} \frac{S-x_L}{2} \cdot f_T(x_T) dx_T \right] \cdot f_L(x_L) dx_L \right) = \int_0^{S-x_L} \left[\int_0^{S-x_L} f_T(x_T) dx_T + \frac{1}{2} \int_{S-x_L}^{\infty} f_T(x_T) dx_T \right] \cdot f_L(x_L) dx_L = \int_0^{S-x_L} \left[\int_0^{S-x_L} f_T(x_T) dx_T + \frac{1}{2} \int_0^{S-x_L} f_T(x_T) dx_T + \frac{1}{2} \int_{S-x_L}^{\infty} f_T(x_T) dx_T \right] \cdot f_L(x_L) dx_L = \frac{1}{2} \int_0^{S-x_L} \left[\int_0^{S-x_L} f_T(x_T) dx_T \right] \cdot f_L(x_L) dx_L + \frac{1}{2} \int_0^S f_L(x_L) dx_L$$

$$\bullet \frac{\partial}{\partial S} \left(\int_0^{S-x_L} \left[\int_{S-x_L}^{\infty} (x_T+x_L-S) \cdot f_T(x_T) dx_T \right] \cdot f_L(x_L) dx_L \right) = - \int_0^{S-x_L} \left[\int_{S-x_L}^{\infty} f_T(x_T) dx_T \right] \cdot f_L(x_L) dx_L + 1 \cdot \int_{S-x_L}^{\infty} [(x_T+S-S) \cdot f_T(x_T) \cdot f_L(S)] dx_T - \int_0^S [(x_L+(S-x_L)-S) \cdot f_T(S-x_L) \cdot f_L(x_L) \cdot 1] dx_L = - \int_0^{S-x_L} \left[\int_{S-x_L}^{\infty} f_T(x_T) dx_T \right] \cdot f_L(x_L) dx_L + \bar{x}_T \cdot f_L(S)$$

$$\bullet \frac{\partial}{\partial S} \left(\int_0^{\infty} \left[\int_{S-x_L}^{\infty} (x_T+x_L-S) \cdot f_T(x_T) dx_T \right] \cdot f_L(x_L) dx_L \right) = - \int_0^{\infty} \left[\int_{S-x_L}^{\infty} f_T(x_T) dx_T \right] \cdot f_L(x_L) dx_L - 1 \cdot \int_0^{\infty} [(x_T+S-S) \cdot f_T(x_T) \cdot f_L(S)] dx_T + 0 = - \int_0^{\infty} f_L(x_L) dx_L - \bar{x}_T \cdot f_L(S)$$

$$\bullet \frac{\partial}{\partial S} \left[\int_0^S \left\{ \int_{S-x_L}^{\infty} (x_T+x_L-S) \cdot f_T(x_T) dx_T \right\} \cdot f_L(x_L) dx_L + \int_0^{\infty} \left\{ \int_{S-x_L}^{\infty} (x_T+x_L-S) \cdot f_T(x_T) dx_T \right\} \cdot f_L(x_L) dx_L \right] = - \int_0^{S-x_L} \left[\int_{S-x_L}^{\infty} f_T(x_T) dx_T \right] \cdot f_L(x_L) dx_L - \int_0^S f_L(x_L) dx_L = - \left[\int_0^{\infty} \left\{ \int_{S-x_L}^{\infty} f_T(x_T) dx_T \right\} \cdot f_L(x_L) dx_L - \int_0^S \left\{ \int_{S-x_L}^{\infty} f_T(x_T) dx_T \right\} \cdot f_L(x_L) dx_L \right] - \int_0^S f_L(x_L) dx_L = \int_0^{S-x_L} \left\{ \int_{S-x_L}^{\infty} f_T(x_T) dx_T \right\} \cdot f_L(x_L) dx_L - \left(1 - \int_0^S f_L(x_L) dx_L \right) - \int_0^S f_L(x_L) dx_L = \int_0^{S-x_L} \left\{ \int_{S-x_L}^{\infty} f_T(x_T) dx_T \right\} \cdot f_L(x_L) dx_L - 1$$

$$P(X_{T+L} < S^*) = \frac{c_r - (c_p/2)P(X_L < S^*)}{c_r + c_p/2}$$

$$P(X_{T+L} > S^*) = \frac{c_p \left(1 - \frac{P(X_L < S^*)}{2}\right)}{c_r + c_p/2}$$

relation 194

Si la loi de demande est discrète, on montre que :

$$P(X_{T+L} > S^*) < \frac{c_p(1 - P(X_L < S^*)/2)}{c_r + c_p/2} < P(X_{T+L} > S^* - 1)$$

$$P(X_{T+L} < S^*) < \frac{c_r - (c_p/2)P(X_L < S^*)}{c_r + c_p/2} < P(X_{T+L} < S^* + 1)$$

relation 195

Rappelons que, d'une part, la loi d'une somme de variables aléatoires normales indépendantes suit une loi Normale dont la moyenne est la somme des moyennes et la variance la somme des variances et, d'autre part, que la loi d'une somme de variables aléatoires de Poisson suit elle-même une loi de Poisson dont la moyenne est la somme des moyennes des variables aléatoires initiales. Ces propriétés permettent d'éviter d'effectuer une double intégration (ou une double sommation). Par ailleurs, l'application de la [relation 194](#) implique d'avoir une structure de coûts telle que $c_r > c_p / 2$.

Table des matières

II-2.1.2.2 Indépendance des demandes et stock moyen possédé

Index thématique

L'hypothèse d'indépendance des demandes entre les périodes permet une nouvelle formulation du stock moyen possédé qui, compte tenu de la remarque faite au § I-2.3.1, peut alors se calculer comme la moyenne arithmétique du stock initial (après livraison et satisfaction des demandes différées) et du stock final (avant livraison) et du fait que R_0 est le stock disponible lors de la passation de la commande (à l'instant $t = 0$). Cette approche permet d'établir les [tableaux 200 et 201](#) (le lecteur prêtera attention au fait que L intervient en indice de X pour désigner une période et de R, pour désigner une date).

L'espérance mathématique du stock initial est donc, en retenant la notation continue et en utilisant la [relation 135 de la page 670](#) (calcul du stock résiduel moyen) :

$$\int_0^S (S - x_L) \cdot f_L(x_L) dx_L = S - \bar{x}_L + I_{r_L}(S) \text{ Stock moyen initial} \quad \text{relation 196}$$

L'analyse du stock final (avant livraison), à l'instant $t = T$, s'effectue également sans difficulté, à condition de supposer qu'en cas de rupture de stock à l'instant t

2. Note de la page 733.

$$\frac{\partial \int_0^S \int_0^{S-x_L} f_T(x_T) dx_T \cdot f_L(x_L) dx_L}{\partial S} = 0 + \int_0^{S-S} \int_0^{S-S} f_T(x_T) dx_T \cdot f_L(x_L) dx_L + \int_0^S f_T(S-x_L) \cdot f_L(x_L) dx_L = \int_0^S f_T(S-x_L) \cdot f_L(x_L) dx_L$$

TABLEAU 200

Analyse de l'approvisionnement calendaire d'articles stockables à délai d'obtention non nul (cas des demandes différées): détermination du stock initial

Importance de la demande X_L durant le délai d'obtention (entre $t = 0$ et $t = L$)	$X_L < R_0$	$R_0 \leq X_L \leq S$	$X_L > S$
commande livrée en $t = L$	$S - R_0$	$S - R_0$	$S - R_0$
+ Stock résiduel R_{LV} en $t = L$	$R_0 - X_L$	0	0
- Demandes différées servies	- 0	$-(X_L - R_0)$	$-(S - R_0)$
= Stock initial R_{LP} (après livraison et demandes différées servies) en $t = L$	$S - X_L$	$S - X_L$	0

= 0, une fois la livraison effectuée (autrement dit $X_L < S$), le même phénomène ne se reproduit pas à la livraison suivante (c'est-à-dire que l'on a $X_T + X_L < 2S$). Le rejet de cette hypothèse conduit à de sérieuses complications analytiques, du fait d'une plus grande interdépendance temporelle.

TABLEAU 201

Analyse de l'approvisionnement calendaire d'articles stockables à délai d'obtention non nul (cas des demandes différées): détermination du stock final

Importance de la demande X_L durant le délai d'obtention	$X_L \leq S$		$X_L > S$
Importance de la demande X_T durant la période calendaire	$X_T \leq S - X_L$	$X_T > S - X_L$	$X_T + X_L \leq 2S$
Stock initial en $t' = L$, après livraison	$S - X_L$	$S - X_L$	0
Stock final en $t' = T + L$, avant livraison	$S - X_T - X_L$	0	0

L'espérance mathématique du stock final se détermine sans problème à partir de la distribution de probabilités $f_{T+L}(x_{T+L})$ introduite au § II-2.1.2.1 :

$$\int_0^S (S - x_{T+L}) \cdot f_{T+L}(x_{T+L}) dx_{T+L} = S - \overline{x_{T+L}} + I_{r_{T+L}}(S) = S - \overline{x_T} - \overline{x_L} + I_{r_{T+L}}(S)$$

relation 197

Le stock moyen possédé pouvant se calculer comme la moyenne arithmétique des stocks de début et de fin de période (comme on l'a vu au § I-1.2.2, page 673, si l'on retient toujours l'hypothèse simplificatrice d'une rupture de stock se produisant instantanément en fin de période):

$$I_p(S) = \frac{[S - \overline{x_L} + I_{r_L}(S)] + [S - \overline{x_T} - \overline{x_L} + I_{r_{T+L}}(S)]}{2}$$

d'où:

$$I_p(S) = S - \overline{x_L} - \frac{\overline{x_T}}{2} + \frac{I_{r_{T+L}}(S) + I_{r_L}(S)}{2}$$

relation 198

(stock moyen possédé: cas d'articles stockables à délai d'obtention non nul et demandes non satisfaites différées)

La fonction de coût devient alors :

$$C(S) = c_p \left(S - \bar{x}_L - \frac{\bar{x}_T}{2} + \frac{I_{r_{T+L}}(S) + I_{r_L}(S)}{2} \right) + c_r \cdot I_{r_{T+L}}(S) \quad \text{relation 199}$$

avec la même solution analytique.

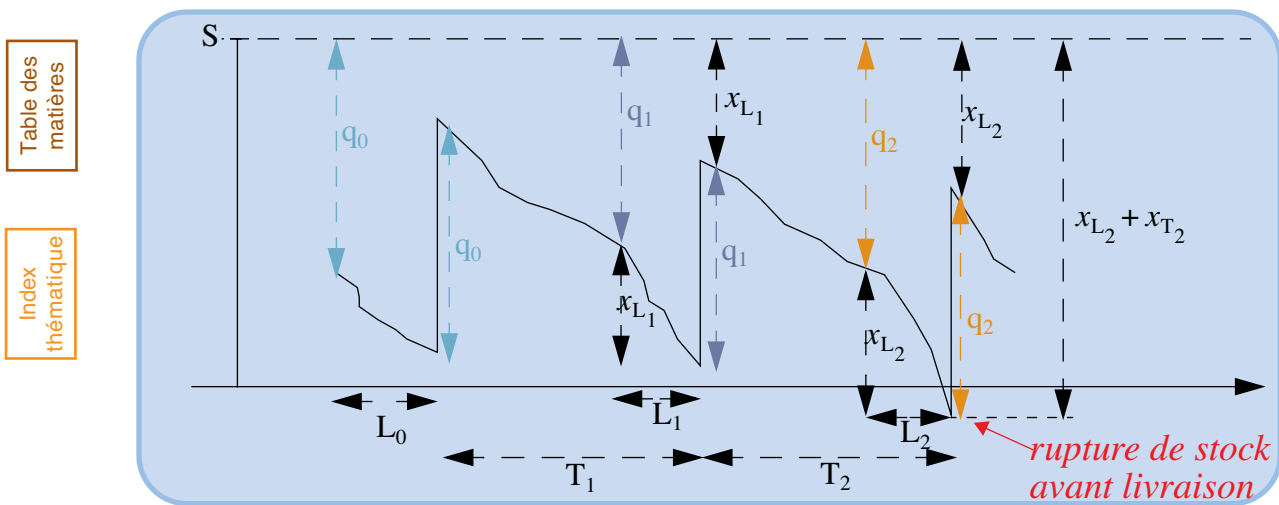
II-2.1.2.3 Indépendance des demandes et probabilités de rupture après et avant livraison

La relation 193 est analogue à la relation 175 $\left(\int_0^S f(x) dx = \frac{c_r - c_p/2}{c_r + c_p/2} \right)$, si l'on

définit la probabilité de rupture sur la période T + L (relation 193, page 733) au lieu de la période T (relation 175, page 718) et si l'on observe en outre que $P(x_L < S)$ est proche de l'unité si c_p n'est pas trop important par rapports à c_r (ce qui est habituellement le cas) et si T n'est pas trop faible par rapport à L. La probabilité $P(x_L > S)$ s'analyse comme la probabilité de rupture de stock après livraison, tandis que la probabilité $P(x_{T+L} > S)$ s'analyse comme la probabilité de rupture de stock avant livraison, comme l'illustre la figure 190.

FIGURE 190

Probabilité $P(X_{T+L} > S)$ d'occurrence d'une rupture de stock avant livraison



II-2.1.2.4 Autres hypothèses de calcul possibles

Les relations 194 et 195 (page 735) sont des approximations (en raison de l'utilisation de l'hypothèse simplificatrice du § I-2.1.2, page 709). D'autres relations approchées sont habituellement proposées, mais elles reposent sous des hypothèses encore plus fortes¹.

1. Voir par exemple Hadley et Whitin (1966, [212]), p.232-240 pour les demandes différées et les demandes perdues. L'introduction de certaines hypothèses simplificatrices complémentaires conduit à une solution analytique approchée différente de celles présentées ici, mais qui en pratique donne des résultats voisins. Pour une présentation rigoureuse, mais avec des coûts de possession et de rupture tous proportionnel au temps, ou tous indépendants du temps, voir Naddor (1966, [313]), chapitre IX, qui ne traite du reste que le cas des demandes différées; voir Hadley et Whitin (1966, [212]), p. 255-259 pour une solution exacte dans le cas d'une demande normale ou de Poisson.

II-2.1.3 Solution numérique de l'exemple introductif

Sur une période $T + L = 20 + 10$ jours, l'année comportant 260 jours ouvrables, la demande suit la loi Normale $\mathcal{N}(300 ; 61,14)$. Posons $P(X_L < S) = 1$, on a alors :

$$P(X_{T+L} > S) = \frac{6}{10 + (6/2)} = 0,4615$$

d'où l'on tire $S = 306$; on peut vérifier que $P(X_L > 306) = P(T > 5,89) \approx 0 \%$, ce qui justifie a posteriori notre approximation. Dans ces conditions, la solution optimale pour **MAXITYRE** est donc de compléter sa position de stock à 306, lorsqu'il passe commande.

TABLEAU 202

Analyse de la politique optimale de la **MAXITYRE** pour la référence CRT pour un coût de rupture de 10 dollars liduriens et des demandes non satisfaites différées (demande suivant une loi Normale)

Conséquences physiques de la politique d'approvisionnement pour la référence CRT1	Politique optimale	
	par période de révision calendaire	par an (sur 52 périodes calendaires)
Niveau de reapprovisionnement S	306	-
Stock de sécurité	106	-
Probabilité de rupture APRES livraison	0,00%	-
Nombre moyen annuel de périodes en rupture de stock APRES livraison	-	0,000
Rupture moyenne de stock APRES livraison	0,000	0,000
Probabilité de rupture AVANT livraison	45,77%	-
Nombre moyen annuel de périodes en rupture de stock AVANT livraison	-	5,950
Rupture moyenne de stock AVANT livraison	21,280	276,643
Pourcentage de demandes non satisfaites immédiatement	10,64%	10,64%
Stock moyen possédé	116,640	116,640
Stock moyen après livraison	206,000	206,000
Conséquences financières de la politique d'approvisionnement		
Dépense d'acquisition nette moyenne	78 000,00	1014 000,00
Coût de commande / Charges fixes calendaires	0,00	0,00
Coût de rupture	212,80	2 766,43
Coût de possession	699,84	9 097,93
Indicateur de coût moyen	912,64	11 864,36
Marge nette moyenne	21 087,36	274 135,64

Table des matières

Index thématique

Le **tableau 203** reprend l'exemple précédent en remplaçant la loi Normale par une loi de Poisson de moyenne annuelle égale à 70, pour illustrer l'utilisation de la relation du cas discret (**relation 195, page 735**). Le niveau de reapprovisionnement est 8 et la marge annuelle s'élève à 7300 dollars liduriens.

Si le coût de rupture est de 3,20 dollars liduriens au lieu de 10 dollars, il est plus difficile de considérer comme négligeable la probabilité d'une rupture de stock après livraison. L'algorithme utilisé est simple: on commence tout d'abord par admettre que cette probabilité de rupture est nulle, pour calculer une valeur initiale S_1 , on calcule ensuite $P(X_L > S_1)$ que l'on utilise ensuite dans la **relation 193** pour calculer une valeur S_2 . On calcule ensuite $P(X_L > S_2)$ que l'on utilise pour déterminer S_3 , etc. jusqu'à ce que l'on obtienne $S_j \approx S_{j-1}$. Les résultats de l'applica-

TABLEAU 203

Analyse de la politique optimale de la **MAXITYRE** pour la référence CRT pour un coût de rupture de 10 dollars liduriens et des demandes non satisfaites différées (demande suivant une loi de Poisson)



Conséquences physiques de la politique d'approvisionnement pour "CRT2"	Politique optimale	
	par période de révision calendaire	par an (sur 52 périodes calendaires)
Niveau de recombplément S	8	-
Stock de sécurité	2,615	-
Probabilité de rupture APRES livraison	0,19%	-
Nombre moyen annuel de périodes en rupture de stock APRES livraison	-	0,024
Rupture moyenne de stock APRES livraison	0,003	0,033
Probabilité de rupture AVANT livraison	41,82%	-
Nombre moyen annuel de périodes en rupture de stock AVANT livraison	-	5,436
Rupture moyenne de stock AVANT livraison	1,159	15,069
Pourcentage de demandes non satisfaites immédiatement	21,53%	21,53%
Stock moyen possédé	3,196	3,196
Stock moyen après livraison	5,310	5,310
Conséquences financières de la politique d'approvisionnement		
Dépense d'acquisition nette moyenne	2 100,00	27 300,00
Coût de commande / Charges fixes calendaires	0,00	0,00
Coût de rupture	11,59	150,69
Coût de possession	19,18	249,31
Indicateur de coût moyen	30,77	400,00
Marge nette moyenne	581,54	7 300,00

Table des matières

Index thématique

tion de cet algorithme sont consignés dans le **tableau 204**. Les résultats numériques de ce nouveau problème sont donnés dans le **tableau 205** de la page 740.

TABLEAU 204

Analyse du cas d'une probabilité de rupture[†] de stock après livraison considérée comme non négligeable

j	S_{j-1}	$P(X_{L,j} > S_{j-1})$	$P(X_{T+L,j} > S_j)$	S_j
1	∞	0	96,77 %	187
2	187	0,71 %	96,44 %	190
3	190	0,56 %	96,51 %	189
4	189	0,61 %	96,49 %	189

†. Avec correction de continuité

II-2.2 Cas des demandes perdues

En cas de demandes perdues, l'analyse du problème se complique sur le plan analytique du fait de l'interdépendance temporelle des décisions prises qui croît avec le nombre de périodes de révision calendaires que couvre le délai d'obtention. Lorsque la loi de demande est discrète et que le délai d'obtention correspond à un multiple entier de la période de révision calendaire, une approche basée sur les chaînes de Markov et la programmation dynamique permet d'établir¹ la politique optimale du régime stationnaire, c'est-à-dire d'indiquer la commande opti-

TABLEAU 205

Analyse de la politique optimale de la **MAXITYRE** pour la référence CRT pour un coût de rupture de 3,2 dollars liduriens et des demandes non satisfaites différées (demande suivant une loi Normale)



Conséquences physiques de la politique d'approvisionnement pour "CRT"	Politique optimale	
	par période de révision calendaire	par an (sur 260 périodes calendaires)
Niveau de reapprovisionnement S	189	-
Stock de sécurité	- 11	-
Probabilité de rupture APRES livraison	0,56%	-
Nombre moyen annuel de périodes en rupture de stock APRES livraison	-	0,073
Rupture moyenne de stock APRES livraison	0,063	0,824
Probabilité de rupture AVANT livraison	96,46%	-
Nombre moyen annuel de périodes en rupture de stock AVANT livraison	-	12,540
Rupture moyenne de stock AVANT livraison	111,357	1 447,642
Pourcentage de demandes non satisfaites immédiatement	55,68%	55,68%
Stock moyen possédé	44,710	44,710
Stock moyen après livraison	89,063	89,063
Conséquences financières de la politique d'approvisionnement		
Dépense d'acquisition nette moyenne	78 000,00	1 014 000,00
Coût de commande / Charges fixes calendaires	0,00	0,00
Coût de rupture	356,34	4 632,45
Coût de possession	268,26	3 487,40
Indicateur de coût moyen	624,60	8 119,85
Marge nette moyenne	21 375,40	277 880,15

Table des matières

Index thématique

male à passer compte tenu des commandes en attente de livraison et du stock disponible à la passation de commande. L'interdépendance de ces décisions est alors totale (dans le cadre d'un « régime de croisière » concrètement improbable). Mais, d'une part, la puissance de calcul exigée peut être considérable et, d'autre part, cette approche limite singulièrement les « combinaisons » des couples de valeurs possibles de délai d'obtention et de période calendaire. Pour ces différentes raisons, on adoptera ici une démarche moins ambitieuse (en ce sens que l'interdépendance de toutes les décisions possibles ne sera pas prise en compte), mais plus facile à mettre en œuvre dans les entreprises : on cherchera seulement à minimiser l'espérance mathématique du coût associé à la seule période concernée

1. Voir Starr et Miller (1966, [394]), p. 137-150.

par la commande à passer en négligeant, là encore, l'incidence des coûts de passation de commande. On se contentera ici d'examiner deux cas de figure qui couvrent, vraisemblablement l'essentiel des besoins dans le contexte actuel de tension sur les flux : celui d'un délai d'obtention inférieur à la période calendaire (§ II-2.2.1) et celui d'un délai d'obtention n'excédant pas deux fois la période calendaire (§ II-2.2.2).

Comme précédemment, les longueurs de période calendaire et de délai d'obtention sont définies par l'utilisateur (et ne font pas l'objet d'une optimisation). Ce dernier, à l'occasion d'une mise en place d'un système s'appuyant sur les solutions analytiques développées ici, doit également réfléchir aux valeurs à donner à ces paramètres et qui ne doivent pas forcément être les mêmes pour toutes les références gérées ni être identiques à celles précédemment utilisées. Il doit s'assurer aussi que le nombre de commandes à passer n'excédera pas les « capacités de traitement » disponibles, puisque l'approche proposée ne tient pas compte des coûts de commandes. Ce parti pris s'explique, d'une part, par l'impossibilité de faire table rase sur l'existant dans les entreprises susceptibles de mettre en œuvre la démarche proposée (d'une manière générale, la mise en œuvre de solutions analytiques de modèles où un certain nombre de contraintes ont été relaxées reste un art assez difficile à exercer) et, d'autre part, sur le caractère nécessairement arbitraire des coûts de commande qui, comme tous les coûts standards, ne restent utilisables que sur une place de validité restreinte¹ (dont on peut notablement s'écarter dans l'application de solutions optimales).

Table des matières

Index thématique

Rappelons que la notion de demande non satisfaite perdue s'apprécie par rapport à un système d'approvisionnement précis (approvisionnement pour reconstituer un stock) et qu'un système complémentaire peut être mis en place pour satisfaire rapidement les demandes en rupture de stock. Pour illustrer ce point et le cas d'une loi de demande discrète, nous nous appuyerons sur l'exemple de l'entreprise **RAUTOR** qui fabrique des véhicules automobiles et dispose d'un réseau de concessionnaires : ces derniers s'approvisionnent en pièces détachées, soit dans le cadre d'une politique calendaire à un prix égal à 60 % du prix-tarif, soit en approvisionnement d'urgence (livraison garantie en moins de 24 heures) à un prix égal à 74 % du prix-tarif. Si l'on raisonne sur la base d'un prix-tarif de 1 000 dollars liduriens, le coût de rupture du système d'approvisionnement « pour stock » est alors de $1\,000 (74\% - 60\%) = 140$ dollars liduriens, tandis que le coût de possession sera calculé sur la base de 600 dollars liduriens (d'où un coût de possession annuel de 120 dollars liduriens sur la base d'un taux annuel de 20 %). En l'absence d'une prise en compte explicite du coût de commande, pour une loi de demande donnée, la politique optimale trouvée pourra être utilisée quel que soit le prix-tarif, la fonction de coût étant la même à une constante multiplicative près.

II-2.2.1 Demandes non satisfaites perdues : cas du délai d'obtention inférieur à la période de révision calendaire

On examinera successivement le cas d'une demande suivant une loi discrète et celui d'une loi continue.

1. Voir page 649.

II-2.2.1.1 Cas discret

Le **tableau 206 de la page 742**, définissant la séquence des événements, permet d'analyser facilement le problème posé et d'établir l'indicateur de coût de gestion correspondant $C(S, R_0)$ associé à la décision, prise à l'instant $t = 0$, de reconstituer le stock au niveau S , sachant que le stock disponible à cet instant est R_0 .

- En $t = 0$: le stock résiduel étant R_0 , une commande égale à $S - R_0$ est passée pour reconstituer la position de stock à S (dont on cherchera la valeur optimale).
- En $t = L$: le stock résiduel avant livraison, compte tenu d'une demande X_L exprimée entre $t = 0$ et $t = L$ (mais non forcément satisfaite en totalité), étant égal à R_{LV} , on reçoit la commande passée en $t = 0$, ce qui conduit à un stock après livraison, égal à R_{LP} .
- En $t = T$: passation d'une nouvelle commande qui sera livrée en $t = T + L$.
- En $t = T + L$: le stock résiduel $R_{T+L,V}$ avant livraison de la commande passée en T dépend de la demande X_T exprimée entre $t = L$ et $t = T + L$, et du stock initial R_{LV} , mais est, par définition, indépendant de la commande passée en $t = T$.

TABLEAU 206

Analyse de l'approvisionnement calendaire d'articles stockables à délai d'obtention non nul compris entre 0 et T (cas des demandes perdues)

Demande X_L entre 0 et L	$X_L \leq R_0$		$X_L > R_0$	
Quantité commandée en $t = 0$	$S - R_0$		$S - R_0$	
Stock résiduel R_{LV} en $t = L$ (avant livraison)	$R_0 - X_L$		0	
Stock initial R_{LP} en $t = L$ (après livraison)	$(S - R_0) + (R_0 - X_L) = S - X_L$		$(S - R_0) + 0 = S - R_0$	
Importance de la demande X_T entre $t = L$ et $t = L + T$	$X_T \leq S - X_L$	$X_T > S - X_L$	$X_T \leq S - R_0$	$X_T > S - R_0$
Stock résiduel $R_{T+L,V}$ en $t = L + T$ (avant livraison)	$(S - X_L) - X_T$	0	$(S - R_0) - X_T$	0
Rupture de stock Z entre $t = L$ et $t = L + T$	0	$X_L + X_T - S$	0	$X_T - (S - R_0)$

Table des matières

Index thématique

Calculons tout d'abord l'espérance mathématique $I_p(S, R_0)$ du stock moyen durant la période de révision calendaire (définie par les dates $t = L$ et $t = L + T$):

$I_p(S, R_0) = \{E(R_{LP}) + E(R_{L+T,V})\} / 2$ avec, si on utilise la notation discrète:

$$\begin{aligned}
 E(R_{LP}) &= \sum_{X_L \leq R_0} (S - x_L)P(X_L = x_L) + (S - R_0)P(X_L > R_0) \\
 &= \sum_{X_L \leq R_0} (S - R_0 + R_0 - x_L)P(X_L = x_L) + (S - R_0)P(X_L > R_0) \\
 &= S - R_0 + I_{pL}(R_0)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 E(R_{L+T, V}) &= \sum_{X_L \leq R_0} \sum_{X_T \leq S - x_L} (S - x_L - x_T) \cdot P(X_T = x_T) \cdot P(X_L = x_L) \\
 &\quad + I_{p_T}(S - R_0) \cdot P(X_L > R_0) \\
 &= \sum_{X_L \leq R_0} I_{p_T}(S - x_L) \cdot P(X_L = x_L) + I_{p_T}(S - R_0) \cdot P(X_L > R_0)
 \end{aligned}$$

où $I_{p_T}(K)$ est le stock résiduel de fin de période calendaire (délimitée par deux livraisons successives), pour un stock initial K .

$$I_p(S, R_0) = \frac{\left\{ S - R_0 + I_{p_L}(R_0) + \sum_{X_L \leq R_0} I_{p_T}(S - x_L) \cdot P(X_L = x_L) + I_{p_T}(S - R_0) \cdot P(X_L > R_0) \right\}}{2}$$

Stock moyen possédé - cas des demandes discrètes perdues et $0 < L < T$ relation 200

L'analyse du **tableau 206** permet d'établir l'espérance mathématique $I_r(S, R_0)$ de la rupture de stock entre deux livraisons successives :

$$I_r(S, R_0) = \sum_{X_L \leq R_0} I_{r_T}(S - x_L) \cdot P(X_L = x_L) + P(X_L > R_0) \cdot I_{r_T}(S - R_0)$$

Rupture moyennée de stock - cas des demandes discrètes perdues et $0 < L < T$ relation 201

où $I_{r_T}(K)$ est la rupture de stock observée en fin de période de révision calendaire (délimitée par deux livraisons), lorsque le stock initial est de K unités.

Table des matières

L'espérance mathématique de l'indicateur de coût de gestion $C(S, R_0)$ associé à la décision à prendre à l'instant $t = 0$, où le stock disponible est R_0 , et portant sur la période calendaire délimitée par les deux prochaines livraisons est donc :

$$C(S, R_0) = c_r \cdot I_r(S, R_0) + c_p \cdot I_p(S, R_0) \quad \text{relation 202}$$

Index thématique

où c_p est le coût de possession défini sur la période calendaire.

La variation de coût pour deux valeurs successives de niveau de recomplètement est alors¹ :

$$\begin{aligned}
 C(S+1, R_0) - C(S, R_0) &= \\
 &= \frac{c_p}{2} \left[1 + \left\{ \sum_{X_L \leq R_0} P(X_T \leq S - x_L) P(X_L = x_L) + P(X_T \leq S - R_0) - P(X_T \leq S - R_0) P(X_L \leq R_0) \right\} \right] \\
 &\quad - c_r \left[1 - \left\{ \sum_{X_L \leq R_0} P(X_T \leq S - x_L) P(X_L = x_L) + P(X_T \leq S - R_0) - P(X_T \leq S - R_0) P(X_L \leq R_0) \right\} \right]
 \end{aligned}$$

Détermination de l'optimum dans le cas de demandes discrètes perdues et $0 < L < T$ relation 203

La **relation 133 de la page 668** permet de déterminer la valeur optimale S^* de S qui est la valeur la plus faible pour laquelle cette différence est positive, la fonction de coût étant monotone pour les principaux modèles statistiques utilisables. Dès lors, il est possible d'obtenir des tables de décision faciles à mettre en œuvre. Si l'on reprend l'exemple introductif de la société **RAUTOR** et si on travaille sur des lois de demande de Poisson, on obtient des tables valables pour des plages de

valeurs plus ou moins étendues de paramètre de Poisson du type de celles du [tableau 207](#).

Il y a rupture de stock après livraison si $X_L \leq R_0$ et $X_L + X_T > S$, ce qui se produit avec une probabilité $P(X_L \leq R_0) \cdot P(X_L + x_T > S)$, ou si $X_L > R_0$ (rupture de stock avant livraison, avec la probabilité $P(X_L > R_0)$) et $X_T > S - R_0$, ce qui se produit avec la probabilité $P(X_L > R_0) \cdot P(X_T > S - R_0)$. En définitive, la *probabilité de rupture de stock après livraison* est donnée par la [relation 204](#):

$$P(X_L \leq R_0) \cdot P(X_L + X_T > S) + P(X_L > R_0) \cdot P(X_T > S - R_0) \quad \text{relation 204}$$

Dans notre exemple, avec une demande suivant la loi de $\mathcal{P}(10)$ sur la période calendaire de 20 jours (ce qui correspond à une demande moyenne annuelle de 130 unités), le délai d'obtention étant toujours de 10 jours, et pour un stock initial à la commande $R_0 = 8$, on obtient la politique optimale d'approvisionnement du [tableau 208, page 746](#) (les probabilités de rupture, variables d'état étant calculées conformément l'analyse du [tableau 206 de la page 742](#)). Ce tableau ne comporte pas le calcul de la marge moyenne annuelle, car celui-ci est fonction d'un stock disponible lors de la commande R_0 , par hypothèse variable. Pour déterminer la distribution de probabilité de R_0 il faut passer par des chaînes de Markov, ce qui, ici, est assez peu triviale mais surtout d'un intérêt assez limité lorsque l'on constate que la marge moyenne de la période est peu sensible au stock initial (moins de 1 % dans notre exemple).

1. *Note de la page précédente.* Compte tenu de la [relation 134 de la page 670](#), ($I_r(K+1) - I_r(K) = -P(X > K)$), et de la [relation 135 de la page 670](#), ($I_p(K) = K - \bar{x} + I_r(K)$), on déduit: $I_p(K+1) - I_p(K) = P(X \leq K)$. L'application de ces relations conduit à:

$$\begin{aligned} I_{p_T}(S+1-R_0) - I_{p_T}(S-R_0) &= P(X_T \leq S-R_0), \text{ d'où } I_{p_T}(S+1-R_0)P(X_L > R_0) - I_{p_T}(S-R_0)P(X_L > R_0) = P(X_T \leq S-R_0)P(X_L > R_0) \\ \sum_{x_L \leq R_0} I_{p_T}(S+1-x_L) \cdot P(X_L = x_L) - \sum_{x_L \leq R_0} I_{p_T}(S-x_L)P(X_L = x_L) &= \sum_{x_L \leq R_0} \{I_{p_T}(S+1-x_L) - I_{p_T}(S-x_L)\}P(X_L = x_L) \\ &= \sum_{x_L \leq R_0} P(X_T \leq S-x_L)P(X_L = x_L) \end{aligned}$$

On en déduit la variation de stock moyen possédé (défini par la [relation 200 de la page 743](#)):

$$I_p(S+1, R_0) - I_p(S, R_0) = \left[\{(S+1) - S\} - 0 + 0 + \left\{ \sum_{x_L \leq R_0} P(X_T \leq S-x_L)P(X_L = x_L) \right\} + \{P(X_T \leq S-R_0)(1 - P(X_L \leq R_0))\} \right] / 2$$

$$I_p(S+1, R_0) - I_p(S, R_0) = \left[1 + \left\{ \sum_{x_L \leq R_0} P(X_T \leq S-x_L)P(X_L = x_L) + P(X_T \leq S-R_0) - P(X_T \leq S-R_0)P(X_L \leq R_0) \right\} \right] / 2$$

Par ailleurs on a:

$$\begin{aligned} P(X_L > R_0) \{I_{r_T}(S+1-R_0) - I_{r_T}(S-R_0)\} &= -P(X_L > R_0)P(X_T > S-R_0) = -[(1 - P(X_L \leq R_0))(1 - P(X_T \leq S-R_0))] \\ &= -[1 - P(X_L \leq R_0) - P(X_T \leq S-R_0) + P(X_L \leq R_0)P(X_T \leq S-R_0)] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum_{x_L \leq R_0} I_{r_T}(S+1-x_L) \cdot P(X_L = x_L) - \sum_{x_L \leq R_0} I_{r_T}(S-x_L) \cdot P(X_L = x_L) &= \sum_{x_L \leq R_0} \{I_{r_T}(S+1-x_L) - I_{r_T}(S-x_L)\} \cdot P(X_L = x_L) \\ &= - \sum_{x_L \leq R_0} P(X_T > S-x_L)P(X_L = x_L) = - \left[\sum_{x_L \leq R_0} \{1 - P(X_T \leq S-x_L)\}P(X_L = x_L) \right] = - \left[P(X_L \leq R_0) - \sum_{x_L \leq R_0} P(X_T \leq S-x_L)P(X_L = x_L) \right] \end{aligned}$$

On en déduit la variation de rupture de stock (défini par la [relation 201 de la page 743](#)):

$$I_r(S+1, R_0) - I_r(S, R_0) = - \left[P(X_L \leq R_0) - \sum_{x_L \leq R_0} P(X_T \leq S-x_L)P(X_L = x_L) + 1 - P(X_L \leq R_0) - P(X_T \leq S-R_0) + P(X_L \leq R_0)P(X_T \leq S-R_0) \right]$$

$$I_r(S+1, R_0) - I_r(S, R_0) = - \left[- \sum_{x_L \leq R_0} P(X_T \leq S-x_L)P(X_L = x_L) + 1 - P(X_T \leq S-R_0) + P(X_L \leq R_0)P(X_T \leq S-R_0) \right]$$

$$I_r(S+1, R_0) - I_r(S, R_0) = - \left[1 - \left\{ \sum_{x_L \leq R_0} P(X_T \leq S-x_L)P(X_L = x_L) + P(X_T \leq S-R_0) - P(X_L \leq R_0)P(X_T \leq S-R_0) \right\} \right]$$

TABLEAU 207

Détermination de la quantité optimale à commander dans le cas de demandes perdues pour le système étudié (mais rattrapées en totalité par un système de secours) pour $\mathcal{L}(X) = \mathcal{P}(\lambda)$; $L = 10$; $T = 20$; 260 jours / an; prix d'achat sur stock = 60% du prix de vente client; prix d'achat d'urgence = 74% du prix de vente client; taux de possession = 20%

Demande annuelle λ	Stock R disponible à la passation de la commande																				
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
2	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
4	2	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
6	2	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
8	3	2	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
10	3	2	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
12	3	2	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
14	4	3	2	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
16	4	3	2	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
18	4	3	2	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
20	5	4	3	2	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
22	5	4	3	2	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
24	5	4	3	2	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
26	6	5	4	3	2	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
28	6	5	4	3	2	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
30	6	5	4	3	2	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
32	7	6	5	4	3	2	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
34	7	6	5	4	3	2	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
36	7	6	5	4	3	2	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
38	8	7	6	5	4	3	2	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
40	8	7	6	5	4	3	2	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
42	8	7	6	5	4	3	2	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
44	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
46	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
48	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
50	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
55	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
60	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
65	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
70	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0	0	0	0	0	0	0	0
75	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0	0	0	0	0	0	0	0
80	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0	0	0	0	0	0	0
85	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0	0	0	0	0	0
90	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0	0	0	0	0	0
95	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0	0	0	0	0
100	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0	0	0	0
105	18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0	0	0
110	18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0	0	0
115	19	18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0	0
120	20	19	18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0
125	20	19	18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0
130	21	20	19	18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1
135	22	21	20	19	18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2
140	22	21	20	19	18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2
145	23	22	21	20	19	18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3
150	24	23	22	21	20	19	18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4

Table des matières

Index thématique

II-2.2.1.2 Cas continu

L'adaptation de ce qui vient d'être vu au cas continu ne pose guère de difficulté. Le stock moyen possédé (défini par la relation 200, page 743, dans le cas discret)

est défini par la [relation 205](#) et la rupture moyenne (défini par la [relation 201](#), page 743, dans le cas discret) est définie par la [relation 206](#).

$$I_p(S, R_0) = \frac{\left\{ S - R_0 + I_{pL}(R_0) + \int_0^{R_0} I_{pT}(S - x_L) f(x_L) dx_L + I_{pT}(S - R_0) \cdot P(X_L > R_0) \right\}}{2}$$

Stock moyen possédé dans le cas continu (0 < L < T; demandes perdues) relation 205

TABLEAU 208

Analyse de la politique optimale d'approvisionnement de RAUTOR pour les références à taux de marge de 40% sur stock et 26% en approvisionnement urgent; taux de possession 20% - Cas de la loi de Poisson avec L=10 < T=20

Conséquences physiques de la politique d'approvisionnement pour "CRT"	Solution optimale
Conséquences physiques de la politique d'approvisionnement	entre cette commande et la prochaine
Stock S de début de période	21
Stock disponible à la commande	8
Quantité à commander	13
Stock de sécurité	11
Probabilité de rupture de stock AVANT la livraison suivant la prochaine passation de commande	5,87%
Rupture moyenne de stock AVANT la livraison suivant la prochaine passation de commande	0,095
% de demandes non satisfaites jusqu'à la prochaine passation de commande	0,95%
Stock moyen APRES livraison	16,122
Probabilité de rupture de stock juste avant la prochaine livraison	6,81%
Demande moyenne satisfaite jusqu'à la prochaine passation de commande	9,905
Stock moyen possédé jusqu'à la prochaine passation de commande	11,056
Conséquences financières de la politique d'approvisionnement	entre cette commande et la prochaine
Dépense d'acquisition de l'approvisionnement de la prochaine période calendaire	7 800,00
Coût de commande / Charges fixes calendaires	0,00
Coût de rupture jusqu'à la prochaine passation de commande	13,25
Coût de possession jusqu'à la prochaine passation de commande	102,08
Indicateur de coût moyen jusqu'à la prochaine passation de commande	115,31
Marge nette moyenne de la prochaine période calendaire	3 884,69

Table des matières

Index thématique

$$I_r(S, R_0) = \int_0^{R_0} I_{rT}(S - x_L) f(x_L) dx_L + P(X_L > R_0) I_{rT}(S - R_0)$$

Rupture moyenne dans le cas continu (0 < L < T; demandes perdues) [relation 206](#)

L'indicateur de coût de gestion est alors :



$$C(S, R_0) = \frac{c_p}{2} \left[S - R_0 + I_{p_L}(R_0) + \int_0^{R_0} I_{p_T}(S - x_L) f(x_L) dx_L + I_{p_T}(S - R_0) \cdot P(X_L > R_0) \right] \\ + c_T \left[\int_0^{R_0} I_{r_T}(S - x_L) f(x_L) dx_L + P(X_L > R_0) I_{r_T}(S - R_0) \right]$$

À l'optimum, on doit donc avoir¹ :

$$\frac{d C(S, R_0)}{dS} = \frac{c_p}{2} \left[1 + \left\{ \int_0^{R_0} P(X_T \leq S - x_L) f(x_L) dx_L + P(X_T \leq S - R_0) - P(X_T \leq S - R_0) P(X_L < R_0) \right\} \right]$$

1. En posant $K = I_{p_T}(S - R_0) = \int_0^{S - R_0} (S - R_0 - x_T) f(x_T) dx_T$, $g(x, S) = (S - R_0 - x_T) f(x_T)$, $a(S) = 0$ et $b(S) = S - R_0$, l'application

de la formule de Leibniz (relation 144 de la page 674) donne : $\frac{\partial g(x, S)}{\partial S} = f(x)$, $\frac{da(S)}{dS} = 0$ et $\frac{db(S)}{dS} = 1$, d'où :

$$\frac{d I_{p_T}(S - R_0)}{dS} = \int_0^{S - R_0} f(x_T) dx_T + (S - R_0 - (S - R_0)) f(x_T) \cdot 1 - 0 = P(X_T \leq S - R_0) \text{ et :}$$

$$\frac{d I_{p_T}(S - R_0) P(X_L > R_0)}{dS} = P(X_T \leq S - R_0) P(X_L > R_0) = P(X_T \leq S - R_0) (1 - P(X_L < R_0)) = P(X_T \leq S - R_0) - P(X_T \leq S - R_0) P(X_L < R_0)$$

De même, x_L étant constant, on peut écrire : $\frac{d I_{p_T}(S - x_L)}{dS} = P(X_T \leq S - x_L)$, d'où l'on tire :

$$\frac{d \int_0^{R_0} I_{p_T}(S - x_L) f(x_L) dx_L}{dS} = \int_0^{R_0} P(X_T \leq S - x_L) f(x_L) dx_L. \text{ On en déduit la dérivée du stock moyen possédé :}$$

$$\frac{d I_p(S, R_0)}{dS} = \left[1 - 0 - 0 + \int_0^{R_0} P(X_T \leq S - x_L) f(x_L) dx_L + P(X_T \leq S - R_0) - P(X_T \leq S - R_0) P(X_L < R_0) \right] / 2 \\ = \left[1 + \left\{ \int_0^{R_0} P(X_T \leq S - x_L) f(x_L) dx_L + P(X_T \leq S - R_0) - P(X_T \leq S - R_0) P(X_L < R_0) \right\} \right] / 2$$

Par ailleurs, l'application de la formule de Leibniz donne $\frac{d I_{r_T}(S - R_0)}{dS} = - \int_{S - R_0}^{\infty} f(x_T) dx_T = -P(X_T > S - R_0)$, d'où :

$$\frac{d I_{r_T}(S - R_0) P(X_L > R_0)}{dS} = -P(X_T > S - R_0) P(X_L > R_0) = -\{ [1 - P(X_T < S - R_0)] [1 - P(X_L < R_0)] \} \\ = -\{ 1 - P(X_T < S - R_0) - P(X_L < R_0) + P(X_T < S - R_0) P(X_L < R_0) \}$$

En outre, x_L étant constant, on peut écrire : $\frac{d I_{r_T}(S - x_L)}{dS} = -P(X_T > S - x_L)$, d'où l'on tire :

$$\frac{d \int_0^{R_0} I_{r_T}(S - x_L) f(x_L) dx_L}{dS} = - \int_0^{R_0} P(X_T > S - x_L) f(x_L) dx_L = - \int_0^{R_0} \{ 1 - P(X_T < S - x_L) \} f(x_L) dx_L \\ = - \left\{ P(X_L < R_0) - \int_0^{R_0} P(X_T \leq S - x_L) f(x_L) dx_L \right\}$$

On en déduit la dérivée de la rupture moyenne :

$$\frac{d I_r(S, R_0)}{dS} = - \left[1 - P(X_T < S - R_0) - P(X_L < R_0) + P(X_T < S - R_0) P(X_L < R_0) + P(X_L < R_0) - \int_0^{R_0} P(X_T \leq S - x_L) f(x_L) dx_L \right] \\ = - \left[1 - \left\{ \int_0^{R_0} P(X_T \leq S - x_L) f(x_L) dx_L + P(X_T \leq S - R_0) - P(X_T \leq S - R_0) P(X_L < R_0) \right\} \right]$$

Table des matières

Index thématique

$$-c_r \left[1 - \left\{ \int_0^{R_0} P(X_T \leq S - x_L) f(x_L) dx_L + P(X_T \leq S - R_0) - P(X_T \leq S - R_0) P(X_L < R_0) \right\} \right] = 0$$

Détermination de l'optimum dans le cas de demandes continues perdues et relation 207
 $0 < L < T$

Illustrons ce cas de figure en reprenant l'exemple de **MAXITYRE** et en supposant maintenant que les demandes non satisfaites sont perdues et que la demande annuelle suit une loi Normale de moyenne 2600 et d'écart-type 180 ($\Rightarrow \mathcal{L}(X_T) = \mathcal{N}(200 ; 49,93)$) et que, comme précédemment, le taux de marge est de 40% pour un article en stock contre 26% pour un article approvisionné en urgence (délai d'obtention de 10 jours et durée de la période de révision calendaire, de 20 jours). Si le niveau de stock à la commande R_0 est de 150 paires, la politique optimale est alors de reconstituer la position de stock à 317, c'est-à-dire de commander 167 paires de pneus (voir [tableau 209](#)).

TABLEAU 209

*Analyse de la politique optimale d'approvisionnement de **RAUTOR** pour les références à taux de marge de 40% sur stock et 26% et taux de possession de 20% en approvisionnement urgent avec $L < T$ ($L=10$; $T=20$) Cas de la loi Normale*

Conséquences physiques de la politique d'approvisionnement pour "CRT"	Solution optimale
Conséquences physiques de la politique d'approvisionnement	entre cette commande et la prochaine
Stock S de début de période	390
Stock disponible à la commande	150
Quantité à commander	240
Stock de sécurité	90
Probabilité de rupture de stock AVANT la livraison suivant la prochaine passation de commande	8,00%
Rupture moyenne de stock AVANT la livraison suivant la prochaine passation de commande	1,509
% de demandes non satisfaites jusqu'à la prochaine passation de commande	0,75%
Stock moyen APRES livraison	291,210
Probabilité de rupture de stock juste avant la prochaine livraison	7,63%
Demande moyenne satisfaite jusqu'à la prochaine passation de commande	198,491
Stock moyen possédé jusqu'à la prochaine passation de commande	190,006
Conséquences financières de la politique d'approvisionnement	entre cette commande et la prochaine
Dépense d'acquisition de l'approvisionnement de la prochaine période calendaire	144 000,00
Coût de commande / Charges fixes calendaires	0,00
Coût de rupture jusqu'à la prochaine passation de commande	211,20
Coût de possession jusqu'à la prochaine passation de commande	1 753,90
Indicateur de coût moyen jusqu'à la prochaine passation de commande	1 965,10
Marge nette moyenne de la prochaine période calendaire	78 034,90

Table des matières

Index thématique

Là encore, on peut établir des tables de décision donnant directement le niveau de reconstituer pour plusieurs valeurs possibles du stock disponible à la passation de la commande, mais il faut prendre en compte simultanément les deux paramètres caractérisant la loi Normale, en plus du stock initial. En pratique, il est plus facile de faire un calcul direct. La [figure 191, page 749](#), montre l'évolution du

FIGURE 191

Détermination du niveau de rechargement optimal (et de la quantité à commander) dans le cas de demandes perdues pour le système étudié (mais rattrapées en totalité par un système de secours) pour $\mathcal{L}(X_{an}) = \mathcal{N}(2600; 180)$; $L = 10 < T = 20$; 260 jours / an; prix d'achat sur stock = 60% du prix de vente client; prix d'achat d'urgence = 74% du prix de vente client; taux de possession annuel de 20 %

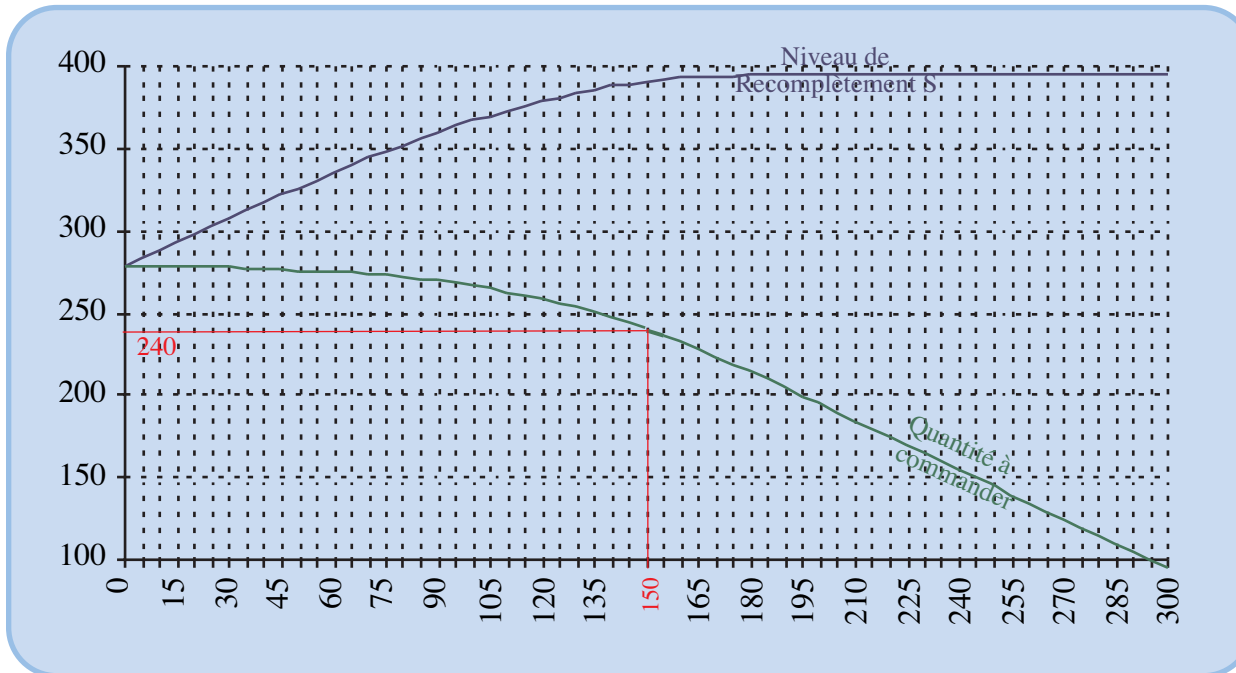


Table des matières

Index thématique

niveau de rechargement et de la quantité commandée, en fonction du stock initial. On peut remarquer, là encore, une stabilisation progressive du niveau de rechargement. Il ne faut pas perdre de vue que cette table n'est utilisable que pour un couple donné de moyenne et d'écart-type de la loi Normale caractérisant la demande.

II-2.2.2 Demandes non satisfaites perdues: cas du délai d'obtention compris entre une et deux fois la période de révision calendaire

Nous nous limiterons au cas d'un délai d'obtention supérieur à la période de révision calendaire, mais n'excédant pas deux fois celle-ci. Dans ces conditions, en effet, la détermination de l'approvisionnement optimal ne dépend que du stock disponible lors de la passation de la commande et de la commande en attente de livraison. Dans le cas contraire ($T \geq 2L$), l'approvisionnement optimal dépendrait non plus d'une seule commande en attente de livraison, mais de toutes les commandes en attente de livraison.

Dans la définition du problème, nous ne retiendrons qu'une variable de commande, à savoir la quantité q_0 à commander à l'instant $t = 0$, sachant que le stock physiquement disponible à cet instant est R_0 et que la commande q_T doit être prochainement livrée. Nous pouvons encore définir cette variable de commande, comme un niveau de rechargement S égal à la somme du stock disponible R_0 et de la commande q_0 à passer. Il convient de noter que:

- ce niveau de complètement S ne tient pas compte de la commande q_{-T} en attente de livraison;
- ce niveau de recomplètement dépend à la fois de R_0 et de q_{-T} et ne peut donc être fixe;
- la position de stock S' après livraison sera donc $S' = R_0 + q_{-T} + q_0 = S + q_0$.

Pour préciser les idées, il est nécessaire de fixer la chronologie des événements :

- en $t = 0$: passation d'une commande $q_0 = S - R_0$
- en $t = L - T = \theta$: réception de la commande q_{-T} passée en $t - L = -T$
- en $t = T$: passation d'une commande q_T
- en $t = L$: réception de la commande $q_0 = S - R_0$
- en $t = 2T$: passation d'une commande q_{2T}
- en $t = L + T$: réception de q_T

Le **tableau 210** décrit la chronologie des différents cas de figure rencontrés. L'indicateur de coût correspond à la période calendaire déterminée par les dates $t = L$ et $t = L + T$. Par ailleurs, on notera X_T et X_τ les demandes correspondant aux périodes allant de $t = \theta$ à $t = L$ et de $t = L$ à $t = L + T$. Leurs distributions de probabilités sont définies sur des périodes égales à la période de révision calendaire.

TABLEAU 210

Analyse de l'approvisionnement calendaire d'articles stockables à délai d'obtention compris entre T et $2T$ (cas des demandes perdues)

Demande X_θ entre $t = 0$ et $t = \theta$	$X_\theta \leq R_0$		$X_\theta > R_0$	
Stock disponible après livraison de q_{-T} en $t = \theta$	$q_{-T} + R_0 - x_\theta$		q_{-T}	
Demande X_T entre $t = \theta$ et $t = L$	$X_T \leq q_{-T} + R_0 - x_\theta$	$X_T > q_{-T} + R_0 - x_\theta$	$X_T \leq q_{-T}$	$X_T > q_{-T}$
Stock disponible (avant livraison) en $t = L$	$R_0 + q_{-T} - x_\theta - X_T$	0	$q_{-T} - X_T$	0
Livraison en $t = L$	$q_0 = S - R_0$	$q_0 = S - R_0$	$q_0 = S - R_0$	$q_0 = S - R_0$
Stock disponible (après livraison) en $t = L$	$R_0 + q_{-T} - x_\theta - x_T + q_0$ $= S + q_{-T} - x_\theta - x_T$	$0 + q_0 = S - R_0$	$q_{-T} - x_T + q_0$ $= S + q_{-T} - R_0 - x_T$	$0 + q_0 = S - R_0$
Demande X_τ entre $t = L$ et $t = L + T$	$X_\tau \leq S + q_{-T} - x_\theta - x_T$	$X_\tau > S + q_{-T} - x_\theta - x_T$	$X_\tau \leq S - R_0$	$X_\tau > S - R_0$
Stock disponible (avant livraison) en $t = L + T$	$S + q_{-T} - x_\theta - x_T - x_\tau$	0	$S - R_0 - x_\tau$	0
Rupture de stock entre $t = L$ et $t = L + T$	0	$x_\tau + x_T + x_\theta - S - q_{-T}$	0	$x_\tau + R_0 - S - q_{-T}$

Table des matières

Index thématique

Si nous passons en espérance mathématique, le stock moyen possédé $I_p(S)$, entre les dates L et L + T est :

$$I_p(S) = \frac{\text{(Stock initial en L après livraison)} + \text{(Stock résiduel en T+L après livraison)}}{2}$$

Le stock initial en L après livraison, $I_1(S)$, est égal à la quantité livrée ($S - R_0$), augmentée de l'espérance mathématique du stock résiduel avant livraison correspondant aux deux cas de figure identifiés dans le **tableau 210, page 750** (en notant $I_{p_\phi}(K)$ le stock résiduel en fin de période d'amplitude ϕ , pour un stock initial K):

$$I_1(S) = S - R_0 + \sum_{X_\theta \leq R_0} I_{p_T}(q_{-T} + R_0 - x_\theta)P(X_\theta = x_\theta) + I_{p_T}(q_{-T})P(X_\theta > R_0)$$

Le stock résiduel en T + L avant livraison, $I_2(S)$, est la somme des espérances mathématiques des quatre cas de figures identifiés au **tableau 210**; on a retenu ici une forme propice aux calculs :

$$I_2(S) = \sum_{X_\theta \leq R_0} \sum_{X_T \leq R_0 + q_{-T} - x_\theta} I_{p_\tau}(S + q_{-T} - x_\theta - x_T)P(X_T = x_T)P(X_\theta = x_\theta) + \left\{ P(X_\theta \leq R_0) - \sum_{X_\theta \leq R_0} P(X_T \leq R_0 + q_{-T} - x_\theta)P(X_\theta = x_\theta) \right\} I_{p_\tau}(S - R_0) + P(X_\theta > R_0) \sum_{X_T \leq q_{-T}} I_{p_\tau}(S - R_0 + q_{-T} - x_T)P(X_T = x_T) + P(X_\theta > R_0)P(X_T > q_{-T})I_{p_\tau}(S - R_0)$$

Par ailleurs, l'espérance mathématique de la rupture de stock en fin de période de révision calendaire (à la date L + T) est :

$$I_r(S) = \sum_{X_\theta \leq R_0} \sum_{X_T \leq R_0 + q_{-T} - x_\theta} I_{r_\tau}(S + q_{-T} - x_\theta - x_T)P(X_T = x_T)P(X_\theta = x_\theta) + \left\{ P(X_\theta \leq R_0) - \sum_{X_\theta \leq R_0} P(X_T \leq R_0 + q_{-T} - x_\theta)P(X_\theta = x_\theta) \right\} I_{r_\tau}(S - R_0) + P(X_\theta > R_0) \sum_{X_T \leq q_{-T}} I_{r_\tau}(S - R_0 + q_{-T} - x_T)P(X_T = x_T) + P(X_\theta > R_0)P(X_T > q_{-T})I_{r_\tau}(S - R_0)$$

Table des matières

Index thématique

L'espérance mathématique de l'indicateur de coût de gestion $C(S)$ associé à la stratégie d'approvisionnement (recompléter à S) et la période calendaire T est (le coût de possession étant calculé sur cette période):

$$C(S) = c_p \cdot I_p(S) + c_r \cdot I_r(S)$$

La recherche de l'optimum s'effectue, pour un couple de valeurs R_0 et q_{-T} donné, en recherchant la valeur de S faisant changer de signe $C(S + 1) - C(S)$, ce qui donne¹ :

$$C(S+1) - C(S) = \frac{c_p}{2} \left[1 + \left\{ \sum_{X_\theta \leq R_0} \sum_{X_T \leq R_0 + q_{-T} - x_\theta} P(X_\tau \leq S + q_{-T} - x_\theta - x_T)P(X_T = x_T)P(X_\theta = x_\theta) \right\} \right] + \frac{c_p}{2} \left[\left\{ P(X_\theta \leq R_0) - \sum_{X_\theta \leq R_0} P(X_T \leq R_0 + q_{-T} - x_\theta)P(X_\theta = x_\theta) \right\} P(X_\tau \leq S - R_0) \right] + \frac{c_p}{2} \left[\left\{ \{1 - P(X_\theta \leq R_0)\} \left[\sum_{X_T \leq q_{-T}} P(X_\tau \leq S - R_0 + q_{-T} - x_T)P(X_T = x_T) \right] \right\} + \left\{ \{1 - P(X_\theta \leq R_0)\} \{1 - P(X_T \leq q_{-T})\} P(X_\tau \leq S - R_0) \right\} \right]$$

$$\begin{aligned}
& -c_r \left[\sum_{X_\theta \leq R_0} \sum_{X_T \leq R_0 + q_{-T} - x_\theta} \{1 - P(X_\tau \leq S + q_{-T} - x_\theta - x_T)\} P(X_T = x_T) P(X_\theta = x_\theta) \right] \\
& \quad - c_r \left[\left\{ P(X_\theta \leq R_0) - \sum_{X_\theta \leq R_0} P(X_T \leq R_0 + q_{-T} - x_\theta) P(X_\theta = x_\theta) \right\} \{1 - P(X_\tau \leq S - R_0)\} \right] \\
& - c_r \left[\left\{ 1 - P(X_\theta \leq R_0) \right\} \left\{ \sum_{X_T \leq q_{-T}} [1 - P(X_\tau \leq S - R_0 + q_{-T} - x_T)] P(X_T = x_T) \right\} \right] + \left[[1 - P(X_\theta \leq R_0)] [1 - P(X_\tau \leq q_{-T})] [1 - P(X_\tau \leq S - R_0)] \right] = 0
\end{aligned}$$

relation 208

La probabilité de rupture, toujours en application de l'analyse faite au **tableau 210** est donnée par la **relation 209**:

$$\begin{aligned}
& \sum_{X_\theta \leq R_0} \left\{ \sum_{X_T \leq R_0 + q_{-T} - x_\theta} P(X_\tau > S + q_{-T} - x_\theta - x_T) P(X_T = x_T) + P(X_\tau > S - R_0) P(X_T > R_0 + q_{-T} - x_\theta) \right\} P(X_\theta = x_\theta) \\
& \quad + P(X_\theta > R_0) \left\{ \sum_{X_T \leq q_{-T}} P(X_\tau > S - R_0 + q_{-T} - x_T) P(X_T = x_T) + P(X_T > q_{-T}) P(X_\tau > S - R_0) \right\} \quad \text{relation 209}
\end{aligned}$$

Illustrons ce cas de figure en reprenant le cas de la société **RAUTOR** en supposant maintenant que le délai d'obtention L soit de 15 jours ouvrables et que la période de révision calendaire est de 10 jours ouvrables, avec une demande annuelle suivant une loi $\mathcal{A}(150)$, un stock 3 unités à la passation de commande et une commande de 5 unités en attente de livraison. On peut alors sans difficulté établir des tables de décision pour des demandes suivant des lois de Poisson, ces tables

1. Note de la page précédente. Sachant que $I_p(S+1+K) - I_p(S+K) = P(X \leq S+K)$, $I_r(S+1+K) - I_r(S+K) = -P(X > S+K) = -(1 - P(X \leq S+K))$, on déduit:

$$\begin{aligned}
& \bullet \sum_{X_\theta \leq R_0} \sum_{X_T \leq R_0 + q_{-T} - x_\theta} \{I_{p_\tau}(S+1+q_{-T}-x_\theta-x_T) - I_{p_\tau}(S+q_{-T}-x_\theta-x_T)\} P(X_T = x_T) P(X_\theta = x_\theta) \\
& \quad = \sum_{X_\theta \leq R_0} \sum_{X_T \leq R_0 + q_{-T} - x_\theta} P(X_\tau \leq S + q_{-T} - x_\theta - x_T) P(X_T = x_T) P(X_\theta = x_\theta) \\
& \bullet \sum_{X_\theta \leq R_0} \sum_{X_T \leq R_0 + q_{-T} - x_\theta} \{I_{r_\tau}(S+1+q_{-T}-x_\theta-x_T) - I_{r_\tau}(S+q_{-T}-x_\theta-x_T)\} P(X_T = x_T) P(X_\theta = x_\theta) \\
& \quad = - \sum_{X_\theta \leq R_0} \sum_{X_T \leq R_0 + q_{-T} - x_\theta} \{1 - P(X_\tau \leq S + q_{-T} - x_\theta - x_T)\} P(X_T = x_T) P(X_\theta = x_\theta) \\
& \bullet \left\{ P(X_\theta \leq R_0) - \sum_{X_\theta \leq R_0} P(X_T \leq R_0 + q_{-T} - x_\theta) P(X_\theta = x_\theta) \right\} \{I_{p_\tau}(S+1-R_0) - I_{p_\tau}(S-R_0)\} \\
& \quad = \left\{ P(X_\theta \leq R_0) - \sum_{X_\theta \leq R_0} P(X_T \leq R_0 + q_{-T} - x_\theta) P(X_\theta = x_\theta) \right\} P(X_\tau \leq S - R_0) \\
& \bullet \left\{ P(X_\theta \leq R_0) - \sum_{X_\theta \leq R_0} P(X_T \leq R_0 + q_{-T} - x_\theta) P(X_\theta = x_\theta) \right\} \{I_{r_\tau}(S+1-R_0) - I_{r_\tau}(S-R_0)\} \\
& \quad = - \left\{ P(X_\theta \leq R_0) - \sum_{X_\theta \leq R_0} P(X_T \leq R_0 + q_{-T} - x_\theta) P(X_\theta = x_\theta) \right\} \{1 - P(X_\tau \leq S - R_0)\} \\
& \bullet P(X_\theta > R_0) \sum_{X_T \leq q_{-T}} \{I_{p_\tau}(S+1-R_0+q_{-T}-x_T) - I_{p_\tau}(S+1-R_0+q_{-T}-x_T)\} P(X_T = x_T) \\
& \quad = \{1 - P(X_\theta \leq R_0)\} \left\{ \sum_{X_T \leq q_{-T}} P(X_\tau \leq S - R_0 + q_{-T} - x_T) P(X_T = x_T) \right\} \\
& \bullet P(X_\theta > R_0) \sum_{X_T \leq q_{-T}} I_{r_\tau}(S+1-R_0+q_{-T}-x_T) P(X_T = x_T) - P(X_\theta > R_0) \sum_{X_T \leq q_{-T}} I_{r_\tau}(S-R_0+q_{-T}-x_T) P(X_T = x_T) \\
& \quad = - \{1 - P(X_\theta \leq R_0)\} \left\{ \sum_{X_T \leq q_{-T}} [1 - P(X_\tau \leq S - R_0 + q_{-T} - x_T)] P(X_T = x_T) \right\} \\
& \bullet P(X_\theta > R_0) P(X_T > q_{-T}) \{I_{p_\tau}(S+1-R_0) - I_{p_\tau}(S-R_0)\} = \{1 - P(X_\theta \leq R_0)\} \{1 - P(X_T \leq q_{-T})\} P(X_\tau \leq S - R_0) \\
& \bullet P(X_\theta > R_0) P(X_T > q_{-T}) \{I_{r_\tau}(S+1-R_0) - I_{r_\tau}(S-R_0)\} = - \{1 - P(X_\theta \leq R_0)\} \{1 - P(X_T \leq q_{-T})\} \{1 - P(X_\tau \leq S - R_0)\}
\end{aligned}$$

étant du reste valables pour des plages plus ou moins importantes de paramètres de Poisson. Le [tableau 211](#) fournit un extrait de ces tables donnant pour chaque couple de stock disponible à la commande et de livraison attendue, le niveau de recomplètement et la quantité à commander. Le [tableau 212](#) donne les résultats détaillés de la politique d'approvisionnement pour un couple de valeurs de stock disponible à la commande et de livraison attendue; comme dans le cas étudié au [§ II-2.2.1](#), le calcul des conséquences annuelles de la politique retenue est sans objet.

TABLEAU 212

Analyse de la politique optimale d'approvisionnement de RAUTOR pour les références à taux de marge de 40% sur stock et 26% en approvisionnement urgent Cas de la loi de Poisson avec $T=10 < L=15 < 2T=20$

Solution optimale pour Rautor	
Conséquences physiques de la politique d'approvisionnement	entre cette commande et la prochaine
Quantité en attente de livraison	5
Disponible à la passation de commande	3
Niveau de recomplètement S	13
Quantité optimale à commander	10
Stock moyen après livraison	10,988
Rupture moyenne de stock avant livraison	0,039
% de demandes non satisfaites	0,68%
Stock moyen avant livraison	5,258
Probabilité de rupture de stock	2,25%
Demande moyenne satisfaite	5,730
Stock moyen possédé	8,123
Conséquences financières de la politique d'approvisionnement	entre cette commande et la prochaine
Dépense d'acquisition	6 000,00
Coût de commande	0,00
Coût de rupture	5,52
Coût de possession	37,49
Indicateur de coût moyen	43,01
Marge nette moyenne	2 264,68

Table des matières

Index thématique

L'analyse du cas continu continu conduit à une adaptation de la [relation 208](#), similaire à celle trouvée avec la [relation 207 de la page 748](#) qui constitue une transposition de la [relation 202 de la page 743](#), pour le cas d'un délai d'obtention plus court que la période calendaire. On n'examinera pas ce cas ici pour des raisons numériques: on est en présence de calculs faisant intervenir des intégrales triples qui nécessitent l'usage d'algorithmes spécifiques qui nous éloignent de l'illustration «basique» que nous avons retenue.

II-3 Incidence de l'utilisation simultanée d'un même facteur rare pour plusieurs articles

Le lecteur n'ayant aucune connaissance des problèmes d'optimisation sous contrainte a intérêt à lire ce [§ II-3](#), après avoir pris connaissance du [chapitre XII](#),

TABLEAU 211

Détermination de la quantité optimale de commande q_0 pour une demande annuelle suivant la loi $\mathcal{P}(\lambda=150/an)$ – avec $L = 15 T = 10$ – prix d’achat sur stock = 60% du prix de vente client et prix d’achat d’urgence = 74% du prix de vente client et taux de possession = 20% –

		Stock disponible à la commande																					
		0		1		2		3		4		5		6		7		8		9		10	
		S	q ₀	S	q ₀	S	q ₀	S	q ₀	S	q ₀	S	q ₀	S	q ₀	S	q ₀	S	q ₀	S	q ₀	S	q ₀
Livraison attendue	0	11	11	12	11	13	11	14	11	15	11	16	11	17	11	18	11	18	10	19	10	20	10
	1	11	11	12	11	13	11	14	11	15	11	16	11	17	11	17	10	18	10	19	10	19	9
	2	11	11	12	11	13	11	14	11	15	11	16	11	16	10	17	10	18	10	18	9	19	9
	3	11	11	12	11	13	11	14	11	15	11	15	10	16	10	17	10	17	9	18	9	18	8
	4	11	11	12	11	13	11	14	11	14	10	15	10	16	10	16	9	17	9	17	8	18	8
	5	11	11	12	11	12	10	13	10	14	10	15	10	15	9	16	9	16	8	17	8	17	7
	6	10	10	11	10	12	10	13	10	14	10	14	9	15	9	15	8	16	8	16	7	16	6
	7	10	10	11	10	12	10	13	10	13	9	14	9	14	8	15	8	15	7	15	6	15	5
	8	9	9	10	9	11	9	12	9	13	9	13	8	14	8	14	7	14	6	14	5	14	4
	9	9	9	10	9	11	9	11	8	12	8	13	8	13	7	13	6	13	5	13	4	13	3
	10	8	8	9	8	10	8	11	8	11	7	12	7	12	6	12	5	12	4	12	3	12	2
	11	7	7	8	7	9	7	10	7	10	6	11	6	11	5	11	4	11	3	11	2	11	1
	12	6	6	7	6	8	6	9	6	10	6	10	5	10	4	10	3	10	2	10	1	10	0
	13	6	6	7	6	7	5	8	5	9	5	9	4	9	3	9	2	9	1	9	0	10	0
	14	5	5	6	5	6	4	7	4	8	4	8	3	8	2	8	1	8	0	9	0	10	0

Table des matières

Index thématique

§ I-2.3.1, page 802, où cette problématique de l’optimisation sous contrainte est exposée avec plus de détails et où l’interprétation économique de la variable λ (coût fantôme associé à la contrainte) est présentée de façon plus complète. Nous verrons successivement le cas de délais d’obtention nuls (pour tous les articles soumis à la contrainte) puis celui de délais d’obtention non nuls.

II-3.1 Cas de délai d’obtention nul

Nous examinerons successivement le problème posé par l’approvisionnement d’articles non stockables (§ II-3.1.1) et celui d’articles stockables (§ II-3.1.2, page 756).

II-3.1.1 Articles non stockables à délais d’obtention nuls

II-3.1.1.1 Exemple introductif

La MAISON DE LA PRESSE d’Alphaville ne vend pas seulement l’Univers, mais également plusieurs autres journaux nationaux comme la Dépêche du matin, ou locaux comme le Courrier d’Alphaville. Elle se voit contrainte pendant une période relativement courte (3 semaines) d’effectuer un certain nombre de travaux qui limitent le stockage des quotidiens et périodiques. Prenons le cas de trois d’entre eux seulement dont les données sont fournies dans le tableau 213 de la

page 755; ces demandes suivent toutes des lois normales et la limitation imposée est de 900 journaux au plus lors de la livraison du matin.

TABLEAU 213
Caractéristiques des journaux vendus par la MAISON DE LA PRESSE

j	Journal	\bar{x}_j	σ_j	v_j	b_j	r_j	$\frac{c_{pj}}{b_j - r_j}$	$\frac{c_{rj}}{v_j - b_j}$	$P(X_j > S_j^*)$	S_j^*
1	Univers	300	20	2,5	1,8	1,60	0,2	0,7	22,2%	315
2	Dépêche	250	30	2,8	2,0	1,75	0,25	0,8	23,7%	271
3	Courrier	400	50	2,5	1,9	1,75	0,15	0,6	20%	442

II-3.1.1.2 Formulation analytique du problème posé

En l'absence de contrainte de stockage, on cherchera à minimiser la somme $\sum C_j(S_j)$ des coûts moyens de gestion d'une période de révision calendaire pour les différents articles j , qui dépendent du stock S_j .

Ces coûts sont calculés d'après la relation 136 de la page 670, si les articles sont non stockables (ce qui est le cas ici), ou la relation 174 de la page 718 dans le cas d'articles stockables. L'introduction de la contrainte portant sur l'utilisation d'une ressource rare conduit à dériver le Lagrangien suivant:

$$H = \sum_j C_j(S) + \lambda(\sum_j a_j S_j - A)$$

$$H = \sum_j [c_{pj}(S_j - \bar{x}_j) + (c_{pj} + c_{rj}) \cdot I_r(S_j)] + \lambda(\sum_j a_j S_j - A)$$

ce qui donne pour notre exemple numérique:

$$H = 0,2(S_1 - 300) + 0,9I_r(S_1) + 0,25(S_2 - 250) + 1,05I_r(S_2) + 0,15(S_3 - 400) + 0,75I_r(S_3) + \lambda(S_1 + S_2 + S_3 - 900)$$

Pour que H soit un extremum, il faut que les différentes dérivées partielles de H soient nulles, ce qui donne:

$$\frac{\partial H}{\partial S_1} = 0 = 0,2 + 0,9(-P(X_1 > S_1)) + \lambda$$

$$\frac{\partial H}{\partial S_2} = 0 = 0,25 + 1,05(-P(X_2 > S_2)) + \lambda$$

$$\frac{\partial H}{\partial S_3} = 0 = 0,15 + 0,75(-P(X_3 > S_3)) + \lambda$$

$$\frac{\partial H}{\partial \lambda} = 0 = S_1 + S_2 + S_3 - 900$$

et d'une façon générale: $\frac{\partial H}{\partial S_j} = 0 = c_{pj} + (c_{pj} + c_{rj})(-P(X_j > S_j)) + \lambda a_j$, d'où:

$$P(X_j > S_j^*) = \frac{c_{pj} + \lambda \cdot a_j}{c_{pj} + c_{rj}} \quad \text{relation 210}$$

Table des matières

Index thématique

Toute probabilité étant inférieure à 1, cette relation implique nécessairement que l'on ait $\frac{c_{pj} + \lambda \cdot a_j}{c_{pj} + c_{rj}} < 1$, d'où la [relation 211](#)¹.

$$\lambda < \underset{j}{\text{Min}}(c_{rj}/a_j) \quad \text{relation 211}$$

Par ailleurs, $\frac{\partial H}{\partial \lambda} = 0 = \sum_j a_j S_j - A$ conduit à la [relation 212](#).

$$\sum_j a_j S_j^* = A \quad \text{relation 212}$$

II-3.1.1.3 Résolution numérique

Ce système de 4 équations à 4 inconnues (λ, S_1, S_2, S_3) n'a pas de solution explicite, mais celle-ci peut-être obtenue assez rapidement à l'aide de l'algorithme itératif de la [figure 192 de la page 758](#) qui converge rapidement vers la solution recherchée. L'application de cet algorithme donne les résultats fournis dans le [tableau 217 de la page 763](#). Vous pouvez tester à l'aide du logiciel une variante de cet exemple dans lequel on décide de limiter à 1 500 dollars liduriens la dépense quotidienne d'achat de ces journaux. Il convient alors d'acquérir chaque jour 280 exemplaires de l'**Univers**, 222 exemplaires de la **Dépêche** et 291 exemplaires du **Courrier**, ce qui conduit à une marge totale annuelle de 141 624,58 dollars liduriens, contre 162 419,48 en l'absence de contrainte.

II-3.1.2 Articles stockables à délai d'obtention nul

La seule différence par rapport au cas étudié au paragraphe précédent est l'utilisation de la [relation 174](#) à la place de la [relation 136](#) dans la sommation des coûts moyens de gestion (ce qui suppose là encore que l'hypothèse simplificatrice soit

utilisée): $\sum_j \left[S_j - \frac{\bar{x}}{2} + \left(c_{rj} + \frac{c_{pj}}{2} \right) I_r(S_j) \right]$ sous contrainte $\sum_j a_j S_j \leq A$.

La dérivation du Lagrangien H correspondant à ce problème donne:

$$P(X_j > S_j^*) = \frac{c_{pj} + \lambda \cdot a_j}{c_{pj}/2 + c_{rj}} \quad \text{relation 213}$$

La [relation 210](#) restant valable, l'algorithme vu précédemment reste utilisable, la [relation 213](#) se substituant à la [relation 210 de la page 755](#). Il faut ajouter que la

1. *Note de la page précédente.* En pratique, une forte contrainte sur la ressource rare pose un problème numérique difficile à résoudre car on se trouvera alors en présence de probabilités de rupture infinitésimale, permettant, en toute rigueur, de baisser les S_j (qui varient théoriquement de manière continue entre 0 et l'infini) de telle sorte que la contrainte soit satisfaite mais les algorithmes généralement disponibles sont inappropriés pour résoudre ce cas de figure. Ce problème se retrouvera dans les deux autres cas de gestion sous contrainte étudiés dans ce chapitre, avec la [relation 214 de la page 757](#), qui traite de l'approvisionnement simultané d'articles stockables à délai d'obtention nul, et d'une relation similaire se déduisant de la [relation 216 de la page 761](#), qui traite de l'approvisionnement simultané d'articles stockables à demandes non satisfaites différées avec délai d'obtention non nul. Le logiciel proposé avec cet ouvrage borne en pratique la contrainte, de telle sorte qu'une solution numérique soit toujours possible dans ces 3 cas de figure.



TABLEAU 214
Analyse de la politique optimale de la MAISON DE LA PRESSE pour l'approvisionnement de ses quotidiens sous contrainte de volume stocké

Politique optimale d'approvisionnement sous contrainte		Univers	Dépêche	Courrier
Conséquences physiques		par période calendaire	par période calendaire	par période calendaire
Stock S de début de période		291	240	368
Stock de sécurité		- 9	- 10	- 32
Demande moyenne satisfaite		287,061	232,687	360,470
Rupture moyenne de stock		12,939	17,313	39,530
Pourcentage de demandes non satisfaites		4,31%	6,93%	9,88%
Probabilité de rupture par période de révision calendaire		66,46%	62,43%	73,57%
Stock résiduel moyen		3,939	7,313	7,530
Conséquences financières		par période calendaire	par période calendaire	par période calendaire
Dépense d'acquisition nette moyenne		517,50	487,20	686,02
Coût de commande / Charges fixes calendaires		0,00	0,00	0,00
Coût de rupture		9,06	13,85	23,72
Coût de possession		0,79	1,83	1,13
Indicateur de coût moyen		9,84	15,68	24,85
Marge nette moyenne		200,16	184,32	215,15
Conséquences physiques		par an	par an	par an
Demande moyenne satisfaite		74 635,917	60 498,522	93 722,275
Rupture moyenne de stock		3 364,083	4 501,478	10 277,725
Pourcentage de demandes non satisfaites		4,31%	6,93%	9,88%
Nombre moyen annuel de périodes en rupture de stock		172,791	162,305	191,270
Stock résiduel moyen		1 024,083	1 901,478	1 957,725
Conséquences financières		par an	par an	par an
Dépense d'acquisition nette moyenne		134 549,47	121 472,41	178 365,98
Coût de commande		0,00	0,00	0,00
Coût de rupture		2 354,86	3 601,18	6 166,63
Coût de possession		204,82	475,37	293,66
Indicateur de coût moyen		2 559,67	4 076,55	6 460,29
Marge nette moyenne		52 040,33	47 923,45	55 939,71
Consommation de la ressource		291	240	368
Prix-fantôme (lambda) = 0,399559				

Table des matières

Index thématique

probabilité $\frac{c_{pj} + \lambda \cdot a_j}{c_{pj}/2 + c_{rj}}$ étant nécessairement inférieure à 1, on en déduit les conditions de la relation 214¹:

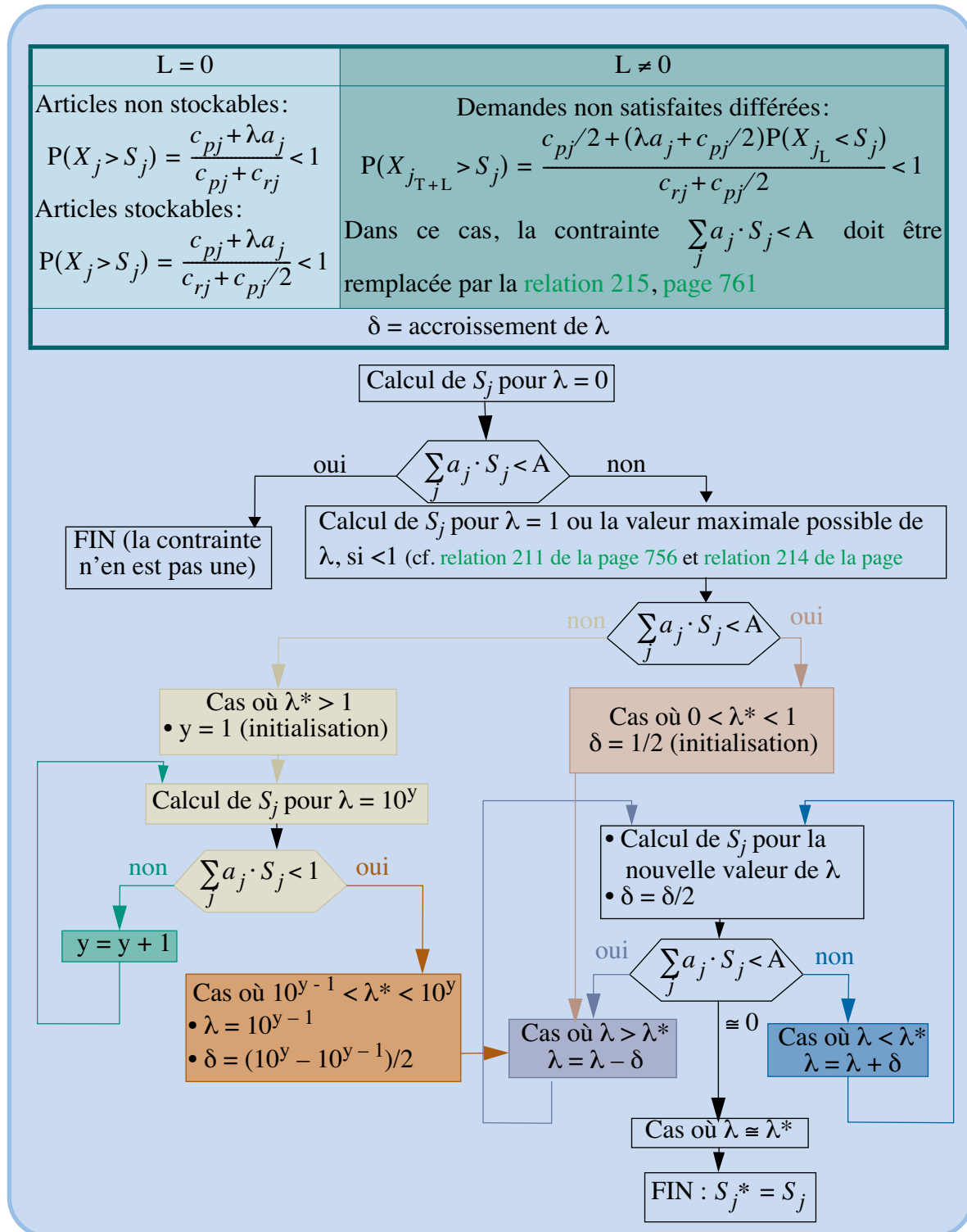
$$\lambda < \text{Min}_j((c_{rj} - c_{pj}/2)/a_j) \quad \text{relation 214}$$

On peut illustrer ce cas de figure par l'exemple (partiel) de l'approvisionnement du magasin de bricolage **CASTOLIN** (tableau 215 de la page 759), qui est ouvert 52 semaines par an et commande chaque mardi soir et est livré le lendemain matin à l'ouverture. La solution numérique de ce problème est fournie dans le tableau 216.

1. Voir note du bas de la page 756.

FIGURE 192

Algorithme de résolution du problème de gestion sous contrainte



II-3.2 Gestion calendaire sous contrainte d'utilisation d'un facteur rare: cas du délai d'obtention non nul et des demandes non satisfaites différées

II-3.2.1 Exemple introductif

Le dépôt régional de **MAXITYRE** (cf. § II-2.1, page 730) gère plusieurs dizaines de références de pneumatiques avec la même politique de gestion calendaire,

TABLEAU 216

Analyse de la politique optimale de **CASTOLIN** avec limitation de la valeur initiale du stock de début de période fixé à 1500 dollars liduriens



Politique optimale d'approvisionnement de	Ampoule par période calendaire	Tourne-vis par période calendaire	Marteau par période calendaire
Conséquences physiques			
Stock S de début de période	243	34	106
Consommation de la ressource rare	729,00	136,00	636,00
Stock de sécurité	-57,00	4,00	6,00
Demande moyenne satisfaite	243,49	29,22	96,71
Rupture moyenne de stock	56,51	0,78	3,29
Pourcentage de demandes non satisfaites	18,84%	2,58%	3,29%
Probabilité de rupture par période	99,76%	20,57%	33,24%
Stock moyen possédé	121,26	19,39	57,64
Conséquences financières			
	par période	par période	par période
Dépense d'acquisition nette moyenne	730,46	116,90	580,28
Coût de commande	0,00	0,00	0,00
Coût de rupture	28,26	2,33	9,86
Coût de possession	1,40	0,30	1,33
Indicateur de coût moyen	29,66	2,62	11,19
Marge nette moyenne	120,34	87,38	288,81
Conséquences physiques			
	par an	par an	par an
Demande moyenne satisfaite	12 661,27	1 519,70	5 029,06
Rupture de stock moyenne annuelle	2 938,73	40,30	170,94
Pourcentage de demandes non satisfaites	18,84%	2,58%	3,29%
Nombre moyen annuel de périodes en rupture	51,88	10,69	17,28
Stock moyen possédé	121,26	19,39	57,64
Conséquences financières			
	par an	par an	par an
Dépense d'acquisition nette moyenne	37 983,82	6 078,80	30 174,35
Coût de commande	0,00	0,00	0,00
Coût de rupture	1 469,36	120,90	512,83
Coût de possession	72,75	15,51	69,17
Indicateur de coût moyen	1 542,12	136,41	582,00
Marge nette moyenne	6 257,88	4 543,59	15 018,00
Prix-fantôme (λ) = 0,16438			

Table des matières

Index thématique

Table des matières

Index thématique

TABLEAU 215

Exemple de gestion d'articles stockables à délai d'obtention nul avec limitation de la valeur initiale du stock total à 1500 dollars liduriens (**CASTOLIN**)

Article	Loi	moyenne	écart-type	prix de vente	prix d'achat
Ampoule	Normal	300	20	3,5	3
Tourne-vis	Poisson	30	-	7	4
Marteau	Normal	100	15	9	6

caractérisée par une période de révision calendaire de 20 jours ouvrables et un délai d'obtention de 10 jours ouvrables. La prise en compte de plusieurs références peut poser un problème si ces articles consomment simultanément une même ressource rare. Cette consommation ne dépend plus uniquement des niveaux de rechargement S_j dans le cas d'un délai d'obtention non nul, comme c'était le cas avec le délai d'obtention nul. En effet, cette contrainte peut porter :

- sur les *stocks moyens disponibles après livraison*, et ce sera le cas par exemple d'un espace limité de stockage alloué à plusieurs références ;
- sur les *quantités commandées* (c'est-à-dire sur les différences entre les niveaux de rechargement et les stocks disponibles au moment de la passation de la commande) et ce sera le cas par exemple d'une contrainte financière pesant sur le montant moyen des commandes.

Nous n'aborderons ici que le premier de ces deux cas de figure, parce que c'est celui qui présente le plus d'intérêt en pratique (mais les démarches suivies sont similaires).

On limitera notre exemple au traitement simultané de trois références de pneumatiques : le CRT 12 déjà rencontré (demande annuelle suivant une loi Normale de moyenne 650 paires et d'écart-type 126), le CRT 10 dont la demande annuelle suit une loi Normale de moyenne 520 paires et d'écart-type 100, et le CRT 15 dont la demande annuelle se caractérise également par une loi Normale de moyenne 286 paires et d'écart-type 50. Le coût de rupture d'une demande non satisfaite différée (ouverture d'un dossier, suivi particulier de la commande) est de 10 dollars liduriens pour n'importe laquelle de ces références. Le coût de possession est calculé avec un taux d'opportunité de 20 %, sur la base d'un coût d'acquisition hors taxes de 260 dollars pour le CRT 12 (vendu 310), de 292,50 dollars liduriens pour le CRT 10 (vendu 350) et de 325 dollars pour le CRT 15 (vendu 370). L'espace moyen maximum alloué pour ces trois références est de 100 paires de pneus.

II-3.2.2 Analyse du problème

Pour chaque article, et si l'on adopte l'hypothèse simplificatrice dans le calcul des stocks moyens possédés, le coût moyen de gestion par période de révision calendaire est celui qui a été obtenu au § II-2.1.2, page 731.

Il ne reste plus qu'à indiquer par j les différents paramètres et variables, et à effectuer la somme de ces coûts moyens de gestion $C(S_j)$, puisque ces diverses espérances mathématiques sont indépendantes, tant qu'aucune contrainte n'est introduite, la dérivée partielle, par rapport à S_j , de cette somme de coûts est alors (cf. page 731), après indexation par j :

$$(c_{pj}/2 + c_{rj}) \int_0^{S_j} \int_0^{S_j - x_{jL}} f_{jT}(x_{jT}) \cdot dx_{jT} \Big] f_{jL}(x_{jL}) \cdot dx_{jL} - c_{rj} + \frac{c_{pj}}{2} P(X_{jL} > S_j)$$

À la réception d'une livraison d'un article donné j , le stock disponible est égal :

- au niveau de rechargement S_j , diminué de la consommation x_{jL} entre le moment où la commande a été passée et celui où elle a été livrée, si cette consommation x_{jL} est inférieure à S_j ,
- à zéro si cette demande x_{jL} a été supérieure ou égale au niveau de rechargement S_j .

L'espérance mathématique de ce stock disponible après livraison est donc dans le cadre d'une formalisation continue, qui se transpose sans difficulté au cas discret (cf. relation 135 de la page 670),

$$\int_0^{S_j} (S_j - x_{jL}) f_{jL}(x_{jL}) \cdot dx_{jL}$$

Si chaque unité en stock d'un article j consomme a_j de la ressource rare, la contrainte s'écrit :

$$\sum_j a_j \left[\int_0^{S_j} (S_j - x_{jL}) f_{jL}(x_{jL}) \cdot dx_{jL} \right] < A \quad \text{relation 215}$$

Le Lagrangien correspondant au problème d'optimisation sous contrainte est

$$\text{donc : } H = \sum_j C(S_j) + \lambda \left[\sum_j a_j \left\{ \int_0^{S_j} (S_j - x_{jL}) f_{jL}(x_{jL}) \cdot dx_{jL} \right\} - A \right]$$

dont la dérivée par rapport à S_j n'est autre que celle de $C(S_j)$ à laquelle il convient d'ajouter l'incidence de l'adjonction de la contrainte, c'est-à-dire :

$$\lambda \cdot a_j \int_0^{S_j} f_{jL}(x_{jL}) \cdot dx_{jL} = \lambda \cdot a_j \cdot P(X_{jL} < S_j)$$

On doit donc avoir à l'optimum :

$$\int_0^{S_j} \left[\int_0^{S_j - x_{jL}} f_{jT}(x_{jT}) \cdot dx_{jT} \right] f_{jL}(x_{jL}) \cdot dx_{jL} = \frac{c_{rj} - (\lambda \cdot a_j + c_{pj}/2) P(X_{jL} < S_j)}{c_{rj} + c_{pj}/2}$$

que l'on peut encore écrire, si les demandes sont indépendantes entre périodes :

$$P(X_{j_{T+L}} < S_j) = \frac{c_{rj} - (\lambda \cdot a_j + c_{pj}/2) P(X_{jL} < S_j)}{c_{rj} + c_{pj}/2}$$

avec c_{pj} calculé sur la durée T , ou relations 216

$$P(X_{j_{T+L}} > S_j) = \frac{[c_{pj} \{1 + P(X_{jL} < S_j)\}]/2 + \lambda \cdot a_j P(X_{jL} < S_j)}{c_{rj} + c_{pj}/2}$$

Le numérateur de la probabilité de rupture donnée dans cette relation 216 correspond à celui de la relation 195 de la page 735 qui correspond au cas sans contrainte, au facteur additif près $(\lambda a_j P(X_{jL} < S_j))$, au numérateur, nul avec λ , ce qui correspond au cas de figure où la contrainte ne joue pas.

On doit avoir en outre¹, après dérivation du Lagrangien par rapport à λ , satisfaction de la contrainte :

$$\sum_j a_j \int_0^{S_j} (S_j - x_{jL}) f_{jL}(x_{jL}) \cdot dx_{jL} = A \quad \text{relation 217}$$

Il faut souligner que cette contrainte est satisfaite en espérance mathématique ; ce qui implique, pour reprendre notre exemple, qu'en suivant la politique optimale

1. Voir la note du bas de la page 756, sur les contraintes opérationnelles pesant sur λ .

que l'on trouvera au § II-3.2.3, page 762, il ne sera pas anormal qu'après certaines livraisons, le nombre de pneus en stock soit supérieur aux 100 paires requises. Ajoutons, pour en finir sur ce point, que dans le cas d'un délai d'obtention nul, la contrainte était rigoureusement respectée : dans notre exemple au début de chacun des 20 jours ouvrables où la contrainte de stockage existe, le stock disponible après livraison est toujours de 899, c'est-à-dire toujours inférieur à la limite de 900 exemplaires imposée à la gestion des trois quotidiens. Ajoutons que si l'on peut considérer comme voisine de 1 la probabilité que la demande X_{jL} durant le délai d'obtention L soit inférieure à S_j , on peut alors écrire :

$$P(X_{j_{T+L}}) < S_j \equiv \frac{c_{rj} - (\lambda \cdot a_j + c_{pj}/2)}{c_{rj} + c_{pj}/2}, \text{ ou } P(X_{j_{T+L}} > S_j) = \frac{c_{pj} + \lambda \cdot a_j}{c_{rj} + c_{pj}/2} \quad \text{relation 218}$$

Cette dernière relation est analogue à la relation 213 de la page 756, mais elle définit une probabilité de rupture pour la variable aléatoire $X_{j_{T+L}}$ et non pour la variable X_{jT} implicitement utilisée dans la relation 213. On peut utiliser cette relation pour déterminer les niveaux de reapprovisionnement S_j , après quoi il convient de vérifier le bien-fondé de l'hypothèse de départ ($P(X_{jL} < S_j) \approx 1$ pour tous les articles j). Par ailleurs, la relation 214 de la page 757, qui fournit une borne supérieure à λ dans le cas d'un délai d'obtention nul, reste valable dans le cas étudié ici.

D'un point de vue algorithmique, si cette dernière hypothèse est fondée, l'algorithme décrit à la figure 192, page 758, s'applique alors parfaitement puisque ce cas de figure est similaire à celui analysé au § II-3.1.2, page 756. Dans le cas contraire, il convient d'utiliser la relation 216, ce qui conduit à faire appel en outre à un algorithme similaire à celui utilisé pour résoudre numériquement les problèmes faisant appel à la relation 193. C'est une telle combinaison d'algorithmes qui sera utilisée pour résoudre le problème numérique posé.

Comme dans le cas du délai d'obtention nul, la contrainte imposée ne doit pas être trop draconienne pour que l'utilisation de l'hypothèse simplificatrice dans le calcul du stock moyen possédé se justifie.

II-3.2.3 Résolution numérique du problème posé

L'application de l'algorithme de résolution du problème posé conduit aux calculs intermédiaires du tableau 217 (l'algorithme utilisé est plus «astucieux» et conduit à des valeurs légèrement différentes, plusieurs solutions pouvant être considérées comme optimales, compte tenu du caractère discret des valeurs prises par les points de commande). Les résultats auxquels on parvient sont fournis dans le tableau 218 de la page 764. Il est à noter qu'avec la feuille de calcul correspondante, vous pouvez utiliser indifféremment des lois normales et / ou des lois de Poisson (ce que nous n'illustrerons pas) et aller jusqu'à 10 références.

La politique optimale que doit suivre MAXITYRE est de compléter son stock à concurrence de 72 paires pour le CRT 12, de 55 paires pour le CRT 10 et 29 paires pour le CRT 15. La valeur prise par le multiplicateur de Lagrange λ est de l'ordre de 2,55, ce qui signifie économiquement que l'allocation d'un espace de stockage supplémentaire de 1 paire de pneu, alloué à ces 3 références, permettrait de diminuer le coût moyen de gestion calendaire de 2,55 dollars liduriens ce qui corres-

TABLEAU 217

Exemple d'utilisation de l'algorithme dans le cas de la gestion de **MAXITYRE** sous contrainte d'un stock moyen après livraison de 100 pneus

λ	Niveau de reemplètemen t			Stock moyen après livraison pour la référence j =			Consom- mation totale demandée	P($X_{Lj} > S_j$) = probabilité (%) d'une rupture de stock après livraison pour j =		
	S_1	S_2	S_3	1	2	3		1	2	3
0,00000	93	72	55	68,02	52,02	26,01	146,05	2,79%	0,43%	0,36%
1,00000	84	65	34	59,30	44,70	23,00	123,30	0,83%	1,14%	0,96%
10,00000	0	0	0	-	-	-	-	100,00%	100,00%	100,00%
5,50000	52	40	22	28,44	21,81	11,37	61,62	13,95%	14,96%	13,63%
3,25000	66	51	27	41,53	31,30	16,19	89,02	4,83%	5,79%	5,13%
2,12500	75	57	30	49,89	37,57	19,50	106,96	2,21%	2,83%	2,38%
2,68750	70	54	29	45,54	34,28	17,80	97,74	3,36%	4,16%	3,25%
2,40625	72	56	30	47,68	35,91	18,62	102,21	2,75%	3,45%	2,95%
2,54688	71	55	29	46,60	35,09	18,20	99,89	3,04%	3,80%	3,25%

pond à une économie annuelle de $2,55 \times (260/20) = 33,15$ dollars. On peut noter en outre que le niveau de service est relativement bas, puisque pour toutes les références, on a plus d'une chance sur deux d'observer une rupture de stock avant livraison; il est à craindre qu'une partie de la clientèle ne se lasse et s'adresse ailleurs, ce qui implique, d'une part que le coût de rupture utilisé par **MAXITYRE** est dans doute trop faible (il y a peut-être lieu d'y inclure une perte de Goodwill), ce qui conduit à un coût fantôme faible, et d'autre part que la contrainte imposée est sans doute trop forte.

TABLEAU 218

Analyse de la politique optimale sous contrainte de **MAXITYRE** pour plusieurs références \diamond – cas demandes non satisfaites différées



Solution optimale sous contrainte	CTR12	CTR10	CTR15
Conséquences physiques	par période calendaire	par période calendaire	par période calendaire
Niveau de recomplètement S	72	55	29
Stock de sécurité	21,543	14,974	7,180
Probabilité de rupture APRES livraison	2,85%	3,52%	2,84%
Rupture moyenne de stock APRES livraison	0,271	0,274	0,107
Probabilité de rupture AVANT livraison	52,75%	55,30%	57,75%
Rupture moyenne de stock AVANT livraison	18,594	15,935	8,565
Pourcentage de demandes non satisfaites immédiatement	37,19%	39,84%	38,93%
Stock moyen possédé	30,975	23,078	11,516
Stock moyen après livraison	46,81	35,25	18,29
Conséquences financières	par période calendaire	par période calendaire	par période calendaire
Dépense d'acquisition nette moyenne	13 000,00	11 700,00	7 150,00
Coût de commande / Charges fixes calendaires	0,00	0,00	0,00
Coût de rupture	185,94	159,35	85,65
Coût de possession	123,90	103,85	57,58
Indicateur de coût moyen	309,84	263,20	143,23
Marge nette moyenne	2 190,16	2 036,80	846,77
Conséquences physiques	par an	par an	par an
Nombre moyen annuel de périodes en rupture de stock APRES livraison	0,370	0,458	0,369
Rupture moyenne annuelle de stock APRES livraison	3,517	3,560	1,391
Nombre moyen annuel de périodes en rupture de stock AVANT livraison	6,858	7,189	7,507
Rupture moyenne annuelle de stock AVANT livraison	241,724	207,149	111,342
Pourcentage de demandes non satisfaites immédiatement	37,19%	39,84%	38,93%
Stock moyen possédé	30,975	23,078	11,516
Conséquences financières	par an	par an	par an
Dépense d'acquisition nette moyenne	169 000,00	152 100,00	92 950,00
Coût de commande / Charges fixes calendaires	0,00	0,00	0,00
Coût de rupture	2 417,24	2 071,49	1 113,42
Coût de possession	1 610,70	1 350,07	748,53
Indicateur de coût moyen annuel	4 027,94	3 421,56	1 861,95
Marge nette moyenne annuelle	28 472,06	26 478,44	11 008,05
Consommation de la ressource	46,81	35,25	18,29
Prix-fantôme (λ) = 2,519111328125			

Table des
matièresIndex
thématique

SECTION III ANNEXES DU CHAPITRE XI

III-1 Tables de relations entre S et $I_r(S)$ pour la loi Normale

III-1.1 Table A : $t_S = (S - \bar{x})/\sigma = t_1 + t_2$ connu $\Rightarrow g(t_S)^1$

$t_1 \backslash t_2$	0	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
-2,50	2,50200	2,51194	2,52188	2,53183	2,54177	2,55171	2,56166	2,57161	2,58156	2,59151
-2,40	2,40272	2,41264	2,42256	2,43248	2,44241	2,45234	2,46227	2,47220	2,48213	2,49207
-2,30	2,30366	2,31356	2,32345	2,33335	2,34325	2,35316	2,36307	2,37298	2,38289	2,39280
-2,20	2,20489	2,21475	2,22462	2,23449	2,24436	2,25423	2,26411	2,27400	2,28388	2,29377
-2,10	2,10647	2,11629	2,12612	2,13595	2,14579	2,15563	2,16547	2,17532	2,18517	2,19503
-2,00	2,00849	2,01827	2,02805	2,03783	2,04762	2,05742	2,06722	2,07702	2,08683	2,09665
-1,90	1,91105	1,92077	1,93049	1,94022	1,94996	1,95970	1,96945	1,97920	1,98896	1,99872
-1,80	1,81428	1,82392	1,83357	1,84323	1,85290	1,86257	1,87226	1,88195	1,89164	1,90134
-1,70	1,71829	1,72785	1,73742	1,74699	1,75658	1,76617	1,77578	1,78539	1,79501	1,80464
-1,60	1,62324	1,63270	1,64217	1,65165	1,66114	1,67064	1,68015	1,68967	1,69920	1,70874
-1,50	1,52931	1,53865	1,54800	1,55736	1,56674	1,57612	1,58552	1,59494	1,60436	1,61380
-1,40	1,43667	1,44587	1,45508	1,46431	1,47356	1,48281	1,49208	1,50137	1,51067	1,51998
-1,30	1,34553	1,35457	1,36363	1,37270	1,38179	1,39090	1,40002	1,40916	1,41831	1,42748
-1,20	1,25610	1,26496	1,27384	1,28274	1,29165	1,30059	1,30954	1,31851	1,32750	1,33650
-1,10	1,16862	1,17727	1,18595	1,19465	1,20336	1,21210	1,22086	1,22964	1,23844	1,24726
-1,00	1,08332	1,09174	1,10019	1,10866	1,11716	1,12568	1,13422	1,14279	1,15138	1,15999
-0,90	1,00043	1,00860	1,01680	1,02503	1,03328	1,04156	1,04986	1,05819	1,06654	1,07491
-0,80	0,92021	0,92810	0,93603	0,94398	0,95196	0,95997	0,96801	0,97607	0,98417	0,99229
-0,70	0,84288	0,85048	0,85810	0,86576	0,87345	0,88117	0,88892	0,89669	0,90450	0,91234
-0,60	0,76867	0,77595	0,78325	0,79059	0,79797	0,80537	0,81281	0,82028	0,82778	0,83531
-0,50	0,69780	0,70473	0,71170	0,71870	0,72573	0,73281	0,73991	0,74705	0,75422	0,76143
-0,40	0,63044	0,63701	0,64362	0,65027	0,65695	0,66367	0,67042	0,67721	0,68404	0,69090
-0,30	0,56676	0,57296	0,57920	0,58547	0,59178	0,59813	0,60452	0,61094	0,61740	0,62390
-0,20	0,50689	0,51271	0,51856	0,52445	0,53038	0,53634	0,54235	0,54840	0,55448	0,56060
-0,10	0,45094	0,45635	0,46181	0,46731	0,47285	0,47842	0,48404	0,48969	0,49539	0,50112
0,00	0,39894	0,39396	0,38902	0,38412	0,37926	0,37444	0,36966	0,36492	0,36022	0,35556
0,10	0,35094	0,34635	0,34181	0,33731	0,33285	0,32842	0,32404	0,31969	0,31539	0,31112
0,20	0,30689	0,30271	0,29856	0,29445	0,29038	0,28634	0,28235	0,27840	0,27448	0,27060
0,30	0,26676	0,26296	0,25920	0,25547	0,25178	0,24813	0,24452	0,24094	0,23740	0,23390
0,40	0,23044	0,22701	0,22362	0,22027	0,21695	0,21367	0,21042	0,20721	0,20404	0,20090
0,50	0,19780	0,19473	0,19170	0,18870	0,18573	0,18281	0,17991	0,17705	0,17422	0,17143
0,60	0,16867	0,16595	0,16325	0,16059	0,15797	0,15537	0,15281	0,15028	0,14778	0,14531
0,70	0,14288	0,14048	0,13810	0,13576	0,13345	0,13117	0,12892	0,12669	0,12450	0,12234
0,80	0,12021	0,11810	0,11603	0,11398	0,11196	0,10997	0,10801	0,10607	0,10417	0,10229
0,90	0,10043	0,09860	0,09680	0,09503	0,09328	0,09156	0,08986	0,08819	0,08654	0,08491
1,00	0,08332	0,08174	0,08019	0,07866	0,07716	0,07568	0,07422	0,07279	0,07138	0,06999
1,10	0,06862	0,06727	0,06595	0,06465	0,06336	0,06210	0,06086	0,05964	0,05844	0,05726
1,20	0,05610	0,05496	0,05384	0,05274	0,05165	0,05059	0,04954	0,04851	0,04750	0,04650
1,30	0,04553	0,04457	0,04363	0,04270	0,04179	0,04090	0,04002	0,03916	0,03831	0,03748
1,40	0,03667	0,03587	0,03508	0,03431	0,03356	0,03281	0,03208	0,03137	0,03067	0,02998
1,50	0,02931	0,02865	0,02800	0,02736	0,02674	0,02612	0,02552	0,02494	0,02436	0,02380
1,60	0,02324	0,02270	0,02217	0,02165	0,02114	0,02064	0,02015	0,01967	0,01920	0,01874
1,70	0,01829	0,01785	0,01742	0,01699	0,01658	0,01617	0,01578	0,01539	0,01501	0,01464
1,80	0,01428	0,01392	0,01357	0,01323	0,01290	0,01257	0,01226	0,01195	0,01164	0,01134
1,90	0,01105	0,01077	0,01049	0,01022	0,00996	0,00970	0,00945	0,00920	0,00896	0,00872
2,00	0,00849	0,00827	0,00805	0,00783	0,00762	0,00742	0,00722	0,00702	0,00683	0,00665
2,10	0,00647	0,00629	0,00612	0,00595	0,00579	0,00563	0,00547	0,00532	0,00517	0,00503
2,20	0,00489	0,00475	0,00462	0,00449	0,00436	0,00423	0,00411	0,00400	0,00388	0,00377
2,30	0,00366	0,00356	0,00345	0,00335	0,00325	0,00316	0,00307	0,00298	0,00289	0,00280
2,40	0,00272	0,00264	0,00256	0,00248	0,00241	0,00234	0,00227	0,00220	0,00213	0,00207
2,50	0,00200	0,00194	0,00188	0,00183	0,00177	0,00171	0,00166	0,00161	0,00156	0,00151
2,60	0,00146	0,00142	0,00137	0,00133	0,00129	0,00125	0,00121	0,00117	0,00113	0,00110
2,70	0,00106	0,00103	0,00099	0,00096	0,00093	0,00090	0,00087	0,00084	0,00081	0,00079
2,80	0,00076	0,00074	0,00071	0,00069	0,00066	0,00064	0,00062	0,00060	0,00058	0,00056
2,90	0,00054	0,00052	0,00051	0,00049	0,00047	0,00046	0,00044	0,00042	0,00041	0,00040
3,00	0,00038	0,00037	0,00036	0,00034	0,00033	0,00032	0,00031	0,00030	0,00029	0,00028

Table des matières

Index thématique

III-1.2 Table B¹: $P(t > t_S) = p_1 + p_2 \Rightarrow g(t_S)$, avec $t_S = (S - \bar{x})/\sigma$

Probabilité de rupture $P(t > t_S)$ lue en première colonne et première ligne des tableaux ci-dessous :

- Le premier tableau donne les valeurs $g(t_S)$ pour des probabilités variant entre 0,1 % et 25,9 %, par pas de 0,1 % ; exemple: $P(t > t_S) = 9,6\% \rightarrow g(t_S) = 0,04508$.
- Le second tableau donne les valeurs de $g(t_S)$ pour des probabilités variant entre 10 % et 89 % par pas de 1 % ; exemple: $P(t > t_S) = 37\% \rightarrow g(t_S) = 0,25478$.

$p_1 \backslash p_2$	0,000	0,001	0,002	0,003	0,004	0,005	0,006	0,007	0,008	0,009
0,00	-	0,00028	0,00058	0,00091	0,00124	0,00158	0,00193	0,00229	0,00265	0,00302
0,01	0,00339	0,00377	0,00415	0,00453	0,00492	0,00532	0,00572	0,00612	0,00652	0,00693
0,02	0,00734	0,00776	0,00818	0,00860	0,00902	0,00945	0,00988	0,01031	0,01074	0,01118
0,03	0,01162	0,01206	0,01250	0,01295	0,01340	0,01385	0,01431	0,01476	0,01522	0,01568
0,04	0,01615	0,01661	0,01708	0,01755	0,01802	0,01849	0,01897	0,01945	0,01993	0,02041
0,05	0,02089	0,02138	0,02187	0,02236	0,02285	0,02334	0,02384	0,02433	0,02483	0,02533
0,06	0,02584	0,02634	0,02685	0,02736	0,02787	0,02838	0,02889	0,02941	0,02992	0,03044
0,07	0,03096	0,03148	0,03201	0,03253	0,03306	0,03359	0,03412	0,03465	0,03519	0,03572
0,08	0,03626	0,03680	0,03734	0,03788	0,03843	0,03897	0,03952	0,04007	0,04062	0,04117
0,09	0,04172	0,04228	0,04283	0,04339	0,04395	0,04451	0,04508	0,04564	0,04621	0,04677
0,10	0,04734	0,04791	0,04849	0,04906	0,04963	0,05021	0,05079	0,05137	0,05195	0,05253
0,11	0,05312	0,05370	0,05429	0,05488	0,05547	0,05606	0,05665	0,05725	0,05785	0,05844
0,12	0,05904	0,05964	0,06024	0,06085	0,06145	0,06206	0,06267	0,06328	0,06389	0,06450
0,13	0,06511	0,06573	0,06635	0,06696	0,06758	0,06821	0,06883	0,06945	0,07008	0,07070
0,14	0,07133	0,07196	0,07259	0,07323	0,07386	0,07449	0,07513	0,07577	0,07641	0,07705
0,15	0,07769	0,07834	0,07898	0,07963	0,08028	0,08093	0,08158	0,08223	0,08289	0,08354
0,16	0,08420	0,08486	0,08552	0,08618	0,08684	0,08750	0,08817	0,08884	0,08950	0,09017
0,17	0,09085	0,09152	0,09219	0,09287	0,09354	0,09422	0,09490	0,09558	0,09627	0,09695
0,18	0,09763	0,09832	0,09901	0,09970	0,10039	0,10108	0,10178	0,10247	0,10317	0,10387
0,19	0,10456	0,10527	0,10597	0,10667	0,10738	0,10808	0,10879	0,10950	0,11021	0,11092
0,20	0,11164	0,11235	0,11307	0,11379	0,11451	0,11523	0,11595	0,11667	0,11740	0,11812
0,21	0,11885	0,11958	0,12031	0,12105	0,12178	0,12251	0,12325	0,12399	0,12473	0,12547
0,22	0,12621	0,12695	0,12770	0,12845	0,12919	0,12994	0,13070	0,13145	0,13220	0,13296
0,23	0,13371	0,13447	0,13523	0,13599	0,13675	0,13752	0,13828	0,13905	0,13982	0,14059
0,24	0,14136	0,14213	0,14291	0,14368	0,14446	0,14524	0,14602	0,14680	0,14758	0,14837
0,25	0,14915	0,14994	0,15073	0,15152	0,15231	0,15311	0,15390	0,15470	0,15550	0,15629

Table des matières

Index thématique

$p_1 \backslash p_2$	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,10	0,04734	0,05312	0,05904	0,06511	0,07133	0,07769	0,08420	0,09085	0,09763	0,10456
0,20	0,11164	0,11885	0,12621	0,13371	0,14136	0,14915	0,15710	0,16519	0,17343	0,18182
0,30	0,19037	0,19908	0,20795	0,21698	0,22617	0,23554	0,24507	0,25478	0,26467	0,27474
0,40	0,28500	0,29545	0,30610	0,31694	0,32800	0,33926	0,35074	0,36244	0,37437	0,38653
0,50	0,39894	0,41160	0,42452	0,43771	0,45117	0,46492	0,47896	0,49332	0,50799	0,52300
0,60	0,53835	0,55406	0,57015	0,58664	0,60353	0,62086	0,63864	0,65689	0,67565	0,69493
0,70	0,71477	0,73521	0,75627	0,77800	0,80044	0,82364	0,84766	0,87256	0,89840	0,92527
0,80	0,95326	0,98246	1,01300	1,04501	1,07866	1,11413	1,15165	1,19151	1,23403	1,27964

1. Exemple d'utilisation: $t_S = -1,72 \rightarrow g(t_S) = 1,73742$ et $t_S = 0,80 \rightarrow g(t_S) = 0,12021$; voir aussi l'exemple du § I-1.3.1, page 677.

1. Voir § I-1.3.1.3, page 679, pour une illustration de l'application de cette table.

III-1.3 Table C: $g(t_S) = g_1 + g_2 \Rightarrow^1 P(t > t_S)$ – unité: % –

Voir table A pour la définition de t_S, S et $g(t_S)$; la probabilité de rupture $P(t > t_S)$ est donnée en pourcentage, comme dans la table B.

- Le premier tableau donne les valeurs $P(t > t_S)$ pour des valeurs de $g(t_S)$ variant entre 0,0001 et 0,0039 par pas de 0,0001 : exemple: $g(t_S) = 0,0251 \rightarrow P(t > t_S) = 5,85\%$
- Le second tableau donne les valeurs de $P(t > t_S)$ pour des valeurs de $g(t_S)$ variant entre 0,0010 et 0,3090 par pas de 0,001 : exemple: $g(t_S) = 0,092 \rightarrow P(t > t_S) = 17,17\%$.

Table des matières

Index thématique

$g_1 \backslash g_2$	0,0000	0,0001	0,0002	0,0003	0,0004	0,0005	0,0006	0,0007	0,0008	0,0009
0,000	0,00	0,04	0,07	0,11	0,14	0,17	0,21	0,24	0,27	0,30
0,001	0,33	0,36	0,39	0,42	0,45	0,48	0,51	0,53	0,56	0,59
0,002	0,62	0,65	0,68	0,70	0,73	0,76	0,79	0,81	0,84	0,87
0,003	0,90	0,92	0,95	0,98	1,00	1,03	1,06	1,08	1,11	1,14
0,004	1,16	1,19	1,21	1,24	1,27	1,29	1,32	1,34	1,37	1,39
0,005	1,42	1,44	1,47	1,50	1,52	1,55	1,57	1,60	1,62	1,65
0,006	1,67	1,70	1,72	1,74	1,77	1,79	1,82	1,84	1,87	1,89
0,007	1,92	1,94	1,97	1,99	2,01	2,04	2,06	2,09	2,11	2,13
0,008	2,16	2,18	2,21	2,23	2,25	2,28	2,30	2,32	2,35	2,37
0,009	2,40	2,42	2,44	2,47	2,49	2,51	2,54	2,56	2,58	2,61
0,010	2,63	2,65	2,68	2,70	2,72	2,74	2,77	2,79	2,81	2,84
0,011	2,86	2,88	2,90	2,93	2,95	2,97	3,00	3,02	3,04	3,06
0,012	3,09	3,11	3,13	3,15	3,18	3,20	3,22	3,24	3,27	3,29
0,013	3,31	3,33	3,36	3,38	3,40	3,42	3,44	3,47	3,49	3,51
0,014	3,53	3,55	3,58	3,60	3,62	3,64	3,66	3,69	3,71	3,73
0,015	3,75	3,77	3,80	3,82	3,84	3,86	3,88	3,90	3,93	3,95
0,016	3,97	3,99	4,01	4,03	4,05	4,08	4,10	4,12	4,14	4,16
0,017	4,18	4,20	4,23	4,25	4,27	4,29	4,31	4,33	4,35	4,37
0,018	4,40	4,42	4,44	4,46	4,48	4,50	4,52	4,54	4,56	4,59
0,019	4,61	4,63	4,65	4,67	4,69	4,71	4,73	4,75	4,77	4,79
0,020	4,82	4,84	4,86	4,88	4,90	4,92	4,94	4,96	4,98	5,00
0,021	5,02	5,04	5,06	5,08	5,10	5,12	5,15	5,17	5,19	5,21
0,022	5,23	5,25	5,27	5,29	5,31	5,33	5,35	5,37	5,39	5,41
0,023	5,43	5,45	5,47	5,49	5,51	5,53	5,55	5,57	5,59	5,61
0,024	5,63	5,65	5,67	5,69	5,71	5,73	5,75	5,77	5,79	5,81
0,025	5,83	5,85	5,87	5,89	5,91	5,93	5,95	5,97	5,99	6,01
0,026	6,03	6,05	6,07	6,09	6,11	6,13	6,15	6,17	6,19	6,21
0,027	6,23	6,25	6,27	6,29	6,31	6,33	6,35	6,37	6,39	6,41
0,028	6,43	6,45	6,47	6,48	6,50	6,52	6,54	6,56	6,58	6,60
0,029	6,62	6,64	6,66	6,68	6,70	6,72	6,74	6,76	6,78	6,80
0,030	6,81	6,83	6,85	6,87	6,89	6,91	6,93	6,95	6,97	6,99

$g_1 \backslash g_2$	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01
0,00	0,00	0,33	0,62	0,90	1,16	1,42	1,67	1,92	2,16	2,40
0,01	2,63	2,86	3,09	3,31	3,53	3,75	3,97	4,18	4,40	4,61
0,02	4,82	5,02	5,23	5,43	5,63	5,83	6,03	6,23	6,43	6,62
0,03	6,81	7,01	7,20	7,39	7,58	7,76	7,95	8,14	8,32	8,51
0,04	8,69	8,87	9,05	9,23	9,41	9,59	9,76	9,94	10,12	10,29
0,05	10,46	10,64	10,81	10,98	11,15	11,32	11,49	11,66	11,83	11,99
0,06	12,16	12,33	12,49	12,65	12,82	12,98	13,14	13,31	13,47	13,63
0,07	13,79	13,95	14,11	14,26	14,42	14,58	14,74	14,89	15,05	15,20
0,08	15,36	15,51	15,66	15,82	15,97	16,12	16,27	16,42	16,57	16,72
0,09	16,87	17,02	17,17	17,32	17,47	17,61	17,76	17,91	18,05	18,20
0,10	18,34	18,49	18,63	18,78	18,92	19,06	19,20	19,35	19,49	19,63
0,11	19,77	19,91	20,05	20,19	20,33	20,47	20,61	20,75	20,88	21,02
0,12	21,16	21,29	21,43	21,57	21,70	21,84	21,97	22,11	22,24	22,37
0,13	22,51	22,64	22,77	22,91	23,04	23,17	23,30	23,43	23,56	23,69
0,14	23,82	23,95	24,08	24,21	24,34	24,47	24,60	24,73	24,85	24,98

1. Voir § I-1.3.1.3, page 679, pour une illustration de l'application de cette table.

$g_1 \backslash g_2$	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01
0,15	25,11	25,23	25,36	25,49	25,61	25,74	25,86	25,99	26,11	26,24
0,16	26,36	26,49	26,61	26,73	26,85	26,98	27,10	27,22	27,34	27,47
0,17	27,59	27,71	27,83	27,95	28,07	28,19	28,31	28,43	28,55	28,67
0,18	28,78	28,90	29,02	29,14	29,26	29,37	29,49	29,61	29,72	29,84
0,19	29,96	30,07	30,19	30,30	30,42	30,53	30,65	30,76	30,88	30,99
0,20	31,10	31,22	31,33	31,44	31,56	31,67	31,78	31,89	32,01	32,12
0,21	32,23	32,34	32,45	32,56	32,67	32,78	32,89	33,00	33,11	33,22
0,22	33,33	33,44	33,55	33,66	33,77	33,87	33,98	34,09	34,20	34,30
0,23	34,41	34,52	34,62	34,73	34,84	34,94	35,05	35,15	35,26	35,37
0,24	35,47	35,58	35,68	35,78	35,89	35,99	36,10	36,20	36,30	36,41
0,25	36,51	36,61	36,72	36,82	36,92	37,02	37,12	37,23	37,33	37,43
0,26	37,53	37,63	37,73	37,83	37,93	38,03	38,13	38,23	38,33	38,43
0,27	38,53	38,63	38,73	38,83	38,93	39,03	39,12	39,22	39,32	39,42
0,28	39,51	39,61	39,71	39,81	39,90	40,00	40,10	40,19	40,29	40,38
0,29	40,48	40,58	40,67	40,77	40,86	40,96	41,05	41,15	41,24	41,34
0,30	41,43	41,52	41,62	41,71	41,80	41,90	41,99	42,08	42,18	42,27

Table des
matièresIndex
thématique

III-1.4 Table D¹: $g(t_S) \rightarrow t_S$

Voir table A pour la définition de t_S , S et $g(t_S)$; la probabilité de rupture $P(t > t_S)$ est donnée en pourcentage, comme dans la table B. La lecture de $g(t_S)$ s'effectue comme pour la table C, mais en sortie, on obtient t_S au lieu de $P(t > t_S)$; exemples: $g(t_S) = 0,0251 \rightarrow t_S = 1,567$; $g(t_S) = 0,0920 \rightarrow t_S = 0,947$.

$g_1 \backslash g_2$	0,0000	0,0001	0,0002	0,0003	0,0004	0,0005	0,0006	0,0007	0,0008	0,0009
0,000		3,363	3,179	3,068	2,987	2,923	2,870	2,825	2,785	2,750
0,001	2,718	2,689	2,662	2,637	2,614	2,592	2,572	2,553	2,534	2,517
0,002	2,501	2,485	2,470	2,455	2,441	2,428	2,415	2,402	2,390	2,379
0,003	2,367	2,356	2,346	2,335	2,325	2,315	2,306	2,296	2,287	2,278
0,004	2,270	2,261	2,253	2,245	2,237	2,229	2,221	2,214	2,206	2,199
0,005	2,192	2,185	2,178	2,171	2,165	2,158	2,152	2,145	2,139	2,133
0,006	2,127	2,121	2,115	2,110	2,104	2,098	2,093	2,087	2,082	2,077
0,007	2,071	2,066	2,061	2,056	2,051	2,046	2,041	2,036	2,032	2,027
0,008	2,022	2,018	2,013	2,008	2,004	2,000	1,995	1,991	1,987	1,982
0,009	1,978	1,974	1,970	1,966	1,962	1,958	1,954	1,950	1,946	1,942
0,010	1,938	1,935	1,931	1,927	1,923	1,920	1,916	1,913	1,909	1,905
0,011	1,902	1,898	1,895	1,892	1,888	1,885	1,881	1,878	1,875	1,872
0,012	1,868	1,865	1,862	1,859	1,855	1,852	1,849	1,846	1,843	1,840
0,013	1,837	1,834	1,831	1,828	1,825	1,822	1,819	1,816	1,813	1,811
0,014	1,808	1,805	1,802	1,799	1,797	1,794	1,791	1,788	1,786	1,783
0,015	1,780	1,778	1,775	1,772	1,770	1,767	1,765	1,762	1,759	1,757
0,016	1,754	1,752	1,749	1,747	1,744	1,742	1,739	1,737	1,735	1,732
0,017	1,730	1,727	1,725	1,723	1,720	1,718	1,716	1,713	1,711	1,709
0,018	1,706	1,704	1,702	1,700	1,697	1,695	1,693	1,691	1,689	1,686
0,019	1,684	1,682	1,680	1,678	1,676	1,674	1,671	1,669	1,667	1,665
0,020	1,663	1,661	1,659	1,657	1,655	1,653	1,651	1,649	1,647	1,645
0,021	1,643	1,641	1,639	1,637	1,635	1,633	1,631	1,629	1,627	1,625
0,022	1,623	1,621	1,619	1,617	1,616	1,614	1,612	1,610	1,608	1,606
0,023	1,604	1,603	1,601	1,599	1,597	1,595	1,594	1,592	1,590	1,588
0,024	1,586	1,585	1,583	1,581	1,579	1,578	1,576	1,574	1,572	1,571
0,025	1,569	1,567	1,565	1,564	1,562	1,560	1,559	1,557	1,555	1,554
0,026	1,552	1,550	1,549	1,547	1,545	1,544	1,542	1,541	1,539	1,537
0,027	1,536	1,534	1,533	1,531	1,529	1,528	1,526	1,525	1,523	1,521
0,028	1,520	1,518	1,517	1,515	1,514	1,512	1,511	1,509	1,508	1,506
0,029	1,505	1,503	1,502	1,500	1,499	1,497	1,496	1,494	1,493	1,491
0,030	1,490	1,488	1,487	1,485	1,484	1,482	1,481	1,480	1,478	1,477

Table des matières

Index thématique

$g_1 \backslash g_2$	0,0000	0,0010	0,0020	0,0030	0,0040	0,0050	0,0060	0,0070	0,0080	0,0090
0,000		2,718	2,501	2,367	2,270	2,192	2,127	2,071	2,022	1,978
0,010	1,938	1,902	1,868	1,837	1,808	1,780	1,754	1,730	1,706	1,684
0,020	1,663	1,643	1,623	1,604	1,586	1,569	1,552	1,536	1,520	1,505
0,030	1,490	1,475	1,461	1,447	1,434	1,421	1,408	1,396	1,384	1,372
0,040	1,360	1,349	1,338	1,327	1,316	1,305	1,295	1,285	1,275	1,265
0,050	1,256	1,246	1,237	1,228	1,219	1,210	1,201	1,192	1,184	1,175
0,060	1,167	1,159	1,151	1,143	1,135	1,127	1,120	1,112	1,105	1,097
0,070	1,090	1,083	1,076	1,069	1,062	1,055	1,048	1,041	1,034	1,028
0,080	1,021	1,015	1,008	1,002	0,996	0,989	0,983	0,977	0,971	0,965
0,090	0,959	0,953	0,947	0,942	0,936	0,930	0,925	0,919	0,913	0,908
0,100	0,902	0,897	0,892	0,886	0,881	0,876	0,870	0,865	0,860	0,855
0,110	0,850	0,845	0,840	0,835	0,830	0,825	0,820	0,815	0,810	0,806
0,120	0,801	0,796	0,792	0,787	0,782	0,778	0,773	0,769	0,764	0,760
0,130	0,755	0,751	0,746	0,742	0,738	0,733	0,729	0,725	0,720	0,716
0,140	0,712	0,708	0,704	0,700	0,695	0,691	0,687	0,683	0,679	0,675
0,150	0,671	0,667	0,663	0,659	0,655	0,651	0,648	0,644	0,640	0,636
0,160	0,632	0,628	0,625	0,621	0,617	0,613	0,610	0,606	0,602	0,599
0,170	0,595	0,592	0,588	0,584	0,581	0,577	0,574	0,570	0,567	0,563
0,180	0,560	0,556	0,553	0,549	0,546	0,542	0,539	0,536	0,532	0,529

1. Voir § I-1.3.1.3, page 679, pour une illustration de l'application de cette table.

0,190	0,526	0,522	0,519	0,516	0,512	0,509	0,506	0,503	0,499	0,496
0,200	0,493	0,490	0,486	0,483	0,480	0,477	0,474	0,471	0,468	0,464
0,210	0,461	0,458	0,455	0,452	0,449	0,446	0,443	0,440	0,437	0,434
0,220	0,431	0,428	0,425	0,422	0,419	0,416	0,413	0,410	0,407	0,404
0,230	0,401	0,398	0,395	0,393	0,390	0,387	0,384	0,381	0,378	0,375
0,240	0,373	0,370	0,367	0,364	0,361	0,359	0,356	0,353	0,350	0,347
0,250	0,345	0,342	0,339	0,337	0,334	0,331	0,329	0,326	0,323	0,320
0,260	0,318	0,315	0,313	0,310	0,307	0,305	0,302	0,299	0,297	0,294
0,270	0,292	0,289	0,286	0,284	0,281	0,279	0,276	0,274	0,271	0,268
0,280	0,266	0,263	0,261	0,258	0,256	0,253	0,251	0,248	0,246	0,243
0,290	0,241	0,238	0,236	0,234	0,231	0,229	0,226	0,224	0,221	0,219
0,300	0,217	0,214	0,212	0,209	0,207	0,205	0,202	0,200	0,197	0,195

Table des
matièresIndex
thématique

Chapitre XII

POLITIQUE DE GESTION DES STOCKS DE TYPE

« q, s »

La gestion calendaire des stocks étudiée au [chapitre XI](#) se caractérise par la définition de commandes passées avec une périodicité T fixée, pour des quantités variables correspondant à la différence entre un niveau fixe S et celui, variable, d'un stock disponible ou d'une position de stock. La gestion des stocks par la quantité économique optimale se caractérise, au contraire, par une **quantité de commande** fixe q , et une périodicité variable des commandes (lorsqu'on est en avenir aléatoire), celles-ci étant déclenchées lorsque le stock devient inférieur à un seuil appelé **point de commande** s .

En théorie, cette technique de gestion des stocks est moins onéreuse que la précédente, du moins si l'on fait abstraction du coût de fonctionnement du système d'information qu'elle utilise. En effet, la méthode de la quantité économique de commande s'appuie sur un suivi en temps réel de l'évolution des stocks (inventaire permanent). Ce système d'information, également utilisable en gestion calendaire, est normalement plus onéreux que celui de l'inventaire périodique qui suffit pour la mise en place d'une gestion calendaire. Deux remarques doivent être faites cependant.

Table des
matières

Index
thématique

- L'évolution des systèmes d'information va nettement dans le sens d'une intégration des processus et celui d'un suivi en temps réel de l'activité de l'entreprise¹, pour de multiples raisons parmi lesquelles la gestion des stocks ne joue pas un rôle prépondérant.
- L'approvisionnement de nombreuses références auprès d'un même fournisseur est peu compatible avec la politique d'approvisionnement de type «quantité économique de commande – point de commande», dans la mesure où elle se traduit par d'incessantes passations de commandes auprès d'un même fournisseur. Cette observation doit cependant être tempérée. Tout d'abord, l'existence de modèles plus sophistiqués que ceux présentés ici, permettant de limiter les commandes². Ensuite, et surtout, les possibilités offertes par l'intégration virtuelle des systèmes d'information dans la chaîne logistique, en cas de partenariats forts, conduit à une baisse spectaculaire des

1. Sur ce point, voir la présentation faite des ERP au [chapitre XIV](#), § III, page 957.

2. Par exemple des modèles qui permettent le déclenchement d'une commande lorsque le niveau de stock d'un article se situe entre un seuil s_{i1} et un seuil $s_{i2} > s_{i1}$, ce qui fait que lorsqu'une commande doit être passée à un fournisseur en raison du franchissement d'un seuil s_{i1} d'une référence i , on examine si d'autres articles j approvisionnés chez ce même fournisseur ont un niveau de stock inférieur à s_{j2} auquel cas on les intègre à la commande.

coûts de passation de commande. Du reste, le calcul de ce coût devient alors fortement arbitraire en raison de la grande faiblesse des charges directes. L'augmentation de la fréquence des commandes conduit alors le fournisseur à adapter sa facturation de l'acheminement d'une commande (voir page 663), ce qui contrecarre la baisse tendancielle du coût de commande.

La philosophie de la gestion par la méthode de la quantité économique de commande est radicalement différente de celle de la gestion calendaire lorsqu'on se place en univers certain. Elle lui fait de larges emprunts lorsqu'on se situe en univers aléatoire. On examinera donc successivement le cas de l'univers certain (section I) et celui de l'univers aléatoire (section II, page 829). *Comme pour le chapitre précédent, les modèles proposés ont été implémentés dans un logiciel disponible sur le CD-Rom. Vous pouvez donc, par double clic sur les icônes de la version électronique de ce chapitre, accéder aux exemples réalisés à l'aide de ce logiciel et en traiter d'autres¹.*

SECTION I LA QUANTITÉ ÉCONOMIQUE DE COMMANDE EN UNIVERS CERTAIN

On présentera tout d'abord le modèle de base, qui fonde la philosophie de cette méthode de gestion de stock. Dans un second temps (§ I-2, page 783), on présentera les améliorations apportées à ce modèle de base, améliorations qui consistent à lever certaines hypothèses restrictives du modèle de base.

I-1 Présentation du modèle de base

I-1.1 Exemple introductif

Le supermarché **SUPERLAMBDA** vend dans son rayon « articles de cuisine » une bouilloire électrique qu'il achète 30 dollars liduriens hors taxes. La vente D de ces bouilloires est estimée à 2400 unités / an. Cette demande peut raisonnablement être considérée comme stable au cours du temps (en particulier, elle ne subit pas de variations saisonnières). Le chef de rayon suit de près le niveau des stocks et est en mesure d'éviter toute rupture de stock en lançant à temps une commande de réapprovisionnement. Pour ce faire, il tient compte du caractère certain de la demande et de l'existence d'un délai d'obtention de 20 jours ouvrables (l'année comportant 48 semaines de 6 jours ouvrables, soit 288 jours ouvrables).

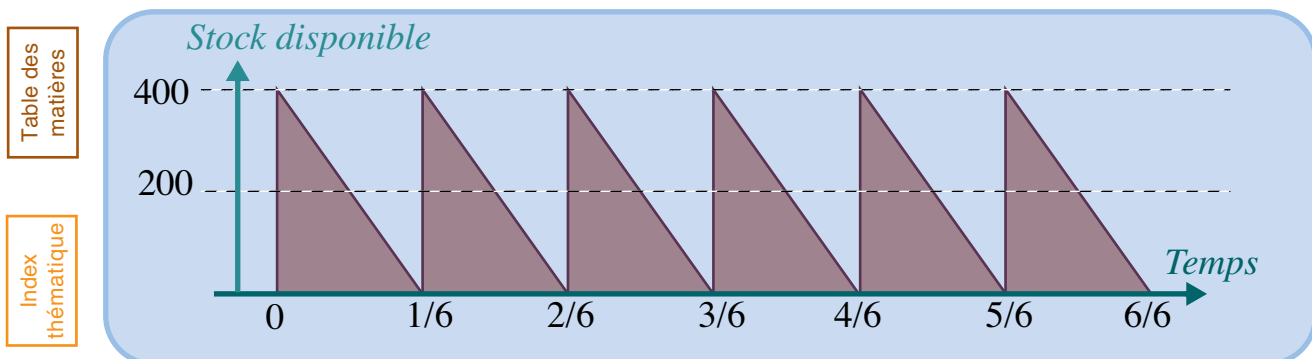
Le coût de passation d'une commande c_c est estimé à 300 dollars lidurien, coût qui intègre des frais administratifs (rédaction du bon de commande, écriture comptable, participation à la gestion des traites, réception des marchandises, contrôle...) et que l'on peut raisonnablement considérer comme indépendant du nombre d'unités commandées. Par ailleurs, la possession à longueur d'année d'une bouilloire électrique coûte à **SUPERLAMBDA** $c_p = 30 \times 0,20 = 6$ dollars liduriens, coût correspondant à un coût d'opportunité (taux annuel de 20%). Le problème posé consiste à rechercher la quantité économique de commande, c'est-à-dire la commande constante q à passer périodiquement, qui soit telle que le coût annuel moyen sur longue période soit minimal. Certains auteurs l'appellent encore « **série économique** » ou « **quantité de Wilson** » (bien que ce soit Harris (1913,

1. Voir avertissement de la note du bas de la page 8.

[219]) et non Wilson, qui ait, le premier, établi la formule de définition de cette quantité q).

Avant de chercher la valeur optimale de q , raisonnons sur une valeur quelconque de q , par exemple $q = 400$, pour calculer le coût annuel moyen sur longue période. Si la demande est uniforme, c'est-à-dire si le nombre de bouilloires électriques demandées chaque semaine de 5 jours ouvrables est le même (ce qui est une hypothèse assez forte!), la commande de 400 bouilloires sera écoulee en $400 / 2400 = 1 / 6$ d'année, c'est-à-dire 2 mois, ce que l'on peut encore exprimer en disant que le nombre moyen de commandes par an (variable d'état qui dépend de la variable de commande q) est $I_c(q) = D / q = 2400 / 400 = 6$. Le coût de passation d'une commande étant de 300 dollars liduriens, le coût de commande annuel sera donc $300 \cdot I_c(q) = 300 \times 2400 / q = 1800$ dollars liduriens. Par ailleurs, pour minimiser le coût de possession du stock, le magasinier doit s'arranger pour passer les commandes de façon à ce que son stock soit nul au moment de la mise à disposition au rayon des bouilloires livrées (on verra au § I-1.7, page 779, que ceci est obtenu en passant une commande lorsque le niveau de stock descend en dessous de 167 bouilloires). Le stock varie donc entre 400 et 0 tout au long de l'année, ce qu'illustre la figure 193.

FIGURE 193
Évolution du stock avec la politique $q = 400$ et $s = 167$



Au cours de l'un quelconque des cycles de 2 mois, il est facile d'établir que le stock moyen est de $400 / 2 = 200$, parce que le rectangle BDEC, qui correspond à un niveau de stock de 200 durant toute la durée du cycle, a la même surface que le triangle ABC qui visualise l'évolution du stock réel (voir figure 194). Le stock moyen à longueur d'année $I_p(q)$ étant le même que le stock moyen au cours d'un cycle, il s'ensuit que le coût annuel de possession est $6 \times I_p(q) = 6 \times 400 / 2 = 1200$. Le coût annuel moyen sur longue période $C(q)$ est donc :

$$C(q = 400) = 6 \times \frac{400}{2} + 300 \times \frac{2400}{400} = 3000 \text{ \$/an}$$

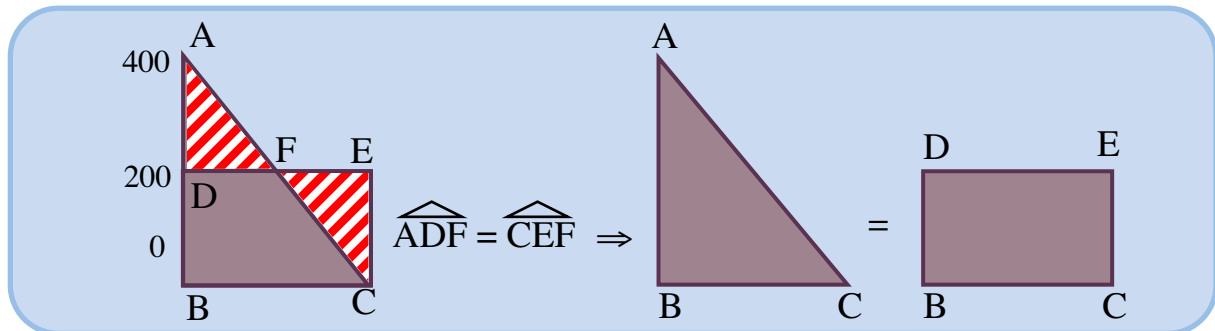
Nous verrons qu'il est possible, en choisissant une meilleure valeur pour q , d'abaisser ce coût moyen annuel.

I-1.2 Modélisation

Les hypothèses que nous avons retenues implicitement, sont les suivantes :

- la demande est certaine et distribuée uniformément tout au long de l'année, le taux annuel de demande étant D ;

FIGURE 194
Détermination du stock moyen possédé



- le délai de réapprovisionnement est certain; ces deux premières hypothèses impliquent qu'il n'y a pas besoin de constituer de stock de sécurité;
- on cherche à définir une commande périodique constante q qui minimise un coût de gestion, somme de 2 coûts qui varient en sens contraire en fonction de q : un coût de possession et un coût de commande; cette commande q est la seule variable de commande sur laquelle le gestionnaire désire agir (ou peut agir); pour l'article considéré, le coût de possession unitaire c_p et le coût de commande c_c sont fixés et indépendants de ceux relatifs à d'autres articles;
- la livraison de q est instantanée, c'est-à-dire qu'elle ne s'étale pas dans le temps par le biais de livraisons partielles.

On peut généraliser la démarche suivie au § I-1.1 pour donner l'expression littérale du coût moyen annuel sur la longue période:

$$C(q) = c_p \cdot I_p(q) + c_c \cdot I_c(q) = c_p \cdot \frac{q}{2} + c_c \cdot \frac{D}{q} \quad \text{relation 219}$$

ce qui donne dans notre exemple: $C(q) = 6 \times \frac{q}{2} + 300 \times \frac{2400}{q} = 3q + \frac{720000}{q}$.

I-1.3 Digression mathématique

Sur le plan mathématique, la fonction étudiée peut s'écrire, en posant $y = C(q)$: $y = A \cdot q + \frac{B}{q}$ avec $A = \frac{c_p}{2}$ et $B = c_c \cdot D$; elle se décompose en une somme de deux fonctions y_1 et y_2 ($y = y_1 + y_2$, avec $y_1 = A \cdot q$ et $y_2 = B \cdot q^{-1}$) où:

- y_1 est l'équation d'une droite, représentative du coût moyen annuel de possession,
- y_2 , l'équation d'une hyperbole, représentative du coût moyen annuel de passation de commandes.

La figure 195 illustre cette décomposition, les valeurs de A et de B étant celles de notre exemple numérique.

À l'optimum, on a: $y' = \frac{d y}{d q} = A - \frac{B}{q^2} = 0 \Rightarrow A \cdot q^2 - B = 0$. D'où la valeur optimale q^* :

FIGURE 195
Décomposition de la fonction de coût C(q)

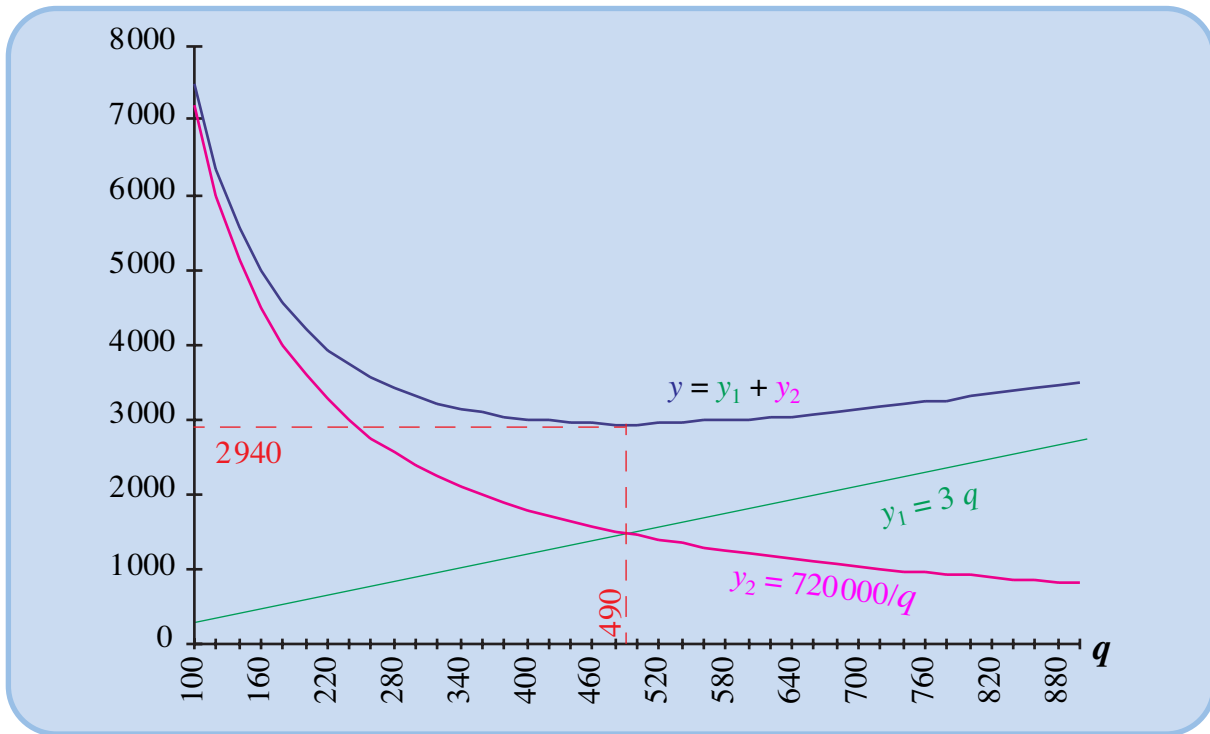


Table des matières

$$q^* = \sqrt{\frac{B}{A}}$$

relation 220

Index thématique

Pour s'assurer que cet optimum est un minimum, il convient d'examiner la valeur de la dérivée seconde au point q^* : $\frac{d^2 y}{dq^2} = (-2)(-Bq^{-3}) = 2B \cdot q^{-3}$ qui est nécessairement positif, puisque B et q le sont aussi. La valeur minimale de y est:

$$y^* = A \cdot q^* + \frac{B}{q^*} = A \sqrt{\frac{B}{A}} + B \sqrt{\frac{A}{B}} = \sqrt{\frac{BA^2}{A}} + \sqrt{\frac{AB^2}{B}} = \sqrt{BA} + \sqrt{AB} = 2\sqrt{AB} = 2Aq^*$$

d'où

$$C(q^*) = \sqrt{4 \cdot \frac{c_p}{2} \cdot c_c \cdot D} = c_p \cdot q^*$$

relation 221

On peut remarquer que, pour cette valeur optimale q^* , il y a égalité entre le coût moyen annuel de possession et le coût moyen annuel de commande puisque:

$$Aq^* = A \sqrt{\frac{B}{A}} = \sqrt{AB} \text{ et que } \frac{B}{q^*} = B / \sqrt{\frac{B}{A}} = \sqrt{AB}, \text{ ce qui implique donc que l'on ait } c_c \cdot I_c(q^*) = c_p \cdot I_p(q^*).$$

Ajoutons enfin que la courbe de y n'est pas symétrique par rapport à q^* , ce qui est évident graphiquement.

I-1.4 Combien commander? Formule de la quantité économique de commande

L'application de la relation 220 permet d'obtenir la quantité économique de commande q^* , que l'on désignera également par q_w , l'indice w rappelant qu'il

s'agit de la formule classique attribuée à Wilson (bien que trouvée par Harris, comme cela a déjà été dit): $q^* = \sqrt{\frac{c_c \cdot D}{c_p/2}}$ d'où:

$$q^* = \sqrt{\frac{2 \cdot c_c \cdot D}{c_p}} = q_W \text{ quantité de commande de Wilson} \quad \text{relation 222}$$

Dans notre exemple, il convient donc de commander: $q^* = \sqrt{\frac{2 \times 2400 \times 300}{6}} = 489,9$. On arrondira cette valeur à 490, puisqu'il ne saurait être question de commander une fraction de bouilloire (on reviendra sur ce point à la fin de ce paragraphe). Cette quantité optimale correspond à $q^*/D = 490/2400 = 0,204$ année de consommation. D'une façon générale, cette durée τ^* correspondant à la consommation de q^* est:

$$\tau^* = \frac{q^*}{D} = \sqrt{\frac{2 \cdot c_c \cdot D}{D^2 \cdot c_p}} = \sqrt{\frac{2 \cdot c_c}{D \cdot c_p}}$$

Si, comme dans notre exemple, le coût de possession correspond à un coût d'opportunité, produit du coût unitaire d'acquisition c_u , par le taux i ($c_p = i \cdot c_u$), on peut encore écrire:

$$\tau^* = \frac{q^*}{D} = \sqrt{\frac{2 \cdot c_c}{i \cdot c_u \cdot D}} = \sqrt{\frac{2 \cdot c_c}{i}} \cdot \frac{1}{\sqrt{c_u \cdot D}} \quad \text{relation 223}$$

L'intérêt de cette relation apparaît lorsque plusieurs articles ont le même coût de commande c_c (ce qui est habituellement le cas pour chaque « famille d'articles »), car il apparaît alors que le nombre de mois que représente la commande optimale est inversement proportionnel à la racine carrée de la valeur de la consommation annuelle, ce qu'illustre la [figure 196](#), avec:

$$\sqrt{\frac{2 \cdot c_c}{i}} = \sqrt{\frac{2 \times 300}{0,2}} = 54,77$$

Il est facile, à partir de ce schéma, de déterminer approximativement la quantité économique de Wilson connaissant la valeur de la consommation annuelle: si la valeur annuelle de la demande de bouilloires électriques est de $2400 \times 30 = 72000$, on lit graphiquement que l'on doit commander une fraction de la consommation annuelle approximativement égale à 0,2, ce qui conduit à une commande de $0,2 \times 2400 = 480$ bouilloires électriques, valeur voisine de la solution exacte déjà obtenue.

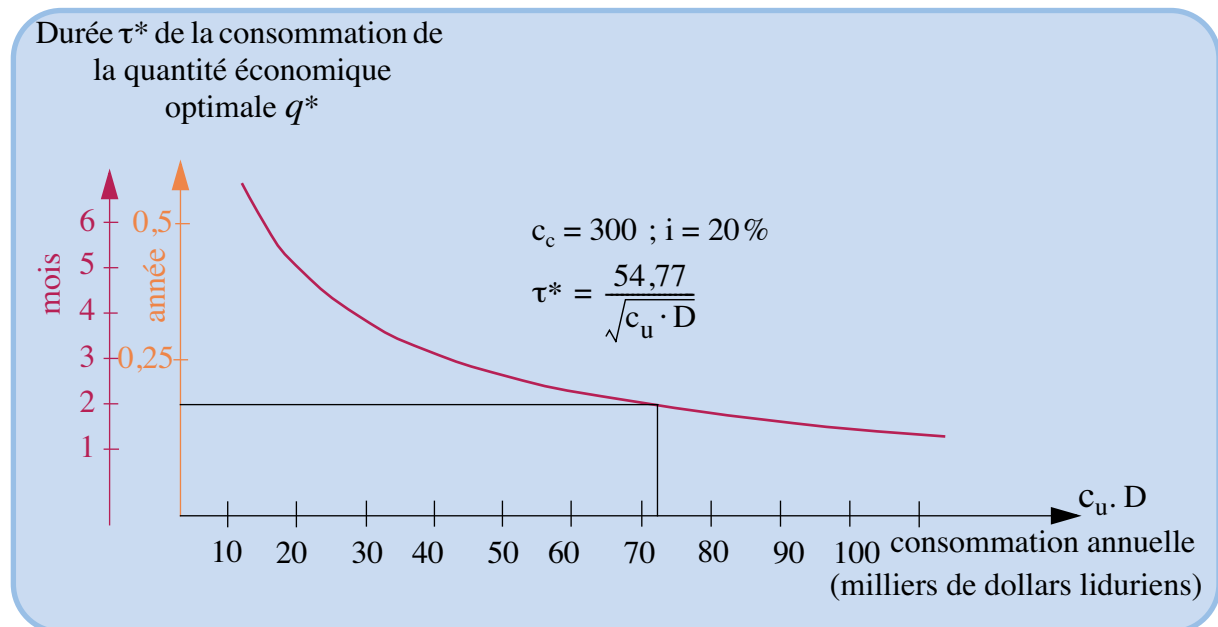
En application de la [relation 221](#) ($C(q^*) = \sqrt{4 \cdot \frac{c_p}{2} \cdot c_c \cdot D} = c_p \cdot q^*$), on trouve la relation donnant le coût minimum:

$$C(q^*) = \sqrt{2 \cdot c_p \cdot c_c \cdot D} = c_p \cdot q^* \quad \text{relation 224}$$

dont l'application donne: $C(q^*) = 6 \times 490 = 2940$. En réalité, cette valeur n'est pas tout à fait exacte, puisque nous avons pris la valeur arrondie de q^* , laquelle est

FIGURE 196

Relation entre la valeur de consommation annuelle et la durée de consommation de la quantité commandée



la seule à avoir un sens physiquement. Le coût minimal exact est, en reprenant la formule du coût $C(q)$.

$$C(q = 490) = 6 \times \frac{490}{2} + 300 \times \frac{2400}{490} = 1470 + 1469,39 = 2939,39$$

L'application directe de la formule a donc entraîné, dans ce cas particulier, une erreur d'environ 0,03 %, ce qui est tout à fait négligeable. On étudiera, d'une façon générale, au § I-1.6, page 778, l'impact sur le coût, du choix d'une valeur de q qui ne correspond pas à la valeur q^* . Auparavant, examinons l'adaptation de la formule de Wilson au cas d'une demande discrète.

I-1.5 Adaptation de la formule de Wilson au cas d'une demande discrète

Jusqu'ici, la demande, de nature discrète, a été considérée comme continue (la solution numérique pouvant être arrondie sans inconvénient, la valeur obtenue étant suffisamment élevée). Si l'on tient à considérer la demande comme discrète, on démontre facilement¹ que la valeur optimale q^* est telle que :

$$q^*(q^* - 1) < \frac{2 \cdot D \cdot c_c}{c_p} < q^*(q^* + 1) \quad \text{relation 225}$$

Si en outre la quantité commandée doit être un multiple d'un conditionnement de k unités, on montre alors² que q^* est un multiple de k , tel que :

$$q^*(q^* - k) \leq \frac{2 \cdot D \cdot c_c}{c_p} \leq q^*(q^* + k) \quad \text{relation 226}$$

1. Voir, par exemple, Hadley et Whitin (1966, [212]), p. 36.

2. Voir Naddor (1966, [313]), p. 51.

On notera que cette [relation 226](#) donne la [relation 225](#), en posant $k = 1$ (et la [relation 222](#), en posant $k = 0$, pour se ramener au cas continu).

I-1.6 Impact du choix d'une quantité de commande non optimale sur le coût moyen annuel

Pour comparer le coût moyen annuel $C(q)$ correspondant à une quantité de commande q différente de q^* , avec le coût minimal $C(q^*)$, posons $q = h \cdot q^*$, avec $h > 0$ et $C(q) = k \cdot C(q^*)$ ¹.

On doit donc comparer: $C(q) = c_p \cdot \frac{q}{2} + c_c \cdot \frac{D}{q} = c_p \cdot \frac{h \cdot q^*}{2} + c_c \cdot \frac{D}{h \cdot q^*}$, avec le coût minimal (donné par la [relation 221](#), page 775): $C(q^*) = c_p \cdot q^*$. Posons

$$k = \frac{C(q)}{C(q^*)} = \frac{c_p \cdot h \cdot q^*}{2 \cdot c_p \cdot q^*} + \frac{c_c \cdot D}{h \cdot c_p \cdot q^* \cdot q^*} = \frac{h}{2} + \frac{c_c \cdot D}{h \cdot c_p} \cdot \frac{c_p}{2 \cdot c_c \cdot D}, \text{ d'où:}$$

$$k = \frac{h}{2} + \frac{1}{2h} \quad \text{relation 227}$$

Le coefficient k de variation du coût est donc une fonction du coefficient de variation des quantités h , de même type que la fonction $C(q)$: $k = A \cdot h + B \cdot h^{-1}$, avec $A = B = 1/2$. Il est donc facile d'établir le [tableau 219](#) calculant la répercussion d'une commande non optimale, sur le coût moyen annuel. Ce tableau montre qu'il est préférable de retenir une valeur de q supérieure à la valeur optimale, plutôt que l'inverse. Ceci ne saurait surprendre, compte tenu des remarques faites à la [page 775](#) sur la non symétrie de la courbe de la [figure 195](#), par rapport à q^* .

TABLEAU 219

Sensibilité du coût moyen annuel à l'erreur commise sur la quantité commandée

$h = \frac{q}{q^*}$	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5
$k = \frac{C(q)}{C(q^*)}$	1,250	1,133	1,064	1,025	1,006	1,005	1,017	1,035	1,057	1,083

L'intérêt de cette étude de sensibilité est de montrer que des erreurs relativement importantes dans la détermination des coûts ont une incidence nettement plus faible sur le coût de fonctionnement du système. Pour le vérifier, désignons par $D \cdot k_D$, $c_c \cdot k_c$ et $c_p \cdot k_p$, les valeurs erronées utilisées à la place de D , c_c et c_p . En retenant pour k_D , k_c et k_p , les valeurs 0,8 et 1,2, autrement dit, en supposant que les paramètres utilisés soient faux à $\pm 20\%$, on peut dresser le [tableau 220](#) qui combine toutes les valeurs possibles de k_D , k_c et k_p pour en calculer l'impact sur la quantité commandée:

1. Ce raisonnement d'analyse de sensibilité a été appliqué au modèle de Wilson pour la première fois par Naddor (1966, [313]).

$$h = \frac{q}{q^*} = \frac{\sqrt{\frac{2 \cdot D \cdot k_D \cdot c_c \cdot k_c}{c_p \cdot k_p}}}{\sqrt{\frac{2 \cdot D \cdot c_c}{c_p \cdot k_p}}} = \sqrt{\frac{k_D \cdot k_c}{k_p}}$$

et celui sur le coût moyen annuel. Il s'avère donc que, si dans la détermination des paramètres, on se trompe au plus de $\pm 20\%$, l'erreur commise se traduit par un accroissement de coût de moins de 5%. Il semble donc préférable d'utiliser des données grossières plutôt que de gérer selon l'inspiration du moment !

TABLEAU 220

Sensibilité de la quantité commandée et du coût moyen annuel aux erreurs commises sur les paramètres de la formule de Wilson

k_D	0,8	0,8	0,8	0,8	1,2	1,2	1,2	1,2
k_p	0,8	0,8	1,2	1,2	0,8	0,8	1,2	1,2
k_c	0,8	1,2	0,8	1,2	0,8	1,2	0,8	1,2
$h = \frac{q}{q^*}$	0,894	1,095	0,730	0,894	1,095	1,342	0,894	1,095
$k = \frac{C(q)}{C(q^*)}$	1,006	1,004	1,050	1,006	1,004	1,043	1,006	1,004

Table des matières

Index thématique

I-1.7 Quand commander? Détermination du point de commande

Le délai d'obtention est de 20 jours ouvrables, c'est-à-dire $L = 20 / 288 \approx 0,069$ an. Pendant cette durée, la demande s'élève à $2400 \times 20 / 288 = 166,67 \approx 167$ bouilloires. Si le chef de rayon passe commande de 490 bouilloires *avant* que le stock ait atteint le niveau de 167, une partie du stock restera inutilisée et entraînera un accroissement inutile du coût de possession. Mais si le chef de rayon passe commande *après* que le niveau de stock est descendu en dessous de 167 bouilloires, il y aura rupture de stock, ce que l'on s'interdit ici. Le point de commande optimal correspond donc à 167 bouilloires (voir [figure 197](#)).

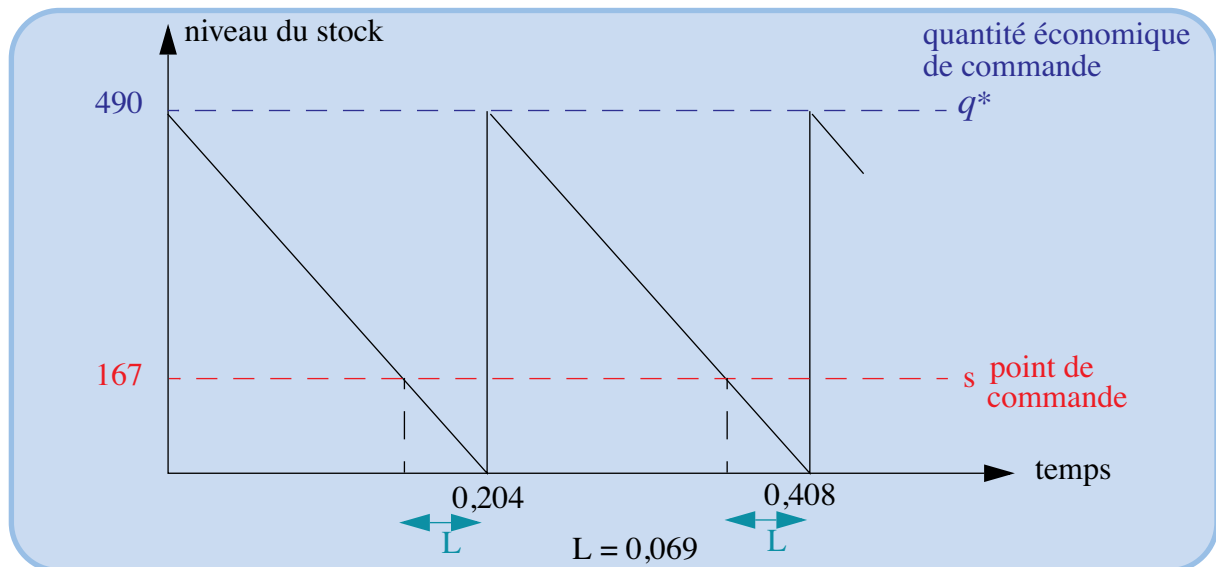
Si l'on généralise la démarche que l'on vient de suivre, le point de commande s est tel que, D étant la demande annuelle et L , le délai d'obtention exprimé en années :

$$s^* = D \cdot L \quad \text{Détermination du point de commande} \quad \text{relation 228}$$

La détermination de ce point de commande est indépendante de celle de la quantité économique de commande. Ceci est vrai en univers certain, mais ne l'est plus en univers aléatoire, comme nous le verrons au [§ II-1.1.3, page 834](#).

Dans l'exemple choisi, on a $q > s$, c'est-à-dire que la quantité livrée est supérieure à la consommation moyenne pendant le délai d'obtention. Or, rien ne garantit que l'on ait toujours $q > s$, puisque q et s sont définis indépendamment l'un de l'autre. S'il en est ainsi, le point de commande qui vient d'être calculé reste valable, à condition de ne pas travailler sur le stock physiquement détenu, mais sur la **position de stock**, c'est-à-dire le stock physiquement détenu auquel on ajoute

FIGURE 197
Point de commande



les livraisons attendues et duquel on retranche les unités demandées et non enlevées ou réservées à la suite d'une rupture de stock. Mais on peut également préférer travailler sur le stock disponible, auquel cas il faut introduire la notion de **points de commande multiples**.

Supposons que, dans l'exemple précédent, il y ait une modification des coûts de possession et de commande qui ait conduit à la détermination d'une quantité économique de commande $q = 95$, avec toujours $s = 167$. On placera, pour éviter toute rupture de stock, un second point de commande s_2 à un niveau $s_2 = s - q = 167 - 95 = 72$, qui permet 20 jours plus tard, c'est-à-dire après une demande de 167 bouilloires, de retrouver un stock nul. Ce second point de commande sera ensuite franchi périodiquement (voir figure 198). Si l'on ajoute au stock disponible correspondant au second point de commande (72), la livraison attendue (= 95) déclenchée par la précédente commande (effectuée initialement au premier point de commande et ensuite périodiquement au second point de commande), on obtient une position de stock dont le niveau est précisément celui du premier point de commande.

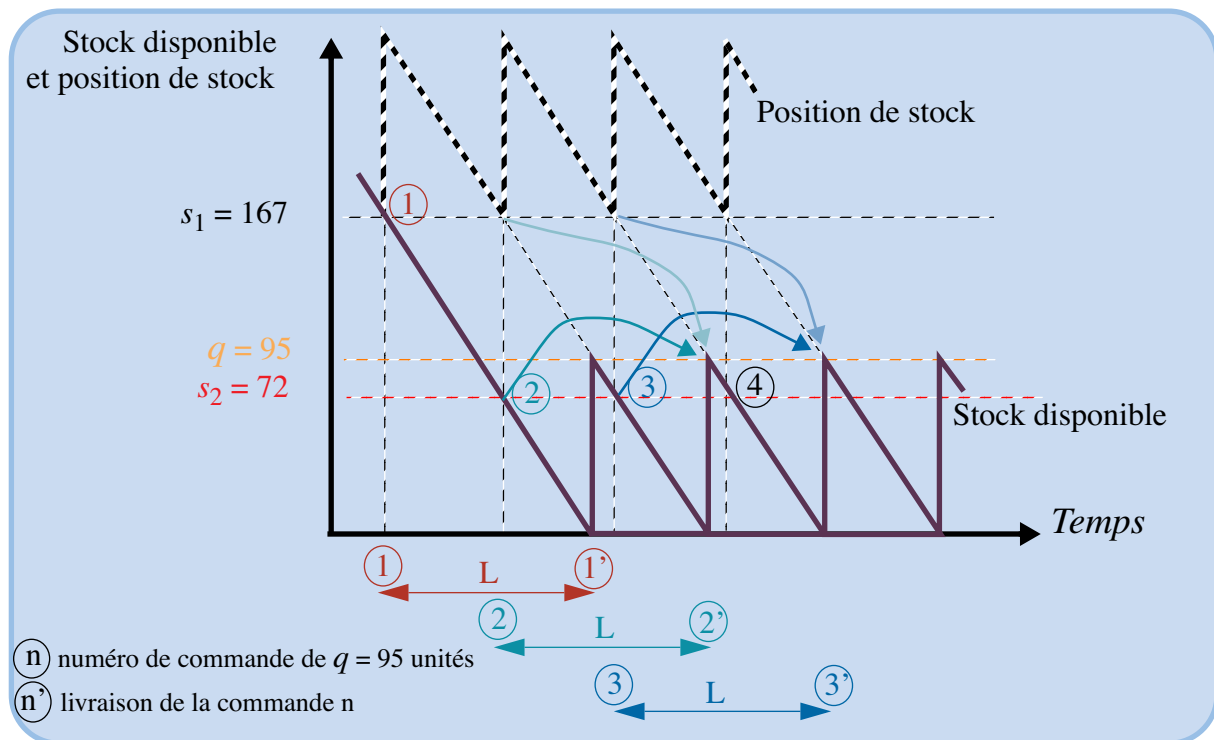
On peut systématiser la démarche que l'on vient de suivre en ajoutant au premier point de commande s un deuxième point de commande $s_2 = s - q$, l'adjonction d'un troisième point de commande pouvant être nécessaire :

- premier point de commande: $s = DL$
- si $s > q$, alors second point de commande: $s_2 = s - q$
- si $s > 2q$: troisième point de commande: $s_3 = s - 2q$

Le troisième point de commande s'impose si la consommation pendant le délai d'obtention ($DL = s$) est supérieure à deux fois la livraison périodique ($= q$), ce qui, dans notre dernier exemple, ne se produisait pas. Un raisonnement similaire à celui que l'on vient de tenir, conduit à définir ce troisième point de commande s_3 au niveau $s - 2q$. D'une manière générale, pour éviter toute rupture de stock, le nombre de points de commande qu'il faut ajouter au point de commande initial est égal à la valeur entière tronquée du rapport DL / q . Le raisonnement récurrent de

FIGURE 198

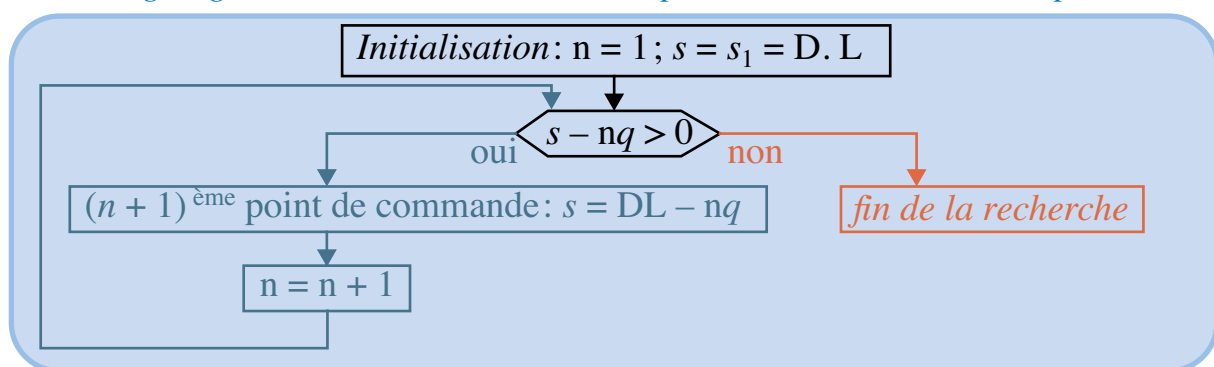
Points de commande multiples (cas de 2 points de commande)



la recherche des points de commande multiples qui en résulte est décrit par l'organigramme de la figure 199. La relation 228 de la page 779 reste toujours **valable à condition de l'appliquer à la position de stock** et non au stock physiquement détenu; cette solution est sans doute la plus simple à utiliser.

FIGURE 199

Organigramme de détermination des points de commande multiples



La figure 200 illustre l'évolution du niveau du stock disponible dans le cas de points de commande triple de l'exemple suivant: $q = 75$ et $s = 167$.

I-1.8 Analyse des conséquences de la politique optimale

Nous avons défini les valeurs optimales prises par les variables de commande ($q = 490, s = 167$). Les valeurs prises à l'optimum par les variables d'état n'ont pas été explicitées. Le stock moyen détenu $I_p(q)$ est égal à $490 / 2 = 245$ et le nombre moyen annuel de commandes $I_c(q)$ est égal à $2400 / 490 = 4,898$.

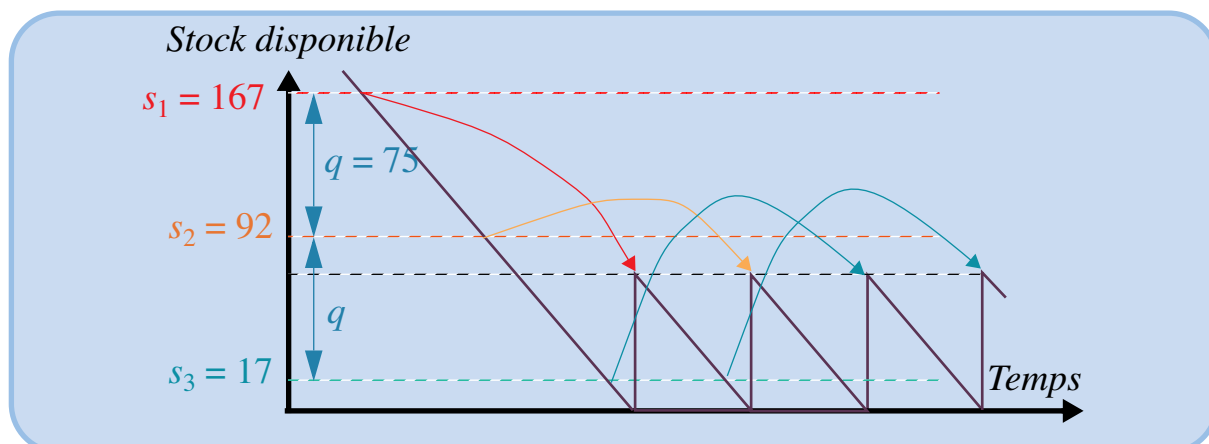
Les valeurs prises par ces variables d'état donnent naissance à deux indicateurs «plus parlants» pour les gestionnaires. En passant 4,898 commandes par an, il

Table des matières

Index thématique

FIGURE 200

Points de commande multiples (cas de 3 points de commande)



s'écoule une durée de $1 / 4,898 = 0,20417$ année (= 58,8 jours ouvrables) entre deux commandes (ou deux livraisons). Par ailleurs, la politique retenue conduit à un stock moyen de 245 unités pour satisfaire une demande annuelle de 2400 unités. On pourra alors dire que ce stock moyen tourne $2400 / 245 = 9,7959$ fois dans l'année, indicateur connu comme étant le **taux de rotation du stock**. Selon un raisonnement comptable simpliste, mais hélas fort répandu, un stock est d'autant mieux géré que la rotation de ce stock est rapide. Ce raisonnement ne prend en compte que le coût des immobilisations ($c_p I_p(q)$) et délaisse totalement le coût de passation des commandes. On peut même ajouter, si les hypothèses du modèle de Wilson sont acceptables, que ce taux de rotation a une valeur optimale, ici 9,7959. Cette remarque n'implique pas que des efforts ne soient pas à entreprendre pour faire baisser les coûts de commande, ce qui induit mécaniquement une baisse des stocks¹.

L'indicateur de coût moyen annuel de gestion s'élève (cf. page 777) à 2939,39 dollars liduriens. Il se décompose en un coût moyen annuel de commande de 1469,39 dollars, calculé sur la base d'un coût standard et que l'on doit retrouver d'une manière ou d'une autre en charge du compte de résultats², et un coût de possession de 1470 dollars qui, pour partie au moins correspond à une charge supplétive (rémunération des capitaux immobilisés) et ne se retrouve donc pas intégralement comme charge du compte de résultat. Enfin, si l'on tient compte de la dépense d'acquisition des 2400 bouilloires électriques, pour un montant de $2400 \times 30 = 72000$ dollars liduriens, l'indicateur de coût moyen annuel, achat inclus, s'élève à $2939,39 + 72000 = 74939,39$ dollars liduriens.

Si l'on connaît la marge unitaire sur le coût d'achat que l'on supposera être $c_r = 40 - 30 = 10$ dollars liduriens, la marge annuelle sur coût d'achat est $c_r D$, ce qui donne dans notre exemple $2400 \times 10 = 24000$ dollars liduriens. Il faut y retrancher le coût moyen annuel de gestion pour obtenir une marge annuelle sur coût d'achat, de stockage et de commande, c'est-à-dire 2939,39 ce qui conduit à une marge moyenne annuelle de $24000 - 2939,39 = 21060,61$ dollars liduriens / an, qui, comme on l'a déjà souligné ci-dessus, est grevée d'une charge supplétive.

1. Voir sur ce point la discussion de la page 652.

2. Voir les problèmes posés par l'utilisation de coût standard aux § II-2.2.31b, page 659, et § II-2.1.2.1, page 643, du chapitre X.

En définitive, les résultats associés à la politique retenue sont résumés dans le tableau 221.

TABLEAU 221
Analyse de la politique optimale de la **SUPERLAMBDA** pour la bouilloire électrique (univers certain)



Politique optimale d'approvisionnement des Bouilloires électriques	
Conséquences physiques	
Quantité de commande	490
Point de commande	167
Nombre moyen annuel de commandes (et de cycles de réapprovisionnement)	4,90
Intervalle moyen entre 2 commandes	58,8 jours
Stock moyen détenu	245,00
Taux moyen annuel de rotation du stock	9,80
Conséquences financières	
Dépense moyenne d'acquisition	72 000,00
Coût moyen de commande	1 469,39
Coût moyen de possession	1 470,00
Indicateur de coût moyen de gestion (achat exclu)	2 939,39
Indicateur de coût moyen de gestion (achat inclus)	74 939,39
Marge nette	21 060,61

Table des matières

Index thématique

I-2 Les améliorations du modèle en univers certain

Le modèle de base étudié au § I-1 manque singulièrement de réalisme à cause du caractère restrictif de la plupart de ses hypothèses (cf. § I-1.2, page 773). Celle qui a trait au caractère certain de la demande est sans doute l'une des plus restrictives mais nous n'examinerons qu'à la section II son remplacement par celle, plus réaliste, d'une demande aléatoire. En restant dans le cadre de l'univers certain, on examinera tout d'abord (§ I-2.1) les implications sur la détermination de la quantité économique de commande, de la pratique commerciale très répandue des prix d'achat variables. Dans un § I-2.2, page 799, nous aborderons le cas, classique en production, de l'approvisionnement continu, modifiant ainsi l'hypothèse de l'approvisionnement instantané implicitement retenu dans le calcul du stock moyen $I_p(q)$. Dans le § I-2.3, page 802, nous tiendrons compte de l'impact, sur le calcul de la quantité économique de commande, des relations de dépendance réciproque qu'entretiennent de très nombreux articles dans leurs approvisionnements.

I-2.1 Prix d'achat variable

Deux cas de figure doivent être distingués :

- celui d'une modification d'un prix unitaire indépendant des quantités achetées (annonce d'une modification de tarif, ou campagne promotionnelle) qui a pour effet de permettre momentanément un approvisionnement à des conditions avantageuses, c'est pourquoi on parlera d'**augmentation tari-**

faire prévisionnelle (même s'il s'agit d'une **baisse momentanée de tarif**) (§ I-2.1.1) ;

- celui de coûts d'approvisionnement variables avec les quantités à livrer (§ I-2.1.2, page 787) ; ce cas de figure se rencontre en approvisionnement externe (achat) mais aussi en approvisionnement interne (économie d'échelle en production) ; cette classe de problèmes a déjà été abordée au **chapitre VIII, section II, page 562**, avec l'analyse du cas particulier de demandes certaines variant d'une période à une autre.

Dans un dernier paragraphe, on examinera la combinaison de ces deux cas de figure (§ I-2.1.3, page 796).

On supposera ici que le coût de possession se ramène au seul coût d'opportunité (ou est strictement proportionnel au coût d'achat). On a alors, en reprenant les notations déjà utilisées : $c_p = i \cdot c_u$; le prix d'achat unitaire c_u sera indicé en fonction des différentes valeurs qu'il peut prendre.

I-2.1.1 Cas de l'augmentation tarifaire

Ce cas est particulièrement fréquent, mais son analyse rigoureuse est délicate, aussi se contentera-t-on de présenter une solution approchée facilement opérationnelle¹. Supposons, par exemple, que le fournisseur de bouilloires électriques de **SUPERLAMBDA** annonce une hausse tarifaire de 10%, le prix passant alors de $c_{u1} = 30$ dollars liduriens à $c_{u2} = 33$ dollars. Les hypothèses de calcul du coût de possession que l'on vient de faire conduisent à un niveau $i \cdot c_{u2} = 6,60$ dollars / unité / an, contre $i \cdot c_{u1} = 6$ dollars / unité / an auparavant.

Il n'y a aucune raison pour que cette annonce, supposée faite avant le franchissement d'un point de commande², coïncide avec le franchissement du point de commande, aussi deux cas de figure peuvent être rencontrés. On suppose tout d'abord que la livraison et le paiement peuvent être différés³, en conséquence de quoi, le stock résiduel juste avant la livraison R_v sera nul ($R_v = 0$). Dans le cas contraire, la commande sera déclenchée le plus tard possible pour bénéficier du prix actuel, mais la livraison s'effectuera à un moment où le stock résiduel ne sera pas nul ($R_v > 0$).

I-2.1.1.1 Cas de la livraison et du paiement susceptibles d'être différés ($R_v = 0$)

L'application de la **relation 222 de la page 776** donne une quantité de commande de 467 à passer à partir de la prochaine commande. Le coût de gestion moyen annuel avec le nouveau tarif se monte, en application de la **relation 224 de la page 776**, à :

$$\sqrt{2 \cdot D \cdot c_c \cdot i \cdot c_{u2}} = \sqrt{2 \times 2400 \times 300 \times 6,6} = 3082,86$$

1. Cette approche est due à Naddor (1966, [313]), p. 97-102, mais on en présente, dans ce chapitre, une généralisation. Voir également et Silver, Pyke et Peterson (1998, [387]), p. 164-167 pour la prise en compte d'une inflation prévisionnelle dans le calcul de la formule de la quantité économique de commande.

2. Ce cas de figure sera abordé en univers aléatoire (page 884).

3. Naddor n'a étudié que ce premier cas de figure. Il le fait sans s'appuyer explicitement sur l'hypothèse d'une livraison et d'un paiement susceptibles d'être différés, mais celle-ci est indispensable, faute de quoi on aboutit, dans l'analyse des modèles proposés, à envisager successivement, lorsque le stock tombe à zéro, une livraison à l'ancien prix et une livraison au nouveau prix, alors qu'une seule de ces hypothèses ne saurait être fondée.

si on ajoute à ce coût de gestion des dépenses d'achat, on a alors :

$$M = \sqrt{2 \cdot D \cdot c_c \cdot i \cdot c_{u_2}} + D \cdot c_{u_2} = 3082,86 + 2400 \times 33 = 82282,86 \text{ F/an}$$

Deux stratégies sont envisageables à l'annonce de cette hausse. Une stratégie de **hausse tarifaire subie** conduira le responsable à ne rien faire et donc à passer une commande au nouveau prix, lors du prochain franchissement du point de commande. La seconde stratégie, qui sera qualifiée de stratégie de **hausse tarifaire anticipée**, consiste à passer une commande pour bénéficier encore de l'actuel tarif.

Supposons, dans le cas d'une stratégie d'anticipation, que l'on commande juste avant la hausse tarifaire $q = 2000$ bouilloires électriques, le coût de gestion de la période correspondant à la consommation de cette commande et d'une durée $q/D = 2000/2400 = 0,8333$ an, est :

$$C_1(q) = c_c + q \cdot c_{u_1} + i \cdot c_{u_1} \cdot \frac{q}{2} \cdot \frac{q}{D} \quad \text{relation 229}$$

$$C_1(q) = 300 + 2000 \times 30 + 6 \times \frac{2000}{2} \times 0,8333 = 65300$$

à la suite de cette période de 0,8333 an, on retrouvera un approvisionnement au nouveau prix.

Dans le cas d'une hausse subie, on se trouve dans le cadre d'un approvisionnement au nouveau prix dès la prochaine livraison. La différence entre les deux stratégies ne porte donc que sur cette période de 0,8333 an. Le coût moyen annuel du nouveau régime de croisière est de 82282,86 dollars / an, c'est donc une fraction de ce coût, exactement $C_2(q = 2000) = 82282,86 \times 0,8333 = 68569,05$ dollars, que l'on peut attribuer à la stratégie de hausse subie et comparer aux 65300 dollars trouvés pour satisfaire la demande de cette même période dans le cadre de la stratégie d'anticipation. L'adoption de cette stratégie d'anticipation procure donc une économie de $68569,05 - 65300 = 3269,05$ dollars liduriens. Il semble raisonnable de retenir une valeur de q qui maximise cette économie qui analytiquement s'écrit $C_2(q) - C_1(q)$, soit :

$$\frac{q}{D}M - \left(c_c + q \cdot c_{u_1} + i \cdot c_{u_1} \cdot \frac{q^2}{2D} \right), \text{ avec } M = \sqrt{2 \cdot D \cdot c_c \cdot i \cdot c_{u_2}} + D \cdot c_{u_2} \quad \text{relation 230}$$

L'optimum est obtenu, comme vous pouvez le vérifier, pour une valeur de :

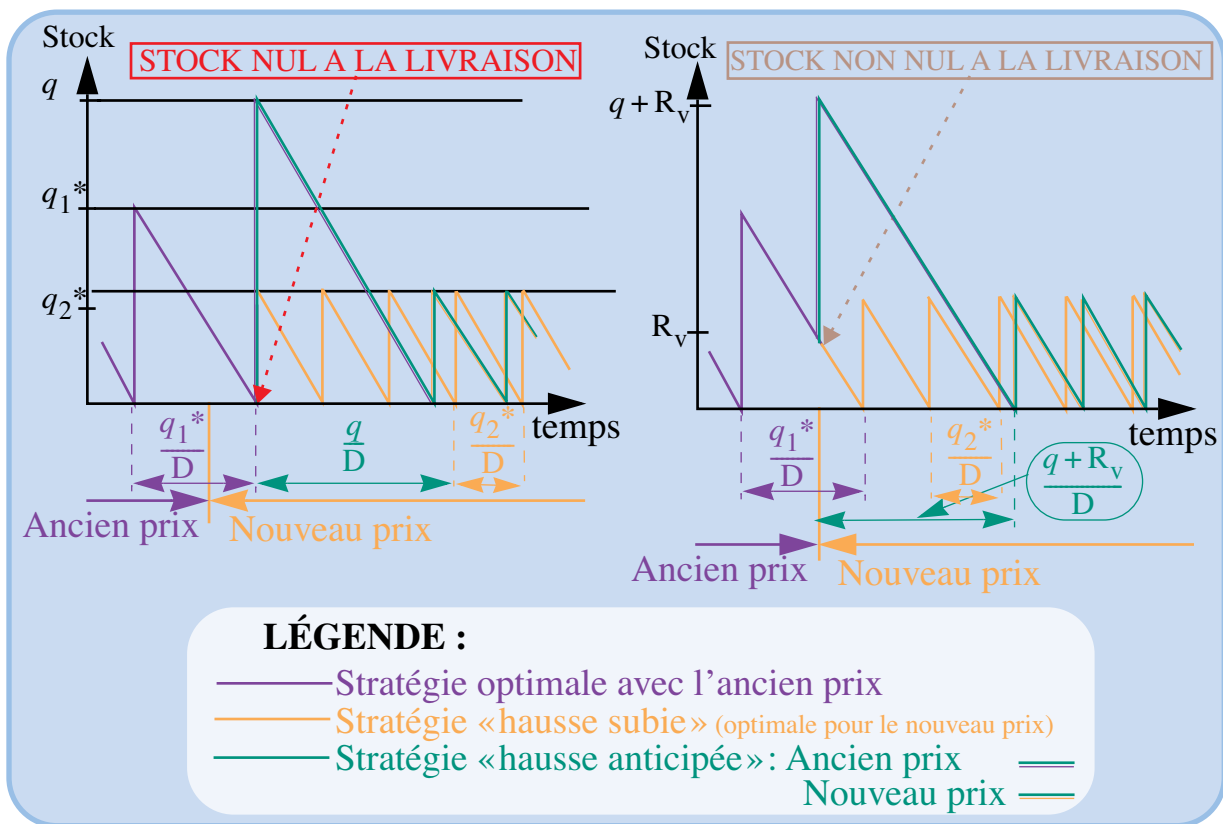
$$q^* = \frac{M}{i \cdot c_{u_1}} - \frac{D}{i}, \text{ avec } M = \sqrt{2 \cdot D \cdot c_c \cdot i \cdot c_{u_2}} + D \cdot c_{u_2} \quad \text{relation 231}$$

L'application de la **relation 231** donne : $q^* = \frac{82282,86}{0,2 \times 30} - \frac{2400}{0,2} \cong 1714$. Cette relation peut encore s'écrire :

$$q^* = \sqrt{\frac{2 \cdot D \cdot c_c}{i \cdot c_{u_2}}} + \left(\sqrt{\frac{2 \cdot D \cdot c_c}{i \cdot c_{u_2}}} + \frac{D}{i} \right) \frac{c_{u_2} - c_{u_1}}{c_{u_1}} \quad \text{relation 232}$$

FIGURE 201

Incidence de la date de livraison sur l'évolution du stock en cas de hausse tarifaire



ce qui revient à ajouter à la quantité économique calculée avec le nouveau prix, le taux d'augmentation multiplié par la somme de cette quantité économique et du quotient de la demande annuelle par le taux d'opportunité.

Il convient d'utiliser avec prudence cette formule qui conduit à une forte commande, d'une part en raison des risques d'obsolescence de l'article stocké et, d'autre part, parce que l'augmentation concernant normalement plusieurs références, l'application de la [relation 232](#) peut n'être pas possible pour des raisons de stockage ou budgétaires (ce point sera traité au § I-2.3.1.4, page 816).

I-2.1.1.2 Cas de la livraison et du paiement non susceptible d'être différés ($R_v \neq 0$)

Si le stock résiduel R_v n'est pas nul, lors de la livraison de la quantité q commandée dans le cadre de la stratégie d'anticipation, le stock disponible après livraison s'élèvera à $q + R_v$ et non à q . Avant que ce stock disponible ne soit épuisé, s'écoulera une durée de $(q + R_v)/D$ années (voir [figure 201](#)). Le coût associé à cette stratégie d'anticipation ne diffère donc du précédent que par l'importance du stock moyen disponible après livraison et la durée d'écoulement de ce stock.

$$C_1(q) = q \cdot c_{u_1} + c_c + i \cdot c_{u_1} \left(\frac{q + R_v}{2} \right) \left(\frac{q + R_v}{D} \right) \quad \text{relation 233}$$

Si l'on adopte une stratégie de hausse subie, il faut décomposer en deux la période qui s'écoule entre le moment où s'effectue la livraison de q dans le cadre d'une stratégie d'anticipation et celui de la livraison ultérieure, dans le cadre

normal du nouveau régime de croisière. La première sous-période est d'une durée de (R_v / D) année et correspond au temps nécessaire pour épuiser le stock résiduel. Le seul coût supporté pendant cette sous-période est le coût associé à la possession de ce stock résiduel d'un niveau moyen $R_v / 2$ et auquel est associé un coût de possession unitaire de $i \cdot c_{u_1} \cdot (R_v / D)$, compte tenu de la correction «prorata temporis». La seconde sous-période, d'amplitude q / D année, supportera la fraction correspondante du coût annuel M . Le coût associé à la stratégie de hausse subie est donc :

$$C_2(q) = i \cdot c_{u_1} \cdot \frac{R_v^2}{2D} + \frac{q}{D} \cdot M \quad \text{relation 234}$$

L'économie réalisée en anticipant la hausse est donc :

$$C_2(q) - C_1(q) = \left[i \cdot c_{u_1} \cdot \frac{R_v^2}{2D} + \frac{q}{D} \cdot M \right] - \left[q \cdot c_{u_1} + c_c + i \cdot c_{u_1} \frac{(q + R_v)^2}{2D} \right] \quad \text{relation 235}$$

Cette économie sera maximale si :

$$q^* = \frac{M}{i \cdot c_{u_1}} - \frac{D}{i} - R_v \Leftrightarrow q^* + R_v = \frac{M}{i \cdot c_{u_1}} - \frac{D}{i} \quad \text{relation 236}$$

La [relation 231 de la page 785](#) découle de cette [relation 236](#) en rendant nul le stock résiduel. Ce qui compte, en définitive, ce n'est pas tant la quantité commandée que le stock disponible après livraison.

Illustrons rapidement ce cas de figure d'un exemple numérique. Supposons qu'au moment de passer la commande, il reste 250 unités. Vingt jours plus tard, au moment de la livraison, le stock résiduel s'élèvera à $250 - 167 = 83$ unités. La quantité à commander doit donc être égale à $1714 - 83 = 1631$ unités. La solution de ce problème est fournie dans le [tableau 222 de la page 788](#).

Table des matières

Index thématique

I-2.1.2 Prix d'achat variable en fonction des quantités achetées

Il convient de distinguer deux pratiques commerciales de rabais sur quantité :

- Le **rabais uniforme**, qui porte sur l'intégralité des articles commandés. Par exemple, si le prix de vente passe de 31 dollars liduriens / unité à 30 dollars / unité lorsque la commande effectuée dépasse 300, le nouveau prix s'applique sur l'intégralité de la commande. Pour fixer les idées, supposons qu'une commande de 400 unités soit passée : les 400 unités sont alors acquises au prix de 30 dollars liduriens et la facture s'élève à 12000 dollars.
- À la différence du rabais uniforme, le **rabais progressif** ne s'applique que sur une «tranche de commande» et non sur sa totalité. En reprenant notre exemple avec un rabais progressif, les 300 premières unités sont acquises au prix unitaire de 31 dollars et seules les suivantes sont payées 30 dollars. La facture s'élève alors à $31 \cdot 300 + 30 \cdot (400 - 300) = 12300$ dollars liduriens.

Nous étudierons successivement le cas du rabais uniforme et celui du rabais progressif à partir de notre exemple des bouilloires électriques, en ne modifiant que le calcul du coût de possession. Ce dernier sera pris comme égal à 20% (= i) d'un coût d'achat unitaire c_{u_j} , variable en fonction du montant q de la commande et obéissant à la logique du rabais uniforme ou à celle du rabais progressif.



TABLEAU 222
Analyse de la politique optimale de la **SUPERLAMBDA** pour la bouilloire électrique (Univers certain - hausse tarifaire)

Politique optimale d'approvisionnement des bouilloires électriques (livraison et paiement non susceptibles d'être différés)		
Conséquences physiques	Avec commande exceptionnelle optimale	Politique optimale après hausse tarifaire
Stock disponible à la commande	250	-
Quantité de commande du nouveau régime de croisière	-	467
Quantité à commander maintenant	1631	-
Point de commande	167	167
Intervalle de temps séparant les deux prochaines livraisons	205,7 jours	-
Délai avant franchissement normal du point de commande	10 jours	-
Intervalle moyen entre 2 commandes	-	56 jours
Nombre moyen annuel de commandes	-	5,139
Stock disponible juste avant la prochaine livraison	83	-
Stock disponible juste après la prochaine livraison	1 714	-
Stock moyen annuel équivalent au stock détenu entre les 2 prochaines livraisons	612,04	-
Stock moyen détenu	-	233,50
Taux moyen annuel de rotation du stock	-	10,28
Conséquences financières		
Montant de la commande exceptionnelle	48 930,00	-
Economie réalisée par la commande exceptionnelle	3 024,42	-
Dépense moyenne annuelle d'acquisition	-	79 200,00
Coût moyen annuel de commande	-	1 541,76
Coût moyen annuel de possession	-	1 541,10
Indicateur de coût moyen annuel de gestion (achat exclu)	-	3 082,86
Indicateur de coût moyen annuel de gestion (achat inclus)	-	82 282,86
Marge sur coût moyen annuel de gestion (achat inclus)	-	13 717,14

Table des matières

Index thématique

La figure 202 illustre¹ la différence de ces deux systèmes de rabais sur la seule dépense d'acquisition de q unités (à l'exclusion donc des coûts de possession et de passation de commande); les pentes de ces segments de droite correspondent au coût unitaire c_{u_j} .

I-2.1.2.1 Rabais uniforme

Le problème d'optimisation posé est assez simple à visualiser. On peut, pour chacun des 5 prix d'achat possibles et sans se préoccuper des conditions de quan-

1. Elle ne s'appuie pas l'exemple numérique du tableau 223, pour des raisons de «lisibilité».

FIGURE 202

Évolution du coût d'acquisition de q unités en cas de rabais uniforme et de rabais progressif

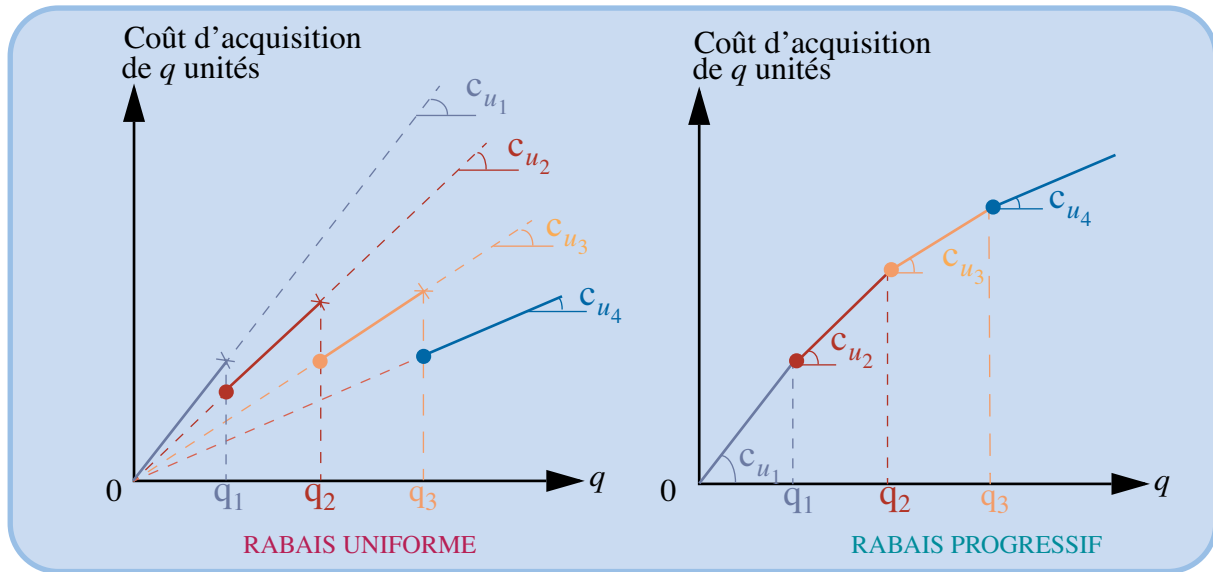


TABLEAU 223
Données du problème de rabais

Table des matières	j	0	1	2	3	4	5
	q_j	$q_0 = 0$	$q_1 = 250$	$q_2 = 500$	$q_3 = 750$	$q_4 = 1000$	$q_5 = \infty$
Index thématique	$q_{j-1} \leq q < q_j$		$q_0 \leq q < q_1$ ou $q < q_1$	$q_1 \leq q < q_2$	$q_2 \leq q < q_3$	$q_3 \leq q < q_4$	$q_4 \leq q < q_5$ ou $q \geq q_4$
	c_{u_j}		31	30,5	30	29,5	29

tité, calculer le coût moyen annuel en fonction de la quantité de commande q . Les 5 fonctions de coûts sont les suivantes :

- Si $q < 250$: $C(q) = 300 \times (2400 / q) + (0,2 \times 31) \times q / 2 + 2400 \times 31$
- Si $250 \leq q < 500$: $C(q) = 300 \times (2400 / q) + (0,2 \times 30,5) \times q / 2 + 2400 \times 30,5$
- Si $500 \leq q < 750$: $C(q) = 300 \times (2400 / q) + (0,2 \times 30) \times q / 2 + 2400 \times 30$
- Si $750 \leq q < 1000$: $C(q) = 300 \times (2400 / q) + (0,2 \times 29,5) \times q / 2 + 2400 \times 29,5$
- Si $q \geq 1000$: $C(q) = 300 \times (2400 / q) + (0,2 \times 29) \times q / 2 + 2400 \times 29$ et, d'une façon plus générale en utilisant une notation littérale :

$$q_{j-1} \leq q < q_j \Rightarrow C(q) = c_c \frac{D}{q} + i \cdot c_{u_j} \cdot \frac{q}{2} + D \cdot c_{u_j} \quad \text{relation 237}$$

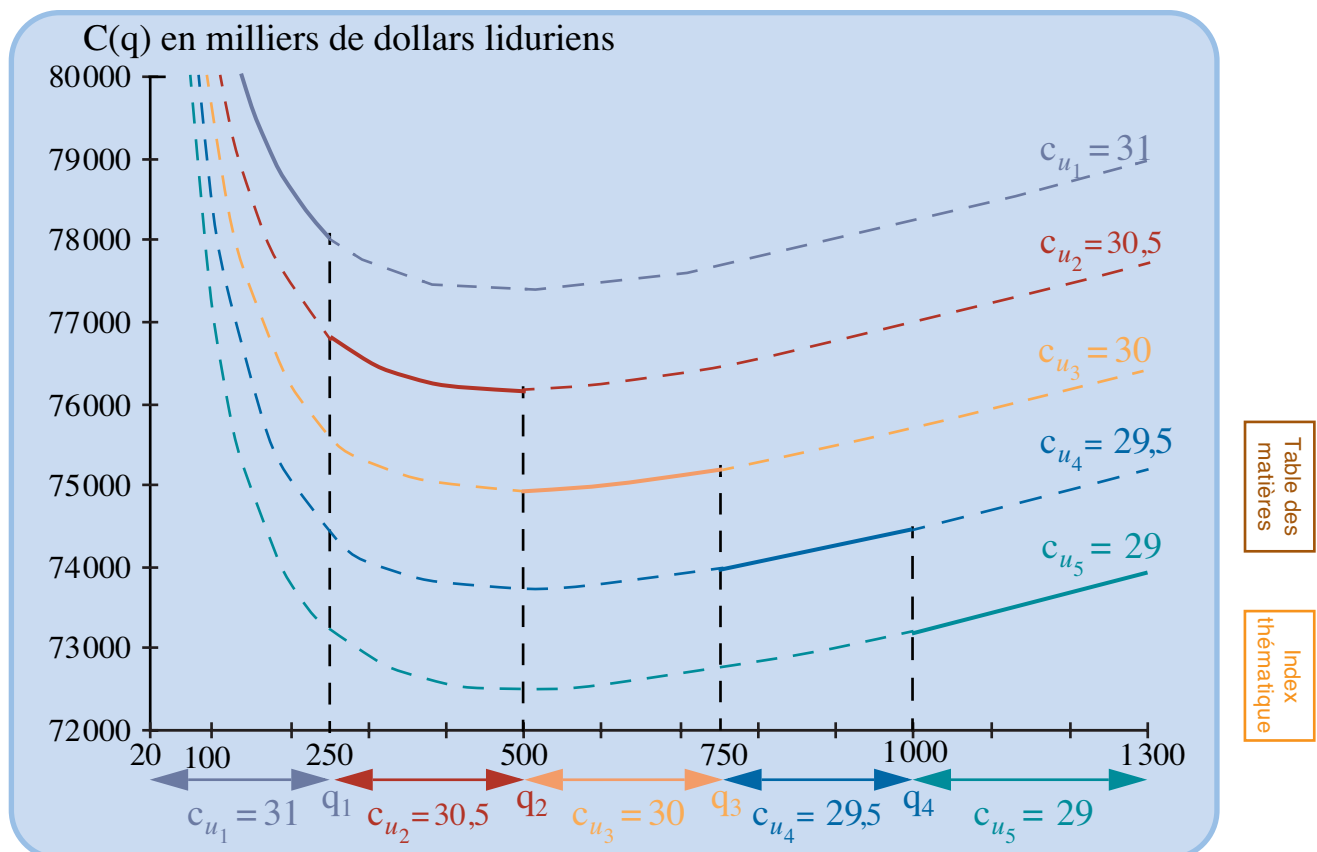
On peut reporter sur la figure 203, page 790, les courbes correspondant à ces 5 fonctions de coût. Ces courbes n'ont aucun point d'intersection, ce qui ne saurait surprendre car la relation 237 peut encore s'écrire :

$$C(q) = c_c \frac{D}{q} + c_{u_j} \cdot \left(i \cdot \frac{q}{2} + D \right) \quad \text{relation 238}$$

ce qui montre que, pour une quantité de commande donnée q (les autres données c_c , et D étant constantes), le coût $C(q)$ est une fonction linéaire du seul coût c_{u_j} . On aurait intérêt à « se placer » systématiquement sur la courbe $C(q)$ la plus basse, celle qui correspond à c_{u_5} dans notre exemple, si aucune condition de quantité n'était formulée. Ces différentes conditions rendent virtuelles, c'est-à-dire non réalisables concrètement, une partie de chacune de nos 5 courbes. Pour différencier graphiquement les parties réelles des parties virtuelles, ces dernières ont été portées en pointillés sur la [figure 203](#).

FIGURE 203

Rabais uniforme : l'optimum global coïncide avec une borne



La recherche de la solution est guidée par le fait que le coût le plus bas se trouve nécessairement :

- soit au minimum de l'une des courbes (ce minimum devant être réalisable, sinon on le qualifiera de virtuel);
- soit à l'une des bornes q_j , en prenant bien soin d'utiliser le prix $c_{u_{j+1}}$ et non c_{u_j} , puisque par hypothèse le coût c_{u_j} est applicable pour une commande strictement inférieure à q_j .

Pour notre exemple, les calculs détaillés sont fournis dans le [tableau 224](#)¹. L'optimum se situe ici sur l'une des bornes : $q^* = 1000$. L'ensemble des conséquences de cette politique est décrit dans le [tableau 225 de la page 791](#).

1. On peut raffiner l'algorithme pour éviter d'explorer toutes les solutions possibles (voir par exemple Hadley et Whitin, 1966, [212], p. 58-62).



TABLEAU 225
Analyse de la politique optimale de la **SUPERLAMBDA** pour la bouilloire électrique (Univers certain - rabais uniforme)

Politique optimale d'approvisionnement des bouilloires électriques	
Conséquences physiques	
Quantité de commande	1 000
Point de commande	167
Coût unitaire d'acquisition	29,00
Nombre moyen annuel de commandes (et de cycles de réapprovisionnement)	2,400
Intervalle moyen entre 2 commandes	120 jours
Stock moyen détenu	500
Taux moyen annuel de rotation du stock	4,80
Conséquences financières	
Dépense moyenne d'acquisition	69 600,00
Coût moyen de commande	720,00
Coût moyen de possession	2 900,00
Indicateur de coût moyen de gestion (achat exclu)	3 620,00
Indicateur de coût moyen de gestion (achat inclus)	73 220,00
Marge sur coût moyen de gestion (achat inclus)	22 780,00

Table des matières

TABLEAU 224
Détail des calculs de la recherche de la solution optimale en cas de rabais uniforme

Index thématique

i	Conditions tarifaires		Recherche de l'optimum hors contrainte		Calculs à la borne inférieure	
	plage de commande possible	coût unitaire	q_{wilson}^*	Coût annuel	q	Coût annuel
1	$q < 250$	31	482	virtuel	-	
2	$250 \leq q < 500$	30,5	486	76 163,78	250	76 842,50
3	$500 \leq q < 750$	30	490	virtuel	500	74 940,00
4	$750 \leq q < 1000$	29,5	494	virtuel	750	73 972,50
5	$q \geq 1000$	29	498	virtuel	1000	73 220,00

La figure 204, page 792, illustre le cas où l'optimum est à l'extremum de l'une des courbes, et non à l'une des bornes (dans cet exemple, seuls trois coûts d'achat ont été pris en compte).

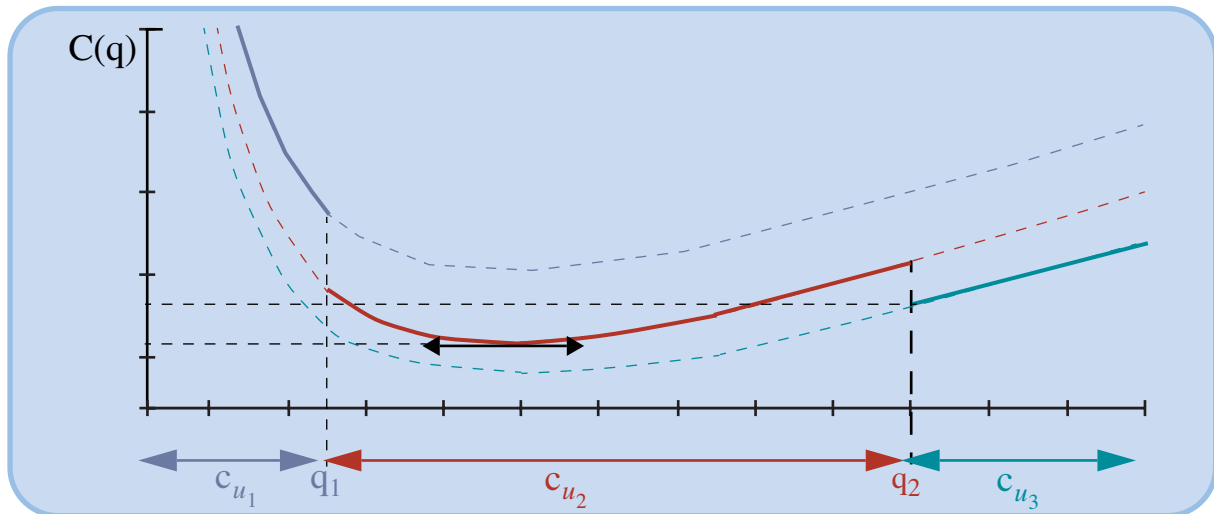
I-2.1.2.2 Rabais progressif

La recherche de l'optimum n'est guère plus compliquée que dans le cas précédent. Pour le déterminer, il faut procéder par étapes progressives¹.

1. L'optimum ne peut se trouver sur l'une des bornes. Voir démonstration dans Hadley et Whitin (1966, [212]), p. 63-64.

FIGURE 204

Rabais uniforme - cas où l'optimum global coïncide avec un optimum local



• **Première étape : q tel que $q < q_1$ (ici $q < 250$)**

Le coût global est fonction seulement de $c_{u_1} = 31$ et a exactement la même formulation que dans le cas du rabais uniforme :

$$C(q) = 2400 \times 31 + 300 \left(\frac{2400}{q} \right) + 0,2 \times 31 \times \frac{q}{2}$$

Pour $q < 250$ l'extremum de cette fonction, nous l'avons vu, n'est pas réalisable ($q^* = 482 > 249$). Dans cette zone, le coût $C(q)$ est décroissant, le coût le plus faible est obtenu pour $q = 249$ et s'élève à 78063 dollars liduriens / an.

• **Deuxième étape : q tel que $q_1 \leq q < q_2$ (ici $250 \leq q < 500$)**

Cette fois-ci le coût global est fonction de deux coûts d'achat. Notons A_1 la dépense d'acquisition des 249 premières unités, et d'une façon générale A_j celle des $q_j - 1$ premières unités si q_j est le seuil à partir duquel le prix c_{u_j} est applicable. On a, dans notre exemple, $A_1 = (q_1 - 1)c_{u_1} = 249 \times 31 = 7719$. Dans ces conditions, la dépense d'acquisition d'une commande est, si $q_1 \leq q < q_2$: $7719 + 30,5 \times (q - 249)$, c'est-à-dire littéralement :

$$A_1 + [q - (q_1 - 1)]c_{u_2} = [A_1 - (q_1 - 1)c_{u_2}] + q \cdot c_{u_2} = B_2 + q \cdot c_{u_2}$$

où B_2 s'analyse comme la différence entre la dépense effective pour acquérir les $(q_1 - 1)$ premières unités, et celle que l'on aurait supportée dans le cas d'un rabais uniforme.

La valeur du stock moyen est alors : $\frac{7719 + 30,5(q - 249)}{2} = \frac{124,5 + 30,5q}{2}$,

c'est-à-dire littéralement : $\frac{A_1 + [q - (q_1 - 1)]c_{u_2}}{2} = \frac{B_2 + q \cdot c_{u_2}}{2}$. La dépense

annuelle de possession s'en déduit en multipliant cette dernière expression par $i = 20\%$:

$$20\% : \frac{B_2 + q \cdot c_{u_2}}{2} \cdot i = \frac{124,5 + 30,5q}{2} \cdot 0,2.$$

Pour calculer la dépense moyenne annuelle d'acquisition, il faut multiplier la demande $D = 2400$ par le coût moyen d'acquisition qui n'est autre que le quotient de la dépense d'acquisition d'une commande par la quantité de commande. Cette dépense moyenne annuelle d'acquisition est donc :

$$D \cdot \frac{B_2 + q \cdot c_{u_2}}{q} = 2400 \cdot \frac{124,5 + 30,5 \cdot q}{q} = 2400 \cdot \left(\frac{124,5}{q} + 30,5 \right)$$

La dépense globale moyenne est donc :

$$250 \leq q < 500 : C(q) = 2400 \left(\frac{124,5}{q} + 30,5 \right) + 300 \frac{2400}{q} + \frac{124,5 + 30,5q}{2} \cdot 0,2$$

soit, littéralement :

$$\text{si } q_1 \leq q < q_2 : C(q) = D \cdot \frac{B_2 + q \cdot c_{u_2}}{q} + c_c \frac{D}{q} + \frac{B_2 + q \cdot c_{u_2}}{2} \cdot i$$

La dérivée, nulle à l'optimum, de cette fonction de coût est :

$$\frac{dC(q)}{dq} = 0 = \frac{-D \cdot B_2}{q^2} - \frac{c_c \cdot D}{q^2} + \frac{c_{u_2} \cdot i}{2}$$

d'où : $q^* = \sqrt{\frac{2 \cdot D \cdot (c_c + B_2)}{c_{u_2} \cdot i}}$, avec $B_2 = A_1 - (q_1 - 1)c_{u_2} = (q_1 - 1)(c_{u_1} - c_{u_2})$

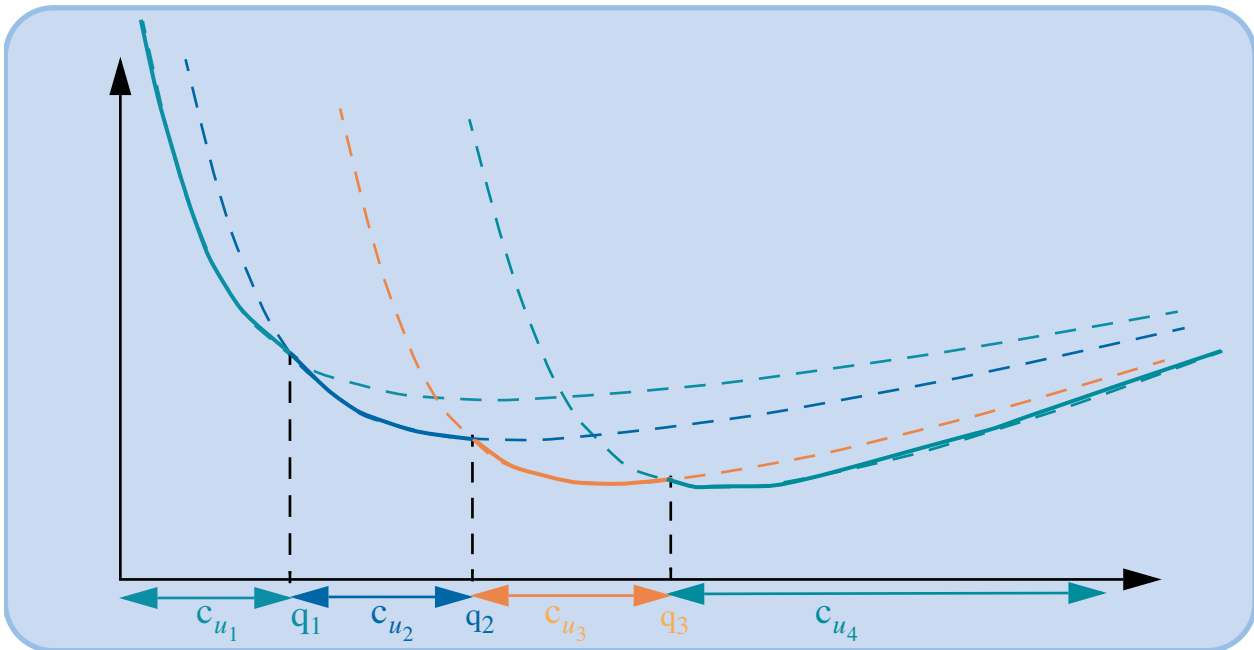
ce qui donne ici : $q^* = \sqrt{\frac{2 \times 2400(300 + 124,5)}{30,5 \times 0,2}} \cong 578.$

Tout se passe comme si on appliquait la formule de Wilson, avec le prix valable pour $q_1 \leq q < q_2$, mais en ajoutant au coût de commande une dépense supplémentaire correspondant à la différence entre la dépense effective pour acquérir les $(q_1 - 1)$ premières unités, et la dépense que l'on aurait eue dans le cas d'un rabais uniforme. Mais cette quantité de commande n'est pas réalisable, parce que $q^* > q_2$, c'est-à-dire : $578 > 499$.

L'analyse de la fonction de coût montre que celle-ci est, à une constante additive près (la dépense d'acquisition moyenne annuelle), du même type que celle étudiée au § I-1.3, page 774. Il s'ensuit que cette fonction est décroissante pour des valeurs de q inférieures à l'optimum, et croissante pour les valeurs de q supérieures à l'optimum. Dans le cas présent, nous sommes dans la zone des coûts décroissants. L'introduction, à l'étape suivante, d'un nouveau rabais a pour effet, comme nous allons le voir, d'accroître q^* (le numérateur de la fraction s'accroît et le dénominateur décroît) et donc de rester, au moins au départ, dans la zone des coûts décroissants. On est donc assuré, au cours de l'étape suivante, de trouver une solution meilleure que toute autre solution réalisable dans cette présente étape.

FIGURE 205

Évolution de la fonction de coût dans le cas d'un rabais progressif



• **Troisième étape : q tel que $q_2 \leq q < q_3$ (ici $500 \leq q < 750$)**

Étude d'une commande q telle que $q_2 \leq q < q_3$, c'est-à-dire $500 \leq q < 750$. Il suffit d'adapter ici le raisonnement suivi au cours de la deuxième étape. Les unités q_1 (= 250) à $q_2 - 1$ (= 499) sont acquises au prix 30,5 soit au total $\{(q_2 - 1) - (q_1 - 1)\} = 499 - 249 = 250$ unités acquises à ce prix (ou, après simplification : $q_2 - q_1$)

$$A_2 = A_1 + (q_2 - q_1)c_{u_2} = 7719 + (500 - 250) \cdot 30,5 = 15344$$

La dépense d'acquisition d'une commande est donc :

$$A_2 + (q - (q_2 - 1)) \cdot c_{u_3} = 15344 + (q - 499) \cdot 30$$

que l'on peut écrire en posant $B_3 = A_2 - (q_2 - 1)c_{u_3}$, qui s'analyse comme la différence entre la dépense effective pour acquérir les $(q_2 - 1)$ premières unités et la dépense que l'on aurait eue dans le cas d'un rabais uniforme :

$$B_3 + q \cdot c_{u_3} = 374 + 30q$$

La dépense globale moyenne annuelle est donc :

$$\text{si } 500 \leq q < 750 : C(q) = 2400 \cdot \left(\frac{374}{q} + 30 \right) + 300 \cdot \frac{2400}{q} + \frac{374 + q \cdot 30}{2} \cdot 0,2$$

$$\text{soit, littéralement : si } q_2 \leq q < q_3 : C(q) = D \cdot \left(\frac{B_3}{q} + c_{u_3} \right) + c_c \frac{D}{q} + \frac{B_3 + q \cdot c_{u_3}}{2} \cdot i,$$

$$\text{d'où } q^* = \sqrt{\frac{2 \cdot D \cdot (c_c + B_3)}{c_{u_3} \cdot i}} = \sqrt{\frac{2 \times 2400 \times (300 + 374)}{30 \times 0,2}} \cong 734$$

Cet optimum est cette fois-ci réalisable et le coût annuel moyen correspondant est: $C(q = 734) = 2400 \cdot \left(\frac{374}{734} + 30\right) + 300 \cdot \frac{2400}{734} + \frac{374 + 734,30}{2} \times 0,2 = 76443.$

• **Étapes suivantes**

La généralisation du raisonnement suivi précédemment est relativement aisée. L'étape j correspond au cas d'une commande q telle que, pour $q_{j-1} \leq q < q_j$, la quantité $\{q - (q_{j-1} - 1)\}$ est acquise au prix c_{u_j} .

Posons: $A_j = A_{j-1} + (q_j - q_{j-1})c_{u_j} = \sum_{h=1}^j (q_h - q_{h-1})c_{u_h}$, avec $q_0 = 1$, le coût unitaire moyen est:

$$\frac{A_{j-1} + [q - (q_{j-1} - 1)]c_{u_j}}{q} = c_{u_j} + \frac{A_{j-1} - (q_{j-1} - 1)c_{u_j}}{q} = c_{u_j} + \frac{B_j}{q}$$

où B_j s'analyse comme la dépense supplémentaire des $(q_{j-1} - 1)$ premières unités acquises à un coût supérieur à c_{u_j} par rapport à une acquisition à un prix unique c_{u_j} (cas du rabais uniforme). Dans ces conditions, le coût moyen annuel de gestion est:

$$C(q) = D\left(c_{u_j} + \frac{B_j}{q}\right) + c_c \frac{D}{q} + i\left(c_{u_j} + \frac{B_j}{q}\right) \frac{q}{2} \tag{relation 239}$$

D'où la solution optimale:

$$q^* = \sqrt{\frac{2D(c_c + B_j)}{i \cdot c_{u_j}}}, \text{ avec } B_j = \sum_{h=1}^{j-1} (q_h - q_{h-1})c_{u_h} - (q_{j-1} - 1)c_{u_j}, \text{ pour } j > 1$$

$$\text{et } B_1 = 0 \text{ et } q_0 = 1 \tag{relation 240}$$

ce qui donne pour notre exemple numérique:

- si $q_3 \leq q < q_4 : 750 \leq q < 1000 \rightarrow q^* = 924$, réalisable
- si $q \geq q_4 : q \geq 1000 \rightarrow q^* = 1132$, réalisable

TABLEAU 227

Recherche de l'optimum dans le cas d'un rabais progressif

Conditions tarifaires	Coût unitaire	q^*	Coût annuel
$1 \leq X < 250$	31,00	482	Virtuel
$250 \leq X < 500$	30,50	578	Virtuel
$500 \leq X < 750$	30,00	734	76443,21
$750 \leq X < 1000$	29,50	924	76324,02
$X \geq 1000$	29,00	1132	76289,58

La commande qui minimise le coût global moyen annuel est donc celle qui correspond à une commande 1132. Soulignons qu'ici l'optimum correspond à la

Table des matières

Index thématique



TABLEAU 226
Analyse de la politique optimale de la **SUPERLAMBDA** pour la bouilloire électrique (Univers certain - rabais progressif)

Politique optimale d'approvisionnement des bouilloires électriques	
Conséquences physiques	
Quantité de commande	1 132
Point de commande	167
Coût moyen unitaire d'acquisition	30,10247
Nombre moyen annuel de commandes (et de cycles de réapprovisionnement)	2,120
Intervalle moyen entre 2 commandes	135,8 jours
Stock moyen détenu	566
Taux moyen annuel de rotation du stock	4,24
Conséquences financières	
Dépense moyenne d'acquisition	72 245,94
Coût moyen de commande	636,04
Coût moyen de possession	3 407,60
Indicateur de coût moyen de gestion (achat exclu)	4 043,64
Indicateur de coût moyen de gestion (achat inclus)	76 289,58
Marge sur coût moyen de gestion (achat inclus)	19 710,42

valeur trouvée pour le dernier extremum calculé, mais qu'il n'en est pas forcément toujours ainsi (en particulier si la dernière borne supérieure n'est pas l'infini, mais une valeur techniquement plausible).

I-2.1.3 Augmentation tarifaire dans le cas de rabais sur quantité

I-2.1.3.1 Augmentation tarifaire dans le cas de rabais uniforme

La démarche présentée au § I-2.1.1 et § I-2.1.2 se transpose sans difficulté. Le calcul de la politique optimale après hausse tarifaire s'effectue conformément à la logique du § I-2.1.1.1 (en remplaçant les c_{u_1} et c_{u_2} par des $c_{u_{1j}}$ et $c_{u_{2j}}$) et conduit au calcul de la constante M , laquelle reste toujours la somme de la dépense annuelle d'achat et de la valeur optimale de l'indicateur moyen annuel de gestion avec la nouvelle tarification. On a vu précédemment que c est le stock disponible après livraison ($q + R_v$) que l'on déterminait dans l'approche retenue. On peut donc, sans perte de généralité, considérer comme nul le stock disponible juste avant la livraison (R_v).

L'économie qu'il nous faut maintenant chercher à maximiser, étant une fonction de quantités q_j dépendante du niveau j de prix, est alors, en transposant la relation 230 de la page 785 :

$$C_{2j}(q_j) - C_{1j}(q_j) = \left[\frac{q_j \cdot M}{D} + ic_{u_{1j}} \frac{R_v^2}{2D} \right] - \left[c_c + q_j c_{u_{1j}} + ic_{u_{1j}} \frac{(q_j + R_v)^2}{2D} \right]$$

relation 241

C'est une fonction du second degré de q_j et, comme au § I-2.1.2.1, on peut construire un réseau de courbes non sécantes (à concavité inversée) pour les différents

nouveaux prix, dotées également de parties réelles et virtuelles. Un raisonnement similaire à celui conduit au § I-2.1.2.1, permet de dire que la valeur optimale est trouvée soit sur l'une des bornes inférieures, soit pour une valeur de q_j obtenue en transposant la relation 231 de la page 785 :

$$q_j^* = \frac{M}{ic_{u_1j}} - \frac{D}{i} - R_v \tag{relation 242}$$

Illustrons rapidement ce cas de figure, en reprenant l'exemple numérique du § I-2.1.2.1 et en supposant qu'une hausse tarifaire de 10% soit annoncée, avec un stock de 250 unités disponibles lors de la passation de la commande. Il est facile de calculer que le nouveau régime de croisière se caractérise par une quantité commandée de 1000 bouilloires électriques, achetées au prix unitaire de 31,90 dollars liduriens, ce qui conduit à une valeur de M égale à 80470 dollars. On en tire alors facilement la politique optimale (commande de 1791 bouilloires achetées au prix unitaire de 29 dollars liduriens); les conséquences détaillées de cette proposition de politique (sans doute difficile à appliquer car elle conduit à commander près de 10 mois de consommation) sont décrites dans le tableau 229.

TABLEAU 228
Détail des calculs de la recherche de la solution optimale en cas d'augmentation tarifaire sur rabais uniforme

i	Conditions tarifaires		Recherche de l'optimum hors contrainte		Calculs à la borne inférieure	
	plage de commande possible	coût unitaire	q_{wilson}^*	Économie	q	Économie
1	$q < 250$	31	896	virtuel	-	
2	$250 \leq q < 500$	30,5	1108	virtuel	250	324,92
3	$500 \leq q < 750$	30	1329	virtuel	500	1047,92
4	$750 \leq q < 1000$	29,5	1556	virtuel	750	1876,82
5	$q \geq 1000$	29	1791	3576,54	1000	2819,44

Table des matières

Index thématique

I-2.1.3.2 Augmentation tarifaire dans le cas de rabais progressif

Comme au paragraphe précédent, il faut d'abord calculer la politique optimale de croisière après la hausse tarifaire, ce qui conduit toujours au calcul d'une constante M.

L'économie qu'il nous faut chercher à maximiser combine les approches des § I-2.1.1, page 784, et § I-2.1.2.2, page 791, en remplaçant c_{u_1} par $c_{u_1j} + B_j/q_j$:

$$C_{2j}(q_j) - C_{1j}(q_j) = \left[\frac{q_j \cdot M}{D} + i \left(c_{u_1j} + \frac{B_j}{q_j} \right) \frac{R_v^2}{2D} \right] - \left[c_c + q_j \left(c_{u_1j} + \frac{B_j}{q_j} \right) + i \left(c_{u_1j} + \frac{B_j}{q_j} \right) \frac{[q_j + R_v]^2}{2D} \right] \tag{relation 243}$$

après simplification, sa représentation graphique est, à une inversion de concavité près, du type de celle de la figure 205, page 794. Il s'ensuit que la solution optimale est la solution non virtuelle du type :



TABLEAU 229
Analyse de la politique optimale de la **SUPERLAMBDA** pour la bouilloire électrique (Univers certain - rabais momentané sur rabais uniforme)

Politique optimale d'approvisionnement des bouilloires électriques		
Conséquences physiques de la politique optimale d'approvisionnement	Commande ponctuelle optimale	Politique optimale après hausse tarifaire
Stock disponible à la commande	250	-
Quantité de commande	1791	1000
Point de commande	167	167
Coût unitaire d'acquisition	29,00	31,90
Intervalle de temps séparant les deux prochaines livraisons	214,9 jours	-
Délai avant franchissement normal du point de commande	10 jours	-
Intervalle moyen entre 2 commandes	-	120 jours
Nombre moyen annuel de commandes	-	2,4
Stock disponible avant la prochaine livraison	83	-
Stock disponible après la prochaine livraison	1874	-
Stock moyen annuel équivalent au stock détenu entre les 2 prochaines livraisons	731,6408333	-
Stock moyen détenu	-	500
Taux moyen annuel de rotation du stock	-	4,8
Conséquences financières de la politique optimale d'approvisionnement		
Dépense moyenne annuelle d'acquisition	51 939,00	76 560,00
Economie réalisée par la commande exceptionnelle	3 576,54	-
Coût moyen annuel de commande	-	720,00
Coût moyen annuel de possession	-	3 190,00
Indicateur de coût moyen annuel (achat exclu)	-	3 910,00
Indicateur de coût moyen annuel (achat inclus)	-	80 470,00
Marge sur coût moyen de gestion (achat inclus)	-	15 530,00

Table des matières

Index thématique

$$q_j^* = \frac{M}{ic_{u_1j}} - \frac{D}{i} - \frac{B_j}{2ic_{u_1j}} - R_v \quad \text{relation 244}$$

et qui maximise l'économie et ne diffère de celle obtenue dans le cas du rabais uniforme (relation 242, page 797) que de la quantité $\{-B_j/(2ic_{u_1j})\}$.

Reprenons l'exemple numérique du § I-2.1.1.2 pour illustrer ce cas de figure et supposons, là encore, que le stock disponible lors de la passation de commande est de 250 et que la hausse tarifaire est toujours égale à 10%. Le nouveau régime de croisière se caractérise par une quantité commandée de 1 122 bouilloires électriques, ce qui conduit à donner à M une valeur de 83 854 dollars / an. L'application de la démarche décrite ci-dessus (voir tableau 230) conduit à préconiser une commande de 2 374 unités; les conséquences de cette politique (sans doute difficile à retenir car elle conduit à commander près de 12 mois de consommation) sont décrites au tableau 231, page 799.



TABLEAU 231
Analyse de la politique optimale de la SUPERLAMBDA pour la bouilloire électrique (univers certain - rabais momentané sur rabais progressif)

Politique optimale d'approvisionnement des bouilloires électriques		
Conséquences physiques de la politique optimale d'approvisionnement	Commande ponctuelle optimale	Politique optimale après hausse tarifaire
Stock disponible à la commande	250	-
Quantité de commande	2353	1122
Point de commande	167	167
Coût moyen unitaire d'acquisition	29,53039	33,12353
Intervalle de temps séparant les deux prochaines livraisons	282,4 jours	-
Délai avant franchissement normal du point de commande	10 jours	-
Intervalle moyen entre 2 commandes	-	134,6 jours
Nombre moyen annuel de commandes	-	2,14
Stock disponible avant la prochaine livraison	83	-
Stock disponible après la prochaine livraison	2436	-
Stock moyen annuel équivalent au stock détenu entre les 2 prochaines livraisons	1236,27	-
Stock moyen détenu	-	561
Taux moyen annuel de rotation du stock	-	4,28
Conséquences financières de la politique optimale d'approvisionnement		
Dépense moyenne annuelle d'acquisition	69 485,00	79 496,47
Economie réalisée par la commande exceptionnelle	5 134,46	-
Coût moyen annuel de commande	-	641,71
Coût moyen annuel de possession	-	3 716,46
Indicateur de coût moyen annuel (achat exclu)	-	4 358,17
Indicateur de coût moyen annuel (achat inclus)	-	83 854,64
Marge sur coût moyen de gestion (achat inclus)	-	12 145,36

Table des matières

Index thématique

TABLEAU 230
Recherche de l'optimum dans le cas de rabais progressif

Conditions tarifaires	Prix	q*	Économie
$1 \leq X < 250$	31,00	1442	Virtuel
$250 \leq X < 500$	30,50	1662	Virtuel
$500 \leq X < 750$	30,00	1887	Virtuel
$750 \leq X < 1000$	29,50	2117	Virtuel
$X \geq 1000$	29,00	2353	5 134,46

I-2.2 Cas de l'approvisionnement continu

Avec l'approvisionnement continu, nous levons la dernière hypothèse du § I-1.2 selon laquelle la commande est livrée en une seule fois.

I-2.2.1 Le problème posé

Ce cas de figure se rencontre lorsque la commande est interne à l'entreprise, c'est-à-dire lorsqu'un service de l'entreprise passe une commande d'approvisionnement à un atelier de fabrication :

- L'article demandé peut être un produit fini, et le service demandeur est le service des ventes, mais il faut que les ventes soient régulières pour que l'hypothèse d'une demande continue soit acceptable.
- Mais l'article demandé peut également être un composant d'un article élaboré que l'atelier demandeur est chargé d'assembler avec d'autres composants.

Dans un cas comme dans l'autre un arbitrage est à effectuer entre un coût de commande, encore appelé dans ce cas **coût de lancement**, et un coût de possession lié au stockage des composants. Le coût de lancement correspond essentiellement à des coûts de réglage et de mise au point. La production d'une série d'un composant donné n'est pas instantanée, ce qui permet d'envisager un approvisionnement étalé dans le temps. Dans ce cas, si l'on décide de produire q unités, ce qui nécessite, par exemple 5 jours ouvrables, le stock disponible, lorsque les q unités auront été produites, n'est pas q , mais $q - 5x$, où x est la consommation quotidienne. Nous analyserons le cas de l'approvisionnement continu en supposant qu'aucune contrainte ne pèse sur la définition de la série optimale, en particulier au niveau de l'utilisation de la capacité productrice de l'atelier, nous verrons au § I-2.3.2, page 822, comment tenir compte des contraintes d'utilisation de cette capacité, liées à la production successive d'articles différents dans le même atelier.

I-2.2.2 Exemple numérique

La société **Cuisor** fabrique des articles de cuisines. La demande annuelle de bouilloires électriques est de 50000 unités / an. La production maximale annuelle que l'on notera O (pour offre) est $O = 200000$ unités / an. Le coût de lancement est $c_c = 500$ dollars liduriens, et le coût de possession est de 3 dollars / unité / an. L'usine travaille 240 jours par an.

I-2.2.3 Solution

Pendant une journée ouvrable, la demande est de $50000 / 240 = 208,33$ bouilloires, tandis que la production est de $200000 / 240 = 833,33$, ce qui fait que le stock net de fin de journée s'est accru de $833,33 - 208,33 = 625$. La production de q unités s'effectuera en $q / 833,33$ jours, le stock net lorsque la série sera terminée ne sera pas de q , mais de 625 (= accroissement quotidien du stock net)

fois ce nombre de jours: $\frac{q \cdot 240}{200000} \cdot 625$, que l'on peut encore écrire :

$$\frac{q \cdot 240}{200000} \cdot \left(\frac{200000}{240} - \frac{50000}{240} \right) = q \cdot \left(\frac{200000 - 50000}{200000} \right)$$

Dans cette formulation, on voit apparaître directement des taux annuels de production et de demande au lieu de taux journaliers. On peut écrire ce stock net en fin de production de la série, sous la forme littérale suivante: $q \cdot \left(\frac{O - D}{O} \right)$. Si q

= 8000 et si le stock initial est nul, la production des 8000 unités nécessitera 9,60 jours, pendant lesquels le stock net passera de 0 (stock initial nul par hypothèse) à $8000 \cdot \left(\frac{200000 - 50000}{200000}\right) = 6000$, stock qui sera ensuite consommé en $\frac{6000}{208,33} = 28,80$ jours. Un raisonnement analogue à celui mené à la page 774 conduit à estimer le stock moyen à longueur d'année à $6000 / 2$, puisque tous les $9,6 + 28,8 = 38,4$ jours ouvrables, le stock net connaît la même évolution que celle décrite ci-dessus et visualisée dans la figure 206.

FIGURE 206

Évolution du stock en cas d'approvisionnement continu

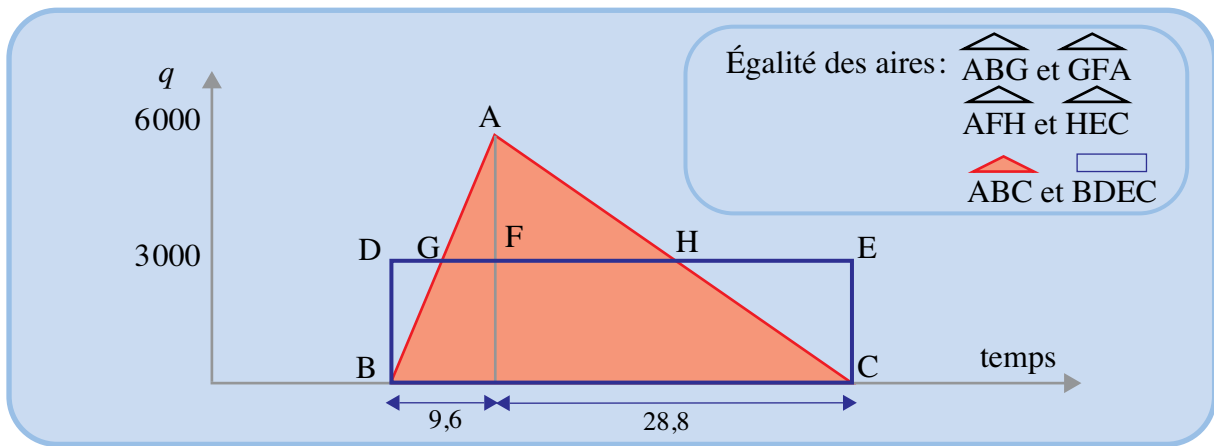


Table des matières

Pour une commande d'une série de q unités, le stock moyen annuel est $\frac{1}{2} \cdot q \cdot \frac{O-D}{O}$. Il s'ensuit que le coût moyen annuel que l'on cherche à minimiser

Index thématique

est: $C(q) = 500 \left(\frac{50000}{q}\right) + 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot q \cdot \left(\frac{200000 - 50000}{200000}\right)$ et d'une façon générale:

$$C(q) = c_c \cdot \frac{D}{q} + c_p \cdot \frac{1}{2} \cdot q \cdot \frac{O-D}{O} \quad \text{relation 245}$$

qui n'est autre que la fonction de base du modèle de Wilson (relation 219 de la page 774), à condition de remplacer le coût de possession c_p par: $c_p \cdot (O-D)/O$.

La solution optimale est donc:

$$q^* = \sqrt{\frac{2 \cdot D \cdot c_c}{c_p \cdot \frac{O-D}{O}}} \quad \text{relation 246}$$

ce qui donne ici: $q^* = \sqrt{\frac{2 \times 50000 \times 500}{3 \times \frac{200000 - 50000}{200000}}} = 4714$, d'où un coût moyen annuel

de: $C(q = 4714) = 500 \times \frac{50000}{4714} + 3 \times \frac{1}{2} \times 4714 \times \frac{200000 - 50000}{200000} = 10607$, que

l'on aurait pu également calculer directement à l'aide de la relation 224 de la page 776, en utilisant le coût de possession rectifié ($c_p \cdot (O-D)/O = 3 \times 0,75 = 2,25$):

$$C(q = 4714) = c_p \cdot \frac{O-D}{O} \cdot q^* = 3 \times 0,75 \times 4714 = 10607$$



TABLEAU 232
Analyse de la politique optimale de la **CUISOR** pour la bouilloire électrique

Politique optimale d'approvisionnement (production interne) des bouilloires électriques	
Conséquences physiques	
Quantité de commande	4 714
Nombre moyen annuel de lancements en production	10,61
Intervalle moyen entre 2 lancements	22,6 jours
Stock moyen détenu	1 767,75
Taux moyen annuel de rotation du stock	28,28
Conséquences financières	
Dépense moyenne de production	750 000,00
Coût moyen annuel de lancement	5 303,35
Coût moyen annuel de possession	5 303,25
Indicateur de coût moyen annuel de gestion (production exclue)	10 606,60
Indicateur de coût moyen de gestion (production incluse)	760 606,60

On peut ajouter qu'en cas de rupture de stock autorisée, la demande non satisfaite pouvant être différée, à concurrence d'un montant B , si chaque unité livrée avec retard est pénalisée d'un coût de rupture c_{r_1} indépendant de la durée de rupture, et si en outre un coût de rupture c_{r_2} proportionnel à la durée de rupture pèse sur le nombre d'unités-années livrées avec retard, on montre que la quantité de commande optimale q^* et le report optimal B^* sont tels que¹ :

$$q^* = \sqrt{\frac{2 \cdot D \cdot c_c}{c_p \cdot (1 - D/O)} - \frac{(c_{r_1} \cdot D)^2}{c_p(c_p + c_{r_2})}} \cdot \sqrt{\frac{c_p + c_{r_2}}{c_{r_2}}} \quad \text{et} \quad B^* = \frac{(c_p q^* - c_{r_1} D) \left(\frac{O-D}{O} \right)}{c_p + c_{r_2}} \quad \text{relation 247}$$

On montre en outre que, pour $c_{r_2} = 0$ et $c_{r_1} > 0$, la politique optimale consiste à n'avoir jamais de rupture de stock ou, au contraire, à être toujours en rupture de stock.

I-2.3 Prise en compte de l'interdépendance avec d'autres articles

Nous nous limiterons à la prise en compte de trois catégories d'interdépendance: l'utilisation commune et simultanée d'une même ressource rare par plusieurs articles (§ I-2.3.1), l'utilisation commune et successive d'une même ressource rare (§ I-2.3.2, page 822) et le cas des commandes groupées (§ I-2.3.3, page 826). Dans ces deux derniers cas, la variable de commande du système n'est plus q , mais T .

I-2.3.1 Utilisation commune et simultanée d'une même ressource rare

Nous examinerons, dans un premier temps, la détermination de la politique optimale, en régime de croisière, de plusieurs références partageant la même ressource rare non financière (§ I-2.3.1.1) ou la même ressource rare financière (§ I-2.3.1.2, page 812) ou les deux (§ I-2.3.1.3, page 815). Dans un second temps,

1. Johnson et Montgomery (1974, [245]), p. 29-31.

nous examinerons les problèmes de détermination de la politique optimale d'approvisionnement en cas de hausse tarifaire lorsqu'il faut tenir compte d'une ressource rare financière et / ou non financière (§ I-2.3.1.4, page 816).

I-2.3.1.1 Implication de l'utilisation commune et simultanée d'une même ressource rare non financière «en régime de croisière»

I-2.3.11a) Le problème posé

La réception d'une commande se traduit habituellement par la consommation (au sens large) d'une ou de plusieurs ressources rares, c'est-à-dire possédées en quantité limitée par l'entreprise.

- C'est tout d'abord le cas des contraintes budgétaires qui pèsent sur le montant des stocks qui résultent de l'arbitrage explicite ou implicite effectué par la direction de l'entreprise sur la structure de son bilan¹. Cet arbitrage dépend du nombre total d'articles (les décaissements seront d'autant plus réguliers qu'il y a de nombreux articles), du rythme de consommation de chacun des articles (les commandes sont d'autant plus nombreuses, toutes choses égales par ailleurs, que la demande est forte), et des capacités de financement de l'entreprise.
- C'est également le cas d'autres facteurs productifs rares comme l'espace (stockage en réserve, linéaires de vente...), les capacités de production de frigories pour un entrepôt frigorifique, etc.

I-2.3.11b) Exemple introductif

Supposons que le rayon «Articles de cuisine» du supermarché **SUPERLAMBDA** ait une capacité totale de stockage (linéaire de vente + réserve) d'environ 30 m³. Pour simplifier l'exemple numérique, nous supposerons que trois articles différents seulement sont vendus et qu'ils ont le même coût de commande ($c_c = 300$ dollars liduriens). Les caractéristiques de ces articles sont les suivantes :

- la bouilloire électrique, caractérisée par une demande moyenne annuelle $D_1 = 2400$, un coût de possession $c_{p1} = 0,2 \times 30 = 6$ dollars / unité / an, un prix de vente de 40 \$ et un encombrement $a_1 = 0,05$ m³ / unité ;
- la cocotte-minute, caractérisée par une demande moyenne annuelle $D_2 = 1000$, un coût de possession $c_{p2} = 0,2 \times 100 = 20$ dollars / unité / an, un prix de vente de 130 \$ et un encombrement $a_2 = 0,06$ m³ / unité ;
- une casserole, caractérisée par une demande moyenne annuelle $D_3 = 5000$, un coût de possession $c_{p3} = 0,2 \times 15 = 3$ dollars / unité / an, un prix de vente de 20 \$ et un encombrement $a_3 = 0,03$ m³ / unité.

Si l'on cherche les quantités de commande optimales de ces différents articles, sans se préoccuper de la contrainte globale de stockage, on en déduit alors le volume représenté par une livraison optimale :

1. Ces marchandises livrées ont leur contrepartie au bilan au compte de stock «37-marchandise». La rotation plus ou moins rapide des stocks se traduit par des transferts plus ou moins rapides vers le bas du bilan. Si la commande est interne à l'entreprise, c'est le compte de stock «33-en-cours de production de biens» qui sera alors gonflé, mais l'arbitrage est de même nature car la consommation du stock considéré se traduit par des ventes à l'extérieur, immédiatement si le lancement concerne des produits finis, et ultérieurement si le lancement concerne des produits intermédiaires.

- $q_1^* = \sqrt{\frac{2 \times 2400 \times 300}{6}} = 490$, d'où $a_1 \cdot q_1^* = 0,05 \times 490 = 24,50 \text{ m}^3$;
- $q_2^* = \sqrt{\frac{2 \times 1000 \times 300}{20}} = 173$, d'où $a_2 \cdot q_2^* = 0,06 \times 173 = 10,38 \text{ m}^3$;
- $q_3^* = \sqrt{\frac{2 \times 5000 \times 300}{3}} = 1000$, d'où $a_3 \cdot q_3^* = 0,03 \times 1000 = 30,00 \text{ m}^3$.

En réalité ces commandes n'arriveront jamais simultanément, puisque leurs périodicités diffèrent : 4,90 commandes de bouilloires par an, 5,78 commandes de cocottes-minute par an et 5 commandes de casseroles par an. L'espace maximal de stockage nécessaire, en dehors de toute contrainte, est donc inférieur à $a_1 \cdot q_1^* + a_2 \cdot q_2^* + a_3 \cdot q_3^* = 64,88 \text{ m}^3$, valeur qui correspondrait à l'espace rendu nécessaire pour des livraisons simultanées de nos trois articles. L'exemple simplifié de la [figure 207, page 805](#), illustre bien ce point : les stocks et demandes étant convertis en volumes et une livraison s'effectuant à l'instant 0 pour les articles 1 et 3, tandis que le stock résiduel de l'article 2 s'élève à 1,5, on peut constater que l'évolution du stock global est caractérisée par un cycle de 6 périodes et que le stock maximal est de 7,5 alors que le cumul de livraison se monte à 9, d'où un abattement de $7,5/9 = 83 \%$.

Cet espace maximal nécessaire sera défini en diminuant les quantités q_j par un coefficient de minoration, noté k_j , nécessairement compris entre 1 (arrivée simultanée de tous les articles ou espace de stockage dédiés, sans banalisation¹) et 0,5 (réceptions continues de commandes, le nombre de références prises en compte étant en outre très grand et le stockage étant banalisé). Ces trois articles étant vendus dans un rayon comportant de très nombreuses références, on leur affectera un coefficient d'abattement relativement fort ($k_j = 0,6$ quel que soit l'article considéré), ce qui ne restreint en rien la portée de l'exemple choisi. En conséquence de quoi, la consommation maximale d'espace de stockage s'élève à $0,6 \times 64,88 = 38,93 \text{ m}^3$, valeur nettement supérieure à la dotation allouée de 30 m^3 .

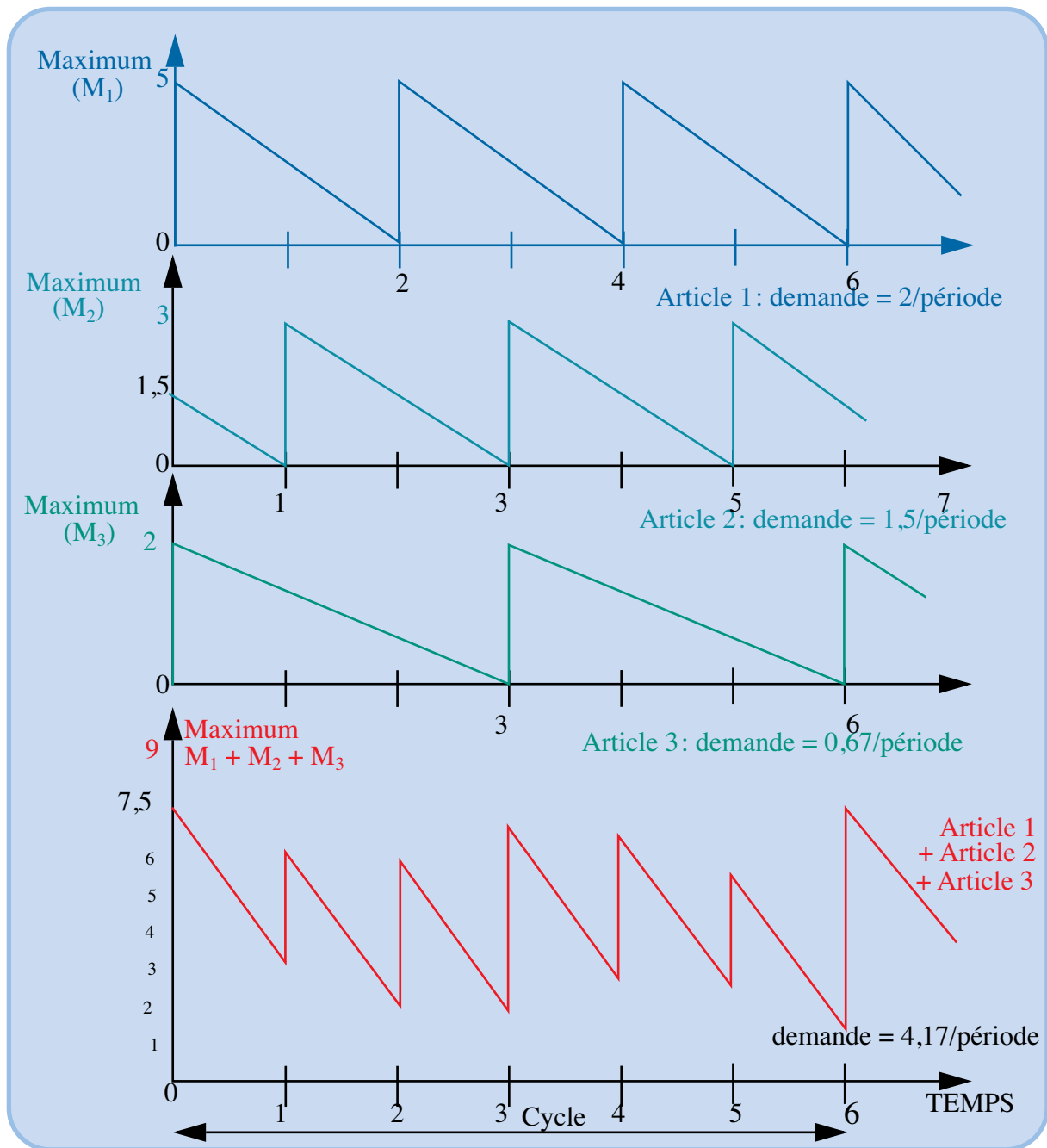
On pourrait régler ce problème de façon arbitraire, par exemple en procédant à un même pourcentage d'abattement en volume des commandes pour satisfaire la contrainte, c'est-à-dire que l'on commanderait dans cette perspective $30/38,93 = 0,771$ des valeurs anciennes de q_1, q_2, q_3 ; on aurait alors :

$$\begin{aligned} q_1 &= 0,771 \times 490 = 378, \text{ d'où } a_1 \cdot q_1 = 0,05 \times 378 = 18,90 \text{ m}^3 ; \\ q_2 &= 0,771 \times 173 = 133, \text{ d'où } a_2 \cdot q_2 = 0,06 \times 133 = 7,98 \text{ m}^3 ; \\ q_3 &= 0,771 \times 1000 = 771, \text{ d'où } a_3 \cdot q_3 = 0,03 \times 771 = 23,13 \text{ m}^3. \end{aligned}$$

Cette règle empirique respecte bien la contrainte du volume de stockage $(18,9 + 7,98 + 23,13) \times 0,6 = 30$, mais elle n'a aucune raison de correspondre au coût de gestion le plus faible pour l'entreprise. Pour bien faire comprendre ce point, calculons le coût moyen annuel correspondant à la règle sommaire qui vient d'être proposée, pour pouvoir la comparer par la suite avec le coût minimum :

1. Voir les principes de stockage à la [page 904](#) du [chapitre XIII](#).

FIGURE 207
Évolution simultanée des stocks des articles achetés



$$C_1(q_1) = 300 \times \frac{2400}{378} + 0,5 \times 378 \times 6 = 3039$$

$$C_2(q_2) = 300 \times \frac{1000}{133} + 0,5 \times 133 \times 20 = 3586$$

$$C_3(q_3) = 300 \times \frac{5000}{771} + 0,5 \times 771 \times 3 = 3102$$

d'où un coût total annuel moyen de 9727 dollars liduriens.

I-2.3.11c) Formulation mathématique du problème

On ne peut plus chercher à minimiser indépendamment les fonctions de coût $C(q_j)$, puisque les articles j sont interdépendants de par leur consommation du même facteur rare. Il faut donc chercher à minimiser la fonction de coût $\sum_j C_j(q_j)$

$$\sum_j C_j(q_j) = \sum_j \left[c_{c_j} \cdot \frac{D_j}{q_j} + c_{p_j} \cdot \frac{q_j}{2} \right] \quad \text{relation 248}$$

c'est-à-dire : $\left[300 \cdot \frac{2400}{q_1} + 6 \cdot \frac{q_1}{2} \right] + \left[300 \cdot \frac{1000}{q_2} + 20 \cdot \frac{q_2}{2} \right] + \left[300 \cdot \frac{5000}{q_3} + 3 \cdot \frac{q_3}{2} \right]$,
sous contrainte :

$$\sum_j a_j \cdot k_j \cdot q_j \leq A \quad \text{relation 249}$$

où A est la dotation maximale du facteur rare et a_j la consommation unitaire de facteur rare. D'où ici : $0,05 \cdot 0,6 \cdot q_1 + 0,06 \cdot 0,6 \cdot q_2 + 0,03 \cdot 0,6 \cdot q_3 \leq 30$.

Ce problème d'optimisation sous contrainte se ramène à un problème de recherche d'optimum libre de la fonction suivante H (dite Lagrangien) qui introduit en sus des q_j , une variable nouvelle λ (lambda), que l'on indicera par λ_A (désignation de la contrainte) pour faciliter la généralisation qui suivra :

$$H = \sum_j C_j(q_j) + \lambda_A (\sum_j a_j \cdot k_j \cdot q_j - A)$$

soit ici :

$$H = \left(300 \cdot \frac{2400}{q_1} + \frac{q_1}{2} \cdot 6 \right) + \left(300 \cdot \frac{1000}{q_2} + \frac{q_2}{2} \cdot 20 \right) + \left(300 \cdot \frac{5000}{q_3} + \frac{q_3}{2} \cdot 3 \right) \\ + \lambda_A (0,05 \cdot 0,6 \cdot q_1 + 0,06 \cdot 0,6 \cdot q_2 + 0,03 \cdot 0,6 \cdot q_3 - 30)$$

Pour que H ait un extremum, il faut que les différentes dérivées partielles de H soient nulles :

$$\frac{\partial H}{\partial q_1} = 0 = -300 \cdot \frac{2400}{q_1^2} + \frac{6}{2} + \lambda_A \cdot 0,05 \cdot 0,6$$

$$\frac{\partial H}{\partial q_2} = 0 = -300 \cdot \frac{1000}{q_2^2} + \frac{20}{2} + \lambda_A \cdot 0,06 \cdot 0,6$$

$$\frac{\partial H}{\partial q_3} = 0 = -300 \cdot \frac{5000}{q_3^2} + \frac{3}{2} + \lambda_A \cdot 0,03 \cdot 0,6$$

$$\frac{\partial H}{\partial \lambda_A} = 0 = 0,05 \cdot 0,6 \cdot q_1 + 0,06 \cdot 0,6 \cdot q_2 + 0,03 \cdot 0,6 \cdot q_3 - 30$$

L'interprétation économique de la dernière équation $\partial H / \partial \lambda_A = 0$ est évidente : elle exprime que, dans la solution optimale, la totalité de l'espace de stockage disponible sera utilisée.

Chacune des 3 premières équations peut s'écrire littéralement sous la forme :

$$\frac{\partial H}{\partial q_j} = 0 = -c_{c_j} \cdot \frac{D_j}{q_j^2} + \frac{c_{p_j}}{2} + \lambda_A \cdot a_j \cdot k_j$$

équation à 2 inconnues (λ et q_j) d'où l'on tire :

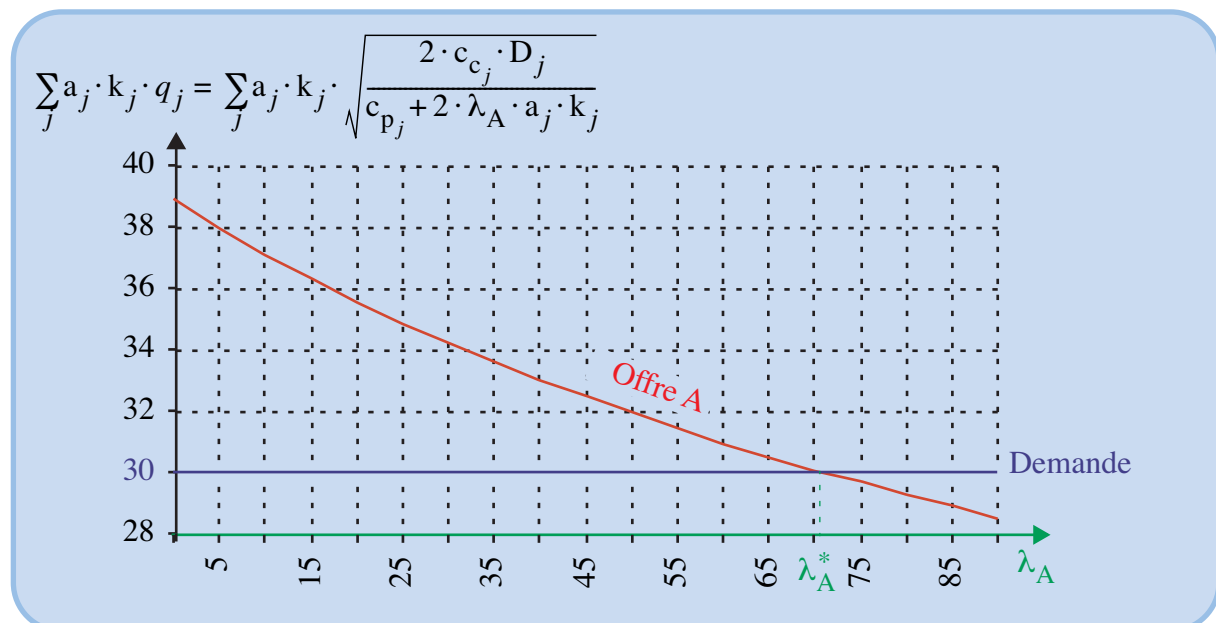
$$q_j^* = \sqrt{\frac{2 \cdot c_{c_j} \cdot D_j}{c_{p_j} + 2 \cdot \lambda_A \cdot a_j \cdot k_j}} \quad \text{relation 250}$$

Ce système de 4 équations à 4 inconnues (λ_A, q_1, q_2, q_3) n'a pas de solution explicite. Mais, d'après la **relation 250**, les quantités commandées q_j , et donc la demande totale du facteur rare $\sum_j a_j \cdot k_j \cdot q_j$ par les différents articles seront d'autant plus faibles que λ_A sera élevé. Autrement dit, la demande totale du facteur rare par les différents articles est une fonction monotone décroissante de λ_A . Il existe une valeur optimale λ_A^* qui égalise la demande du facteur rare par les différents articles et l'offre disponible. Toute valeur de λ_A supérieure à λ_A^* entraîne une demande inférieure à l'offre et toute valeur de λ_A inférieure à λ_A^* entraîne une demande supérieure à l'offre, comme l'illustre la **figure 208** qui s'appuie sur notre exemple numérique (les calculs sont effectués dans le **tableau 233, page 808**, et seront utilisés à nouveau dans l'interprétation économique de λ , **page 811**).

Table des matières

Index thématique

FIGURE 208
Mécanisme d'ajustement « offre – demande »



La recherche de la valeur optimale λ_A^* s'appuie sur cette propriété. L'algorithme de résolution utilisé (voir **figure 209, page 809**) comporte 3 grandes étapes de calcul :

- la première étape consiste à vérifier que la contrainte en est bien une, c'est-à-dire que la demande du facteur rare par les différents articles, en supposant que ceux-ci soient gérés indépendamment les uns des autres en l'absence de

TABLEAU 233

Incidence de λ sur le coût de gestion et la consommation de ressource rare

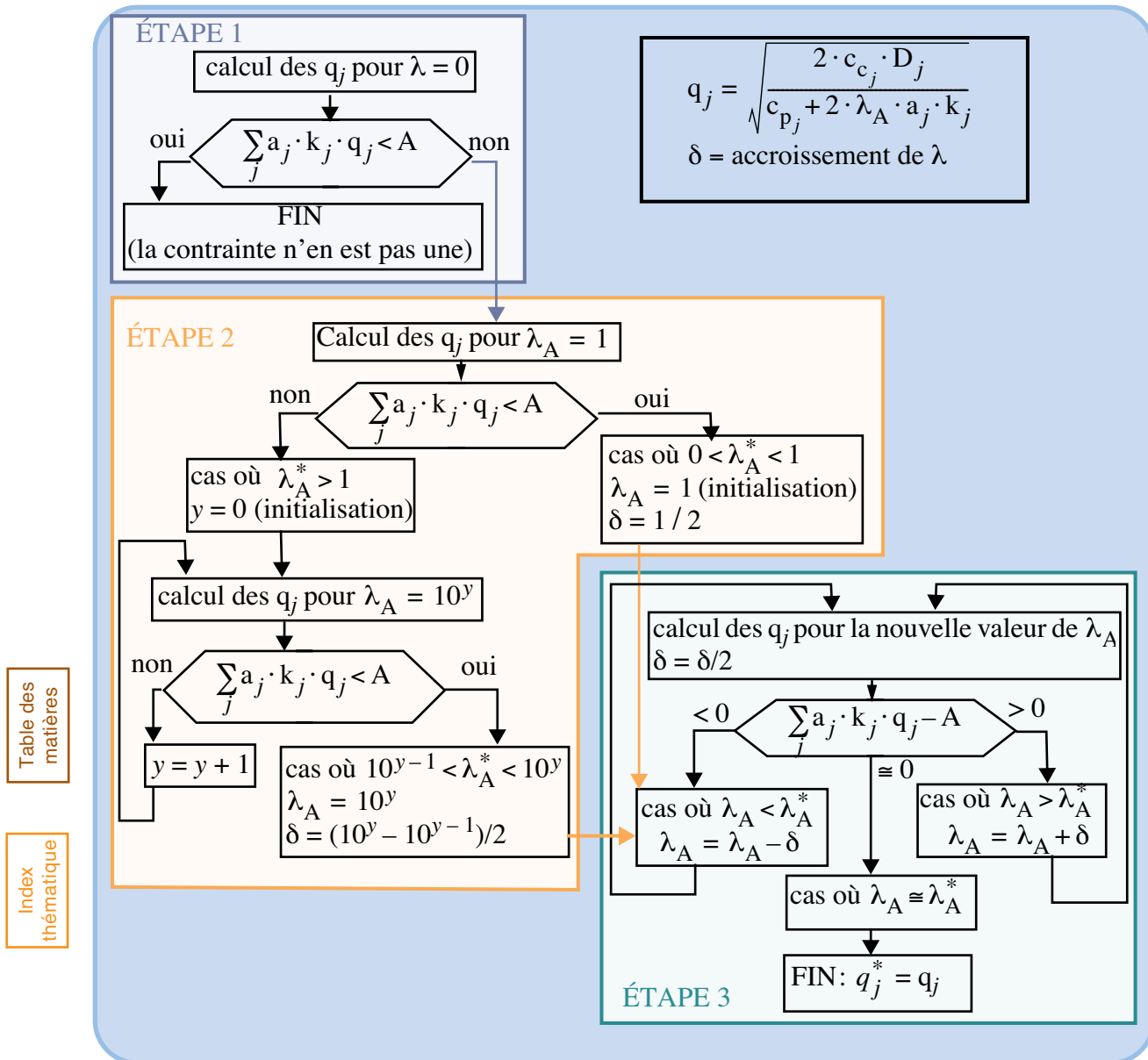
λ_A	Volume	Coût	λ_A	Volume	Coût	λ_A	Volume	Coût
300	20,06	11290	200	23,00	10566	100	27,87	9859
290	20,31	11218	190	23,37	10493	90	28,56	9794
280	20,56	11146	180	23,77	10421	80	29,31	9731
270	20,82	11074	170	24,18	10348	70	30,11	9670
260	21,10	11002	160	24,62	10276	60	31,00	9613
250	21,38	10929	150	25,08	10205	50	31,97	9559
240	21,68	10857	140	25,57	10134	40	33,05	9511
230	21,99	10784	130	26,09	10064	30	34,25	9469
220	22,31	10711	120	26,64	9994	20	35,60	9435
210	22,65	10638	110	27,24	9926	10	37,15	9412
						0	38,93	9403

- toute contrainte, est bien supérieure à la dotation disponible du facteur rare. Dans notre exemple, la contrainte est effective puisqu'une gestion indépendante des articles conduit à une demande de 38,9 pour une dotation de 30 m³;
- la deuxième étape consiste à trouver deux valeurs de λ_A qui «encadrent» la valeur optimale. Dans notre exemple numérique, ces deux valeurs sont 10 et 100;
 - la troisième étape consiste à trouver progressivement cette valeur λ_A^* , en modifiant à chaque itération l'une de ces bornes :
 - en remplaçant l'une d'entre elles par la moyenne arithmétique des bornes de l'itération précédente,
 - puis en examinant si, pour cette valeur de λ_A la dotation de facteur rare est :
 - excédentaire, auquel cas la valeur optimale de λ_A lui est inférieure et l'on retient comme deuxième borne, la borne inférieure de l'itération précédente,
 - ou déficitaire auquel cas la valeur optimale de λ_A lui est supérieure, et l'on retient comme deuxième borne, la borne supérieure de l'itération précédente.

Un tel algorithme est utilisable chaque fois que l'on cherche la valeur d'une variable x , telle que $f(x)$, fonction monotone de x , ait une valeur imposée (par exemple $f(x)$ peut être une fonction de répartition ou une transformée monotone d'une fonction de répartition, et x une valeur donnée d'une variable aléatoire, s'analysant comme un niveau de recombplètement, par exemple). Une utilisation de cet algorithme a déjà été faite au [chapitre XI](#) (voir [figure 192, page 758](#)) pour le cas de la détermination des politiques optimales de gestion calendaire de plusieurs articles sous contrainte d'utilisation simultanée d'une même ressource rare; dans ce cas, les variables de commande étaient des niveaux de recombplètement S_j , au lieu des quantités de commande q_i utilisées ici, et seul changeait le

FIGURE 209

Algorithme de détermination de la valeur optimale de λ



calcul de la consommation de la ressource rare, associée aux valeurs prises par les variables de commande pour une valeur donnée de λ_A .

I-2.3.11d) Solution numérique de l'exemple

L'application de l'algorithme proposé (voir [tableau 234 de la page 810](#)) permet de trouver rapidement la solution optimale, ici en 8 étapes de calcul pour une précision de 0,05 m³ du respect de la contrainte. Pour obtenir une solution très précise, davantage d'itérations sont nécessaires, mais la précision est économiquement illusoire, compte tenu du degré d'approximation des paramètres utilisés et inutile, compte tenu du caractère discret des valeurs prises par les q_j (un écart sur le volume de stockage de $\pm 0,05$ m³ représente 1 bouilloire électrique). Dans la colonne δ du [tableau 234](#) se trouve la valeur des δ ayant servi à calculer le λ de la ligne considérée.

TABLEAU 234
Application de l'algorithme de la figure 209

λ	δ	$\sum_j a_j \cdot k_j \cdot q_j$	$q_1 = \sqrt{\frac{2 \times 2400 \times 300}{6 + 2 \cdot 0,03 \cdot \lambda}}$	$q_2 = \sqrt{\frac{2 \times 1000 \times 300}{20 + 2 \times 0,036\lambda}}$	$q_3 = \sqrt{\frac{2 \times 5000 \times 300}{3 + 2 \times 0,018\lambda}}$
0,000	-	38,9323	490	173	1000
1,000	-	38,7412	487	173	994
10,000	-	37,1475	467	170	945
100,000	-	27,8747	346	149	674
55,000	45,000	31,4724	393	158	776
77,500	22,500	29,5015	368	153	720
66,250	11,250	30,4365	380	156	746
71,875	5,625	29,9574	374	154	733

Le coût minimal, pour la solution optimale $q_1 = 374$, $q_2 = 154$, $q_3 = 733$ (valeurs entières), est : $\left(300 \frac{2400}{q_1} + 6 \frac{374}{2}\right) + \left(300 \frac{1000}{q_2} + 20 \frac{154}{2}\right) + \left(300 \frac{5000}{q_3} + 3 \frac{733}{2}\right) = 9681,07$. Cette valeur est inférieure de 45,93 dollars liduriens à la solution brutale de l'abattement proportionnel du § I-2.3.11b, mais elle est supérieure (de 277,58 dollars) à la solution optimale obtenue sans contrainte de stockage.

TABLEAU 235

Analyse de la politique optimale de la **SUPERLAMBDA** pour son approvisionnement d'articles de cuisine sous contrainte non financière en univers certain



Politique optimale d'approvisionnement sous contrainte de capacité (possible : 30 ; utilisée : 29,958) - lambda : 71,875				
Conséquences physiques	bouilloires électriques	cocotte-minute	casseroles	
Quantité de commande	374	154	733	
Point de commande	167	69	347	
Nombre moyen annuel de commandes (et de cycles de réapprovisionnement)	6,417	6,494	6,821	
Intervalle moyen entre 2 commandes	44,9 jours	44,4 jours	42,2 jours	
Stock moyen détenu	187,00	77,00	366,50	
Taux moyen annuel de rotation du stock	12,83	12,99	13,64	
Consommation moyenne de la ressource	11,220	5,544	13,194	29,958
Conséquences financières	bouilloires électriques	cocotte-minute	casseroles	TOTAL
Dépense moyenne annuelle d'acquisition	72 000,00	100 000,00	75 000,00	247 000,00
Coût moyen annuel de commande	1 925,13	1 948,05	2 046,38	5 919,57
Coût moyen annuel de possession	1 122,00	1 540,00	1 099,50	3 761,50
Indicateur annuel de coût moyen de gestion (achat exclu)	3 047,13	3 488,05	3 145,88	9 681,07
Indicateur annuel de coût moyen de gestion (achat inclus)	75 047,13	103 488,05	78 145,88	256 681,07
Marge nette annuelle	20 952,87	26 511,95	21 854,12	69 318,93

I-2.3.11e) Interprétation économique de λ_A

Les coefficients $(k_j a_j)$ associés à λ_A dans la [relation 250 de la page 807](#) s'analysent dans notre exemple comme un encombrement moyen unitaire (en m^3) de l'article j considéré. Dans cette même formule, $k_j \cdot q_j \cdot \lambda_A$ est ajouté au coût c_{p_j} . Il s'ensuit que λ ne peut que s'analyser comme un coût associé à un volume de $1 m^3$. Pour interpréter λ , il faut faire appel aux résultats classiques de l'optimisation sous contrainte. Ils nous apprennent que $(-\lambda_A)$ s'analyse comme la dérivée de la fonction initiale que l'on cherche à optimiser (c'est-à-dire ici la fonction $\Sigma C(q_j)$ et non H) par rapport à la contrainte (c'est-à-dire ici la dotation limitée de facteur rare):

$$\frac{dC}{dA} = -\lambda_A = -71,875 \text{ avec } C = \sum_j C(q_j).$$

Un faible accroissement dA de la dotation du facteur rare, au voisinage de la dotation $A = 30 m^3$, se traduira par une variation de coût de $-\lambda_A dA = -71,875 \cdot dA$, c'est-à-dire une diminution de coût. En toute rigueur, le raisonnement n'est correct que pour des variations infinitésimales de la dotation de facteur rare, mais en première approximation on considère que λ reste valable pour des variations plus importantes. La qualité de cette approximation peut être même valable sur des variations plus importantes, comme on peut le vérifier dans le [tableau 233 de la page 808](#)). La [figure 210](#) illustre cette interprétation marginaliste de λ_A .

Table des matières

Index thématique

L'intérêt de cette interprétation économique est de donner une indication de rentabilité d'un investissement réalisé pour accroître la capacité de stockage: accroître la capacité de $1 m^3$ procure un échéancier (infini) d'économies de dépenses d'environ 71 dollars liduriens / an. Cet échéancier peut être ramené à une valeur ponctuelle grâce à la technique de l'actualisation (voir [chapitre XVII, § II-4, page 1168](#)). Si le coût d'opportunité i est correctement calculé, ce qui implique qu'il soit égal à la rentabilité, exprimée en dollars liduriens constants, de l'investissement le moins rentable réalisé au cours de l'année (voir [chapitre III, § III-1.2.2.2, page 206](#)), on peut calculer la valeur actualisée de cet échéancier d'écono-

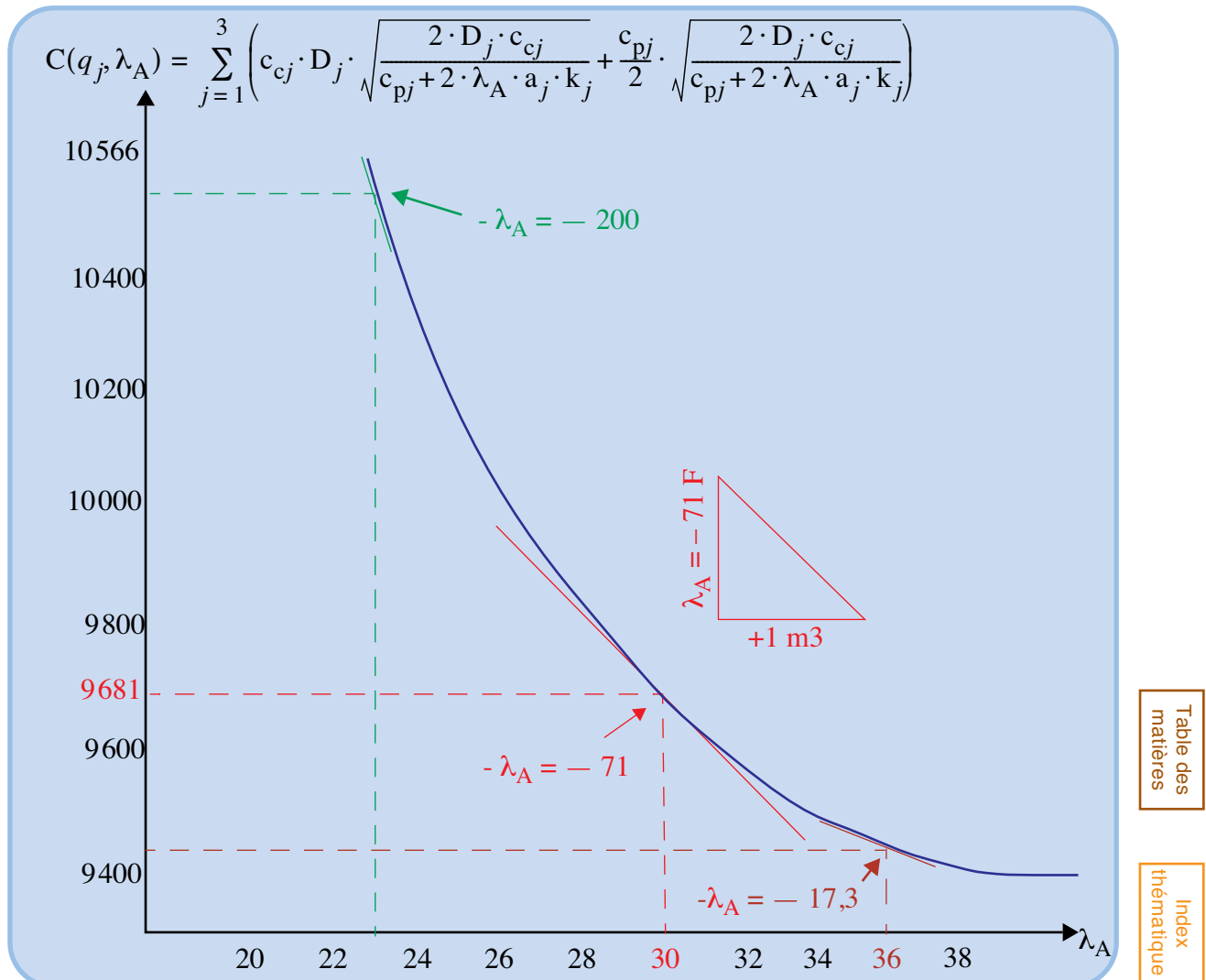
mies de dépenses comme étant égale à $\lambda_A \sum_{t=1}^{\infty} (1+i)^{-t} = \frac{\lambda_A}{i}$, c'est-à-dire dans

notre exemple $71 / 0,2 = 355$. Si le coût d'extension d'un m^3 de stockage est inférieur à 355 dollars liduriens, l'investissement peut être considéré comme rentable.

En réalité, pour calculer la rentabilité de l'extension de l'espace de stockage par rapport à la contrainte actuelle ($\Rightarrow 30 m^3$ et un coût de 9681,07 dollars / an), il convient de ne pas raisonner à la marge, mais, si l'on envisage de supprimer toute contrainte sur le stockage des articles de cuisine ($\Rightarrow 38,93 m^3$ et le coût minimal de 9403,49 dollars / an), de raisonner sur un accroissement d'environ $9 m^3$ procurant une économie de dépenses actualisées de $278 / 0,2 = 1390$ dollars liduriens qui s'analyse comme une rentabilité moyenne.

Le problème est en réalité plus complexe car ces articles de cuisine rentrent en concurrence avec d'autres articles dans notre supermarché dans le partage des ressources rares. L'étude des différentes valeurs de λ associées aux différents

FIGURE 210
Interprétation marginaliste de λ



rayons du supermarché permet tout d'abord de déceler des anomalies choquantes d'allocation d'espace, puisque les rayons ayant les plus fortes valeurs de λ sont ceux pour lesquels le contingentement coûte le plus cher à l'entreprise. Cette étude permet également un premier classement pour connaître les rayons qu'il faut privilégier dans l'investissement en tenant compte du fait que si la rentabilité moyenne est inférieure à la rentabilité marginale (voir supra), le groupe des investissements jugés les plus rentables (sur le critère de λ) à toutes chances de constituer un « noyau stable » (des permutations de classement peuvent se produire dans ce groupe au niveau des rentabilités moyennes, sans modifier profondément le groupe initialement choisi à partir de λ).

I-2.3.1.2 Implication de l'existence d'une ressource rare financière (valeur limitée des stocks moyens détenus) sur la détermination de politique de « régime de croisière »

L'analyse que l'on va présenter s'applique à tous les cas de figure où les consommations d'une ressource rare sont proportionnelles aux coûts d'acquisition. Supposons que le montant moyen des articles de cuisine en stock soit limité à $B = 20000$ dollars liduriens. Une solution explicite au problème posé peut alors

être trouvée, rendant inutile l'utilisation de l'algorithme de la page 809. Mais, pour qu'il en soit ainsi, 2 conditions doivent nécessairement être remplies.

- Le coût de possession c_{p_j} de l'article j utilisé dans le calcul de l'indicateur de coût moyen annuel de gestion doit être proportionnel à son coût d'acquisition c_{u_j} , ce qui ramène en pratique le coût de possession à un coût d'opportunité, le taux d'intérêt utilisé sera le taux i : $c_{p_j} = i \cdot c_{u_j}$.
- La consommation unitaire du facteur rare par l'article j doit non seulement être proportionnelle à la quantité livrée q_j qui, à l'évidence, joue proportionnellement sur la valeur des stocks détenus, mais également être proportionnelle au coût d'acquisition unitaire (ce qui est le cas ici). On notera h ce second facteur de proportionnalité. L'utilisation globale de la ressource rare par les articles peut alors s'écrire $\sum_j h \cdot c_{u_j} \cdot q_j$. Le problème qui reste alors à résoudre est celui de la détermination de ce coefficient h . Quels que soient la fréquence des livraisons et leurs coûts d'acquisition, l'évolution au cours du temps de la valeur des stocks détenus peut être visualisée par un graphique du type de celui de la figure 207, page 805. La variation de la valeur globale des stocks détenus sera d'autant plus forte que le nombre d'articles considérés est faible. À la limite, pour un très grand nombre d'articles de valeurs voisines, on observera une compensation quasi intégrale entre la valeur des articles qui viennent d'être livrés et celle de ceux en passe de l'être, ce qui conduit à donner au facteur de proportionnalité h une valeur proche de 0,5. La valeur de ce facteur h sera donc comprise entre 0,5 («compensation» intégrale) et 1 (cas limite, très improbable, d'articles ayant tous systématiquement les mêmes dates de livraison, impliquant donc une absence totale de «compensation»).

$$\sum_j h \cdot c_{u_j} \cdot q_j < B \quad \text{relation 251}$$

Reprenons notre exemple limité à l'étude de 3 articles, et supposons que $i = 0,2$, ce qui donne, pour être cohérent avec les coûts de possession utilisés, $c_{u_j} = c_{p_j}/i$ d'où $c_{u_1} = 30$ dollars / article, $c_{u_2} = 100$ dollars / article et $c_{u_3} = 15$ dollars / article. On prendra, arbitrairement, $h = 0,6$ pour tous les articles. Le problème posé est alors la recherche du minimum de la fonction de coût C suivante :

$$C = \left[300 \cdot \frac{2400}{q_1} + 6 \cdot \frac{q_1}{2} \right] + \left[300 \cdot \frac{1000}{q_2} + 20 \cdot \frac{q_2}{2} \right] + \left[300 \cdot \frac{5000}{q_3} + 3 \cdot \frac{q_3}{2} \right]$$

sous contrainte: $30 \cdot 0,6 \cdot q_1 + 100 \cdot 0,6 \cdot q_2 + 15 \cdot 0,6 \cdot q_3 \leq 20000$

Le problème d'optimum libre équivaut à ce problème d'optimisation sous contrainte, introduit la fonction H (Lagrangien) qui, sous sa forme littérale générale s'écrit: $H = \sum_j \left(\frac{c_{c_j} \cdot D_j}{q_j} + \frac{q_j}{2} \cdot i \cdot c_{u_j} \right) + \lambda_B (\sum_j h \cdot c_{u_j} \cdot q_j - B)$ et dont la dérivée

par rapport à q_j , nulle à l'optimum, est:

$$\frac{\partial H}{\partial q_j} = 0 = -\frac{c_{c_j} \cdot D_j}{q_j^2} + \frac{i \cdot c_{u_j}}{2} + \lambda_B \cdot h \cdot c_{u_j} = -\frac{c_{c_j} \cdot D_j}{q_j^2} + c_{u_j} \left(\frac{i}{2} + \lambda_B \cdot h \right)$$

D'où la **relation 252**:

$$q_j^* = \frac{1}{\sqrt{i + 2 \cdot \lambda_B \cdot h}} \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot c_{c_j} \cdot D_j}{c_{u_j}}} \quad \text{relation 252}$$

En remplaçant les q_j par leurs valeurs optimales dans la dérivée de H par rapport à λ , nulle à l'optimum ($\frac{\partial H}{\partial \lambda_B} = 0 = \sum_j [h \cdot c_{u_j} \cdot q_j - B]$), on obtient:

$$\sum_j \left[h \cdot c_{u_j} \cdot \frac{1}{\sqrt{i + 2 \cdot \lambda_B \cdot h}} \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot c_{c_j} \cdot D_j}{c_{u_j}}} \right] = B$$

$$\frac{h}{\sqrt{i + 2 \cdot \lambda_B \cdot h}} \sum_j \left[c_{u_j} \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot c_{c_j} \cdot D_j}{c_{u_j}}} \right] = \frac{h}{\sqrt{i + 2 \cdot \lambda_B \cdot h}} \sum_j \sqrt{2 \cdot c_{c_j} \cdot D_j \cdot c_{u_j}} = B$$

d'où $i + 2 \cdot \lambda_B \cdot h = \left(\frac{h}{B} \right)^2 \left[\sum_j \sqrt{2 \cdot c_{c_j} \cdot D_j \cdot c_{u_j}} \right]^2$ et:

$$\lambda_B = \frac{h}{2 \cdot B^2} \left[\sum_j \sqrt{2 \cdot c_{c_j} \cdot D_j \cdot c_{u_j}} \right]^2 - \frac{i}{2 \cdot h} \quad \text{relation 253}$$

Il suffit donc de calculer dans un premier temps λ , à l'aide de la **relation 253**, puis dans un second temps d'utiliser la **relation 252** en remplaçant λ par la valeur trouvée. Dans notre exemple:

$$\lambda = \frac{0,6 \{ \sqrt{2 \times 2400 \times 300 \times 30} + \sqrt{2 \times 1000 \times 300 \times 100} + \sqrt{2 \times 5000 \times 300 \times 5} \}^2}{2 \times 20000^2}$$

$$= \frac{0,2}{2 \times 0,6} = 0,16493$$

$$q_1 = \frac{1}{\sqrt{0,2 + 2 \times 0,6 \times 0,16493}} \sqrt{\frac{2 \times 2400 \times 300}{30}} \cong 347$$

$$q_2 = \frac{1}{\sqrt{0,2 + 2 \times 0,6 \times 0,16493}} \sqrt{\frac{2 \times 1000 \times 300}{100}} \cong 123$$

$$q_3 = \frac{1}{\sqrt{0,2 + 2 \times 0,6 \times 0,16493}} \sqrt{\frac{2 \times 5000 \times 300}{15}} \cong 709$$

Les conséquences de cette solution sont présentées dans le **tableau 236**. On peut y vérifier que la «dotation budgétaire» est saturée, mais les valeurs optimales étant entières, la dotation budgétaire ne peut pas être exactement saturée ($0,6 \times (347 \times 20 + 123 \times 100 + 709 \times 15) = 20007 \cong 20000$).



TABLEAU 236
Analyse de la politique optimale de la SUPERLAMBDA pour son approvisionnement d'articles de cuisine sous contrainte financière en univers certain

Politique optimale d'approvisionnement sous contrainte de valeur moyenne de stock (possible : 20000 ; utilisée : 20007) ; lambda : 0,164929				
Conséquences physiques	bouilloires électriques	cocottes-minute	casseroles	
Quantité de commande	347	123	709	
Point de commande	167	69	347	
Nombre moyen annuel de commandes (et de cycles de réapprovisionnement)	6,916	8,130	7,052	
Intervalle moyen entre 2 commandes	41,6 jours	35,4 jours	40,8 jours	
Stock moyen détenu	173,50	61,50	354,50	
Taux moyen annuel de rotation du stock	13,83	16,26	14,10	
Consommation moyenne de la ressource	6 246,00	7 380,00	6 381,00	20007,00
Conséquences financières	bouilloires électriques	cocottes-minute	casseroles	TOTAL
Dépense moyenne annuelle d'acquisition	72 000,00	100 000,00	75 000,00	247 000,00
Coût moyen annuel de commande	2 074,93	2 439,02	2 115,66	6 629,61
Coût moyen annuel de possession	1 041,00	1 230,00	1 063,50	3 334,50
Indicateur annuel de coût moyen de gestion (achat exclu)	3 115,93	3 669,02	3 179,16	9 964,11
Indicateur annuel de coût moyen de gestion (achat inclus)	75 115,93	103 669,02	78 179,16	256 964,11
Marge nette annuelle	20 884,07	26 330,98	21 820,84	69 035,89

Table des matières

Index thématique

I-2.3.1.3 Implication de l'utilisation commune et simultanée d'une même ressource rare non financière et d'une même ressource rare non financière «en régime de croisière»

Le plus souvent, la solution optimale trouvée avec l'une des contraintes (par exemple, la contrainte de stockage) respecte l'autre contrainte (c'est-à-dire la contrainte budgétaire, dans l'exemple retenu). Il convient donc de commencer par tester cette possibilité, étant entendu que dans le cas où les deux solutions sont possibles, on retiendra celle qui maximise la marge. On examinera immédiatement la solution analytique qui est une généralisation immédiate des approches développées précédemment.

Le problème posé est donc celui de la minimisation de la somme des coûts de gestion (donnée par la relation 248 de la page 806):

$$\sum_j C_j(q_j) = \sum_j \left[c_{c_j} \cdot \frac{D_j}{q_j} + c_{p_j} \cdot \frac{q_j}{2} \right] \quad \text{relation 248}$$

sous deux contraintes (relation 248, page 806, et relation 251, page 813) :

$$\sum_j a_j \cdot k_j \cdot q_j \leq A \quad \text{relation 249}$$

$$\sum_j h \cdot c_{u_j} \cdot q_j < B \quad \text{relation 251}$$

Le problème d'optimum libre équivalent à ce problème d'optimisation sous contrainte, introduit la fonction H (Lagrangien) qui, sous sa forme littérale générale s'écrit :

$$H = \sum_j \left(\frac{c_{c_j} \cdot D_j}{q_j} + \frac{q_j}{2} \cdot i \cdot c_{u_j} \right) + \lambda_A (\sum_j a_j \cdot k_j \cdot q_j - A) + \lambda_B (\sum_j h \cdot c_{u_j} \cdot q_j - B)$$

dont la dérivée par rapport à q_j , nulle à l'optimum, est :

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial q_j} = 0 &= -\frac{c_{c_j} \cdot D_j}{q_j^2} + \frac{i \cdot c_{u_j}}{2} + \lambda_A \cdot a_j \cdot k_j + \lambda_B \cdot h \cdot c_{u_j} \\ &= -\frac{c_{c_j} \cdot D_j}{q_j^2} + \lambda_A \cdot a_j \cdot k_j + c_{u_j} \left(\frac{i}{2} + \lambda_B \cdot h \right) \end{aligned}$$

D'où l'on tire

$$q_j^* = \sqrt{\frac{2 \cdot c_{c_j} \cdot D_j}{2\lambda_A \cdot a_j \cdot k_j + c_{u_j}(i + 2\lambda_B \cdot h)}} \quad \text{relation 254}$$

étant entendu que l'on doit avoir saturation des contraintes :

$$\sum_j \left[a_j \cdot k_j \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot c_{c_j} \cdot D_j}{2\lambda_A \cdot a_j \cdot k_j + c_{u_j}(i + 2\lambda_B \cdot h)}} \right] = A \quad \text{relation 255}$$

$$\sum_j \left[h \cdot c_{u_j} \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot c_{c_j} \cdot D_j}{2\lambda_A \cdot a_j \cdot k_j + c_{u_j}(i + 2\lambda_B \cdot h)}} \right] = B \quad \text{relation 256}$$

Numériquement, le problème est plus compliqué à résoudre car les deux consommations de ressources rares varient en sens inverse de λ_A et λ_B . Dans l'optique introductive retenue ici nous ne traiterons pas la résolution numérique de ce cas de figure, sachant que son intérêt opérationnel est limité par la remarque introductive de ce paragraphe § I-2.3.1.3.

I-2.3.1.4 Prise en compte de contraintes dans la détermination de l'approvisionnement optimal lors d'une hausse tarifaire

Il est rare qu'une hausse tarifaire n'affecte qu'un seul article. Le plus souvent, un fournisseur relève simultanément les tarifs d'un ensemble conséquent de références, voire de la totalité de ses références. Lorsqu'il en est ainsi, l'application de la [relation 231 de la page 785](#) (stock nul à la livraison) ou de la [relation 236 de la page 787](#) (stock non nul à la livraison) peut conduire à un volume de marchandises livrées inacceptable et / ou à une facture rédhitoire. La prise en compte de contraintes non financières et / ou financière modifie alors un peu les résultats analytiques trouvés. On commencera par analyser la prise en compte d'une ressource non financière (§ I-2.3.14a), la prise en compte d'une ressource financière constituant un cas particulier (§ I-2.3.14b, page 818), avant d'aborder la prise en compte simultanée des deux contraintes¹ (§ I-2.3.14c, page 820).

I-2.3.14a) *Prise en compte de la contrainte d'une ressource non financière en cas de hausse tarifaire*

Reprenons l'exemple numérique du paragraphe précédent et supposons qu'une hausse de 10 % soit annoncée et qu'au moment le plus tardif pour passer commande tout en bénéficiant des prix actuels, il soit certain que les stocks ne seront pas nuls à la livraison. Nous nous ramenons délibérément au cas général abordé au § I-2.1.1.2, page 786, qui est le seul réaliste dans le cadre d'une hausse simultanée portant sur plusieurs articles. Le tableau 237 regroupe les données du problème posé à l'exception du taux d'opportunité utilisé pour calculer le coût de possession ($i = 20\%$), du volume maximal alloué à ces articles à la livraison (c'est-à-dire pour le cumul des stocks disponibles immédiatement avant livraison et des quantités livrées), que l'on supposera être égal à 115 m^3 .

TABLEAU 237

Données du problème de prise en compte simultanée de la hausse tarifaire et de contrainte de stockage et / ou de montant de la commande

Article j	Demande annuelle D_j	Coût d'acquisition		Coût de commande de c_{c_j}	Encombrement unitaire a_j	Stock à la passation de la commande
		Actuel c_{u1j}	Futur c_{u2j}			
1 - Bouilloire électrique	2400	30	33	300	0,05	250
2 - Cocottes minute	1000	100	110	300	0,06	100
3 - Casserole	5000	15	16,5	300	0,03	400

Table des matières

Index thématique

La détermination de la solution analytique optimale est assez aisée: on cherche à maximiser l'économie totale réalisée sur tous les articles en préférant la stratégie d'anticipation à celle de la hausse subie (la substitution d'un coût de commande groupée c_c aux coûts «individuels» de commande c_{c_j} ne changeant rien au problème). Il faut donc adapter la relation 235 de la page 787 en effectuant une sommation sur les articles j , ce qui conduit à chercher à maximiser la fonction définie par la relation 257.

$$\sum_j [C_2(q_j) - C_1(q_j)] = \sum_j \left[\frac{q_j}{D_j} M_j + i \cdot c_{u1j} \cdot \frac{R_{v_j}^2}{2 \cdot D_j} \right] - \sum_j \left[q_j \cdot c_{u1j} + c_{c_j} + i \cdot c_{u1j} \cdot \frac{(R_{v_j} + q_j)^2}{2 \cdot D_j} \right] \tag{relation 257}$$

sous contrainte de stockage:

$$\sum_j a_j \cdot (R_{v_j} + q_j) \leq A \tag{relation 258}$$

Il faut donc chercher à optimiser le Lagrangien H suivant:

1. *Note de la page précédente.* En l'absence de hausse tarifaire, une solution analytique peut être obtenue lorsque l'on souhaite une prise en compte simultanée de ces deux types de contraintes. Sa mise en œuvre en univers certain est assez simple, mais il n'en est pas de même en univers aléatoire. C'est la raison pour laquelle ce cas n'est pas traité ici, d'autant plus qu'en pratique, il suffit de comparer les deux solutions obtenues dans la formulation ne retenant que l'une des deux contraintes et de retenir celle qui respecte l'autre contrainte (si les deux solutions sont acceptables, on retiendra celle qui maximise la marge).

$$H = \sum_j \left\{ \left[\frac{q_j}{D_j} M_j + i \cdot c_{u1j} \cdot \frac{R_{v_j}^2}{2 \cdot D_j} \right] - \left[q_j \cdot c_{u1j} + c_{c_j} + i \cdot c_{u1j} \cdot \frac{(R_{v_j} + q_j)^2}{2 \cdot D_j} \right] \right\} - \lambda_A \left(\sum_j a_j \cdot (R_{v_j} + q_j) - A \right)$$

dans lequel un signe négatif a été affecté au multiplicateur de Lagrange λ_A parce qu'il s'agit d'un problème de maximisation (et non de minimisation) et que l'on souhaite garder la même interprétation de λ_A .

La dérivée partielle de H par rapport aux quantités q_j conduit alors à la [relation 259](#) qui modifie la [relation 236 de la page 787](#) en amputant la commande optimale calculée en l'absence de contrainte financière par la quantité $\{D_j a_j \lambda_A\} / \{i c_{u1j}\}$.

$$q_j^* = \left\{ \frac{M_j}{i c_{u1j}} - \frac{D_j}{i} - R_{v_j} \right\} - \frac{D_j a_j \lambda_A^*}{i c_{u1j}} \quad \text{relation 259}$$

Par ailleurs, la dérivée partielle de H par rapport à λ_A conduit à une saturation de la contrainte.

$$\sum_j a_j (q_j^* + R_{v_j}) = A \quad \text{relation 260}$$

En remplaçant, dans la [relation 260](#), les q_j^* par leurs valeurs optimales définies par la [relation 259](#) $\left(\sum_j a_j \left\{ \left[\frac{M_j}{i c_{u1j}} - \frac{D_j}{i} - R_{v_j} \right] - \frac{D_j a_j \lambda_A^*}{i c_{u1j}} \right\} + R_{v_j} \right) = A$, on en déduit la valeur optimale λ^* prise par λ .

$$\lambda_A^* = \frac{\sum_j a_j \{M_j / c_{u1j} - D_j - R_{v_j}\} - iA}{\sum_j a_j^2 D_j / c_{u1j}} \quad \text{relation 261}$$

Numériquement, il faut d'abord appliquer la [relation 261](#) pour déterminer λ_A^* puis utiliser la [relation 259](#) pour calculer les q_j^* . Dans notre exemple, la mise en place des nouveaux tarifs conduit aux nouvelles politiques optimales de «régime de croisière» du [tableau 238](#). On notera que cette politique optimale se traduit par une commande d'un montant égal à 93 795 dollars liduriens.

I-2.3.14b) Prise en compte de la contrainte d'une ressource financière en cas de hausse tarifaire

Dans ce cas, la consommation unitaire du facteur rare a_j n'est autre que le coût unitaire actuel d'acquisition; par ailleurs, cette contrainte porte sur les quantités achetées et non sur celles détenues après livraison. Dans ces conditions, la fonction à optimiser reste celle de la [relation 257 de la page 817](#) et il faut remplacer la contrainte définie par la [relation 258, page 817](#), par celle de la [relation 262](#).

$$\sum_j c_{u1j} \cdot q_j^* \leq B \quad \text{relation 262}$$



TABLEAU 238
Analyse de la politique optimale de la SUPERLAMBDA pour son approvisionnement d'articles de cuisine sous contrainte de stockage en univers certain avec hausse tarifaire

Politique optimale d'approvisionnement après hausse tarifaire des		bouilloires électriques	cocottes-minute	casseroles	
Conséquences physiques					
Quantité de commande		467	165	953	
Point de commande		167	69	347	
Nombre moyen annuel de commandes (et de cycles de réapprovisionnement)		5,14	6,06	5,25	
Intervalle moyen entre 2 commandes		56 jours	47,5 jours	54,9 jours	
Stock moyen détenu		233,50	82,50	476,50	
Taux moyen annuel de rotation du stock		10,28	12,12	10,49	
Conséquences financières					TOTAL
Dépense moyenne d'acquisition		79 200,00	110 000,00	82 500,00	271 700,00
Coût moyen de commande		1 541,76	1 818,18	1 573,98	4 933,91
Coût moyen de possession		1 541,10	1 815,00	1 572,45	4 928,55
Indicateur de coût moyen de gestion (achat exclu)		3 082,86	3 633,18	3 146,43	9 862,46
Indicateur de coût moyen de gestion (achat inclus)		82 282,86	113 633,18	85 646,43	281 562,46
Marge nette		13 717,14	16 366,82	14 353,57	44 437,54
Approvisionnement optimal hors contrainte d'espace					
Quantité à commander		1631	651	3496	
Stock disponible à la commande		250	100	400	
Stock disponible avant la prochaine livraison		83	31	53	
Stock disponible après la prochaine livraison		1714	682	3549	
Consommation d'espace		85,7	40,92	106,47	233,09
Montant de la commande		48 930,00	65 100,00	52 440,00	166 470,00
La contrainte d'espace joue (espace disponible : 115 ; espace demandé : 233,09) $\lambda_B = 44,0501$					
Approvisionnement optimal sous contrainte d'espace					
Commande exceptionnelle		750	519	1293	
Stock disponible à la commande		250	100	400	
Stock disponible avant la prochaine livraison		83	31	53	
Stock disponible après la prochaine livraison		833	550	1346	
Consommation d'espace		41,65	33	40,38	115,03
Montant de la commande		22 500,00	51 900,00	19 395,00	93 795,00
Economie permise par la commande exceptionnelle		2 777,44	6 633,98	2 272,84	11 684,26

Table des matières

Index thématique

L'adaptation des relations 259 et 261 conduit aux relations 263 et 264 :

$$q_j^* = \left\{ \frac{M_j}{i c_{u_j}} - \frac{D_j}{i} - R_{vj} \right\} - \frac{D_j}{i} \lambda_B^* \quad \text{relation 263}$$

$$\lambda_B^* = \frac{\sum_j \{M_j - c_{u1j}D_j - ic_{u1j}R_{vj}\} - iB}{\sum_j c_{u1j}D_j} \quad \text{relation 264}$$

Reprenons notre exemple numérique, en supposant que la « dotation budgétaire » A allouée par les services financiers à la commande à passer est limitée à 90000 dollars liduriens. L'application de ces relations 263 et 264 conduit à la solution optimale proposée dans le tableau 239. On notera que cette solution conduit à un volume stocké après livraison, égal à 130,99 m³.

I-2.3.14c) Prise en compte simultanée d'une contrainte financière et d'une contrainte non financière en cas de hausse tarifaire

Dans ce cas, on cherche toujours à optimiser la fonction décrite par la relation 257 de la page 817, mais en faisant intervenir simultanément les contraintes définies par la relation 258, page 817, et la relation 262. Le plus souvent, la solution optimale trouvée avec l'une des contraintes (par exemple, la contrainte de stockage) respecte l'autre contrainte (c'est-à-dire la contrainte budgétaire, dans l'exemple retenu). Il convient donc de commencer par tester cette possibilité, étant entendu que, dans le cas où les deux solutions sont possibles, on retiendra celle qui maximise la marge. Dans les exemples numériques proposés, il n'en est pas ainsi.

Dans ce cas de figure, il faut partir du Lagrangien construit à partir des relations 257, 258 et 262.

$$H = \sum_j \left\{ \left(\frac{q_j}{D_j} M_j + i \cdot c_{u1j} \cdot \frac{R_{vj}^2}{2 \cdot D_j} \right) - \left(q_j \cdot c_{u1j} + c_{c_j} + i \cdot c_{u1j} \cdot \frac{(R_{vj} + q_j)^2}{2 \cdot D_j} \right) \right\} \\ - \lambda_A \left\{ \sum_j a_j \cdot (R_{vj} + q_j) - A \right\} - \lambda_B \left\{ \sum_j c_{u1j} \cdot q_j - B \right\}$$

On en déduit immédiatement la solution optimale pour les quantités à acheter pour contrer économiquement la hausse en tenant compte des contraintes imposées. Cette solution de la relation 265 combine celles trouvées dans les relations 259 (page 818) et 263 (page 819) et constitue une généralisation, puisqu'obligatoirement $\lambda_A^* = 0$ si la contrainte de stockage ne joue pas et $\lambda_B^* = 0$ si la contrainte budgétaire ne joue pas.

$$q_j^* = \left\{ \frac{M_j}{ic_{u1j}} - \frac{D_j}{i} - R_{vj} \right\} - \frac{D_j a_j}{ic_{u1j}} \lambda_A^* - \frac{D_j}{i} \lambda_B^* \quad \text{relation 265}$$

Comme précédemment, la détermination des multiplicateurs de Lagrange s'obtient en remplaçant, dans la relation 260 de la page 818 et dans la relation 262 de la page 818, les q_j^* par leurs valeurs optimales définies par la relation 265. On obtient alors le système suivant de 2 équations à 2 inconnues (λ_A^* et λ_B^*):



TABLEAU 239

Analyse de la politique optimale de **SUPERLAMBDA** pour son approvisionnement d'articles de cuisine sous contrainte financière en univers certain avec hausse tarifaire

Politique optimale d'approvisionnement après hausse	bouilloires électriques	cocottes-minute	casseroles	
Conséquences physiques				
Quantité de commande	467	165	953	
Point de commande	167	69	347	
Nombre moyen annuel de commandes (et de cycles de réapprovisionnement)	5,14	6,06	5,25	
Intervalle moyen entre 2 commandes	56 jours	47,5 jours	54,9 jours	
Stock moyen détenu	233,50	82,50	476,50	
Taux moyen annuel de rotation du stock	10,28	12,12	10,49	
Conséquences financières				TOTAL
Dépense moyenne d'acquisition	79 200,00	110 000,00	82 500,00	271 700,00
Coût moyen de commande	1 541,76	1 818,18	1 573,98	4 933,91
Coût moyen de possession	1 541,10	1 815,00	1 572,45	4 928,55
Indicateur de coût moyen de gestion (achat exclu)	3 082,86	3 633,18	3 146,43	9 862,46
Indicateur de coût moyen de gestion (achat inclus)	82 282,86	113 633,18	85 646,43	281 562,46
Marge nette	13 717,14	16 366,82	14 353,57	44 437,54
Approvisionnement optimal hors contrainte de budget				
Quantité à commander	1631	651	3496	
Stock disponible à la commande	250	100	400	
Stock disponible avant la prochaine livraison	83	31	53	
Stock disponible après la prochaine livraison	1714	682	3549	
Montant de la commande	48 930,00	65 100,00	52 440,00	166 470,00
<i>La contrainte de budget joue (budget disponible : 90000 ; budget demandé : 166470) - Lambda = 0,0619</i>				
Approvisionnement optimal sous contrainte de budget				
Commande exceptionnelle	888	342	1949	
Stock disponible à la commande	250	100	400	
Stock disponible avant la prochaine livraison	83	31	53	
Stock disponible après la prochaine livraison	971	373	2002	
Consommation d'espace				
Montant de la commande	26 640,00	34 200,00	29 235,00	90 075,00
Economie permise par la commande exceptionnelle	3 316,84	4 302,59	3 450,02	11 069,46

Table des matières

Index thématique

$$\left| \begin{array}{l} \sum_j a_j \left[\left(\left\{ \frac{M_j}{ic_{u_1j}} - \frac{D_j}{i} - R_{v_j} \right\} - \frac{D_j a_j \lambda_A^*}{ic_{u_1j}} - \frac{D_j \lambda_B^*}{i} \right) + R_{v_j} \right] = A \\ \sum_j c_{u_1j} \left[\left\{ \frac{M_j}{ic_{u_1j}} - \frac{D_j}{i} - R_{v_j} \right\} - \frac{D_j a_j \lambda_A^*}{ic_{u_1j}} - \frac{D_j \lambda_B^*}{i} \right] = B \end{array} \right.$$

La solution analytique de ce système est donnée par les relations 266 et 267.

$$\lambda_A^* = \frac{\left\{ \sum_j \frac{c_{u_1j} D_j}{i} \right\} \left\{ \sum_j a_j \left[\frac{M_j}{ic_{u_1j}} - \frac{D_j}{i} \right] - A \right\} - \left\{ \sum_j \frac{a_j D_j}{i} \right\} \left\{ \sum_j c_{u_1j} \left[\frac{M_j}{ic_{u_1j}} - \frac{D_j}{i} - R_{v_j} \right] - B \right\}}{\left\{ \sum_j \frac{D_j a_j^2}{ic_{u_1j}} \right\} \left\{ \sum_j \frac{c_{u_1j} D_j}{i} \right\} - \left\{ \sum_j \frac{a_j D_j}{i} \right\}^2}$$

relation 266

$$\lambda_B^* = \frac{\left\{ \sum_j \frac{D_j a_j^2}{ic_{u_1j}} \right\} \left\{ \sum_j c_{u_1j} \left[\frac{M_j}{ic_{u_1j}} - \frac{D_j}{i} - R_{v_j} \right] - B \right\} - \left\{ \sum_j \frac{a_j D_j}{i} \right\} \left\{ \sum_j a_j \left[\frac{M_j}{ic_{u_1j}} - \frac{D_j}{i} \right] - A \right\}}{\left\{ \sum_j \frac{D_j a_j^2}{ic_{u_1j}} \right\} \left\{ \sum_j \frac{c_{u_1j} D_j}{i} \right\} - \left\{ \sum_j \frac{a_j D_j}{i} \right\}^2}$$

relation 267

La prise en compte simultanée de la contrainte de stockage après livraison (115 m³) et de la contrainte du montant maximal de la commande (90000 dollars liduriens) conduit alors à préconiser la politique optimale décrite dans le [tableau 240](#).

I-2.3.2 Utilisation commune et successive d'une même ressource rare

I-2.3.2.1 Le problème posé

Il s'agit ici d'une généralisation à plusieurs articles du cas de l'approvisionnement continu étudié au § I-2.2, page 799, qui se pose classiquement en approvisionnement interne à l'entreprise, lorsque ces articles ne peuvent pas être produits simultanément, parce qu'ils utilisent de façon exclusive les mêmes équipements.

I-2.3.2.2 Exemple introductif

Reprenons l'exemple numérique de la société **Cuisor**, introduit au § I-2.2.2, page 800, et supposons que le même atelier fabrique les bouilloires électriques, les cocottes-minute et les casseroles (on ne retient toujours qu'un seul modèle, pour alléger l'exemple numérique). Pour chacun de ces articles j (j variant de 1 à 3), la demande annuelle D_j est supposée certaine et uniforme, c'est-à-dire pour fixer les idées, que chaque semaine la demande hebdomadaire à satisfaire est la même: $D_j/48$, s'il y a 48 semaines ouvrables dans l'année. Par ailleurs, les capacités maximales de production annuelles O_j sont définies à partir d'une utilisation exclusive de l'atelier à la fabrication de l'article j . Cette capacité maximale de production tient compte du temps consacré à la maintenance. La production hebdomadaire est également constante et égale à $O_j/48$. Les données numériques que nous retiendrons sont les suivantes:

Vérifions tout d'abord qu'il est techniquement possible de produire ces 3 articles. Si le temps de mise au point du lancement d'une nouvelle série est négligeable, il suffit alors que l'utilisation requise de l'atelier soit inférieure à 100% de sa capacité productive. Cette dernière notion sera mesurée en temps d'utilisation des équipements, seule unité de mesure commune aux 3 productions. Une production de 50000 bouilloires électriques entraîne une utilisation de la capacité



TABLEAU 240
Analyse de la politique optimale de la **SUPERLAMBDA** pour son approvisionnement d'articles de cuisine sous contrainte de stockage et contrainte budgétaire en univers certain avec hausse tarifaire

Politique optimale d'approvisionnement après hausse tarifaire de		bouilloires électriques	cocottes-minute	casseroles	
Conséquences physiques					
Quantité de commande		467	165	953	
Point de commande		167	69	347	
Nombre moyen annuel de commandes (et de cycles de réapprovisionnement)		5,14	6,06	5,25	
Intervalle moyen entre 2 commandes		56 jours	47,5 jours	54,9 jours	
Stock moyen détenu		233,50	82,50	476,50	
Taux moyen annuel de rotation du stock		10,28	12,12	10,49	
Conséquences financières					TOTAL
Dépense moyenne d'acquisition		79 200,00	110 000,00	82 500,00	271 700,00
Coût moyen de commande		1 541,76	1 818,18	1 573,98	4 933,91
Coût moyen de possession		1 541,10	1 815,00	1 572,45	4 928,55
Indicateur de coût moyen de gestion (achat exclu)		3 082,86	3 633,18	3 146,43	9 862,46
Indicateur de coût moyen de gestion (achat inclus)		82 282,86	113 633,18	85 646,43	281 562,46
Marge nette		13 717,14	16 366,82	14 353,57	44 437,54
Approvisionnement optimal hors contraintes d'espace et de budget					
Quantité à commander		1631	651	3496	
Stock disponible à la commande		250	100	400	
Stock disponible avant la prochaine livraison		83	31	53	
Stock disponible après la prochaine livraison		1714	682	3549	
Consommation d'espace		85,7	40,92	106,47	233,09
Montant de la commande		48 930,00	65 100,00	52 440,00	356 610,50
<i>les contraintes d'espace et de budget jouent (espace disponible : 115 ; demandé : 233,09 - budget disponible : 90000 ; budget demandé : 356610,5)</i>					
Approvisionnement optimal sous contraintes d'espace et de budget					
Commande exceptionnelle		755	465	1392	
Stock disponible à la commande		250	100	400	
Stock disponible avant la prochaine livraison		83	31	53	
Stock disponible après la prochaine livraison		838	496	1445	
Consommation d'espace		41,9	29,76	43,35	115,01
Montant de la commande		22 650,00	46 500,00	20 880,00	90 030,00
Economie permise par la commande exceptionnelle		2 797,13	5 926,03	2 456,01	11 179,16

productive annuelle de $50000 / 200000 = 25\%$, elle est de $20000 / 100000 = 20\%$ pour les cocottes-minute, et de $70000 / 250000 = 28\%$ pour les casseroles. La

TABLEAU 241
Exemple d'utilisation commune et successive d'une même ressource rare

Article j	Coût de possession c_{p_j}	Demande annuelle D_j	Production maximale annuelle O_j	Coût de lancement c_{c_j}
1 - Bouilloire électriques	6	50000	200000	500
2 - Cocottes minutes	20	20000	100000	700
3 - Casseroles	3	70000	250000	600

production de 50000 bouilloires, 200000 cocottes-minute et 70000 casseroles requiert donc une utilisation de $25\% + 20\% + 28\% = 73\%$ de la capacité productive. D'une façon générale, si les temps de mise au point sont négligeables, il faudra avoir :

$$\sum_j \frac{D_j}{O_j} < 1 \quad \text{relation 268}$$

On peut noter qu'ici le taux de charge de l'atelier (73%) est assez faible: les 27% de capacité inemployée, correspondent en effet à près de 65 jours ouvrables sur une année de 240 jours ouvrables (= 48 semaines, de 5 jours ouvrables chacune).

I-2.3.2.3 Solution

Une solution réalisable peut être obtenue en recherchant un nombre moyen annuel de commandes I_c qui soit le même pour tous les articles ou, ce qui revient au même, en recherchant une périodicité commune T pour tous les articles. **La variable de commande est maintenant T** (exprimée en année) et non q comme c'était le cas jusqu'à présent, mais comme nous sommes en avenir certain et qu'implicitement on s'interdit ici toute rupture de stock, la quantité mise en fabrication est nécessairement $T \cdot D$. À cette périodicité correspond bien entendu un même nombre annuel de commandes $I_c = 1/T$. Par exemple pour $T = 0,333$, on a $I_c = 3$ ce qui signifie que 9 lancements en production seront successivement effectués au cours de l'année. Par exemple, les lancements 1, 4 et 7 correspondront à la fabrication des bouilloires électriques, les lancements 2, 5 et 8, à celle des cocottes-minute et enfin les lancements 3, 6 et 9, à celle des casseroles. Par ailleurs, $q_1 = T \cdot D_1 = 2400 \times 0,333 = 800$ bouilloires électriques, etc.

Mais cette solution d'un cycle commun de fabrication peut ne pas être celle qui minimise le coût moyen annuel sur longue période. En effet, la solution optimale peut correspondre par exemple à une production cyclique calculée sur 2 ans et demi, constituée par exemple par un panachage de 5 lancements de l'article 1, 9 lancements de l'article 2 et 4 lancements de l'article 3, la longueur des séries pour un article donné n'ayant aucune raison d'être constante. Mais la recherche de cet optimum optimorum peut s'avérer d'un coût prohibitif compte tenu du caractère hautement combinatoire des solutions à étudier, et en définitive d'un intérêt relativement faible si le cycle obtenu est de plusieurs années, parce que l'évolution de l'environnement économique risque de rendre caduque la solution trouvée, avant même que la fin du premier cycle (de 2,5 ans dans notre exemple) ne soit atteinte¹.

Il s'agira donc de chercher à minimiser une fonction de coût dépendant de la seule inconnue T . En effet, pour une valeur donnée de T , les quantités commandées q_j seront nécessairement égales au produit de la demande annuelle D_j par T , pour que la demande de l'article j soit juste satisfaite. Le stock moyen annuel de l'article j sera donc: $\frac{q_j}{2} = \frac{D_j \cdot T}{2}$, c'est-à-dire dans notre exemple $\frac{50000 \cdot T}{2}$ pour l'article 1, $\frac{20000 \cdot T}{2}$ pour l'article 2 et $\frac{70000 \cdot T}{2}$ pour l'article 3.

Le coût de possession doit, comme nous l'avons vu au § I-2.2.1, page 800, être corrigé pour tenir compte du fait que l'approvisionnement est continu, et non instantané. Il convient de retenir comme coût de possession: $c_{p_j} \cdot \frac{O_j - D_j}{O_j}$, ce qui donne:

$$c_{p_1} = 6 \cdot \frac{200000 - 50000}{200000} = 4,5$$

$$c_{p_2} = 20 \cdot \frac{100000 - 20000}{100000} = 16$$

$$c_{p_3} = 3 \cdot \frac{250000 - 70000}{250000} = 2,16$$

Table des matières

Dans ces conditions, la fonction de coût que l'on cherchera à minimiser, que l'on notera $C(T)$, et qui est la somme des coûts moyens annuels de chacun des articles, est dans notre exemple, puisque $I_c = 1/T$:

$$C(T) = \left(\frac{500}{T} + 4,5 \frac{50000 \cdot T}{2} \right) + \left(\frac{700}{T} + 16 \frac{20000 \cdot T}{2} \right) + \left(\frac{600}{T} + 2,16 \frac{70000 \cdot T}{2} \right)$$

Index thématique

ce que l'on peut noter littéralement: $C(T) = \sum_{j=1}^3 \left\{ \frac{c_{c_j}}{T} + c_{p_j} \cdot \frac{O_j - D_j}{O_j} \cdot \frac{D_j \cdot T}{2} \right\}$, ou

encore, en «sortant» la variable T : $C(T) = \frac{1}{T} \sum_j c_{c_j} + \frac{T}{2} \sum_j \left\{ D_j \cdot c_{p_j} \cdot \frac{O_j - D_j}{O_j} \right\}$, ex-

pression qui est de la forme: $C(T) = T \cdot A + B/T$ avec $B = \sum_j c_{c_j}$ et $A = \sum_j \left\{ D_j \cdot c_{p_j} \cdot (O_j - D_j) / O_j \right\} / 2$. La valeur de T qui minimise cette fonction est

d'après la relation 220 de la page 775 ($T^* = \sqrt{\frac{B}{A}}$):

$$T^* = \sqrt{\frac{2 \sum_j c_{c_j}}{\sum_j [D_j \cdot c_{p_j} \cdot (1 - D_j / O_j)]}} \quad \text{relation 269}$$

Appliquons cette relation 269 à notre exemple, à l'aide du tableau 242.

1. Note de la page précédente. Un certain nombre de modèles et d'algorithmes de calcul ont été proposés ces dernières années (voir, par exemple, Chakravarty, 1984, [88]).

TABLEAU 242
Calculs intermédiaires de T^*

Article j	D_j	O_j	D_j / O_j	$c_{pj} \frac{O_j - D_j}{O_j} D_j$	c_{cj}
1 - Bouilloires électriques	50000	200000	0,25	225000	500
2 - Cocottes minutes	20000	100000	0,20	320000	700
3 - Casseroles	70000	250000	0,28	151200	600
Total	-	-	0,73 < 1	696200	1800

$$T^* = \sqrt{\frac{2 \times 1800}{696200}} = 0,071909 \text{ année}$$

Examinons les implications pratiques de ce résultat (voir [tableau 243](#)):

- le nombre moyen annuel de cycles est de $1/T^* = 13,91$ lancements pour chaque article;
- le nombre d'unités fabriquées q_j^* par commande de l'article j est égal à $q_j^* = D_j \cdot T^*$, d'où: $q_1^* = 3595$, $q_2^* = 1438$ et $q_3^* = 5034$.
- le temps de fabrication nécessaire à cette fabrication est de: q_j^*/O_j an ce qui correspond à $(240 \cdot q_j^*)/O_j$ jours ouvrables et $(8 \cdot 240 \cdot q_j^*)/O_j$ heures ouvrables; le cumul des temps de fabrication est 0,052391 année par cycle, ce qui laisse un temps résiduel de 0,019518 par cycle (ce qui redonne bien les 27% de capacité trouvée à la [page 824](#)).
- chaque lancement en production de l'article j correspond à une consommation de $\frac{q_j^*}{D_j} = \frac{D_j \cdot T^*}{D_j} = T^* = 0,0719$ an, soit $240 \times 0,0719 = 17,26$ jours ouvrables, soit encore $8 \times 17,26 = 138,08$ heures ouvrables.

Table des
matières

Index
thématique

I-2.3.2.4 Impact de la solution sur le planning d'atelier

Chacune des commandes permet de satisfaire 17,26 jours de consommation, mais la production de q_1 , q_2 et q_3 ne demande que 12,60 jours, ce qui laisse au planning une assez grande marge de manœuvre. Bien entendu, nous retrouvons ici un taux de charge de l'atelier de $12,6 / 17,26 = 73\%$, identique à celui que nous avons calculé initialement sur l'année. Si l'on suppose que l'on produise les articles 1, 2 et 3 dans cet ordre et sans arrêt entre deux productions consécutives d'une même rafale, on obtient alors le planning de production et l'évolution des stocks nets de la [figure 211](#) (et du [tableau 244](#)), avec une origine arbitraire du temps.

I-2.3.3 Commandes groupées

I-2.3.3.1 Le problème posé

Le problème étudié au § I-2.3.2 (utilisation commune et successive d'une même ressource rare) se pose fréquemment dans le cas de commandes internes à



TABLEAU 243
Analyse de la politique optimale de la **CUISOR** pour sa production d'articles dans le même centre de production

Politique optimale d'approvisionnement (utilisation commune et successive d'une même ressource) des	bouilloires électriques	cocottes-minute	casseroles	
Conséquences physiques				
Quantité de commande	3 595	1 438	5 034	
Nombre moyen annuel deancements en production	13,91	13,91	13,91	
Intervalle moyen entre 2ancements	17,3 jours	17,3 jours	17,3 jours	
Stock moyen détenu	1 348,13	575,20	1 812,24	
Taux moyen annuel de rotation du stock	37,09	34,77	38,63	
Conséquences financières				TOTAL
Dépense moyenne de production	1 500 000,00	2 000 000,00	1 050 000,00	4 550 000,00
Coût moyen annuel de lancement	6 953,22	9 734,50	8 343,86	25 031,58
Coût moyen annuel de possession	8 088,75	11 504,00	5 436,72	25 029,47
Indicateur de coût moyen annuel de gestion (production exclue)	15 041,97	21 238,50	13 780,58	50 061,05
Indicateur de coût moyen de gestion (production incluse)	1515 041,97	2021 238,50	1063 780,58	4600 061,05

Table des matières

Index thématique

TABLEAU 244
Évolution des stocks des articles fabriqués par **CUISOR**

date (en jours)	Bouilloires	Cocottes	Casseroles
0,00	0	360	2265
4,31	2696	0	1007
7,77	1977	1150	0
12,60	970	748	3624
17,26	0	359	2265
21,57	2696	0	1007
25,02	1977	1150	0
29,86	970	748	3624
34,52	0	359	2265
38,83	2696	0	1007

l'entreprise tandis que celui que l'on va étudier ne se pose que dans le cas de commandes passées à l'extérieur de l'entreprise.

Comme dans le cas précédent, il s'agit de définir la périodicité optimale de commandes portant simultanément sur plusieurs articles, la différence majeure est qu'au lieu d'avoir un approvisionnement progressif, on a une livraison périodique de la totalité de la quantité de commandes. Il s'ensuit qu'il n'y a pas lieu de

FIGURE 211
Production et évolution du stock des articles produits par **CUISOR**

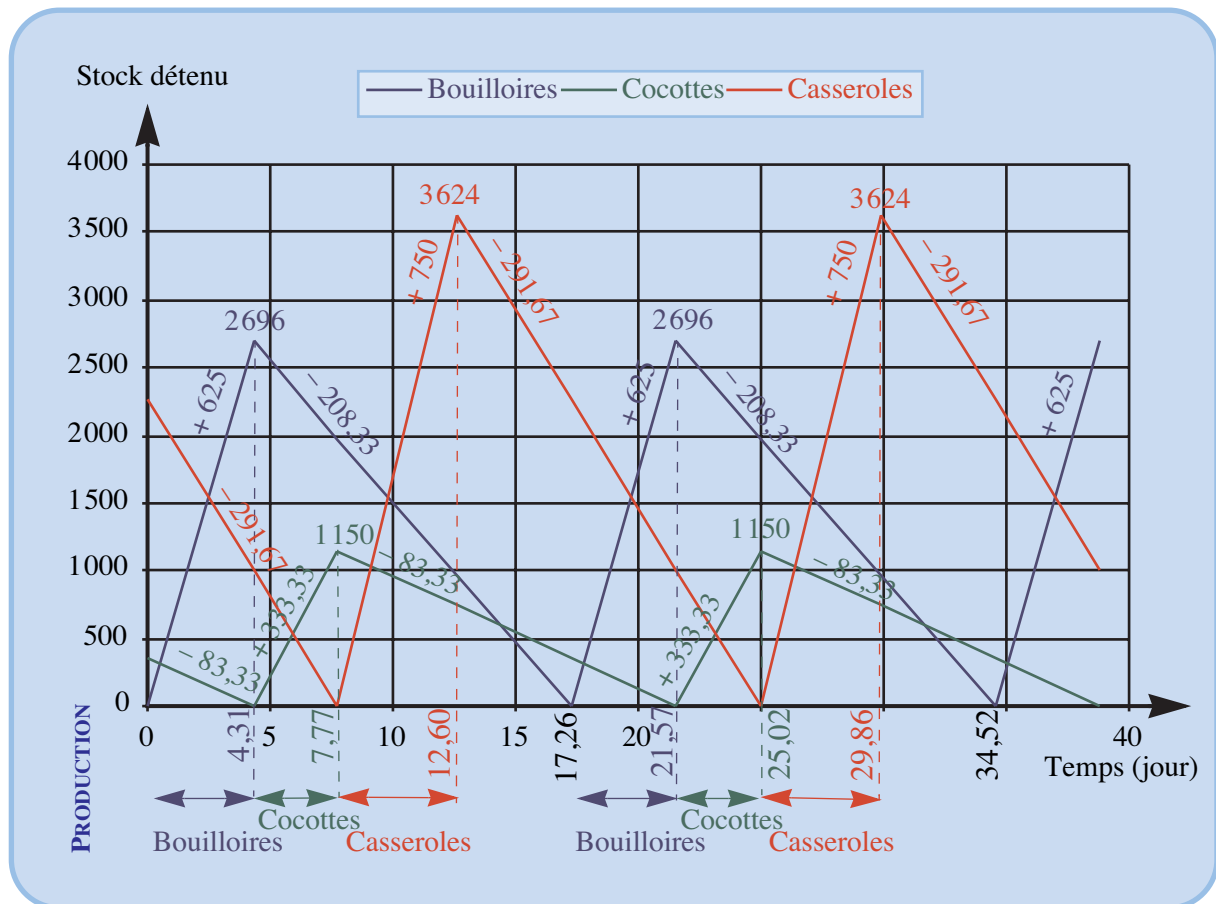


Table des matières

Index thématique

corriger le coût de possession par le facteur correctif $(O_j - D_j) / O_j$; mais on peut garder la [relation 269](#) de la page 825 en considérant que le taux de production annuel est infini (ce qui donne la valeur 1 au facteur correctif). Par ailleurs, la commande porte sur tous les articles j , il n'y a donc pas de c_{c_j} , mais un coût c_c , que l'on suppose indépendant de l'importance de la commande passée. Ce nombre optimal moyen annuel de commandes est donné par la [relation 270](#)¹:

$$I_c^* = \sqrt{\frac{\sum_j D_j \cdot c_{p_j}}{2 \cdot c_c}} \quad \text{ou} \quad T^* = \sqrt{\frac{2 \cdot c_c}{\sum_j D_j \cdot c_{p_j}}} \quad \text{relation 270}$$

1. Dans certains cas, le problème des commandes groupées est plus complexe : à chaque commande, passée avec une périodicité T , l'entreprise supporte un coût de commande c_c . Mais cette commande ne concerne pas forcément tous les articles du groupe d'articles considérés ; ce qui revient à dire, toute rupture de stock étant interdite, que l'on commande pour un article quelconque j , de quoi satisfaire la consommation d'une période égale à un multiple entier de T . Une telle politique, qui accroît le coût moyen de stockage, n'est envisageable que parce qu'un coût de commande c_{c_j} complémentaire spécifique à l'article j s'ajoute au coût de commande général précédemment envisagé. Diverses solutions ont été proposées pour résoudre ce problème (voir Silver, Pike & Peterson, 1998, [387], p. 497-503).

I-2.3.3.2 Application numérique

Le rayon d'articles de cuisine du supermarché **SUPERLAMBDA** s'approvisionne en bouilloires électriques, cocottes-minute et casseroles auprès de l'entreprise **Cuisor**. Supposons que le service approvisionnement de **SUPERLAMBDA** étudie la solution de commandes groupées auprès d'un même fournisseur, et qu'il estime que le coût de telles commandes est de 300 dollars liduriens. Les données relatives au coût de possession et à la demande annuelle de ces trois articles pour **SUPERLAMBDA** (et non pour **Cuisor** comme au § I-2.3.2) sont les mêmes que celles de l'exemple du § I-2.3.11b, page 803, et sont rappelées dans le [tableau 245](#). L'application de la [relation 270](#) conduit à $I_c^* = \sqrt{\frac{49400}{2 \cdot 300}} = 9,07$, d'où $T^* = 0,1102$ an = 31,8 jours ouvrables. Les quantités commandées dans chaque commande groupée sont: $q_1 = \frac{2400}{9,07} = 264$, $q_2 = \frac{1000}{9,07} = 110$, $q_3 = \frac{5000}{9,07} = 551$. Tous les 31,8 jours ouvrables **SUPERLAMBDA** commande donc à **Cuisor**: 264 bouilloires électriques, 110 cocottes-minute et 551 casseroles. L'ensemble des conséquences de cette politique d'approvisionnement est donné dans le [tableau 246 de la page 830](#).

TABLEAU 245

Calcul de la périodicité optimale de la commande groupée de **SUPERLAMBDA**

Article j	c_{pj}	D_j	$D_j \cdot c_{pj}$
1 - Bouilloires électriques	6	2400	14400
2 - Cocottes minutes	20	1000	20000
3 - Casseroles	3	5000	15000
Total	-	-	49400

Table des matières

Index thématique

Cela dit, en utilisant une périodicité calendaire d'approvisionnement fixe, il conviendra d'arrondir la solution optimale à 32 jours (ou à un nombre «voisin» plus facile d'utilisation) et de modifier en conséquence la politique d'approvisionnement.

SECTION II LA QUANTITÉ ÉCONOMIQUE DE COMMANDE EN UNIVERS ALÉATOIRE

Comme dans la section précédente, nous examinerons successivement les modèles de base (demande aléatoire et délai d'obtention certain, puis demande aléatoire et délai d'obtention aléatoire) et les améliorations de ce modèle, c'est-à-dire les extensions au cas aléatoire des principaux cas de figure analysés au § I-2.

II-1 La généralisation du modèle de base au cas aléatoire

Dans ce paragraphe la demande de l'article faisant l'objet d'un stock n'est plus considérée comme certaine, mais connue en probabilité. Le fait que la demande devienne aléatoire ne remet pas en cause sa nature statique¹, ce qui signifie que les

1. Par opposition à dynamique (voir [page 630](#)).



TABLEAU 246
Analyse de la politique optimale d'approvisionnement de
SUPERLAMBDA auprès de CUISOR.

Politique optimale d'approvisionnement (commande groupée) de	bouilloires électriques	cocottes-minute	casserolles	
Conséquences physiques				
Quantité de commande	264	110	551	
Nombre moyen annuel de commandes	9,07	9,07	9,07	
Intervalle moyen entre 2 commandes	31,7 jours	31,7 jours	31,7 jours	
Stock moyen détenu	132,00	55,00	275,50	
Taux moyen annuel de rotation du stock	18,18	18,18	18,15	
Conséquences financières				TOTAL
Dépense moyenne d'acquisition	72 000,00	100 000,00	75 000,00	247 000,00
Coût moyen annuel de commande	907,38	907,38	907,38	2 722,13
Coût moyen annuel de possession	792,00	1 100,00	826,50	2 718,50
Indicateur de coût moyen de gestion (achat exclu)	1 699,38	2 007,38	1 733,88	5 440,63
Indicateur de coût moyen de gestion (achat inclus)	73 699,38	102 007,38	76 733,88	252 440,63

«caractéristiques» de cette distribution de probabilités restent stables au cours du temps¹. Dans un premier temps (§ II-1.1), nous maintiendrons l'hypothèse d'un délai d'obtention connu avec certitude, hypothèse acceptable dans un grand nombre de cas pratiques où le délai d'obtention est connu avec une marge d'erreur faible. Dans un second temps (§ II-1.2, page 854) nous lèverons cette dernière hypothèse et chercherons à être en mesure de résoudre numériquement la classe de problèmes concrets que l'on rencontre le plus souvent sur le terrain.

II-1.1 Politique optimale « q, s » avec demande aléatoire et délai d'obtention certain

Le raisonnement s'appuiera sur un exemple numérique (§ II-1.1.1). Une solution approchée du problème sera présentée au § II-1.1.2, page 831, puis la solution analytique exacte, au § II-1.1.3, page 834. Au § II-1.1.4, page 842, les indicateurs de qualité de service introduits au chapitre précédent seront adaptés. La détermination de politique sous contrainte de niveau de service sera abordée au § II-1.1.5, page 849. Enfin, au § II-1.1.6, page 853, on analysera rapidement le cas des points de commandes multiples.

II-1.1.1 Exemple introductif

Reprenons l'exemple des ventes de bouilloires électriques du supermarché SUPERLAMBDA et supposons maintenant que la demande n'est plus certaine, mais aléatoire, et plus précisément que la distribution de probabilités de la demande

1. On peut encore dire que l'on a affaire à un processus purement aléatoire (cf. chapitre XV, § I-2.3.1, page 989), ce qui revient à considérer que l'on est dans un régime de croisière caractérisé par un environnement technique, économique et social stable.

annuelle est une loi Normale de moyenne 2400 (valeur retenue comme demande annuelle en avenir certain) et d'écart-type 189,74. La distribution de probabilité de la demande X pendant les 20 jours ouvrables (= 20 / 288 an) correspondant au délai d'obtention est également une loi Normale dont les paramètres se déduisent de ceux de la loi annuelle en multipliant moyenne et variance par ce coefficient 20 / 288. La variable X suit donc une loi Normale de moyenne 167, et d'écart-type égal à $189,74 \cdot \sqrt{20/288} = 50$.

Supposons en outre que le coût de rupture soit de 10 dollars liduriens, marge brute unitaire réalisé par **SUPERLAMBDA** sur la vente d'une bouilloire. La fonction de coût à minimiser fait alors intervenir simultanément trois variables d'état:

- le nombre moyen de commandes I_c ,
- le stock moyen annuel de bouilloires possédées I_p (sur lequel pèse le coût de possession de 6 dollars liduriens / article / an),
- la rupture moyenne I_r annuelle, c'est-à-dire le nombre moyen de bouilloires qu'il n'a pas été possible de vendre à la suite d'une rupture de stock (le coût de rupture de 10 dollars / article pèse sur chaque vente perdue).

II-1.1.2 Détermination indépendante de s et de q

II-1.1.2.1 Principes suivis

Une solution approchée du problème consiste à résoudre *indépendamment* les deux problèmes suivants:

- Le premier problème se focalise sur la détermination de la quantité économique de commande q , en effectuant un arbitrage entre coût de commande et coût de possession à partir de la demande moyenne. Ce problème n'est autre que celui étudié au § I-1, page 772 en remplaçant la notion de demande annuelle certaine par celle d'espérance mathématique de la demande annuelle ($\bar{D} = 2400$).
- Le second problème a pour objet la détermination du point de commande s . Il effectue un arbitrage entre coût de rupture et coût de possession en utilisant le modèle de la gestion calendaire pendant le délai d'obtention L et en retenant comme point de commande s , le niveau de rechargement S correspondant à la solution optimale. La différence entre le point de commande et la demande moyenne durant le délai d'obtention s s'analyse comme un stock de sécurité.

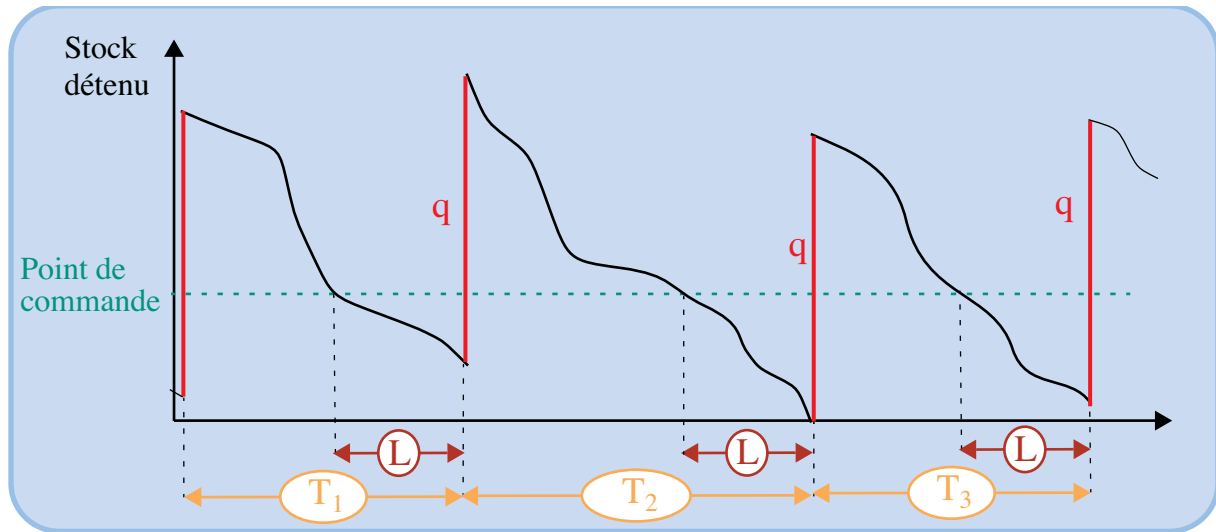
L'évolution du stock détenu est illustrée dans la [figure 212, page 832](#) (qui reste valable en cas de solution exacte); on peut y remarquer que l'intervalle entre deux approvisionnements successifs n'est pas stable. Les solutions proposées dans ce § II-1.1 ne seront valides que si l'on n'est pas dans le cas des points de commandes multiples, c'est-à-dire si la quantité commandée reste supérieure au point de commande.

II-1.1.2.2 Résolution d'un problème de quantité économique optimale

La solution numérique du premier problème n'est autre que celle trouvée en univers certain, à la [page 776](#), c'est-à-dire que l'on a $q^* = 490$.

FIGURE 212

Exemple d'application d'une politique d'approvisionnement « q, s » en univers aléatoire



II-1.1.2.3 Détermination du stock de sécurité: résolution d'un problème de gestion calendaire

Le point de commande s sera égal au niveau de reconstituer S , solution optimale de ce second problème, ceci nous conduit à minimiser un coût de gestion, somme d'un coût de possession $c_p \cdot I_p(S)$ et d'un coût de rupture $c_r \cdot I_r(S)$. La rupture moyenne est l'espérance mathématique du nombre de bouilloires électriques non fournies durant le délai d'obtention (qui est l'équivalent de la période de révision calendaire de la gestion calendaire, dans ce problème). Nous avons déjà dit que les politiques de quantité économique de commande ne concernaient que des articles stockables. Ceci implique que le stock moyen possédé durant le délai d'obtention se calcule comme la moyenne arithmétique du point de commande s (qui est l'équivalent du niveau de reconstituer S du problème de gestion calendaire) et du stock résiduel au moment de la livraison. S'il y a rupture de stock, on adopte l'hypothèse simplificatrice d'après laquelle la rupture de stock se produit instantanément à la fin du délai d'obtention. Dans ces conditions, le problème de gestion calendaire que l'on cherche à résoudre est celui du § II-3.1, page 754, du chapitre XI.

Ce problème de gestion calendaire se rencontrera en moyenne $2400 / 490 = 4,9$ fois par an, c'est-à-dire que le stock moyen $I_p(s)$ correspondra à une immobilisation portant sur une période de $490 / 2400 = 1 / 4,9 = 0,2042$ an, c'est-à-dire $288 \times 0,2042 = 58,81$ jours ouvrables et non sur les seuls 20 jours ouvrables où le problème de gestion calendaire se pose. On conviendra d'appeler **cycle**, cette période de 58,81 jours ouvrables en moyenne.

Le coût annuel de possession $c_p = 30 \times 0,2 = 6$ dollars liduriens pèse sur un article déteu pendant 288 jours ouvrables. Il convient donc de le multiplier par 0,2042 pour obtenir un coût de possession c_p' par cycle de 59 jours ouvrables. Dans ces conditions, le problème posé est la recherche du niveau de reconstituer S qui minimise la fonction de coût suivante: $C(S) = 6 \times 0,2042 \times I_p(S) +$

$10 \times I_r(S)$. La valeur optimale de S s'obtient en utilisant la [relation 175 de la page 718](#) établie au chapitre précédent, en remplaçant c_p par c_p' :

$$P(X > S^*) = \frac{c_p'}{c_r + c_p'/2} = \frac{6 \times 0,2042}{10 + 6 \times 0,2042/2} = 0,115$$

La demande X durant le délai d'obtention de 20 jours est par hypothèse la loi Normale $\mathcal{N}(167; 50)$. La valeur de la variable centrée réduite correspondant à cette probabilité est, après lecture d'une table de la loi Normale, égale à 1,2004. D'où

$$1,2004 = \frac{S^* - 167}{50} \rightarrow S^* \approx 227$$

Dans ces conditions la politique d'approvisionnement optimale consiste à commander 490 bouilloires électriques chaque fois que le stock possédé devient égal ou inférieur à 227 bouilloires. Évaluons les conséquences économiques de cette politique.

La rupture moyenne au cours d'un cycle est, après lecture de la table A, [page 765](#)¹: $I_r(S = 227) = \sigma \cdot g(t_S = 1,2) = 50 \times 0,0561 = 2,81$. Chaque année, on a en moyenne $2400 / 490 = 4,898$ cycles. Le nombre moyen annuel de bouilloires que l'on n'a pas pu vendre s'élève donc à $2,81 \times 4,898 = 13,76$ bouilloires, ce qui correspond à un pourcentage de demandes non satisfaites β correspondant à $13,76 / 2400 = 0,57\%$ de la demande moyenne annuelle.

Table des
matières

Le stock de sécurité, qui en gestion calendaire est la différence entre le niveau de reconstituer et la demande moyenne (ici 167), s'élève à $227 - 167 = 60$ bouilloires. Sa constitution est rendue nécessaire par le caractère aléatoire de la demande. Mais il faut bien observer que la demande effective au cours d'un délai d'obtention peut aussi bien être supérieure qu'inférieure à la demande moyenne sur cette période. En conséquence de quoi, *la non-constitution d'un stock de sécurité n'implique pas qu'en moyenne le stock résiduel soit nul au moment de la livraison.*

Index
thématique

- L'utilisation de la [relation 135 de la page 670](#) (étendue au cas continu en [page 674](#)) établie au chapitre précédent et permettant de calculer l'espérance mathématique du stock résiduel ($I_p(S) = S - \bar{x} + I_r(S)$), conduit, après lecture de la table A, à: $I_p(S = 167) = 167 - 167 + I_r(S = 167) = 0 + 50 \times 0,39894 = 19,95$. Ce stock résiduel moyen de 19,95 bouilloires s'analyse d'une certaine façon comme un stock «presque toujours dormant», nécessaire pour atteindre un niveau de service (ici, 50% de chances de ne pas être en rupture de stock avant la livraison), face à une demande aléatoire, et non comme un gaspillage ou la conséquence d'une mauvaise gestion. *Pour le réduire, il faudrait agir sur le délai d'obtention et / ou sur la variabilité de la demande.*
- La constitution d'un stock de sécurité de 60 accroît ce stock résiduel: $I_p(S = 227) = 227 - 167 + I_r(S = 227) = 60 + 2,81 = 62,81$. Cette élévation de la

1. Un calcul précis fait à partir de la valeur exacte de la moyenne (166,667) et en tenant compte de la correction de continuité (voir [page 678](#)), donne comme valeur $t_S = \frac{(227,5 - 166,667)}{50} = 1,2167$. La valeur exacte de $g(t_S)$ est alors 0,05421 (valeur calculée et non lue sur une table), et la rupture moyenne est alors 2,71053.

valeur du point de commande s'accompagne donc d'un accroissement du stock résiduel de $62,81 - 19,95 = 42,86$ bouilloires. Ceci revient à dire que $42,86 / 60 = 71\%$ de ce stock de sécurité pourra être considéré comme un stock «presque toujours dormant». *Ce stock «presque toujours dormant», qui n'est pas imputable à une mauvaise gestion, a donc une valeur optimale¹.*

Il n'est pas possible de calculer le coût moyen annuel de gestion sans avoir formulé analytiquement le problème. On examinera donc ce point ultérieurement.

II-1.1.3 Détermination simultanée de s et q

On examinera successivement le cas des ventes perdues (qui correspond à notre exemple numérique), celui des ventes ou livraisons différées (§ II-1.1.3.2, page 839) et enfin le cas mixte (§ II-1.1.3.3, page 841).

II-1.1.3.1 Cas des demandes non satisfaites perdues

En réalité, comme nous allons le voir, la rupture moyenne et le stock moyen possédé dépendent aussi bien du point de commande s , que de la quantité économique q . Mais la variable d'état I_p dépend directement comme on va le voir, des variables de commande s et q ; aussi la notera-t-on $I_p(s, q)$. Par contre, comme on va le voir également, la détermination de s fait intervenir q , mais une fois fixé s , la rupture moyenne au cours d'un cycle ne dépend que du seul s (mathématiquement donc la dérivée de la rupture moyenne par rapport à q est nulle). On notera donc $I_r(s)$ cette rupture moyenne. Enfin, la dernière variable d'état I_c , nombre annuel moyen de commandes, ne dépend que de la seule variable q et sera noté en conséquence $I_c(q)$.

Le stock moyen annuel possédé $I_p(s, q)$, qui est, de toute évidence, égal à celui calculé sur un cycle, peut s'analyser comme une moyenne pondérée de :

- l'espérance mathématique $I_{p2}(s, q)$ du stock entre la livraison d'une commande et le franchissement du point de commande
- et de l'espérance mathématique $I_{p1}(s, q)$ du stock entre le franchissement du point de commande et la prochaine livraison.

Le stock moyen $I_{p1}(s, q)$ n'est autre que celui qu'on a utilisé dans le problème de gestion calendaire, page 717, à ceci près que l'on utilise ici dans la formulation le point commande s au lieu du niveau de rechargement S , et que la demande aléatoire X est définie pour une période égale au délai d'obtention L au lieu de la période de révision calendaire T .

$$I_{p1}(s, q) = \sum_{x_L=0}^s \left[\frac{1}{2} \{s + (s - x_L)\} P(X_L = x_L) + \frac{1}{2} (s + 0) P(X_L > s) \right]$$

ce qui, compte tenu de la relation 173 de la page 718, peut encore s'écrire, en remplaçant $I_r(S)$ par la notation équivalente $I_r(s)$ dans notre nouvelle formulation (raisonnement identique à celui du § I-2.3.1, page 717, du chapitre XI) :

$$I_{p1}(s, q) = \frac{1}{2} [2 \cdot s - \bar{x}_L + I_r(s)] \quad \text{relation 271}$$

1. Puisqu'à S^* correspond une valeur unique de $I_p(S^*)$, l'inverse étant vrai pour les distributions de probabilités classiques

Le calcul du stock $I_{p2}(s, q)$ est simple. À la livraison de q unités, le stock passe de $(s - x_L)$, stock résiduel avant livraison de la commande, à $(s - x_L + q)$ unités, à condition d'avoir un stock résiduel positif ($x_L < s$), ou à q unités s'il y a rupture de stock ($x_L \geq s$)¹. Pendant l'intervalle de temps qui sépare la livraison d'une commande et le franchissement du prochain point de commande, le stock moyen possédé est donc :

- $\frac{1}{2}[(0 + q) + s] = \frac{1}{2}(q + s)$, si le stock résiduel avant livraison est nul,
- $\frac{1}{2}[(s - x_L + q) + s] = \frac{1}{2}(2s - x_L + q)$ si le stock résiduel avant livraison est positif.

L'espérance mathématique de ce stock est donc, dans le cas d'une demande discrète (la transposition au cas continu étant immédiate) :

$$I_{p2}(s, q) = \sum_{x_L=0}^s \left[\frac{1}{2} \{2s - x_L + q\} P(X_L = x_L) \right] + \frac{1}{2}(q + s) P(X_L > s)$$

$$I_{p2}(s, q) = \sum_{x_L=0}^s \left[\frac{1}{2}(s - x_L) P(X_L = x_L) \right] + \frac{1}{2}(q + s) \sum_{x_L=0}^s P(X_L = x_L) + \frac{1}{2}(q + s) P(X_L > s)$$

$$I_{p2}(s, q) = \frac{1}{2}[s - \bar{x}_L + I_r(s)] + \frac{1}{2}(q + s) \{P(X_L \leq s) + P(X_L > s)\}$$

$$I_{p2}(s, q) = \frac{1}{2}[2s - \bar{x}_L + q + I_r(s)] \quad \text{relation 272}$$

L'espérance mathématique du stock moyen possédé se calcule tout naturellement, à partir des relations 271 et 272, comme la moyenne des espérances mathématiques des stocks $I_{p1}(s, q)$ et $I_{p2}(s, q)$, pondérée par la fraction de cycle où ils interviennent physiquement. La longueur d'un cycle est sensiblement égale² à q/D . Le délai de livraison est par hypothèse L . S'il n'y a pas de points de commande multiples, c'est-à-dire si l'on a $L < q/D$, on peut alors écrire :

$$I_p(s, q) = \frac{L}{q/D} \cdot I_{p1}(s, q) + \left(1 - \frac{L}{q/D}\right) \cdot I_{p2}(s, q) \quad \text{relation 273}$$

que l'on peut écrire en remarquant que, par définition, $\bar{x}_L = DL$:

$$I_p(s, q) = \frac{\bar{x}_L}{q} \cdot I_{p1}(s, q) + \left(1 - \frac{\bar{x}_L}{q}\right) \cdot I_{p2}(s, q)$$

1. On verra que, s'il est possible de différer la demande en cas de rupture de stock, la position du stock reste toujours $(s - x_L)$ juste avant la réception de la commande (avec une valeur négative en cas de rupture de stock), à condition toutefois qu'il ne puisse y avoir de demande différée d'un cycle sur l'autre, c'est-à-dire que la position du stock après livraison soit toujours positive (ce qui implique $P(X_L > s + q) = 0$). Il s'ensuit qu'après livraison, la position du stock sera toujours $(s - x_L + q)$ qu'il y ait eu ou non rupture de stock.

2. On démontre (voir Hadley & Whitin (1966, [212]), p. 171-173) que la durée moyenne d'un cycle est q/D lorsque les demandes non satisfaites non différées, et $(q + I_r(s))/D$ lorsqu'elles sont perdues. Si $I_r(s)$ est faible par rapport à q , ce que l'on suppose implicitement déjà en utilisant les relations 175 et 176, page 718, du chapitre précédent (hypothèse simplificatrice), le système de pondération retenu est acceptable lorsque les demandes non satisfaites sont perdues; il sera exact lorsqu'elles seront différées (§ II-1.1.3.2, page 839).

$$I_p(s, q) = \frac{\bar{x}_L}{q} \cdot \frac{1}{2} [2s - \bar{x}_L + I_r(s)] + \left(1 - \frac{\bar{x}_L}{q}\right) \cdot \frac{1}{2} [2s - \bar{x}_L + q + I_r(s)]$$

$$I_p(s, q) = \frac{1}{2} \left(\frac{\bar{x}_L}{q} + 1 - \frac{\bar{x}_L}{q} \right) [2s - \bar{x}_L + I_r(s)] + \left(1 - \frac{\bar{x}_L}{q}\right) \cdot \frac{q}{2}$$

$$I_p(s, q) = \left\{ s - \frac{\bar{x}}{2} + \frac{I_r(s)}{2} \right\} + \left(1 - \frac{\bar{x}}{q}\right) \cdot \frac{q}{2} \quad \text{relation 274}$$

La première expression entre { } n'est autre que le stock moyen possédé durant le délai d'obtention (relation 173 de la page 718, établie au chapitre précédent), mais considéré ici comme supporté à longueur d'année. Il faut y ajouter le stock moyen possédé utilisé dans le modèle de base de la quantité économique optimale, en le pondérant par la fraction moyenne de temps où le système n'est pas en attente de livraison (autrement dit, n'est pas dans une gestion de type calendaire). La formulation du stock moyen $I_p(s, q)$ s'interprète donc parfaitement. D'un point de vue pratique, on a intérêt à poursuivre les simplifications de cette relation 274, et à remplacer \bar{x}_L par $D \cdot L$, pour aboutir à la relation 275.

$$I_p(s, q) = \frac{q}{2} + (s - D \cdot L) + \frac{I_r(s)}{2} \quad \text{relation 275}$$

$$I_p(s, q) = \frac{\text{quantité économique}}{2} + \text{stock de sécurité} + \frac{\text{rupture par cycle}}{2}$$

Le coût moyen annuel de gestion $C(q, s)$, dépend également du nombre moyen annuel de commandes. On continuera de noter $I_c(q)$ cette variable d'état puisqu'elle est, par définition, égale au rapport D/q et ne dépend que de la seule variable de commande q . Ce coût moyen annuel de gestion dépend enfin de la rupture moyenne au cours d'un cycle, valeur qu'il faut multiplier par le nombre moyen annuel de cycles (égal au nombre moyen annuel de commandes), pour obtenir le nombre moyen annuel de demandes non satisfaites.

$$C(q, s) = c_c \cdot I_c(q) + c_p \cdot I_p(s, q) + c_r \cdot [I_c(q) \cdot I_r(s)] \quad \text{relation 276}$$

$$C(q, s) = c_c \cdot \frac{D}{q} + c_p \cdot \left[\frac{q}{2} + s - D \cdot L + \frac{I_r(s)}{2} \right] + c_r \cdot \frac{D}{q} \cdot I_r(s)$$

$$C(q, s) = c_c \cdot \frac{D}{q} + c_p \cdot \left(\frac{q}{2} + s - D \cdot L \right) + \left(c_r \cdot \frac{D}{q} + \frac{c_p}{2} \right) I_r(s) \quad \text{relation 277}$$

Il ne reste plus qu'à chercher les valeurs s^* et q^* qui minimisent ce coût moyen annuel: $\frac{\partial C(q, s)}{\partial q} = 0 = \frac{c_p}{2} - \{c_c + c_r \cdot I_r(s)\} \cdot \frac{D}{q^2}$, d'où l'on tire:

$$q^* = \sqrt{\frac{2 \cdot D \cdot \{c_c + c_r \cdot I_r(s^*)\}}{c_p}} \quad \text{relation 278}$$

Cette quantité économique optimale correspond à celle de Wilson, à condition d'ajouter au coût de passation d'une commande c_c , le coût moyen de rupture pendant le délai d'obtention $c_r \cdot I_r(s^*)$, ce qui revient à dire qu'au moment où l'on

passer commande, la dépense à prendre en compte n'est pas le seul coût de commande, comme dans le modèle de Wilson, mais qu'il convient d'y ajouter le coût de défaillance que l'on supporte en moyenne chaque fois que l'on passe une commande.

Par ailleurs, à l'optimum, on doit avoir :

$$\frac{\partial C(q, s)}{\partial s} = 0 = c_p - \left\{ \frac{c_p}{2} + c_r \cdot \frac{D}{q} \right\} \cdot \frac{\partial I_r(s)}{\partial s}$$

Étant donné que $I_r(s)$, rupture moyenne durant le délai d'obtention, n'est autre, en reprenant les notations de gestion calendaire, que la rupture moyenne $I_r(S)$, et compte tenu de la [relation 145 de la page 674](#), on peut écrire : $\frac{\partial I_r(s)}{\partial s} = -P(X > s)$

d'où :

$$P(X > s^*) = \frac{c_p}{c_p/2 + c_r \cdot D/q^*} = \frac{c_p \cdot q^*/D}{c_r + (c_p \cdot q^*/D)/2} \quad \text{relation 279}$$

C'est cette [relation 279](#) que l'on a implicitement utilisée dans le calcul du point de commande que nous avons opéré dans la solution approchée du § II-1.1.2 (en nous ramenant au cas étudié au chapitre précédent, après avoir corrigé le coût de possession annuel au prorata d'un cycle).

Table des
matières

Cette probabilité étant nécessairement inférieure à 1, la [relation 280](#) doit être respectée, mais cette condition qui n'est guère restrictive dans les cas de figure que l'on rencontre en pratique :

$$c_p < \frac{c_p}{2} + \frac{c_r \cdot D}{q^*} \Rightarrow c_p < 2 \cdot \frac{c_r \cdot D}{q^*} \quad \text{relation 280}$$

Index
thématique

Cette [relation 279](#) peut encore s'écrire si l'on préfère travailler sur les fonctions de répartition :

$$P(X < s^*) = \frac{c_r \cdot D/q^* - c_p/2}{c_r \cdot D/q^* + c_p/2} \quad \text{relation 281}$$

Si la loi de demande utilisée est discrète, il y a lieu alors d'adapter ces relations [278](#) et [279](#) (ou [281](#)) en transposant les relations [175](#) et [176](#) ([page 718](#)) du chapitre précédent, ce qui conduit aux [relations 282 de la page 838](#).

$$P(X > s^*) < \frac{c_p}{c_p/2 + c_r \cdot D/q^*} < P(X > s^* - 1)$$

$$P(X \geq s^* + 1) < \frac{c_p}{c_p/2 + c_r \cdot D/q^*} < P(X \geq s^*)$$

$$P(X \leq s^* - 1) < \frac{c_r \cdot D/q^* - c_p/2}{c_r \cdot D/q^* + c_p/2} < P(X \leq s^*)$$

$$P(X < s^*) < \frac{c_r \cdot D/q^* - c_p/2}{c_r \cdot D/q^* + c_p/2} < P(X < s^* + 1)$$

relation 282

Les relations 278 et 279 forment un système de deux équations à deux inconnues s et q qui n'a pas de solution analytique explicite¹. Fort heureusement, on peut obtenir celle-ci assez rapidement au terme du processus itératif décrit par l'algorithme de la figure 213, dans lequel on indicera par j les variables s et q (qui deviennent donc s_j et q_j) pour pouvoir repérer la valeur prise par ces variables au cours de l'itération j . Le fondement de cet algorithme repose sur l'analyse des relations 278 et 279, dont la représentation graphique est donnée dans la figure 214, page 840. La relation 278 est une fonction monotone décroissante de s qui tend asymptotiquement vers la quantité économique de Wilson ($I_r(s)$ varie en sens inverse de s , et lorsque s tend vers l'infini, $I_r(s)$ tend vers zéro). On peut transformer la relation 279, pour exprimer q en fonction de s :

$$q = \frac{P(X > s) \cdot c_r \cdot D}{c_p \cdot (1 - P(X > s)/2)}$$

relation 283

ce qui est également une fonction monotone décroissante de s qui tend asymptotiquement vers zéro. Les deux courbes se coupent si la condition (peu restrictive) de la relation 284 (obtenue en remplaçant s par zéro dans les relations 278 et 279) est respectée. Cet algorithme reste valable dans le cas discret.

$$\frac{2 \cdot c_r \cdot D}{c_p} > \sqrt{\frac{2 \cdot D \cdot (c_c + c_r \cdot L \cdot D)}{c_p}}$$

relation 284

Le point d'intersection² de ces deux courbes satisfait simultanément les relations 278 et 279, c'est-à-dire que ses coordonnées q , s sont des solutions du système de 2 équations non linéaires à 2 inconnues, constitué par les relations 278 et 279.

Appliquons à notre exemple numérique l'algorithme proposé. La première itération donne les résultats trouvés aux paragraphes II-1.1.2.2 (pour q , page 831) et II-1.1.2.3 (pour s , page 833), puisque nous avons vu que la première itération

1. En partant d'hypothèses de calcul légèrement différentes, Hadley & Whitin (1966, [212]), p. 160 ou Johnson & Montgomery (1974, [245]) aboutissent à des relations voisines: la détermination de q est la même, mais celle de s se fait en faisant appel à la relation 148 de la page 676 du chapitre précédent et non à la relation 176 de la page 719 de ce même chapitre (les coûts de possession étant calculés sur une durée L). La solution analytique exacte est donnée au § 4-11 du Hadley & Whitin, pour une demande suivant une loi Normale, ou de Poisson, dans le cas restrictif de point de commande unique, mais sa présentation comme sa mise en œuvre, est délicate.

2. Unique pour les distributions usuelles de probabilités (en effet, deux courbes monotones décroissantes peuvent avoir des points d'intersections multiples).

FIGURE 213

Algorithme de détermination de la solution optimale (cas des demandes perdues)

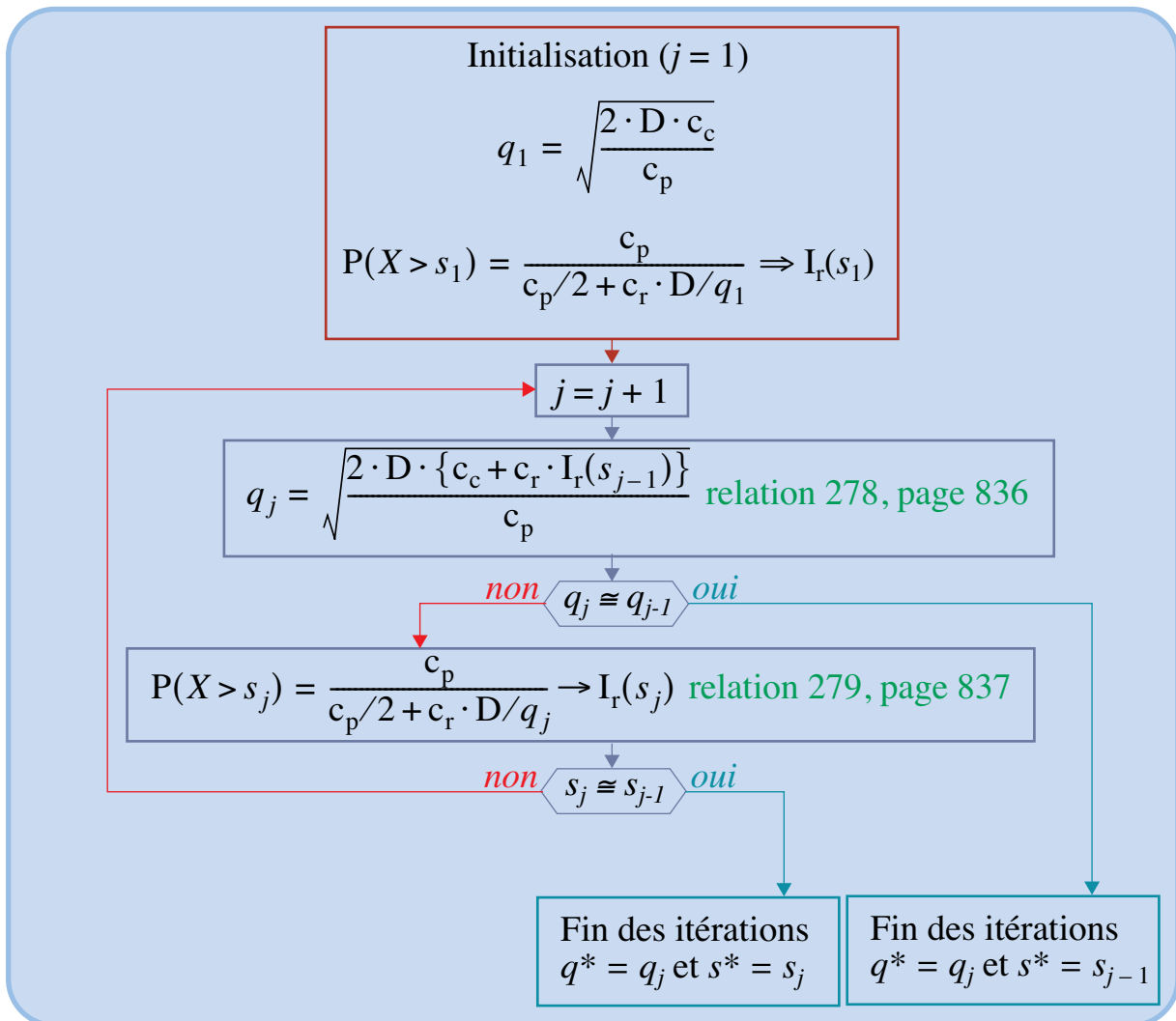


Table des matières

Index thématique

correspond à la solution approchée. On a donc (avec utilisation systématique de la correction de continuité, conformément à ce qui a été indiqué à la page 678):

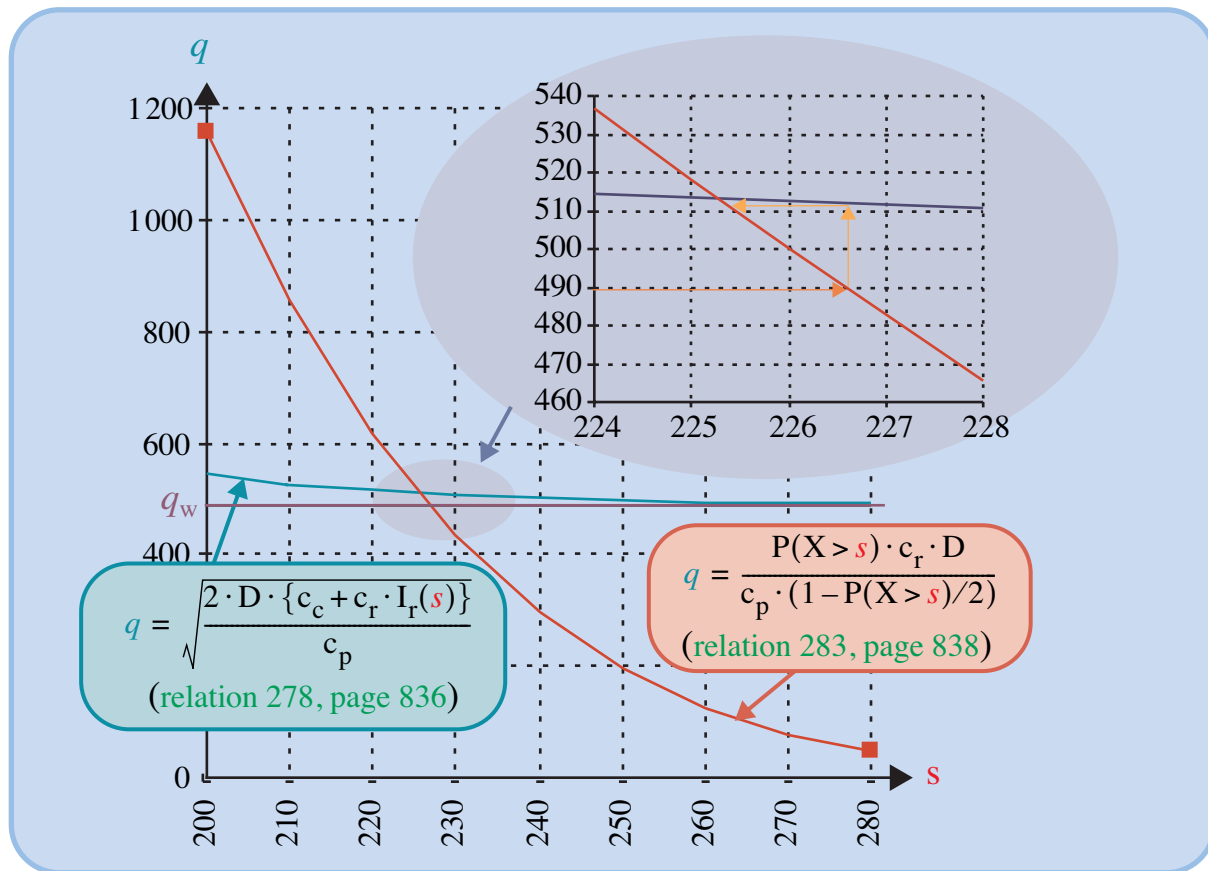
- itération $j = 1$: $q_1 = 490$; $P(X > s_1) = 11,54 \%$; $s_1 = 227$; $I_r(s_1) = 2,711$
- itération $j = 2$: $q_2 = 512 \neq q_1$; $P(X > s_2) = 12,03 \%$; $s_2 = 225 \neq s_1$; $I_r(s_2) = 2,942$
- itération $j = 3$: $q_3 = 513 \neq q_2$; $P(X > s_3) = 12,05 \%$; $s_3 = 225 = s_2 \Rightarrow$ arrêt de l'algorithme

L'égalité de s_2 et s_3 met fin au processus itératif et la solution optimale est alors de commander $q^* = 513$, lorsque le nombre de bouilloires en stock devient inférieur ou égal à $s^* = 225$.

II-1.1.3.2 Cas des demandes non satisfaites différées

Les relations 278 et 279 ne sont valables que dans le cas de ventes perdues. Dans le cas de ventes différées et de coût de rupture constant, il convient de modifier le calcul de $I_{p2}(s, q)$ puisque la position du stock peut alors être négative (demande différée). Si l'on néglige la probabilité d'une demande supérieure à q durant le délai d'obtention (ce qui permet au stock après livraison d'être supérieur

FIGURE 214
Application de l'algorithme de la page 839



au point de commande), il faut remplacer la relation 272 de la page 835 par la relation 285.

$$I_{p2}(s, q) = \sum_{x_L=0}^{\infty} \left[\frac{1}{2} (2s - \bar{x}_L + q) \cdot P(X_L = x_L) \right] = s - \frac{\bar{x}_L}{2} + \frac{q}{2} \quad \text{relation 285}$$

Le stock moyen possédé devient alors en appliquant la relation 273 de la page 835, avec $\bar{x}_L = D \cdot L$:

$$I_p(s, q) = \frac{\bar{x}_L}{q} \cdot \frac{1}{2} \cdot [2 \cdot s - \bar{x}_L + I_r(s)] + \left(1 - \frac{\bar{x}_L}{q} \right) \cdot \left[s - \frac{\bar{x}_L}{2} + \frac{q}{2} \right]$$

$$I_p(s, q) = (s - D \cdot L) + \frac{q}{2} + \frac{D \cdot L}{2 \cdot q} \cdot I_r(s) \quad \text{relation 286}$$

expression proche de la relation 274 de la page 836, dont elle se déduit en multipliant la rupture d'un cycle par la fraction de temps où le système est en attente de livraison.

Le c t moyen annuel de gestion devient alors:

$$C(q, s) = c_c \frac{D}{q} + c_p \left(\frac{q}{2} + s - D \cdot L \right) + \left(\frac{c_p \cdot L}{2} + c_r \right) \cdot \frac{D}{q} \cdot I_r(s) \quad \text{relation 287}$$

qui a¹ pour solution optimale la [relation 288](#); les solutions optimales du cas discret ([relation 290](#)) sont immédiates et ne font qu'adapter les relations [282](#) de la [page 838](#).

$$q^* = \sqrt{\frac{2 \cdot D \cdot \{c_c + (c_p \cdot L/2) \cdot I_r(s^*)\}}{c_p}} \quad \text{relation 288}$$

$$P(X > s^*) = \frac{c_p \cdot q^*/D}{c_r + c_p \cdot L/2} \quad \text{cas continu} \quad \text{relation 289}$$

$$P(X > s^*) < \frac{c_p \cdot q^*/D}{c_r + c_p \cdot L/2} < P(X > s^* - 1)$$

$$P(X \geq s^* + 1) < \frac{c_p \cdot q^*/D}{c_r + c_p \cdot L/2} < P(X \geq s^*)$$

$$P(X \leq s^* - 1) < \frac{c_r - c_p(q^*/D - L/2)}{c_r \cdot D/q^* + c_p/2} < P(X \leq s^*) \quad \text{cas discret} \quad \text{relation 290}$$

$$P(X < s^*) < \frac{c_r - c_p(q^*/D - L/2)}{c_r \cdot D/q^* + c_p/2} < P(X < s^* + 1)$$

Un algorithme analogue à celui utilisé de la [page 840](#), en remplaçant les relations [278](#) ([page 837](#)), [279](#) ([page 837](#)) et [282](#) ([page 838](#)) par les relations [288](#), [289](#) et [290](#), doit être utilisé pour trouver la solution numérique d'un problème donné.

Table des matières

II-1.1.3.3 Cas des demandes non satisfaites partiellement différées et partiellement perdues

Index thématique

La situation la plus vraisemblable dans beaucoup de problèmes concrets est celle où une rupture de stock se traduit par une probabilité p de voir la demande non satisfaite différée et donc la probabilité $(1 - p)$ de voir la demande non satisfaite perdue. On notera c_{rp} le coût de rupture en cas de demande perdue et c_{rd} le coût de rupture fixe associé à une demande différée.

Le coût moyen annuel de gestion est l'espérance mathématique des coûts moyens annuels de gestion calculés dans chaque cas de figure ([relation 277](#) de la [page 836](#) et [relation 287](#) de la [page 840](#)):

$$C(q, s) = c_c \frac{D}{q} + p \left\{ c_p \left(\frac{q}{2} + s - D \cdot L \right) + \left(\frac{c_p \cdot L}{2} + c_{rd} \right) \cdot \frac{D}{q} \cdot I_r(s) \right\} \\ + (1 - p) \left\{ c_p \left(\frac{q}{2} + s - D \cdot L \right) + \left(c_{rp} \cdot \frac{D}{q} + \frac{c_p}{2} \right) I_r(s) \right\}$$

1. Wagner (1975, [435]), p. 826, en partant de cette approche, aboutit exactement aux relations [278](#). On peut noter que Hadley et Whitin (1966, [212]), p. 158 (ou Johnson et Montgomery, 1974, [245], p. 60) aboutissent à des relations différentes, mais en partant d'hypothèses simplificatrices plus fortes.

$$C(q, s) = c_c \frac{D}{q} + c_p \left(\frac{q}{2} + s - D \cdot L \right) + \left\{ p \frac{D}{q} \left(c_p \frac{L}{2} + c_{rd} \right) + (1-p) \left(c_{rp} \frac{D}{q} + \frac{c_p}{2} \right) \right\} I_r(s)$$

relation 291

On a alors à l'optimum :

$$q^* = \sqrt{\frac{2 \cdot D \cdot [c_c + \{p[c_p \cdot L/2 + c_{rd}] + (1-p)c_{rp}\} \cdot I_r(s^*)]}{c_p}}$$

relation 292

$$P(X > s^*) = \frac{c_p}{p(D/q^*)(c_{rd} + c_p \cdot L/2) + (1-p)[c_p/2 + c_{rp} \cdot (D/q^*)]}$$

cas continu

relation 293

$$P(X > s^*) < \frac{c_p}{p(D/q^*)(c_{rd} + c_p L/2) + (1-p)[c_p/2 + c_{rp}(D/q^*)]} < P(X > s^* - 1)$$

cas discret

relation 294

Là encore, l'algorithme de la [figure 214, page 840](#), doit être adapté : il faut remplacer les relations [278 \(page 837\)](#), [279 \(page 837\)](#) et [282 \(page 838\)](#) par les relations [292](#) et [293](#) ou [294](#), doit être utilisé pour trouver la solution numérique d'un problème donné. Les relations [292](#) et [293](#) permettent de retrouver les relations [278](#) et [279](#), en posant $p = 0$ (toute demande non satisfaite est nécessairement perdue), et les relations [288](#) et [289](#) en prenant $p = 1$ (toute demande non satisfaite est différée).

On notera enfin que la formule générale de calcul du stock moyen possédé se calcule comme une somme pondérée des valeurs obtenues à partir de la [relation 275 de la page 836](#) et de la [relation 275 de la page 836](#).

$$I_p(s, q) = p \left\{ (s - D \cdot L) + \frac{q}{2} + \frac{D \cdot L}{2 \cdot q} \cdot I_r(s) \right\} + (1-p) \left\{ \frac{q}{2} + (s - D \cdot L) + \frac{I_r(s)}{2} \right\}$$

$$I_p(s, q) = \frac{q}{2} + (s - D \cdot L) + \left\{ p \frac{D \cdot L}{q} + (1-p) \right\} \frac{I_r(s)}{2}$$

relation 295

II-1.1.4 Indicateurs de qualité de service

Les indicateurs de qualité de service introduits au chapitre précédent doivent être modifiés, car la gestion n'est implicitement de type calendaire, qu'une fraction d'année.

II-1.1.4.1 Pourcentage de demandes non satisfaites, demande moyenne annuelle satisfaite

Nous avons vu, [page 839](#), qu'au cours d'un réapprovisionnement la rupture moyenne était de 2,94 en cas d'usage de la politique optimale en cas de demandes non satisfaites perdues, ce qui conduisait à une rupture moyenne annuelle de 2,94 ($2400 / 513$) = 13,76 bouilloires. Si l'on note β_A et β_L les pourcentages de demandes non satisfaites, respectivement au cours de l'année et au cours d'un

réapprovisionnement, on a alors: $\beta_L = \frac{I_r(s)}{D \cdot L}$ et $\beta_A = \frac{(D/q) \cdot I_r(s)}{D} = \frac{I_r(s)}{q}$, d'où l'on tire sans difficulté:

$$\beta_A = \frac{I_r(s)}{q} = \beta_L \cdot \frac{D \cdot L}{q}, \text{ ou encore } \beta_L = \beta_A \cdot \frac{q}{D \cdot L} \quad \text{relation 296}$$

ce qui implique que le pourcentage de demandes non satisfaites au cours d'une année est égal au pourcentage de demandes non satisfaites au cours d'un cycle que multiplie la fraction de temps où le système est en attente de livraison¹.

Cette relation 296 présente un intérêt tout particulier lorsque l'on désire suivre une politique de type «q, s» utilisant la quantité économique de Wilson et garantissant un certain pourcentage de demandes non satisfaites. Une telle politique, n'est pas optimale puisqu'elle n'effectue pas un arbitrage généralisé entre coûts de possession, de commande et de rupture. Elle présente malgré tout un grand intérêt pour les articles de catégorie B de la typologie ABC² si le coût de traitement de la solution optimale ainsi que celui d'obtention des informations complémentaires (appréciation du coût de rupture et coût d'analyse du problème) est jugé prohibitif par rapport aux avantages que l'on espère en tirer. Notons dès à présent que l'on peut également utiliser dans la même optique les critères que l'on examinera dans les § II-1.1.4.2 et § II-1.1.4.3, page 844. L'utilisation systématique de ce type de critère sera abordée au § II-1.1.4.8, page 846.

Table des matières

Par exemple, si nos bouilloires électriques sont gérées de telle sorte que le pourcentage des demandes annuelles non satisfaites soit de 1%, comme pour tous les articles de catégorie B dans laquelle se rangent nos bouilloires électriques, on aurait alors une commande $q = 490$ et un point de commande tel que:

$$\beta_L = 0,01 \cdot \frac{490}{2400 \cdot (20/288)} = 2,94\%$$

Index thématique

ce qui implique³ $\frac{\sigma \cdot g(t_s)}{\bar{x}} = \frac{50g(t_s)}{2400(20/288)} = 2,94\% \rightarrow g(t_s) = 0,098$ d'où $t_s = 0,913$ après lecture de la table D de la page 769, et du point de commande s tel que:

$$s = 167 + 0,913 \times 50 = 213$$

Par ailleurs, il peut être utile de connaître la demande moyenne annuelle satisfaite. Il suffit, pour calculer ce nouvel indicateur, de retrancher de la demande moyenne annuelle exprimée de la partie de la demande moyenne annuelle non satisfaite que l'on considère comme perdue:

$$D - (1 - p) \frac{D}{q} I_r(s) \quad \text{Demande moyenne annuelle satisfaite} \quad \text{relation 297}$$

1. On démontre (voir Hadley & Whitin, 1966, [212] p. 171-173) que le nombre annuel moyen de cycles est bien D/q lorsque les demandes non satisfaites sont différées, et de $D/(q+I_r(s))$ lorsqu'elles sont perdues; dans ce dernier cas, on a alors en toute rigueur: $\beta_A = \frac{D}{q+I_r(s)} \cdot \frac{I_r(s)}{D} = \frac{I_r(s)}{q+I_r(s)} = \beta_L \cdot \frac{L \cdot D}{q+I_r(s)}$.

2. Voir chapitre X, § II-1.2.1, page 636.

3. On peut écrire directement $g(t_s) = \beta_A \cdot q/\sigma$; cette relation est exacte en cas de demandes différées, mais lorsque les demandes non satisfaites sont perdues, on a, compte tenu de la note précédente: $g(t_s) = \beta_A \cdot q/\{\sigma(1-\beta_A)\}$, ce qui donne numériquement dans notre exemple $g(t_s) = 0,099$.

Dans l'exemple numérique du § II-1.1.3.1, page 834, cet indicateur est donc égal à : $2400 - 13,76 = 2386,24$ (p étant nul).

II-1.1.4.2 La notion de probabilité de rupture

La probabilité pour qu'il y ait une rupture de stock au cours d'une période L séparant la commande de la livraison est α_L . La définition d'un indicateur annuel équivalent n'est pas possible, puisque chaque cycle correspond à une épreuve élémentaire, au cours de laquelle l'événement rupture se produira, ou non. Ces épreuves étant indépendantes, on est en présence d'une loi binomiale et on est en mesure de déterminer la probabilité d'avoir k ruptures de stock sur n cycles.

$$P(K = k) = C_n^k \cdot \alpha_n^k \cdot (1 - \alpha_n)^{n-k}$$

C'est donc une distribution de probabilités du nombre de ruptures de stock se produisant au cours d'une période correspondant à un multiple entier du nombre de cycles que l'on est en mesure de définir, et non une probabilité unique. Dans le cas où $n = 5$ on aura, dans notre exemple, puisque $\alpha_L = 0,12$ dans la solution optimale de l'exemple numérique du § II-1.1.3.1, page 834.

TABLEAU 247
Distribution de probabilité de k ruptures de stock au cours de 5 cycles d'approvisionnement

Nombre k de ruptures	0	1	2	3	4	5	Total
Probabilité de k ruptures de stock sur 5 cycles	52,773 %	35,982 %	9,813 %	1,338 %	0,091 %	0,002 %	100 %

On définira alors comme indicateur de qualité de service le nombre moyen de ruptures de stock se produisant en moyenne sur l'année, indicateur qui correspond à l'espérance mathématique de la loi binomiale $\mathcal{B}(n, \alpha_L)$. On négligera ici le fait que le nombre de cycles annuels n'est pas forcément entier, afin de pouvoir comparer entre elles plusieurs politiques de gestion de stock. On notera α_A cet indicateur qui sera tel que :

$$\alpha_A = \alpha_L \cdot \frac{D}{q} \quad \text{relation 298}$$

ce qui donne ici $\alpha_A = 0,12 \times 4,9 = 0,588$ ruptures par an.

L'utilisation de la relation 135 de la page 670 (étendue au cas continu en page 674) établie au chapitre précédent permet de calculer l'espérance mathématique du stock résiduel ($I_p(S) = S - \bar{x} + I_r(S)$) et conduit, après lecture de la table de la page 765, à : $I_p(S = 213) = 213 - 167 + I_r(S = 213) = 55,39$.

II-1.1.4.3 L'intervalle moyen entre deux ruptures de stock

Nous venons de voir au § II-1.1.4.2 que le nombre moyen annuel de rupture s'élevait à 0,588 / an. On peut encore exprimer le même phénomène en disant que l'intervalle moyen entre deux ruptures était $1 / 0,588 = 1,701$ année, ce qui conduit, en moyenne à une rupture de stock tous les $288 \times 1,701 = 490$ jours ouvrables.

Ce critère est assez parlant, et l'on peut fort bien imaginer une gestion pour des articles de la catégorie B, suivant une politique « q, s » où q est déterminé à partir

de la formule de Wilson, et s à partir de la fixation d'un même intervalle moyen entre deux ruptures de stock.

Si l'on impose dans notre exemple un intervalle de deux ans, on a toujours la même quantité de commande $q = 490$. À l'intervalle moyen de 2 ans, correspond une valeur de α_A telle que $1 / \alpha_A = 2$ d'où : $\alpha_A = 0,5$. Or $\alpha_A = 0,5 = \alpha_L \cdot \frac{D}{q} = \frac{2400}{490} \cdot \alpha_L$. On en tire $\alpha_L = 10,2\%$. Le point de commande se détermine dès lors sans difficulté car après lecture d'une table normale, on sait que $t_s = 1,2702$, et donc que : $s = 167 + 1,2702 \times 50 = 231$.

II-1.1.4.4 Indicateur de coût moyen annuel de gestion

D'après la [relation 277](#), $\left(C(q, s) = c_c \frac{D}{q} + c_p \left[\frac{q}{2} + s - DL \right] + \left[\frac{c_p}{2} + c_r \frac{D}{q} \right] I_r(s) \right)$, valable en cas de demandes perdues, le coût moyen annuel de gestion de l'exemple du § II-1.1.3.1 est :

$$C(q^* = 513, s^* = 225) = 300 \frac{2400}{513} + 6 \left(\frac{513}{2} + 225 - 167 \right) + \left(\frac{6}{2} + 10 \frac{2400}{513} \right) 2,94 = 3438,97 \text{ \$/an}$$

Lorsque les demandes non satisfaites sont différées en totalité ou partiellement, le coût moyen annuel de gestion se calcule alors à partir de la [relation 287 de la page 840](#) ou de la [relation 291 de la page 842](#). Cet indicateur additionne des charges et des manques à gagner (problème déjà rencontré au chapitre précédent). C'est pourquoi, l'indicateur de la marge moyenne annuelle est nettement plus « parlant » pour un responsable d'entreprise.

Table des matières

Index thématique

II-1.1.4.5 Marge moyenne annuelle

L'adaptation du raisonnement conduit en univers certain à la [page 782](#), s'effectue sans difficulté. Il faut en effet retrancher à la marge brute réalisée sur la demande moyenne annuelle satisfaite, soit $10 \times 2386,24 = 23862,40$ dollars liduriens, dans notre exemple numérique du § II-1.1.3.1, les coûts de possession et de commande. L'indicateur de coût moyen annuel de gestion comporte le manque-à-gagner associé aux demandes non satisfaites perdues. Il suffit donc de retrancher ce coût moyen annuel de gestion de la marge brute réalisée sur la demande de moyenne annuelle exprimée (et non plus satisfaite) pour obtenir la marge nette recherchée. Il s'ensuit que si le coût de rupture c_{rp} associé à une demande non satisfaite perdue est égal à la marge unitaire, on peut utiliser la [relation 299](#)¹ valable dans le cas général de demandes partiellement perdues :

$$B(q, s) = c_{rp} \cdot D - C(q, s) \quad \text{relation 299}$$

Dans le même ordre d'idées, si l'on désire bâtir un indicateur annuel de coût de gestion intégrant la dépense d'acquisition, il conviendra de le définir comme étant la somme de :

1. Cette relation est analogue de la [relation 154 de la page 686](#), établie au chapitre précédent pour la gestion calendaire.

- la dépense moyenne annuelle d'acquisition (qui part de la demande moyenne satisfaite et non de la demande moyenne exprimée¹) égale, dans notre exemple, à 71 587 \$ liduriens ;
- du coût moyen annuel de commande égal, dans notre exemple, à 1 403,51 \$;
- du coût moyen annuel de possession égal, dans notre exemple, à 1 897,83 \$;
- et du coût moyen annuel des demandes non satisfaites différées (sans tenir compte des demandes perdues).

Ces indicateurs sont fournis, pour notre exemple numérique, dans les tableaux 248 et 249.

II-1.1.4.6 Taux moyen de rotation du stock

Par définition ce taux est le quotient de la demande moyenne au stock moyen possédé. Ce dernier se calcule à partir de la relation 275 de la page 836, dans le cas de demandes perdues, de la relation 275 de la page 836, dans le cas de demandes différées et de la relation 295 de la page 842, dans le cas général. Dans l'exemple numérique du § II-1.1.3.1, on a : $I_p(q^* = 513, s^* = 225) = \frac{513}{2} + 225 - 2400 \frac{20}{288} + \frac{2,94}{2} = 316,304$. Le taux moyen de rotation du stock est donc $2400 / 316,304 = 7,59$.

Il est important de remarquer d'une part que ce taux a une valeur optimale qui découle de la politique optimale, comme nous l'avons déjà souligné en univers certain, page 782. Contrairement à ce qui se passe en univers certain, il est possible qu'une politique non optimale aboutisse également à ce taux. Enfin, on peut souligner qu'il n'y a aucune raison pour que ce taux moyen de rotation du stock soit le même pour tous les articles. Cette dernière remarque implique en particulier que le jugement «comptable» d'après lequel un stock est d'autant mieux géré qu'il tourne vite, est erroné (il ne prend implicitement en compte que le coût de possession, sans tenir compte des coûts de commande et de rupture; voir page 782).

Table des matières

Index thématique

II-1.1.4.7 Résumé des conséquences de la politique optimale

L'analyse des conséquences du cas des demandes perdues est fournie dans le tableau 248. L'analyse des conséquences du cas des demandes partiellement perdues et partiellement différées ($p = 40\%$; $c_{rd} = 5$ \$) est fournie dans le tableau 249 de la page 848.

II-1.1.4.8 Politique de gestion basée sur la notion de niveau de service

L'utilisation d'une politique optimale nécessite l'explicitation préalable de certaines données (en particulier le coût de rupture) et un traitement numérique relativement important, ce qui peut conduire à préférer, pour les articles de catégorie B ou C, l'utilisation de politiques de gestion plus faciles à mettre en œuvre, même si celles-ci ne sont pas optimales. Dans cette optique, il est fréquent de déterminer la quantité économique de commande à l'aide de la formule de Wilson, et

1. Ce qui conduit, dans les résultats numériques proposés la dépense d'acquisition est la dépense réelle. La marge annuelle est calculée à partir de la demande satisfaite et des charges décaissées.

TABLEAU 248

Analyse de la politique optimale de **SUPERLAMBDA** pour la bouilloire électrique
(Univers aléatoire - demandes non satisfaites perdues)



Politique optimale d'approvisionnement des bouilloires électriques		
Conséquences physiques	Par cycle de réapprovisionnement	Par an
Quantité de commande	513	-
Point de commande	225	-
Stock de sécurité	58,33	-
Nombre moyen annuel de commandes (et de cycles de réapprovisionnement)	-	4,68
Intervalle moyen entre 2 commandes	-	61,6 jours
Probabilité de rupture avant livraison	12,17%	-
Rupture moyenne de stock (à 100 % perdue)	2,94	13,76
Demande moyenne satisfaite immédiatement	510,06	2 386,24
Pourcentage de demandes non satisfaites immédiatement	0,57%	0,57%
Intervalle moyen entre 2 ruptures	-	505,9 jours
Stock moyen disponible avant livraison	61,28	-
Stock moyen détenu	316,30	316,30
Taux moyen annuel de rotation du stock	-	7,59
Conséquences financières		
Dépense moyenne d'acquisition	15 390,00	71 587,08
Coût moyen de commande	300,00	1 403,51
Coût moyen de possession	405,66	1 897,83
Marge non réalisée pour cause de rupture de stock	29,42	137,64
Coût moyen des demandes différées	0,00	0,00
Indicateur de coût moyen de gestion (achat exclu)	735,08	3 438,97
Indicateur de coût moyen de gestion (achat inclus)	16 125,08	74 888,42
Marge nette	4 394,92	20 561,03

Table des matières

Index thématique

de calculer le point de commande à partir d'un niveau de service imposé a priori, en général le même pour toute une famille d'articles.

Illustrons cette démarche à partir d'un exemple portant sur les cinq articles du [tableau 250 de la page 848](#) qui suivent tous une loi Normale. Les quantités de commande correspondent aux quantités de Wilson et les points de commande sont déterminés, à titre d'exemple, suivant différents critères: stock de sécurité fixé arbitrairement à 30% de la demande moyenne durant le délai d'obtention, pourcentage de demandes non satisfaites fixé pour tous les articles à une même valeur. Les résultats des calculs sont consignés dans le [tableau 251 de la page 850](#). La valorisation économique se fonde sur un taux annuel de possession de 20% pour tous les articles. La politique optimale se traduit par une valeur annuelle d'approvisionnement manquant égale à 7318,81, ce qui correspond à 0,61% de la valeur annuelle des approvisionnements (1200681,19). On peut constater sur la [figure 215](#), que si l'on impose ce niveau de service à tous les articles, le coût de gestion sera un peu plus élevé (un calcul précis montre que cette différence est de 1622).



TABLEAU 249

Analyse de la politique optimale de la **SUPERLAMBDA** pour la bouilloire électrique
(Univers aléatoire - demandes non satisfaites partiellement perdues)

Politique optimale d'approvisionnement des bouilloires électriques		
Conséquences physiques	Par cycle de réapprovisionnement	Par an
Quantité de commande	515	-
Point de commande	218	-
Stock de sécurité	51,33	-
Nombre moyen annuel de commandes (et de cycles de réapprovisionnement)	-	4,66
Intervalle moyen entre 2 commandes	-	61,8 jours
Probabilité de rupture avant livraison	15,23%	-
Rupture moyenne de stock (à 60 % perdue)	3,88	18,10
Demande moyenne satisfaite immédiatement	511,12	2 381,90
Pourcentage de demandes non satisfaites immédiatement	0,75%	0,75%
Intervalle moyen entre 2 ruptures	-	405,8 jours
Stock moyen disponible avant livraison	55,22	-
Stock moyen détenu	310,25	310,25
Taux moyen annuel de rotation du stock	-	7,74
Conséquences financières		
Dépense moyenne d'acquisition	15 450,00	71 674,29
Coût moyen de commande	300,00	1 398,06
Coût moyen de possession	399,45	1 861,50
Marge non réalisée pour cause de rupture de stock	23,30	108,57
Coût moyen des demandes différées	7,77	36,19
Indicateur de coût moyen de gestion (achat exclu)	730,51	3 404,32
Indicateur de coût moyen de gestion (achat inclus)	16 180,51	74 970,03
Marge nette	4 419,49	20 595,68

Table des matières

Index thématique

TABLEAU 250

Données de base de l'exemple du suivi de politiques non optimales

i	\bar{x}_j^\dagger	σ_j^\dagger	c_{r_j}	c_{u_j}	c_{c_j}	L_j^\ddagger
1	2400	189,74	10	30	300	20
2	800	200	15	45	400	15
3	1000	300	40	100	400	20
4	4000	500	60	150	300	15
5	8000	1000	30	50	300	10

†. Données annuelles.

‡. En jours ouvrables (année de 288 jours ouvrables).

D'une manière générale, il est facile de vérifier que l'application de règles empiriques qui ne tiennent compte ni du délai d'obtention, ni de la dispersion de la demande est moins « bonne » que celles qui se basent sur la notion de niveau de

FIGURE 215
Analyse globale des politiques d'approvisionnement testées

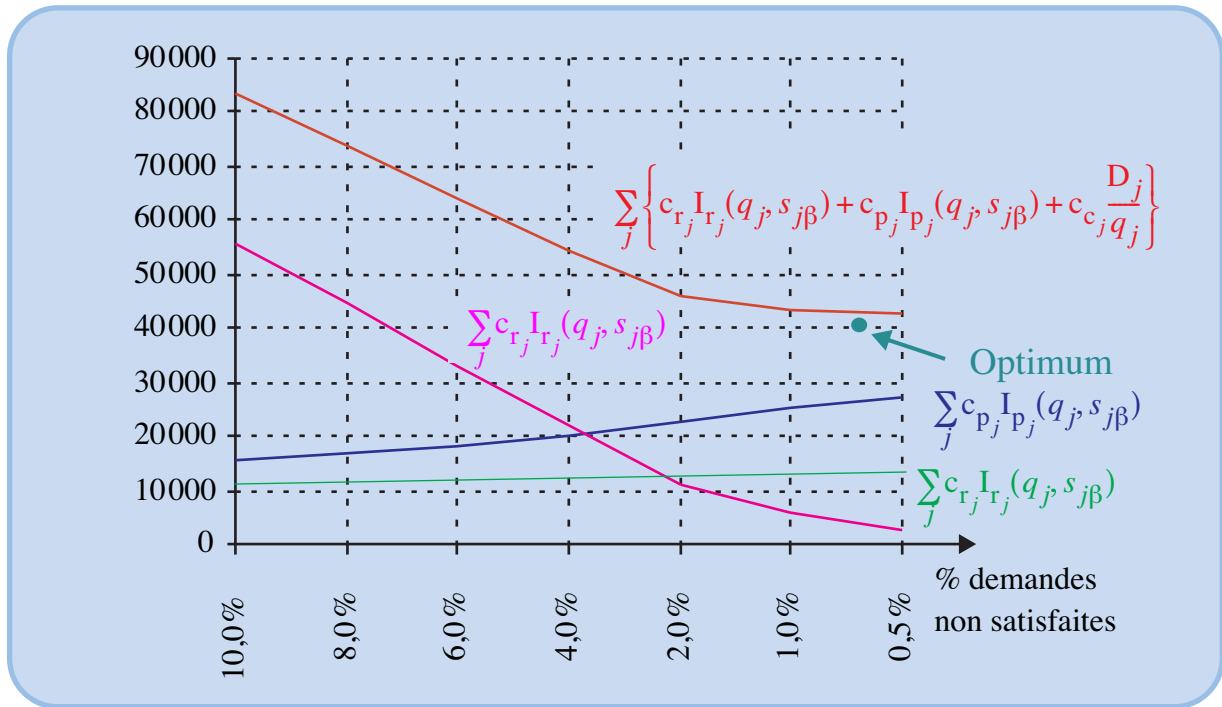


Table des matières

Index thématique

service: en règle générale, il est possible d'obtenir le niveau de performance (valeur moyenne des stocks, coût moyen de gestion annuel) des politiques empiriques avec un niveau de service nettement meilleur, ou d'atteindre le niveau de service de ces politiques empiriques avec une performance accrue (valeurs plus faibles des immobilisations ou des coûts moyens annuels de gestion).

II-1.1.5 Détermination d'une politique optimale (q, s) sous contrainte de niveau de service

Il n'est pas rare que le responsable d'un stock assigne à celui-ci un niveau de service minimal à respecter. Le plus souvent cette contrainte porte sur le pourcentage annuel de demandes non satisfaites et le problème est alors de déterminer la politique optimale effectuant un arbitrage entre coûts de possession, de rupture et de commande, tout en respectant cette exigence d'un pourcentage $\beta_A (= I_r(s)/q)$, cf. relation 296, page 843), inférieur ou égal à un seuil β_0 .

Si l'on se place dans le cas des demandes non satisfaites perdues, un raisonnement analogue à celui mené au § I-2.3.1, page 802, conduit à dériver le Lagrangien de la relation 300, où $C(q, s)$ est donné par la relation 291 de la page 842.

$$H = C(q, s) + \lambda \left(\frac{I_r(s)}{q} - \beta_0 \right)$$

$$H = \left[c_c \frac{D}{q} + p \left\{ c_p \left(\frac{q}{2} + s - D \cdot L \right) + \left(\frac{c_p \cdot L}{2} + c_{rd} \right) \cdot \frac{D}{q} \cdot I_r(s) \right\} \right] + \lambda \{ I_r(s)/q - \beta_0 \}$$

relation 300

TABLEAU 251
Analyse de différentes politiques d'approvisionnement

	j	q_j	s_j	α_j	I_{r_j}	β_j	I_{p_j}	coût total annuel [†]
Politique optimale	1	513	225	12,17%	2,94	0,6%	316,30	3438,97
	2	290	81	19,44%	4,82	1,7%	186,74	2983,49
	3	239	165	11,34%	4,30	1,8%	217,21	6737,49
	4	330	408	4,01%	1,83	0,6%	365,58	15932,19
	5	785	839	3,21%	2,85	0,4%	816,26	12091,13
	Σ	-	-	-	-	-	-	-
Politique imposée [‡]	1	490	217	15,87%	4,09	0,8%	297,04	3451,83
	2	267	54	39,21%	12,44	4,7%	152,22	3 127,72
	3	200	90	39,61%	22,01	11,0%	131,84	9039,58
	4	283	271	29,19%	20,79	7,3%	214,39	28303,20
	5	693	542	29,19%	41,73	6,0%	492,36	22837,16
	Σ	-	-	-	-	-	-	-
Politique imposée $\beta = 0,5\%$	1	490	230	10,29%	2,40	0,5%	309,46	3443,65
	2	267	110	6,67%	1,30	0,5%	202,66	3080,92
	3	200	216	3,23%	0,98	0,5%	246,57	7128,10
	4	283	420	3,18%	1,40	0,5%	353,92	16044,60
	5	693	822	3,79%	3,45	0,5%	753,41	12190,72
	Σ	-	-	-	-	-	-	-
Politique imposée $\beta = 1\%$	1	490	230	10,29%	2,40	0,5%	309,46	3443,65
	2	267	110	6,67%	1,30	0,5%	202,66	3080,92
	3	200	216	3,23%	0,98	0,5%	246,57	7128,10
	4	283	420	3,18%	1,40	0,5%	353,92	16044,60
	5	693	822	3,79%	3,45	0,5%	753,41	12190,72
	Σ	-	-	-	-	-	-	-
Politique imposée $\beta = 5\%$	1	490	158	56,77%	24,22	4,9%	248,58	4147,02
	2	267	52	40,72%	13,15	4,9%	150,79	3 146,52
	3	200	130	22,04%	9,89	4,9%	165,89	7295,89
	4	283	298	21,70%	14,04	5,0%	237,79	23282,16
	5	693	568	25,34%	34,52	5,0%	515,27	20572,06
	Σ	-	-	-	-	-	-	-
Politique imposée $\beta = 10\%$	1	490	123	80,92%	48,60	9,9%	225,56	5202,94
	2	267	27	62,90%	26,39	9,9%	131,67	3569,42
	3	200	96	36,82%	19,82	9,9%	136,53	8693,89
	4	283	248	36,30%	28,12	9,9%	195,54	33952,76
	5	693	464	41,77%	69,09	10,0%	428,45	31675,46
	Σ	-	-	-	-	-	-	-

†. Coût annuel de possession + coût annuel de commande + coût annuel de rupture.

‡. Stock de sécurité = 30% de la demande moyenne durant le délai d'obtention.

La dérivée de H par rapport à q et s , compte tenu de ce qui a été vu pour les dérivées de $C(q, s)$ par rapport à q et s , est:

$$\frac{\partial H}{\partial q} = \frac{c_p}{2} - [c_c + c_r \cdot I_r(s)] \cdot \frac{D}{q^2} - \frac{\lambda \cdot I_r(s)}{q^2} = 0$$

d'où

Table des matières

Index thématique

$$q^* = \sqrt{\frac{2 \cdot [D \cdot \{c_r \cdot I_r(s) + c_c\} + \lambda \cdot I_r(s^*)]}{c_p}} \quad \text{relation 301}$$

Par ailleurs on doit avoir à l'optimum :

$$\frac{\partial H}{\partial s} = c_p - \left[\frac{c_p}{2} + c_r \cdot \frac{D}{q} \right] \cdot \frac{\partial I_r(s)}{\partial s} - \frac{\lambda}{q} \cdot \frac{\partial I_r(s)}{\partial s}$$

$$\frac{\partial H}{\partial s} = c_p - \left[\frac{c_p}{2} + \frac{c_r \cdot D}{q} + \frac{\lambda}{q} \right] \cdot [-P(X > s)] = 0$$

d'où :

$$P(X > s^*) = \frac{c_p}{c_p/2 + c_r \cdot D/q^* + \lambda/q^*} \quad \text{relation 302}$$

Le même raisonnement, dans le cas de demandes non satisfaites partiellement différées et partiellement perdues (cf. § II-1.1.3.3, page 841) conduit aux relations générales suivantes¹ :

$$q^* = \sqrt{\frac{D \cdot [c_c + \{p \cdot (c_{rd} + c_p \cdot L/2) + (1-p) \cdot c_{rp}\} I_r(s^*)] + \lambda \cdot I_r(s^*)}{c_p/2}}$$

$$P(X > s^*) = \frac{c_p}{p(D/q^*)(c_{rd} + c_p \cdot L/2) + (1-p)(c_p/2 + c_{rp} \cdot D/q^*) + \lambda/q^*}$$

relations 303

Table des matières

La dérivée de H par rapport à λ , nulle à l'optimum conduit à satisfaire la relation 304 :

$$I_r(s^*) = q^* \cdot \beta_0 \quad \text{relation 304}$$

Index thématique

Illustrons l'application de ces relations dans le cadre de demandes non satisfaites différées à 40%, en supposant que le responsable de l'approvisionnement impose à la politique optimale un pourcentage de demandes annuelles non satisfaites inférieur ou égal à 0,3%, valeur inférieure au $\beta = 0,57\%$ trouvé à l'optimum sans contrainte (tableau 248, page 847). Si le pourcentage demandé est supérieur à celui de la solution optimale sans contrainte, on conserve cette dernière qui fournit simultanément un meilleur niveau de service et une meilleure marge.

Sur le plan de la résolution numérique, il y a normalement lieu de combiner l'algorithme de la page 809 et celui de la page 839, en utilisant les relations qui viennent d'être établies, mais la recherche de l'optimum est plus rapide si l'on part d'une solution initiale obtenue comme suit :

- **Étape 1** : calculer q et s en prenant $\lambda = 0$ (solution optimale sans contrainte), ce qui donne $q = 515$ et $s = 218$.
- **Étape 2** : calculer s tel que $I_r(s)/q = \beta_0$ en utilisant la valeur de q trouvée, ce qui donne dans notre exemple $1,545 = \sigma \cdot g(t_s) = 50 \cdot g(t_s)$, d'où l'on tire $s = 241$ et $\alpha(s) = 6,86\%$.

1. La seconde de ces relations pouvant encore s'écrire $\lambda = \frac{c_p q^*}{P(X > s^*)} - (D[p(c_{rd} + c_p \cdot L/2) + (1-p)c_{rp}] + (1-p)(q^* c_p/2))$.

- **Étape 3**: calculer la valeur de λ à partir de la relation 301 : $\lambda = 25862$.
- **Étape 4**: calculer la valeur de q en utilisant la relation 301: $q = 512$.
- **Étape 5**: si cette valeur de q est identique à celle précédemment calculée et qu'il en est de même pour celle de s , la solution optimale est trouvée, dans le cas contraire, il faut revenir à l'étape 2. Le caractère entier de ces variables conduit normalement à une solution rapide (ici en 5 itérations) et à ne pas porter une attention excessive à la précision de λ (ici 27130).

L'application de cet algorithme conduit aux résultats du tableau 252.



TABLEAU 252

*Analyse de la politique optimale de SUPERLAMBDA pour la bouilloire électrique
(Univers aléatoire - demandes non satisfaites perdues)
Sous contrainte de niveau de service $\beta_A = 0,3\%$*

Politique non optimale d'approvisionnement (%DNS imposé) des bouilloires électriques		
Conséquences physiques	Par cycle de réapprovisionnement	Par an
Quantité de commande	514	-
Point de commande	241	-
Stock de sécurité	74,33	-
Nombre moyen annuel de commandes (et de cycles de réapprovisionnement)	-	4,67
Intervalle moyen entre 2 commandes	-	61,7 jours
Probabilité de rupture avant livraison	6,86%	-
Rupture moyenne de stock (à 60 % perdue)	1,48	6,89
Demande moyenne satisfaite immédiatement	512,52	2 393,11
Pourcentage de demandes non satisfaites immédiatement	0,29%	0,29%
Intervalle moyen entre 2 ruptures	-	899,8 jours
Stock moyen disponible avant livraison	75,81	-
Stock moyen détenu	331,87	331,87
Taux moyen annuel de rotation du stock	-	7,23
Conséquences financières		
Dépense moyenne d'acquisition	15 420,00	71 875,92
Coût moyen de commande	300,00	1 400,78
Coût moyen de possession	426,46	1 991,23
Marge non réalisée pour cause de rupture de stock	8,86	41,37
Coût moyen des demandes différées	2,95	13,79
Indicateur de coût moyen de gestion (achat exclu)	738,27	3 447,16
Indicateur de coût moyen de gestion (achat inclus)	16 158,27	75 281,72
Marge nette	4 401,73	20 552,84
	Lambda = 27130	

Table des matières

Index thématique

Sur le plan de l'interprétation économique des résultats, le rapport $\lambda / D / (1-p)$ s'analyse, dans le cas de ventes perdues, comme l'accroissement du coût de rupture aboutissant à une valeur de c_r qui donnerait la même solution optimale ($q = 515$, $s = 218$, $\beta = 0,3\%$) en l'absence de toute contrainte de niveau de service. Cette pénalité, à ajouter à la marge non réalisée du fait de la non satisfaction d'une

demande, est ici de $27\,130 / 2\,400 / 0,6 \approx 19$ dollars liduriens ; elle s'interprète comme une espérance mathématique de perte de Goodwill¹ (qui peut inclure du reste la marge non réalisée sur d'autres articles, à la suite du mécontentement du client, qui n'effectue pas ses autres achats dans le magasin).

II-1.1.6 Cas des points de commande multiples

L'analyse des politiques du type «point de commande-quantité économique de commande» en univers aléatoire que l'on examine dans cette section repose sur l'hypothèse implicite que l'on ne se trouve pas dans le cas de points de commande multiples, c'est-à-dire qu'il n'y a jamais plus d'une commande en attente de livraison. Il n'en est pas toujours ainsi, en particulier si les coûts de commande sont relativement faibles ou si les délais d'obtention sont importants. D'un point de vue analytique, on ne rencontre pas trop de difficulté si les demandes non satisfaites sont différées ; il n'en est malheureusement pas de même si ces demandes sont perdues. Si vous utilisez le logiciel, vérifiez bien que vous ne vous trouvez pas dans ce cas de figure qui invalide les résultats trouvés. Examinons cependant les approches disponibles.

II-1.1.6.1 Cas des demandes non satisfaites différées

Il suffit alors de déclencher une commande lorsque la position de stock (et non le stock disponible) franchit le point de commande s . L'étude de la solution analytique exacte² montre, si la demande X durant le délai d'obtention suit la loi Normale ou une loi de Poisson, qu'il faut ajouter au coût moyen annuel de gestion $C(q, s)$ de la relation 287 de la page 840, la quantité $G = H - c_p I_r(s) / 2$, avec :

$\mathcal{L}(X) = \mathcal{A}(\bar{x}) \rightarrow H = c_p(0,5 + K(s)/q)$, où

$$K(s) = \frac{\bar{x}^2}{2} P(X \geq s-1) - s \cdot \bar{x} \cdot P(X \geq s) + \frac{s(s+1)}{2} \cdot P(X \geq s)$$

$\mathcal{L}(X) = \mathcal{N}(\bar{x}, \sigma) \rightarrow H = c_p \cdot K(s)/q$, où

$$K(s) = \sigma \cdot t_s \cdot \left[\left(t_s + \frac{1}{t_s} \right) \cdot \sigma \cdot P(X > s) - f(t_s) \right]$$

Si la quantité G est relativement faible par rapport à $C(q, s)$ obtenu à l'optimum (disons moins de 1%) on gardera la solution trouvée, sinon on utilisera la solution optimale³ définie par les relations 305, qui doivent être utilisées avec un algorithme voisin de celui de la page 840.

1. Un raisonnement similaire a été conduit au chapitre précédent à la page 679

2. Adaptée des relations 4-72, 4-73, 4-89 et 4-90 de Hadley et Whitin (1966, [212]), on peut noter que cette solution analytique ne repose pas sur l'hypothèse simplificatrice.

3. Optimale si $K(s^* + q^*) \approx 0$, ce qui est pratiquement toujours vérifié.

$$q^* = \sqrt{\frac{2D}{c_p}(c_c + c_r \cdot I_r(s)) + 2 \cdot K(s^*)} \text{ avec } K(s) :$$

$$- \mathcal{L}(X) = \mathcal{P}: K(s) = \frac{\bar{x}^2}{2} P(X \geq s-1) - s \cdot \bar{x} \cdot P(X \geq s) + \frac{s(s+1)}{2} \cdot P(X \geq s)$$

$$- \mathcal{L}(X) = \mathcal{N}: K(s) = \sigma \cdot t_s \cdot \left[\left(t_s + \frac{1}{t_s} \right) \cdot \sigma \cdot P(X > s) - f(t_s) \right]$$

$\mathcal{L}(X) = \mathcal{P} \Rightarrow s^* = s$ maximal tel que :

$$[Dc_r - c_p(s - \bar{x})]P(X \geq s) + c_p P(X = s) > q^* c_p$$

$\mathcal{L}(X) = \mathcal{N} \Rightarrow s^*$ tel que :

$$[D \cdot c_r - c_p(s^* - \bar{x})]P(X > s^*) + c_p \cdot \sigma \cdot f(t_s) = q^* \cdot c_p$$

relations 305

II-1.1.6.2 Cas des demandes non satisfaites perdues

Comme nous l'avons vu au chapitre XI (§ II-2.2, page 739), le cas des demandes perdues est plus difficile à traiter correctement du fait de la non indépendance entre les différentes périodes. Lorsque la quantité économique de commande est supérieure au point de commande, le système-stock n'est pas toujours en attente de livraison et les périodes durant lesquelles on attend une livraison ne se chevauchent pas. L'étude analytique des points de commande multiples en univers aléatoire dépasse le propos introductif que l'on s'est fixé ici.

II-1.2 Politique optimale « q, s » avec demande aléatoire et délai d'obtention aléatoire

Ce problème sera analysé, comme d'habitude, à partir d'un exemple numérique (§ II-1.2.1), celui-ci nous mènera à rechercher la probabilité de rupture lorsque le délai d'obtention est aléatoire (§ II-1.2.2, page 856), mais les implications sur le plan du calcul numérique sont telles que l'on est conduit à faire l'étude analytique de la loi de demande sur le délai d'obtention aléatoire (§ II-1.2.3, page 858). On examinera enfin (§ II-1.2.4, page 859) la politique optimale découlant de la recherche de la minimisation du coût de gestion comportant comme au § II-1.1, des coûts de commande, de rupture, et de possession.

II-1.2.1 Exemple introductif

Reprenons le problème de nos bouilloires électriques et supposons maintenant que le fabricant ne soit pas techniquement en mesure de garantir un délai de livraison: le délai d'obtention L sera désormais variable et non égal à 20 jours. On supposera que les autres données du problème restent inchangées.

La recherche d'une politique optimale « q, s » ne pourra alors se faire qu'à condition de connaître une distribution de probabilités de ce délai d'obtention L . Pour ce faire, deux méthodes sont a priori envisageables et c'est la seconde que nous utiliserons ici.

- *Estimation sur le passé de la distribution de probabilités du délai d'obtention*
Pour pouvoir procéder ainsi, il faudra disposer d'informations suffisantes, c'est-à-dire, d'une part que le nombre de livraisons (et donc de délais d'obtention observables) soit assez important pour pouvoir induire une distribution théorique à partir des observations et, d'autre part, que les informations pertinentes aient été enregistrées. Ces deux conditions sont peu souvent remplies simultanément, et lorsqu'elles le sont, il convient de veiller tout particulièrement à ce que les différentes observations soient comparables. En effet, l'hypothèse du «toutes choses égales par ailleurs» est indispensable pour postuler que la chronique observée correspond bien à une série de réalisations d'une même variable aléatoire. Cette condition draconienne risque de rendre nécessaire l'amputation d'une partie ancienne de la chronique, et dès lors d'empêcher toute induction statistique «sérieuse».

- *Estimation subjective de la distribution de probabilité du délai d'obtention*
Deux méthodes sont habituellement proposées :

- La première utilise le dire d'expert et privilégie des distributions théoriques continues de probabilités comme la loi Triangulaire ou la loi Bêta¹ qui permettent de reconstituer la distribution à partir de trois informations recueillies auprès des responsables techniques : la durée minimale, la durée maximale et la durée la plus probable (c'est-à-dire le mode). Le recueil de données est facile à mettre en œuvre, mais, en contrepartie, la distribution continue du délai d'obtention ne permet, à quelques rares exceptions, que d'utiliser une approche simulatoire, ce qui crée des difficultés de calcul dans la recherche numérique de la solution optimale².
- La seconde méthode d'estimation de la distribution de probabilités empiriques. Elle consiste à poser une série de questions du type «donnez la probabilité pour que le délai d'obtention soit inférieur à n jours (ou semaines, ou...)» pour différentes valeurs croissantes de n. Reprenons l'exemple des bouilloires électriques et supposons que l'application d'une telle procédure ait donné les réponses suivantes :

- . Probabilité d'un délai d'obtention inférieur à 5 jours = 0 %
- . Probabilité d'un délai d'obtention inférieur à 15 jours = 20 %
- . Probabilité d'un délai d'obtention inférieur à 25 jours = 70 %
- . Probabilité d'un délai d'obtention inférieur à 35 jours = 100 %

On tire alors sans difficulté de cette fonction de répartition, en prenant par exemple comme unité de temps la dizaine de jours ouvrables :

$$P(L < 0,5) = 0 ; P(L < 1,5) = 0,2 ; P(L < 2,5) = 0,7 ; P(L < 3,5) = 1$$

Lorsque cette technique est utilisée à des fins de simulation, seule la fonction de répartition présente un intérêt ; mais ici c'est la distribution de probabilités qui importe. Si l'on affecte au centre de classe la probabilité

1. Pour une présentation de ces distributions par exemple Giard (1995, [182]), chapitre III, §II.3 et, pour une présentation succincte des approches simulatoires, voir le chapitre II, §II.2. L'usage de la loi Bêta a été évoqué en ordonnancement de projet, page 325.

2. La recherche de la solution optimale peut s'effectuer à l'aide d'algorithmes génétiques (voir chapitre III, page 196), mais les temps de calcul rendent cette approche difficile d'application pour un grand nombre d'articles.

de la classe, on obtient alors la distribution suivante: $P(L = 1) = 0,2$; $P(L = 2) = 0,5$; $P(L = 3) = 0,3$.

II-1.2.2 Probabilité de rupture et délai d'obtention aléatoire

Le problème posé est celui du calcul de la probabilité de rupture α encourue avec un point de commande s , que l'on prendra égale à 272 à titre d'exemple. Pour calculer α il faut tout d'abord introduire la distribution conditionnelle de la demande, puis utiliser les théorèmes classiques de probabilité.

II-1.2.2.1 La notion de distribution conditionnelle de la demande

La détermination de la loi de demande pour chacun des délais d'obtention s s'effectue sans difficulté dans notre exemple numérique si l'on tient compte, d'une part du fait que la loi de la demande annuelle est une loi Normale de moyenne 2400 et d'écart-type 189,74 et, d'autre part, des deux propriétés classiques suivantes:

- Si la variable aléatoire X suit une loi Normale, la variable aléatoire $Y = \sum_{k=1}^K X$ suit elle-même une loi Normale.
- La moyenne et la variance de cette variable Y se déduisent de la moyenne et de la variance de X par une simple multiplication par le nombre K^1 .

On a donc:

- pour $L = 1$: $\mathcal{L}(X) = \mathcal{N}(2400 \cdot 10/288; 189,74 \cdot \sqrt{10/288}) = \mathcal{N}(83,3, 35,4)$
 - pour $L = 2$: $\mathcal{L}(X) = \mathcal{N}(2400 \cdot 20/288; 189,74 \cdot \sqrt{20/288}) = \mathcal{N}(166,7, 50)$
 - pour $L = 3$: $\mathcal{L}(X) = \mathcal{N}(2400 \cdot 30/288; 189,74 \cdot \sqrt{30/288}) = \mathcal{N}(250, 61,2)$
- et d'une façon générale:

- pour $L = l$: $\mathcal{L}(X) = \mathcal{N}(2400 \cdot l; 189,74 \cdot \sqrt{l})$

Ces différentes distributions de probabilités sont spécifiques du délai d'obtention d ; pour bien les différencier, on utilisera les notations des probabilités conditionnelles $\mathcal{L}(X / L = l) = \mathcal{N}(2400 \cdot l; 189,74 \cdot \sqrt{l})$, d'où:

$$P(X > x_0 / L = l) = \frac{1}{(189,74 \cdot \sqrt{l})\sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot \int_{x_0}^{\infty} e^{-\frac{(x-2400 \cdot l)^2}{(189,74 \cdot \sqrt{l})^2}} dx$$

II-1.2.2.2 Utilisation des théorèmes classiques de probabilité

Dans notre exemple, la durée d'obtention L est une variable aléatoire définie par la distribution de probabilités suivante: $P(L = 1) = 0,2$; $P(L = 2) = 0,5$; $P(L = 3) = 0,3$. La fonction de répartition de la demande sur cette durée aléatoire s'obtient sans difficulté en utilisant le théorème des probabilités totales dans le cas d'événements exclusifs:

1. Il ne s'agit pas de la multiplication d'une variable aléatoire X par une constante K (auquel cas, la variance de Y aurait dû être multipliée par K^2), mais bien d'un problème de somme de variables aléatoires indépendantes (et même plus précisément d'un problème qualifié de «convolution» par les statisticiens).

$$P(X < x) = P[(X < x \text{ et } L = 1) \text{ ou } (X < x \text{ et } L = 2) \text{ ou } (X < x \text{ et } L = 3)]$$

La probabilité d'avoir $X < x$ en sachant que le délai d'obtention est $L = 1$ se calcule sans problème en utilisant le théorème de probabilités composées dans le cas d'indépendance: $P(X < x \text{ et } L = 1) = P(L = 1) \cdot P(X < x / L = 1)$. On peut donc écrire: $P(X < x) = P(L = 1) \cdot P(X < x / L = 1) + P(L = 2) \cdot P(X < x / L = 2) + P(L = 3) \cdot P(X < x / L = 3)$ et si l'on s'intéresse à la probabilité de rupture α , c'est-à-dire à la probabilité complémentaire à 1 de la fonction de répartition, on a:

$$\alpha = 1 - P(X < x) = P(X > x) = P(L = 1) \cdot P(X > x / L = 1) + P(L = 2) \cdot P(X > x / L = 2) + P(L = 3) \cdot P(X > x / L = 3)$$

Pour le point de commande $s = 272$, la probabilité de rupture α est:

$$\alpha = P(X > 272) = \frac{0,2}{\sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot \int_{272}^{\infty} e^{-\frac{[(x-83,3)/35,4]^2}{2}} dx + \frac{0,5}{\sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot \int_{272}^{\infty} e^{-\frac{[(x-166,7)/50]^2}{2}} dx + \frac{0,3}{\sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot \int_{272}^{\infty} e^{-\frac{[(x-250)/61,2]^2}{2}} dx$$

Ce qui donne dans notre exemple numérique:

$$\left. \begin{aligned} P(X > 272 / D = 1) &= P(T > (272 - 83,3)/35,4) = 0 \% \\ P(X > 272 / D = 2) &= P(T > (272 - 166,7)/50) = 1,69\% \\ P(X > 272 / D = 3) &= P(T > (272 - 250)/61,2) = 35,48\% \end{aligned} \right\} \rightarrow \alpha = 0,2 \cdot 0 + 0,5 \cdot 1,69 + 0,3 \cdot 35,48 = 11,49\%$$

En définitive la probabilité de rupture ainsi calculée n'est autre que l'espérance mathématique des probabilités de rupture calculées pour les différents délais d'obtention.

Table des matières

II-1.2.2.3 Généralisation

La fonction de répartition de la demande pendant un délai d'obtention aléatoire (ou, ce qui revient au même, la probabilité de rupture pour un délai d'obtention aléatoire) s'obtient sans difficulté en généralisant la démarche précédente. Si le délai d'obtention D est une variable aléatoire discrète définie entre les bornes l_1 et l_2 , on a:

Index thématique

$$P(X < x) = \sum_{L=l_1}^{L=l_2} P(L = l) \cdot P(X > x / L = l) \tag{relation 306}$$

ce qui peut encore s'écrire si la loi de la demande est continue, sa densité de probabilité (conditionnelle) étant notée $f(x, d)$:

$$P(X < x) = \sum_{L=l_1}^{L=l_2} P(L = l) \cdot \int_{-\infty}^x f(x, d) dx \tag{relation 307}$$

Si le calcul direct est envisageable lorsque la loi du délai d'obtention est discrète, il est nettement plus délicat à mener lorsque cette dernière est continue (utilisation d'une loi Bêta par exemple). On est en effet, alors, dans l'obligation, sauf résultat analytique particulier (voir ci-après), de procéder à une double intégration ce qui nécessite un recours presque obligé à l'informatique pour résoudre numériquement des problèmes répétitifs. Si l'on note $g(l)$ la densité de probabilité du délai d'obtention, la transposition au cas continu de ce que l'on vient de voir

est: $P(X < x) = \int_{l_1}^{l_2} \{g(l) \cdot P(X < x/l)\} dl$ et si la loi de la demande est elle-même

continue, on a alors: $P(X < x) = \int_{l_1}^{l_2} \left(g(l) \cdot \int_{-\infty}^x (f(x, t) \cdot dx) \right) dl$.

Ces doubles sommations ou doubles intégrations ne sont pas de nature à faciliter la recherche d'une solution numérique à un problème posé. Aussi cherchera-t-on, dans la mesure du possible, la primitive de telles expressions¹. Ceci nous conduit à l'étude analytique de la loi de demande de X sur un délai d'obtention aléatoire L .

II-1.2.3 Etude analytique de la loi de demande X_L sur un délai aléatoire L

Peu de résultats analytiques simplifiant la formule de la loi de demande X_L sur un délai d'obtention aléatoire L , par suppression d'au moins une sommation ou une intégration, sont connus. Par contre il est facile de calculer la moyenne et la variance de X_L à partir de celles de la demande annuelle et de celles du délai d'obtention.

II-1.2.3.1 Exemple de simplification de la formulation analytique de la loi de X_L

Le principal résultat analytique² connu est relatif à la combinaison de loi de demande de Poisson et d'un délai d'obtention suivant une loi gamma:

- La loi de demande annuelle est une loi de Poisson de paramètre λ , la loi de demande durant le délai d'obtention L est alors:

$$P(X = x / L = l) = e^{-\lambda l} \cdot \frac{[\lambda l]^x}{x!}$$

- La densité de probabilité $g(l)$ du délai d'obtention aléatoire l est une loi Gamma³ dont l'expression analytique est:

$$g(l) = \frac{\beta(\beta \cdot L)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \cdot e^{-\beta \cdot l}, \text{ avec } \begin{cases} \Gamma(\alpha) = (\alpha-1)! \text{ si } \alpha \text{ entier} \\ \alpha > 0 ; \beta > 0 ; L > 0 \end{cases}$$

cette loi Gamma, dont la loi exponentielle est un cas particulier ($\alpha = 1$), couvre avec les différentes combinaisons possibles de α et β les principales distributions empiriquement observables.

- La loi de demande x_l durant le délai d'obtention aléatoire l suit alors une loi Binomiale négative⁴:

$$P(X_l = x_l) = \frac{\Gamma(\alpha + x_l)}{x_l! \cdot \Gamma(\alpha)} \cdot \left(\frac{\beta}{\beta + \lambda} \right)^\alpha \cdot \left(\frac{\lambda}{\beta + \lambda} \right)^{x_l} \quad \text{relation 308}$$

1. De nos jours, la solution numérique peut être obtenue très rapidement sur tableur avec un add-in de type @Risk qui permet de construire par simulation (méthode de Monte-Carlo ou celle des hyper-cubes latins) des « combinaisons » de distributions, rapidement et avec une bonne précision.

2. Voir Hadley & Whitin (1966, [212]), p. 109 et s.

3. Voir par exemple Giard (1995, [182]), chap. III, § II-3.4.

4. Voir par exemple Giard (1995, [182]), chap. III, § I-3.1.

Exemple: les ventes hebdomadaires d'une chemise classique blanche de taille 42 dans un grand magasin est approximable par une loi de Poisson de moyenne 10. Si le délai d'obtention suit une loi exponentielle de paramètre $\beta = 0,5$ (ce qui revient à dire que le délai moyen d'obtention est de 2 semaines), on a alors $P(L < l) = 1 - e^{-0,5d}$, ce qui donne, par exemple, pour $l = 6$ semaines : $P(L < 6) = 1 - e^{-0,5 \cdot 6}$. La probabilité d'observer une demande strictement égale à 15, par exemple, est alors ($\alpha = 1$, cf. supra):

$$P(X = 15) = \frac{\Gamma(1+15)}{15! \cdot \Gamma(1)} \left(\frac{0,5}{0,5+10}\right)^1 \left(\frac{10}{0,5+10}\right)^{15} = \frac{15!}{15! \cdot 1!} \frac{0,5}{10,5} \left(\frac{10}{10,5}\right)^{15} = 0,0229$$

II-1.2.3.2 Moyenne et variance de X_L

Si la recherche d'une formulation analytique simplifiée de la loi de demande sur délai d'obtention donne peu de résultats, la démarche suivie (basée sur l'étude des fonctions génératrices) permet¹ de calculer sans difficulté la moyenne $E(X_L)$ de la demande sur délai d'obtention aléatoire L à partir de la moyenne $E(X_1)$ de la demande sur la période de référence ainsi que de la moyenne $E(L)$ du délai d'obtention aléatoire:

$$E(X_L) = E(X_1) \cdot E(L) \quad \text{relation 309}$$

La variance $V(X_L)$ de la demande sur le délai d'obtention aléatoire L se calcule à l'aide de $E(X_1)$ et $E(L)$, ainsi que la variance $V(L)$ du délai d'obtention et celle $V(X_1)$ de la demande sur la période de référence:

$$V(X_L) = E(L) \cdot V(X_1) + [E(X_1)]^2 \cdot V(L) \quad \text{relation 310}$$

Cette relation 310, notons-le au passage, ne fait pas jouer un rôle symétrique aux moyennes.

Table des
matières

Exemple 1. Reprenons l'exemple des ventes de chemises et rappelons que pour la loi de Poisson et pour la loi exponentielle, la moyenne est égale à la variance: $E(X_L) = 10 \cdot 0,5 = 5$ et $V(X_L) = 0,5 \cdot 10 + 10^2 \cdot 0,5 = 55$.

Index
thématique

Exemple 2. Dans le cas des bouilloires électriques, notre exemple numérique donne: $E(L) = 0,2 \cdot 1 + 0,5 \cdot 2 + 0,3 \cdot 3 = 2,1$, soit 21 jours (la période de référence étant de 10 jours ouvrables) et $V(L) = 0,2 \cdot 1^2 + 0,5 \cdot 2^2 + 0,3 \cdot 3^2 - 2,1^2 = 0,49$, ce qui correspond à un écart-type de 7 jours. La demande X_1 définie sur une période unitaire de 10 jours ouvrables suit (voir page 856) la loi $\mathcal{N}(83,3; 35,4)$. On a donc: $E(X_L) = 2,1 \cdot 83,33 = 175$ et $V(X_L) = 2,1 \cdot 35,4^2 + 83,33^2 \cdot 0,49 = 6027,79$ d'où $\sigma_{X_L} = 77,64$. On peut vérifier numériquement à partir de ces données que la loi suivie par X_D ne saurait être une loi Normale, dans ce cas, en effet, on aurait: $P(X > 272) = P(T > (272 - 175)/77,64) = 0,106$ or, cette probabilité de rupture de 10,6% diffère sensiblement du 11,49% trouvé précédemment et qui correspond au risque de rupture réellement encouru dans l'exemple étudié.

II-1.2.4 Minimisation de l'indicateur du coût moyen annuel avec demande aléatoire et délai d'obtention aléatoire

On examinera tout d'abord la formulation analytique du problème posé (cas des demandes perdues, le cas des demandes différées étant plus compliqué) et sa solu-

1. Voir par exemple Hadley et Whitin (1966, [212]) p. 145 (problème 3-8) et 147 (problème 3-12).

tion, puis on reviendra sur notre exemple numérique pour en trouver la solution optimale, ce qui nécessitera d'être en mesure de calculer la valeur du point de commande correspondant à une probabilité de rupture imposée.

II-1.2.4.1 Formulation analytique du problème posé

Que le délai d'obtention soit certain ou aléatoire, le coût annuel de gestion reste: $C(q, s) = c_c \cdot I_c(q) + c_p \cdot I_p(s, q) + c_r \cdot I_r(s)$, seul change le calcul de l'espérance mathématique du stock moyen possédé et de la rupture moyenne.

La rupture moyenne $I_r(s)$ est tout simplement l'espérance mathématique des ruptures moyennes $I_{r_l}(s)$ calculées pour chaque délai d'obtention l .

$$I_r(s) = \sum_{L=l_1}^{L=l_2} P(L=l) \cdot I_{r_l}(s) \quad \text{relation 311}$$

La [relation 275 de la page 836](#) définissant le stock moyen possédé dans le cas général devient de même (en notant \bar{l} le délai moyen d'obtention) :

$$I_p(s, q) = \sum_{L=l_1}^{L=l_2} P(L=l) \cdot \left\{ \frac{q}{2} + (s - D \cdot \bar{l}) + \frac{I_{r_l}(s)}{2} \right\}$$

$$I_p(s, q) = \frac{q}{2} + (s - D \cdot L) + \frac{I_r(s)}{2} \quad \text{relation 312}$$

En définitive, le coût annuel de gestion reste celui défini dans la [relation 277 de la page 836](#), avec simplement un calcul différent de la rupture moyenne par cycle et en remplaçant la durée certaine L par son espérance mathématique \bar{l} :

$$C(q, s) = c_c \cdot \frac{D}{q} + c_p \cdot \left(\frac{q}{2} + s - D \cdot \bar{l} \right) + \left(c_r \cdot \frac{D}{q} + \frac{c_p}{2} \right) I_r(s) \quad \text{relation 313}$$

À l'optimum, la [relation 278 de la page 836](#) reste donc toujours valable (mais le calcul de la rupture moyenne est plus long) :

$$q^* = \sqrt{\frac{2 \cdot D \cdot \{c_c + c_r \cdot I_r(s^*)\}}{c_p}} \quad \text{relation 278}$$

La [relation 279 de la page 837](#) et les relations [282 \(page 838\)](#) ne subissent qu'une transformation mineure liée au fait que la probabilité de rupture α est l'espérance mathématique des probabilités de rupture définies pour chaque délai d'obtention.

$$\alpha = P(X > s^*) = \sum_{L=l_1}^{L=l_2} P(L=l) \cdot P(X > s^* / L=l) = \frac{c_p}{c_r \cdot D/q^* + c_p/2} \quad \text{relation 314}$$

La recherche d'une solution numérique passe donc par l'utilisation de la démarche itérative décrite par l'algorithme de la [page 840](#). Lorsque le délai d'obtention était certain, il suffisait de consulter une table statistique pour trouver immédiatement la valeur de s correspondant à une probabilité de rupture donnée. Il n'est plus possible de procéder aussi simplement maintenant, à moins de constituer une table spécifique pour le problème posé. Lorsque le délai d'obtention est une variable aléatoire discrète susceptible de prendre un nombre restreint de

valeurs (ce qui est le cas de notre exemple numérique) il n'est pas nécessaire de procéder à cette tabulation, comme nous allons le voir maintenant.

II-1.2.4.2 Recherche du point de commande correspondant à une probabilité de rupture imposée

Notons tout d'abord que ce problème ($\alpha \rightarrow s$) est symétrique de celui abordé au § II-1.2.2.3, page 857 ($s \rightarrow \alpha$). Supposons que l'on recherche la valeur de s correspondant à une probabilité de rupture de 11,54%. Nous avons vu à la page 859 que la moyenne et l'écart-type de X_L étaient respectivement 175 et 77,64. À partir de ces informations et d'une relation dérivée de l'inégalité de Bienaymé-Tchebycheff, on peut mettre au point un algorithme de calcul assez performant pour pouvoir envisager de résoudre numériquement cette classe de problèmes.

L'inégalité de Bienaymé-Tchebycheff¹ nous enseigne que pour une variable quelconque de moyenne \bar{x} et d'écart-type σ , la relation suivante est toujours vérifiée : $P(\bar{x} - t \cdot \sigma \leq X \leq \bar{x} + t \cdot \sigma) > 1 - 1/t^2$. On en tire a fortiori que $P(X > \bar{x} + t \cdot \sigma) < 1/t^2$. Donc, pour un risque de rupture donné α (avec $\alpha < 50\%$), la valeur limite de X correspondant à cette probabilité de rupture est nécessairement inférieure à $\bar{x} + \sigma/\sqrt{\alpha}$. Par exemple si l'on cherche la valeur du stock s ayant une probabilité de rupture égale à 11,54%, et si la loi de demande a une moyenne de 175 et un écart-type de 77,54, cette valeur est nécessairement inférieure à $175 + 77,54/\sqrt{0,1154} = 404$.

Table des
matières

Si la moyenne de la loi X a une probabilité de rupture supérieure à la probabilité de rupture demandée, ce qui est toujours le cas si celle-ci n'est pas forte, on dispose alors d'un intervalle dans lequel se situe la valeur recherchée. Dans notre exemple, la valeur du point de commande est comprise entre 175 et 404, renseignement qui ne dépend pas du fait que X est une demande définie sur un délai certain ou sur un délai aléatoire.

Index
thématique

Il ne reste plus alors qu'à rechercher la solution correspondant à la probabilité de rupture demandée de 11,54% en se positionnant au milieu de l'intervalle², c'est-à-dire à $175 + (404 - 175)/2^1 = 289$. Si la probabilité de rupture (en espérance mathématique) pour $s = 289$ est supérieure à 11,54%, c'est que la valeur recherchée est supérieure à 289, et si cette probabilité de rupture est inférieure à 11,54% c'est que la valeur recherchée est inférieure à 289. Dans le premier cas on ajoutera à 289 la valeur : $(404 - 175)/2^2$, et dans le second cas on retranchera cette même valeur. À l'étape suivante, on ajoutera ou retranchera selon le cas de figure, une valeur de $(404 - 175)/2^3$; et ainsi de suite. On atteint donc la précision de l'unité sur le point de commande pour une valeur de n telle qu'elle soit la valeur entière la plus faible possible satisfaisant la relation :

$$2^n \geq 404 - 175 \rightarrow n \geq (\log 229)/(\log 2) = 7,84 \rightarrow n = 8$$

On atteint donc la précision demandée en 8 itérations. Les calculs effectués pour l'initialisation (probabilité de rupture égale à 11,54%) sont donnés dans le tableau 253 où Δ_i représente l'accroissement de la prochaine itération de la recherche de S aboutissant à cette probabilité de rupture de 11,54%.

1. Voir par exemple Giard (1995, [182]), chap. I, p. 67.

2. Cet algorithme de recherche par dichotomie successive est similaire à celui décrit à la page 809.

TABLEAU 253
Calcul de s dans le cas d'un délai d'obtention optimal

Itération i	s_i	Probabilité de rupture (%) pour s_i et $L = l$			α_i	Δ_i
		$L = 1$	$L = 2$	$L = 3$		
1	289	0,00%	0,72%	26,21%	8,22%	-57,25
2	232	0,00%	9,57%	61,56%	23,25%	28,63
3	261	0,00%	2,96%	42,87%	14,34%	14,31
4	275	0,00%	1,51%	34,15%	11,00%	-7,16
5	268	0,00%	2,13%	38,44%	12,60%	3,58
6	271	0,00%	1,85%	36,58%	11,90%	1,79
7	273	0,00%	1,67%	35,36%	11,44%	0,89
8	272	0,00%	1,76%	35,97%	11,67%	

Notons que l'on peut calculer sans difficulté l'espérance mathématique de la rupture durant le délai d'obtention aléatoire, à partir des espérances mathématiques $I_{r1}(s)$, $I_{r2}(s)$ et $I_{r3}(s)$ définies pour des délais certains d'obtention respectivement égaux à 1, 2 ou 3 périodes de référence :

$$I_r(s = 272) = 0,2 \cdot I_{r1}(s) + 0,5 \cdot I_{r2}(s) + 0,3 \cdot I_{r3}(s)$$

ce qui donne ici :

$$I_r(s = 272) = 0,2 \times 0 + 0,5 \times 0,3036 + 0,3 \times 14,7017 = 4,5623$$

II-1.2.4.3 Résolution numérique du problème posé

On utilise donc l'algorithme de la page 839.

- À l'itération 1, on trouve donc la quantité économique de Wilson (490). La probabilité de rupture demandée est, comme à l'itération 1 de la page 839 de 11,54%, puisque tous les paramètres utilisés sont les mêmes. Le point de commande correspondant à cette probabilité de rupture demandée a déjà été calculé dans tableau 268 ; il est de 272. À la fin de la première itération 1, on a la solution : $q_1 = 490$, $s_1 = 272$ et $I_r(s_1 = 272) = 4,5623$.

- À l'itération 2, on a $q_2 = \sqrt{\frac{2 \cdot 2400(300 + 10 \times 4,5623)}{6}} = 526$; on calcule

$$\text{alors } P(X > s_2) = \frac{6}{6/2 + 10 \times 2400/526} = 12,34\% . \text{ Le calcul de } s_2 \text{ à partir du}$$

risque de rupture de 12,34% s'effectue suivant l'algorithme de calcul proposé au § II-1.2.4.2 ci-dessus, on trouve alors :

$$P(X < s_2) = 87,66\% \rightarrow s_2 = 269 \text{ et } I_r(s_2 = 269) = 4,94142$$

- À l'itération 3, on trouve $q_3 = 529$ et $s_3 = 269$. Le point de commande de l'itération 3 est donc le même que celui de l'itération 2, le processus itératif est donc terminé.

La politique optimale dans notre exemple numérique est donc de commander $q^* = 529$ bouilloires électriques lorsque le stock devient inférieur ou égal à 269 bouilloires.

Le coût annuel de gestion est alors, en utilisant la [relation 313 de la page 860](#):

$$C(q^* = 529, s^* = 269) = 300 \frac{2400}{529} + 6 \left(269 - 175 + \frac{529}{2} \right) + \left(\frac{6}{2} + 10 \cdot \frac{2400}{529} \right) \cdot 4,94142 = 3706,75 \text{ \$/an}$$

La marge annuelle moyenne $B(q^*, s^*) = D \cdot c_r - C(q^*, s^*)$ est donc:

$$3(q^* = 529, s^* = 269) = 2400 \cdot 10 - (3706,75) = 20293,25 \text{ \$ / an}$$

Par ailleurs, si chaque cycle a en moyenne une rupture de stock de 4,972 bouilloires, comme il y a $2400 / 529 = 4,537$ cycles en moyenne par an, la rupture moyenne annuelle est $4,537 \times 4,95 = 22,48$ bouilloires; ce qui donne un pourcentage de demandes annuelles non satisfaites de $22,558 / 2400 = 0,94 \%$

Les conséquences de la politique optimale de notre exemple numérique sont consignées dans le [tableau 254](#).

II-2 Les améliorations du modèle en univers aléatoire

Nous reprendrons ici les différentes améliorations du modèle de base en univers certain introduites au § I-2. et qui concernent la prise en compte de l'interdépendance avec d'autres articles (analysée en univers certain au § I-2.3, page 802), et le problème des rabais (analysé en univers certain au § I-2.1, page 783). La détermination de la solution analytique est relativement simple, car dans tous les cas de figure, on repartira de la fonction du coût de gestion introduite en univers certain, en remplaçant le stock moyen annuel par son espérance mathématique et en y ajoutant simplement l'espérance mathématique du coût annuel de rupture. Nous n'examinerons explicitement que le cas des délais d'obtention certains, mais il est clair que l'adaptation au cas du délai d'obtention aléatoire connu en probabilité (cf. § II-1.2, page 854) ne pose pas davantage de difficulté. Ajoutons enfin que, puisqu'il s'agit de la combinaison de deux catégories de problèmes déjà traités, nous n'aborderons pas ces problèmes par le biais d'un exemple introductif.

Table des
matières

Index
thématique

II-2.1 Prise en compte de l'interdépendance entre articles

Nous examinerons successivement le cas de l'utilisation commune et simultanée d'une même ressource rare non financière (§ II-2.1.1) puis celui d'une ressource rare financière (§ II-2.1.2, page 867) avant de traiter le cas des commandes groupées (§ II-2.1.3, page 868). Dans les deux cas, on supposera que l'on n'est pas en présence de points de commande multiples (hypothèse qui conditionne la validité des solutions analytiques proposées).

II-2.1.1 Utilisation commune et simultanée d'une même ressource rare non financière

On abordera tout d'abord la solution analytique puis ses implications du point de vue du calcul pratique de la politique optimale, avant d'illustrer par un exemple numérique ce type de procédure.



TABLEAU 254

Analyse de la politique optimale de **SUPERLAMBDA** pour la bouilloire électrique (demande aléatoire - demandes non satisfaites perdues - délai d'obtention aléatoire)

Politique optimale d'approvisionnement des bouilloires électrique		
Conséquences physiques	Par cycle de réapprovisionnement	Par an
Quantité de commande	529	-
Point de commande	269	-
Stock de sécurité	94,00	-
Nombre moyen annuel de commandes (et de cycles de réapprovisionnement)	-	4,54
Intervalle moyen entre 2 commandes	-	63 jours
Probabilité de rupture avant livraison	12,36%	-
Rupture moyenne de stock (à 100 % perdue)	4,95	22,48
Demande moyenne satisfaite immédiatement	524,05	2 377,52
Pourcentage de demandes non satisfaites immédiatement	0,94%	0,94%
Intervalle moyen entre 2 ruptures	-	513 jours
Stock moyen disponible avant livraison	98,95	-
Stock moyen détenu	360,98	360,98
Taux moyen annuel de rotation du stock	-	6,65
Conséquences financières		
Dépense moyenne d'acquisition	15 870,00	71 325,64
Coût moyen de commande	300,00	1 361,06
Coût moyen de possession	477,39	2 165,86
Marge non réalisée pour cause de rupture de stock	49,55	224,79
Coût moyen des demandes différées	0,00	0,00
Indicateur de coût moyen de gestion (achat exclu)	826,94	3 751,71
Indicateur de coût moyen de gestion (achat inclus)	16 696,94	74 852,57
Marge nette	4 463,06	20 248,29

Table des matières

Index thématique

II-2.1.1.1 Solution analytique

Reprenons la formulation du problème en univers certain (§ I-2.3.1.1, page 803), et plaçons-nous dans le cas général des demandes non satisfaites partiellement perdues, la somme des coûts annuels de gestion que l'on cherche à minimiser est, en sommant sur l'ensemble des articles, les coûts moyens annuels de la relation 291 de la page 842, ce qui conduit à la relation 315.

$$\sum_j C_j(q_j, s_j) = \sum_j \left\{ c_{c_j} \frac{D_j}{q_j} + c_{p_j} \left(\frac{q_j}{2} + s_j - D_j L_j \right) \right\} + \sum_j \left\{ p \frac{D_j}{q_j} \left(c_{p_j} \frac{L_j}{2} + c_{rd_j} \right) + (1-p) \left(c_{rp_j} \frac{D_j}{q_j} + \frac{c_{p_j}}{2} \right) \right\} I_r(s_j) \quad \text{relation 315}$$

Cette optimisation s'effectue sous contrainte de consommation de cette ressource rare. On pourrait considérer, comme on l'a fait en univers certain que la contrainte pèse sur les quantités commandées, le stock disponible juste avant la livraison étant nul ($\sum_j a_j \cdot k_j \cdot q_j \leq A$ (relation 249 de la page 806), mais, le plus souvent, la contrainte portera sur le disponible après livraison.

Compte tenu de ce qui a été vu au chapitre précédent (relation 135 de la page 670), en supposant la commande passée lors du franchissement du point de commande s_j , le stock disponible après livraison, noté $R_p(s_j)$ est égal à la quantité livrée q_j , augmentée l'espérance mathématique du stock résiduel avant la livraison $\{s_j - D_j L_j + I_r(s_j)\}$ et diminué de l'espérance mathématique des demandes non satisfaites différées $p_j I_r(s_j)$:

$$R_p(s_j) = q_j + \{s_j - D_j L_j + I_r(s_j)\} - p_j I_r(s_j) \quad \text{relation 316}$$

Dans ces conditions, l'adaptation de la relation 249, conduit à la relation 317¹.

$$\sum_j a_j \cdot k_j \cdot [q_j + \{s_j - D_j L_j + I_r(s_j)\} - p_j I_r(s_j)] \leq A \quad \text{relation 317}$$

Si la contrainte retenue est celle définie par la relation 249 de la page 806, et la fonction de coût générale, celle définie par la relation 315, la solution optimale obtenue en dérivant le Lagrangien correspondant est :

$$q_j^* = \sqrt{\frac{2 \cdot D_j \cdot [c_{c_j} + \{p_j [c_{p_j} \cdot L_j / 2 + c_{rd_j}] + (1 - p_j) c_{rp_j}\} \cdot I_r(s_j^*)]}{c_{p_j} + 2 \cdot \lambda \cdot a_j \cdot k_j}} \quad \text{relation 318}$$

et les relations de définition des points de commande restent (après indexation par j des paramètres) les relations 293 et 294.

$$P(X_j > s_j^*) = \frac{c_{p_j}}{p_j (D_j / q_j^*) (c_{rd_j} + c_{p_j} \cdot L_j / 2) + (1 - p_j) (c_{p_j} / 2 + c_{rp_j} \cdot D_j / q_j^*)} \quad \text{(cas continu - adaptation de la relation 293 de la page 842)}$$

$$P(X_j > s_j^*) < \frac{c_{p_j}}{p_j (D_j / q_j^*) (c_{rd_j} + c_{p_j} \cdot L_j / 2) + (1 - p_j) (c_{p_j} / 2 + c_{rp_j} \cdot D_j / q_j^*)} < P(X_j > s_j^* - 1) \quad \text{(cas discret - adaptation de la relation 294 de la page 842)}$$

Si la contrainte retenue porte sur le stock après livraison (relation 317). Dans ce cas, la relation 318 reste valable, mais les relations 293 et 294 doivent être remplacées par les relations 319 et 320.

$$P(X_j > s_j^*) = \frac{c_{p_j} + \lambda \cdot a_j \cdot k_j}{p_j (D_j / q_j^*) (c_{rd_j} + c_{p_j} \cdot L_j / 2) + (1 - p_j) (c_{p_j} / 2 + c_{rp_j} \cdot D_j / q_j^* + \lambda \cdot a_j \cdot k_j)} \quad \text{relation 319}$$

Cas continu

1. Pour un article, le stock moyen est donné par la relation 295 de la page 842 qui tient compte du stock résiduel avant livraison. La simplification retenue ici, consistant à multiplier par un coefficient compris entre 0,5 et 1 le stock disponible après la livraison est contestable si ce stock résiduel avant livraison correspond à une fraction significative du stock disponible après livraison et si le coefficient retenu est proche de sa borne inférieure.

$$P(X_j > s_j^*) < \frac{c_{p_j} + \lambda \cdot a_j \cdot k_j}{p_j(D_j/q_j^*)(c_{rd_j} + c_{p_j}L_j/2) + (1-p_j)(c_{p_j}/2 + c_{rp_j}D_j/q_j^* + \lambda a_j k_j)} < P(X_j > s_j^* - 1)$$

*Cas discret**relation 320*

II-2.1.1.2 Calcul de la politique optimale

La solution optimale fait apparaître une interdépendance entre λ , s_j et q_j . L'algorithme à utiliser pour trouver rapidement la solution optimale découle de la combinaison des algorithmes des pages 809 et 839, ce qui donne l'algorithme de la figure 216.

II-2.1.1.3 Exemple numérique

Reprenons l'exemple numérique du § I-2.3.11b, page 803, en supposant maintenant que les lois de demande sont des lois normales. Le délai d'obtention L sera le même pour tous les articles ($L = 20 / 288$). Les données du problème sont résumées dans le tableau 255.

TABLEAU 255
Données du problème de gestion sous contrainte de ressource rare en univers aléatoire

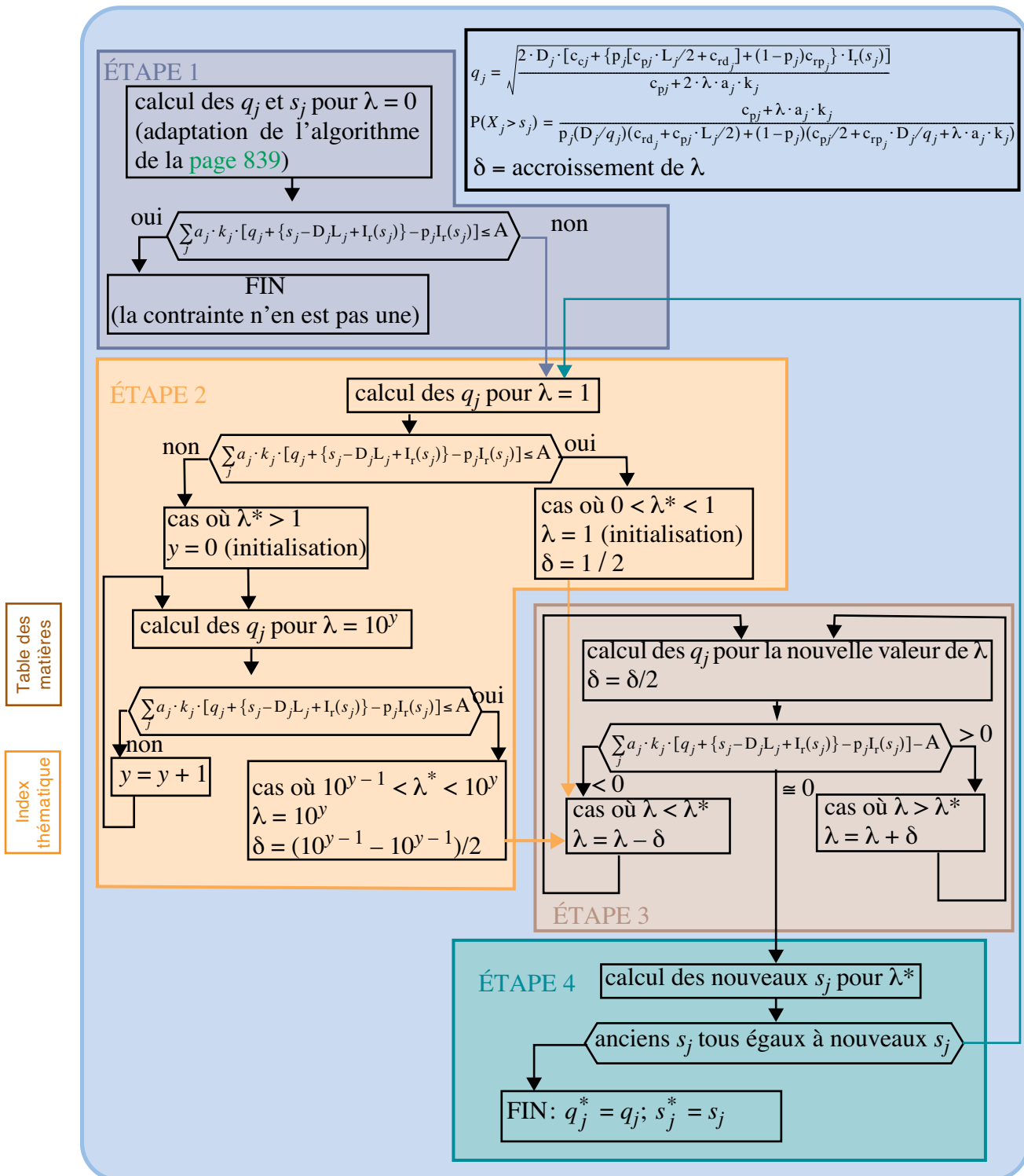
	Article 1 Bouilloire électrique	Article 2 Cocotte- minute	Article 3 Casserole
Coût d'acquisition	30	100	15
Prix de vente	40	130	20
Consommation unitaire du facteur rare	0,05	0,06	0,03
Coefficient k_j	0,6	0,6	0,6
Coût de commande	300	300	300
Probabilité p_j qu'une demande non satisfaite soit différée	40%	40%	40%
Coût d'une demande différée	5,00	7,00	3,00
Type de loi	Normale	Normale	Normale
Demande moyenne (annuelle)	2400	1000	5000
Écart-type (sur Demande annuelle)	189,7367	100	500

Table des
matièresIndex
thématique

Le prix fantôme obtenu est de 212,5 contre 71,87 en avenir certain, les 140 dollars liduriens supplémentaires pouvant s'analyser comme une pénalité supplémentaire due à l'incertitude. À l'optimum on obtient la solution décrite dans le tableau 256 de la page 869 qui conduit à une marge nette annuelle de 66344, contre 67717 sans contrainte (solution impliquant de passer la contrainte de stockage de 30 à 46,6 m³). On notera que test d'arrêt retenu consiste à stopper les itérations dès que la valeur absolue de la différence entre la demande de facteur rare et son offre devient inférieure à la plus forte des consommations unitaires de cette ressource (ici 0,06). Le programme du CD-Rom permet de traiter jusqu'à 10 articles suivant des lois de Poisson et / ou Normales.

FIGURE 216

Algorithme de détermination de la valeur optimale de λ – univers aléatoire



II-2.1.2 Utilisation commune et simultanée d'une ressource rare financière

L'obtention d'une solution analytique spécifique à ce cas de figure ne pose guère de problème¹ on peut l'algorithme général de la page 867 (avec $a_j = c_{u_j}$), car son adaptation à la solution analytique ne permet qu'un gain modeste de temps de calcul.

Reprenons l'exemple du § I-2.3.1.4, page 816, en appliquant les données du tableau 255 et en conservant la contrainte financière de 20000 dollars liduriens. À l'optimum on obtient la solution décrite dans le tableau 256 de la page 869 qui conduit à une marge nette annuelle de 65275, contre 67717 sans contrainte (solution impliquant de passer la contrainte de valeur moyenne des stocks de 20000 à 33983).

II-2.1.3 Commandes groupées

II-2.1.3.1 Solution analytique

L'analyse de ce cas en univers certain a été conduite au § I-2.3.3, page 826. Le coût annuel de gestion dépend de la variable de commande T et des points de commandes s_j et les quantités économiques de commande q_j se déduisent de la demande annuelle D_j et de la périodicité ($q_j = TD_j$). La somme de l'ensemble des coûts annuels de gestion des différents articles, en adaptant la relation 315 de la page 864, peut être approximée par la relation 321 de la page 868 si l'on considère qu'une commande est déclenchée lorsque l'un des points de commande s_j est franchi (la commande porte alors sur les quantités TD_j , diminuées de la différence entre les stocks observés et les points de commande).

$$\sum_j C_j(T, s_j) = \frac{c_c}{T} + \sum_j \left[c_{p_j} \left(\frac{TD_j}{2} + s_j - D_j \cdot L_j \right) \right] + \sum_j \left[\left\{ \frac{p_j}{T} \left(c_{p_j} \frac{L_j}{2} + c_{rd_j} \right) + (1-p_j) \left(\frac{c_{rj}}{T} + \frac{c_{p_j}}{2} \right) \right\} I_r(s_j) \right] \quad \text{relation 321}$$

À l'optimum on a :

$$\frac{\partial C(T, s_j)}{\partial T} = 0 = -\frac{c_c}{T^2} + \sum_j \frac{c_{p_j} D_j}{2} - \frac{\sum_j \{ p_j \cdot (c_{rd_j} + c_{p_j} \cdot L_j/2) + (1-p_j) c_{rp_j} \} \cdot I_r(s_j)}{T^2}$$

D'où la relation 322 caractérisant l'optimum.

$$T^* = \sqrt{\frac{2[c_c + \sum_j \{ p_j \cdot (c_{rd_j} + c_{p_j} \cdot L_j/2) + (1-p_j) c_{rp_j} \} \cdot I_r(s_j^*)]}{\sum_j c_{p_j} \cdot D_j}} = 1/I_c^* \quad \text{relation 322}$$

1. Note de la page précédente. En effet, on cherche ici à minimiser la fonction de coût générale définie par la relation 315 de la page 864, en définissant le coût de possession comme proportionnel au coût d'achat. Il suffit d'adapter les relations 318 à 320 de la page 865, en remplaçant c_{p_j} par ic_{u_j} et k_j par h ce qui donne, après dérivation du Lagrangien correspondant :

$$q_j^* = \frac{1}{\sqrt{1+2h\lambda}} \sqrt{\frac{2 \cdot D_j \cdot [c_{c_j} + \{ p_j [c_{p_j} \cdot L_j/2 + c_{rd_j}] + (1-p_j) c_{rp_j} \} \cdot I_r(s_j^*)]}{c_{u_j}}}$$

$$P(X_j > s_j^*) = \frac{c_{u_j} (i+h\lambda)}{p_j (D_j/q_j^*) (c_{rd_j} + ic_{u_j} L_j/2) + (1-p_j) (c_{u_j}/2 + c_{rp_j} \cdot D_j/q_j^* + h\lambda c_{u_j})}$$

$$\lambda^* = \frac{h}{2A^2} \left(\sum_j \left\{ c_{c_j} \frac{D_j}{q_j} + p_j \left[c_{p_j} \left(\frac{q_j}{2} + s_j - D_j \cdot L_j \right) + \left(\frac{c_{p_j} \cdot L_j}{2} + c_{rd_j} \right) \cdot \frac{D_j}{q_j} \cdot I_r(s_j) \right] + (1-p_j) \left[c_{p_j} \left(\frac{q_j}{2} + s_j - D_j \cdot L_j \right) + \left(\frac{c_{p_j} \cdot L_j}{2} + c_{rp_j} \right) \cdot \frac{D_j}{q_j} \cdot I_r(s_j) \right] \right\} \right)^2$$

TABLEAU 256

Analyse de la politique optimale de la **SUPERLAMBDA** pour son approvisionnement d'articles de cuisine sous contrainte non financière en univers aléatoire



Politique optimale d'approvisionnement sans contrainte de capacité (possible : 30 ; utilisée : 29,96) ; lambda : 212,5)						
Conséquences physiques		bouilloires électriques	cocottes- minute	casseroles		
Quantité de commande		284	137	547		
Point de commande		235	100	536		
Stock moyen disponible avant livraison		70,26	32,10	193,23		
Probabilité de rupture avant livraison		8,59%	12,31%	7,60%		
Rupture moyenne de stock avant livraison (demandes partiellement perdues pour au moins un article)		1,93	1,54	4,46		
Nombre moyen annuel de commandes (et de cycles de réapprovisionnement)		8,45	7,30	9,14		
Rupture moyenne annuelle de stock		16,31	11,28	40,73		
Pourcentage de demandes non satisfaites immédiatement		0,68%	1,13%	0,81%		
Stock moyen détenu		211,14	99,68	464,18		
Intervalle moyen entre 2 ruptures		396,9 jours	320,5 jours	414,7 jours		
Table des matières	Taux moyen annuel de rotation du stock		11,37	10,03	10,77	
	Stock moyen disponible après livraison		353,49	168,48	738,45	
	Consommation moyenne de la ressource rare non financière		10,605	6,065	13,292	29,962
Index thématique	Conséquences financières		bouilloires électriques	cocottes- minute	casseroles	TOTAL
	Dépense moyenne annuelle d'acquisition		71 706,47	99 323,40	74 633,43	245 663,31
	Coût moyen annuel de commande		2 535,21	2 189,78	2 742,23	7 467,22
	Coût moyen annuel de possession		1 266,83	1 993,51	1 392,54	4 652,89
	Marge moyenne annuelle non réalisée pour cause de rupture de stock		97,84	202,98	122,19	423,01
	Coût moyen annuel des demandes différées		32,61	31,57	48,88	113,06
	Indicateur annuel de coût moyen de gestion (achat exclu)		3 932,50	4 417,85	4 305,83	12 656,18
	Indicateur annuel de coût moyen de gestion (achat inclus)		75 541,13	103 538,27	78 817,08	257 896,48
	Marge nette annuelle		20 067,50	25 582,15	20 694,17	66 343,82

II-2.1.3.2 Calcul opérationnel de la politique optimale

Il suffit de reprendre l'algorithme de la page 839 en remplaçant le cartouche de calcul des q_j (j étant alors l'indice d'itération), par la relation 322, puis par le calcul des quantités économiques de commande qui s'en déduit ($q_j = TD_j$, j reprenant la signification de l'indice de l'article).



TABLEAU 257

Analyse de la politique optimale de la **SUPERLAMBDA** pour son approvisionnement d'articles de cuisine sous contrainte financière en univers aléatoire

Politique optimale d'approvisionnement SOUS contrainte de valeur moyenne de stock (possible : 20000 ; utilisée : 20017,77 ; Lambda Budget : 0,479688)

Conséquences physiques	bouilloires électriques	cocottes-minute	casseroles	
Quantité de commande	254	91	523	
Point de commande	238	106	539	
Stock moyen disponible avant livraison	73,02	37,51	196,01	
Probabilité de rupture avant livraison	7,68%	8,27%	7,28%	
Rupture moyenne de stock avant livraison (demandes partiellement perdues pour au moins un article)	1,69	0,95	4,23	
Nombre moyen annuel de commandes (et de cycles de réapprovisionnement)	9,45	10,99	9,56	
Rupture moyenne annuelle de stock	15,97	10,48	40,48	
Pourcentage de demandes non satisfaites immédiatement	0,67%	1,05%	0,81%	
Stock moyen détenu	199,06	82,49	455,11	
Intervalle moyen entre 2 ruptures	396,7 jours	316,9 jours	414 jours	
Taux moyen annuel de rotation du stock	12,06	12,12	10,99	
Stock moyen disponible après livraison	326,35	128,13	717,32	
Consommation moyenne de la ressource rare financière	5 874,26	7 687,65	6 455,87	20 017,77
Conséquences financières	bouilloires électriques	cocottes-minute	casseroles	TOTAL
Dépense moyenne annuelle d'acquisition	71 712,52	99 371,48	74 635,67	245 719,67
Coût moyen annuel de commande	2 834,65	3 296,70	2 868,07	8 999,42
Coût moyen annuel de possession	1 194,37	1 649,74	1 365,33	4 209,44
Marge moyenne annuelle non réalisée pour cause de rupture de stock	95,83	188,56	121,44	405,83
Coût moyen annuel des demandes différées	31,94	29,33	48,58	109,85
Indicateur annuel de coût moyen de gestion (achat exclu)	4 156,79	5 164,33	4 403,42	13 724,54
Indicateur annuel de coût moyen de gestion (achat inclus)	75 773,48	104 347,25	78 917,65	259 038,38
Marge nette annuelle	19 843,21	24 835,67	20 596,58	65 275,46

Table des matières

Index thématique

II-2.1.3.3 Exemple numérique

Reprenons l'exemple du § I-2.3.3.2, page 829, les données des lois de demandes aléatoires étant toujours celles retenues dans le tableau 255 de la page 866. La solution numérique (tableau 258 de la page 871) est alors la suivante ($T = 0,172 \text{ an}^1 \approx 49$ jours ouvrables, contre 32 dans le cas certain).

1. Le coût moyen de gestion annuel d'un article intègre le tiers (puisque'il y a 3 articles) du coût de commande total.

TABLEAU 258

Analyse de la politique optimale de la **SUPERLAMBDA** pour son approvisionnement d'articles de cuisine par commande groupée, en univers aléatoire



Politique optimale (commande groupée) de 5,83 commandes par an (tous les 49,4 jours)		bouilloires électriques		cocottes-minute		casseroles	
		Par cycle	Par an	Par cycle	Par an	Par cycle	Par an
Conséquences physiques							
Quantité de commande	411	-	171	-	856	-	
Point de commande	225	-	96	-	504	-	
Stock de sécurité	58,33	-	26,56	-	156,78	-	
Probabilité de rupture avant livraison	12,17%	-	15,68%	-	11,71%	-	
Rupture moyenne de stock (à 60 % perdue)	2,94	17,16	2,09	12,17	7,49	43,69	
Demande moyenne satisfaite immédiatement	408,45	2 382,84	169,33	987,83	849,58	4 956,31	
Pourcentage de demandes non satisfaites immédiatement	0,72%	0,72%	1,22%	1,22%	0,87%	0,87%	
Intervalle moyen entre 2 ruptures	-	405,7 jours	-	314,9 jours	-	421,8 jours	
Stock moyen disponible avant livraison	61,28	-	28,64	-	164,27	-	
Stock moyen détenu	264,95	264,95	112,85	112,85	587,63	587,63	
Taux moyen annuel de rotation du stock	-	9,06	-	8,86	-	8,51	
Conséquences financières							
Dépense moyenne d'acquisition	12 330,00	71 622,03	17 100,00	99 028,04	12 840,00	74 513,02	
Coût moyen de commande	100,00	583,38	100,00	583,38	100,00	583,38	
Coût moyen de possession	272,50	1 589,73	386,89	2 257,02	302,19	1 762,90	
Marge non réalisée pour cause de rupture de stock	17,65	102,98	37,55	219,07	22,47	131,07	
Coût moyen des demandes différées	5,88	34,33	5,84	34,08	8,99	52,43	
Indicateur de coût moyen de gestion (achat exclu)	396,04	2 310,42	530,28	3 093,55	433,64	2 529,77	
Indicateur de coût moyen de gestion (achat inclus)	12 708,39	73 829,47	17 592,73	101 902,52	13 251,17	76 911,73	
Marge nette	3 717,91	21 689,58	4 612,15	26 906,45	3 851,72	22 470,23	
Conséquences financières TOTAL							
Dépense moyenne d'acquisition	42 270,00	245 163,10					
Coût moyen de commande	300,00	1 750,15					
Coût moyen de possession	961,57	5 609,64					
Marge non réalisée pour cause de rupture de stock	77,67	453,12					
Coût moyen des demandes différées	20,71	120,83					
Indicateur de coût moyen de gestion (achat exclu)	1 359,96	7 933,74					
Indicateur de coût moyen de gestion (achat inclus)	43 552,28	252 643,71					
Marge nette	12 181,78	71 066,26					

Table des matières

Index thématique

II-2.2 Les rabais en univers aléatoire

On examinera successivement le cas des rabais uniformes (§ II-2.2.1.), celui des rabais progressifs (§ II-2.2.2, page 874.) et enfin celui du rabais momentané (§ II-2.2.3, page 881).

II-2.2.1 Cas du rabais uniforme

L'analyse de ce problème en univers certain a été conduite au § I-2.1.2.1, page 788. Son extension au cas aléatoire ne présente aucune difficulté.

II-2.2.1.1 Solution analytique

En univers certain, nous avons vu que le coût moyen annuel $C(q)$, calculé pour un coût c_{u_j} valable pour une quantité de q unités comprise entre q_{j-1} et q_j , était :

$$q_{j-1} \leq q < q_j \Rightarrow C(q) = c_c \frac{D}{q} + i \cdot c_{u_j} \cdot \frac{q}{2} + D \cdot c_{u_j} \quad \text{relation 237 de la page 789}$$

Cette relation 237 doit être adaptée en univers aléatoire en adaptant la démarche générale du § II-1.1.3.3, page 841, traitant le cas de demandes partiellement différées et partiellement perdues. Dans ce contexte, le coût annuel de gestion était donné par la relation 291.

$$C(q, s) = c_c \frac{D}{q} + c_p \left(\frac{q}{2} + s - D \cdot L \right) + \left\{ p \frac{D}{q} \left(c_p \frac{L}{2} + c_{rd} \right) + (1-p) \left(c_{rp} \frac{D}{q} + \frac{c_p}{2} \right) \right\} I_r(s)$$

relation 291 de la page 842

En combinant ces relations 237 et 291, on obtient alors la relation 323, pour $q_{j-1} \leq q < q_j$.

$$C(q, s) = c_c \frac{D}{q} + i \cdot c_{u_j} \left(\frac{q}{2} + s - DL \right) + \left\{ p \frac{D}{q} \left(i \cdot c_{u_j} \frac{L}{2} + c_{rd} \right) + (1-p) \left(c_{rp} \frac{D}{q} + \frac{i c_{u_j}}{2} \right) \right\} I_r(s)$$

relation 323

Il suffit alors d'adapter les relations définissant l'optimum (relations 291 à 294, page 842), en remplaçant c_p par $i c_{u_j}$ et à les appliquer¹ dans le cadre de la démarche d'exploration des différents niveaux tarifaires décrite au § I-2.1.2.1, page 788.

$$q^* = \sqrt{\frac{2 \cdot D \cdot [c_c + \{p[i \cdot c_{u_j} \cdot L/2 + c_{rd}] + (1-p)c_{rp}\} \cdot I_r(s^*)]}{i \cdot c_{u_j}}} \quad \text{relation 324}$$

$$P(X > s^*) = \frac{i \cdot c_{u_j}}{p(D/q^*)(c_{rd} + i \cdot c_{u_j} \cdot L/2) + (1-p)((i \cdot c_{u_j})/2 + c_{rp} \cdot D/q^*)} \quad \text{relation 325}$$

cas continu

$$P(X > s^*) < \frac{i \cdot c_{u_j}}{p\left(\frac{D}{q^*}\right)\left(c_{rd} + \frac{i \cdot c_{u_j} \cdot L}{2}\right) + (1-p)\left(\frac{i \cdot c_{u_j}}{2} + c_{rp} \cdot \frac{D}{q^*}\right)} < P(X > s^* - 1) \quad \text{relation 326}$$

cas discret

II-2.2.1.2 Application numérique

On calculera les extrema en utilisant tout simplement l'algorithme de la page 839 (en remplaçant les relations 278 et 279 par les relations 324 et 325 ou 326), c'est-à-dire en se ramenant au modèle général en univers aléatoire, pour chaque

coût de possession différent. Si la solution trouvée est réalisable, il faut alors ajouter au coût moyen annuel de gestion, la dépense d'acquisition proprement dite.

Pour le calcul aux bornes, il faut passer par la détermination préalable du point de commande optimal pour la borne considérée. Pour ce faire, on utilisera la [relation 325](#) (ou la [relation 326](#)). On en déduit la rupture moyenne de stock, ce qui permet de calculer alors le coût moyen annuel de gestion, dépenses d'acquisition comprises.

TABLEAU 259
Détail des calculs de la recherche de la solution optimale en cas de rabais uniforme en univers aléatoire

i	Conditions tarifaires		Recherche de l'optimum hors contrainte			Calculs à la borne inférieure		
	plage de commande possible	coût unitaire	q_j^*	s_j^*	Coût annuel	q_j	s_j	Coût annuel
1	$q < 250$	31	508	215	virtuel			
2	$250 \leq q < 500$	30,5	511	217	virtuel	250	237	77096,38
3	$500 \leq q < 750$	30	515	218	75078,60	500	219	75082,92
4	$750 \leq q < 1000$	29,5	518	220	virtuel	750	208	74058,41
5	$q \geq 1000$	29	523	221	virtuel	1000	199	73260,04

Table des matières

Reprenons l'exemple numérique § I-2.1.2.1, page 788, et la loi Normale $\mathcal{N}(2400; 189,74)$ utilisée depuis le début de cette seconde section pour notre

Index thématique

1. Pour une valeur fixée de q , il est alors évident que lorsque c_{u_j} diminue, la probabilité de rupture diminue également (puisque le dénominateur de la fraction augmente). Par voie de conséquence, le point de commande s'accroît et la rupture de stock diminue, lorsque c_{u_j} diminue. Nous avons vu qu'en univers certain, le coût moyen annuel de gestion décroît avec c_{u_j} , pour une valeur fixée de q . Examinons s'il en est de même en avenir aléatoire lorsque, pour une valeur donnée de q , on retient un point de commande optimal s_j^* pour chaque coût unitaire c_{u_j} . En cas de demandes perdues, la variation de coût est (avec $c_{u_j} > c_{u_{j+1}}$) :

$$C_j(q, s_j^*) - C_{j+1}(q, s_{j+1}^*) = \left[(c_{u_j} - c_{u_{j+1}}) \left(\frac{iq}{2} + D(1-iL) \right) \right] + [i(c_{u_j} \cdot s_j^* - c_{u_{j+1}} \cdot s_{j+1}^*)] + \left[\frac{i}{2} \{ c_{u_j} \cdot I_r(s_j^*) - c_{u_{j+1}} \cdot I_r(s_{j+1}^*) \} \right] + \left[\frac{D}{q} \{ (v - c_{u_j}) I_r(s_j^*) - (v - c_{u_{j+1}}) I_r(s_{j+1}^*) \} \right]$$

La première expression entre crochets est normalement positive si l'on exclut le cas des points de commande multiples (hypothèse sous-jacente dans l'utilisation de la [relation 291 de la page 842](#)), ce qui revient à écarter du raisonnement les valeurs trop faibles de q (et implique en tout état de cause que l'on ait $q > DL$), et si le délai d'obtention n'est pas trop fort, car alors l'expression $(iq)/2 + D(1-iL)$ est alors proche de D . L'ordre de grandeur de cette première expression l'emporte nettement sur celui des expressions suivantes.

La seconde expression entre crochets peut être positive ou négative, puisqu'une baisse de coût unitaire entraîne un accroissement du point de commande. Il est cependant vraisemblable que ce déplacement est très faible (ce que l'on constate empiriquement pour des structures de coûts (c_c, i) et de rabais «habituelles»), et qu'en conséquence cette seconde expression ait plutôt tendance à être faiblement positive ou voisine de zéro. La troisième expression entre crochets est forcément positive. La dernière expression peut, comme la seconde expression, être positive ou négative; mais elle peut être considérée comme négligeable par rapport à la première si l'on se souvient que l'emploi de l'hypothèse simplificatrice implique que la probabilité de rupture soit faible, et d'autre part de ce qui a été dit sur la relative insensibilité de s aux rabais.

On pourra le plus souvent conclure, comme en avenir certain, que dans les plages de valeurs de q où l'optimum a des chances de se trouver, ces courbes de coûts ne sont pas sécantes pour des structures «normales» de coûts et rabais (mais il est certainement possible de trouver des contre-exemples). La recherche de la solution optimale s'inspire alors directement des principes développés en univers certain.

Un raisonnement similaire peut être conduit en cas de demandes non satisfaites différées.

problème de bouilloires électriques. Par ailleurs, on retiendra une probabilité de 40 % pour qu'une demande non satisfaite soit différée et un coût de demande différée de 5 dollars liduriens. La politique optimale consiste à commander 1000 unités au prix de 29 dollars liduriens, dès que le stock disponible est inférieur ou égal à 209 unités. Les conséquences de cette politique sont décrites dans le [tableau 260](#), et le détail de l'application de l'algorithme, dans le [tableau 259](#).

TABLEAU 260

Analyse de la politique optimale de la SUPERLAMBDA pour la bouilloire électrique (univers aléatoire - rabais uniforme - demandes non satisfaites partiellement perdues)

Politique optimale d'approvisionnement des bouilloires électriques (Rabais Uniforme)		
Conséquences physiques	Par cycle de réapprovisionnement	Par an
Quantité de commande	1 000	-
Point de commande	199	-
Coût unitaire d'acquisition	29,00	29,00
Stock de sécurité	32,33	-
Nombre moyen annuel de commandes (et de cycles de réapprovisionnement)	-	2,40
Intervalle moyen entre 2 commandes	-	120 jours
Probabilité de rupture avant livraison	25,89%	-
Rupture moyenne de stock (à 60 % perdue)	7,68	18,44
Demande moyenne satisfaite immédiatement	992,32	2 381,56
Pourcentage de demandes non satisfaites immédiatement	0,77%	0,77%
Intervalle moyen entre 2 ruptures	-	463,5 jours
Stock moyen disponible avant livraison	40,02	-
Stock moyen détenu	534,89	534,89
Taux moyen annuel de rotation du stock	-	4,49
Conséquences financières		
Dépense moyenne d'acquisition	29 000,00	69 279,14
Coût moyen de passation de commande	300,00	720,00
Coût moyen de possession	1 292,66	3 102,39
Marge non réalisée pour cause de rupture de stock	50,71	121,70
Coût moyen des demandes différées	15,37	36,88
Indicateur de coût moyen de gestion (achat exclu)	1 658,74	3 980,97
Indicateur de coût moyen de gestion (achat inclus)	30 658,74	73 260,12
Marge nette	9 341,26	22 419,03

Table des matières

Index thématique

II-2.2.2 Cas des rabais progressifs

L'analyse de ce problème en univers certain a été conduite au § I-2.1.2.2, page 791. Son extension au cas aléatoire ne présente aucune difficulté sur le plan analytique. Au niveau des calculs, la résolution est plus délicate lorsque les demandes non satisfaites sont différées.

II-2.2.2.1 Cas des demandes non satisfaites perdues

II-2.2.21a) Solution analytique

En univers certain, nous avons vu que le coût moyen annuel de gestion occasionné par une quantité de commande q telle que $q_{j-1} \leq q < q_j$, ce qui implique que seule la quantité $q - (q_{j-1} - 1)$ soit acquise au prix c_{u_j} , est :

$$C(q) = D\left(c_{u_j} + \frac{B_j}{q}\right) + c_c \frac{D}{q} + i\left(c_{u_j} + \frac{B_j}{q}\right) \frac{q}{2} \quad \text{relation 239 de la page 795}$$

Il faut adapter cette relation, à l'aide de la [relation 277 de la page 836](#) (cas des demandes non satisfaites perdues) pour donner la relation du coût moyen annuel de gestion en univers aléatoire¹ :

$$C(q, s) = D\left(c_{u_j} + \frac{B_j}{q}\right) + c_c \frac{D}{q} + i\left(c_{u_j} + \frac{B_j}{q}\right) \left(\frac{q}{2} + s - D \cdot L\right) + \left[\frac{i}{2}\left(c_{u_j} + \frac{B_j}{q}\right) + c_r \frac{D}{q}\right] I_r(s) \quad \text{relation 327}$$

ce qui donne à l'optimum :

$$q^* = \sqrt{\frac{D[B_j + c_c + c_r \cdot I_r(s^*)] + i \cdot B_j [s^* - D \cdot L + I_r(s^*)/2]}{i \cdot c_{u_j}/2}} \quad \text{relation 328}$$

$$P(X > s^*) = \frac{c_p}{c_p/2 + c_r \cdot D/q^*} \quad (\text{reprise de la relation 289 de la page 841}) \text{ avec :}$$

$$c_p = i\left(c_{u_j} + \frac{B_j}{q}\right), \begin{cases} B_j = \sum_{h=1}^{j-1} (q_h - q_{h-1})c_{u_h} - (q_{j-1} - 1)c_{u_j} \text{ si } j > 1 \\ B_1 = 0 \text{ et } q_0 = 1 \end{cases} \quad \text{relation 329}$$

Table des matières

Index thématique

II-2.2.21b) Calcul opérationnel de la politique optimale

L'algorithme de la [page 839](#), est basé sur le fait que lorsqu'on exprime q en fonction de s (ou l'inverse) dans les relations [278](#) et [279](#), les deux fonctions sont monotones décroissantes et leurs représentations graphiques se coupent nécessairement. Il en est de même ici. Reprenons l'exemple numérique § I-2.1.2.1, [page 788](#), et la loi Normale $\mathcal{N}(2400; 189,74)$. Les calculs numériques intermédiaires sont donnés au [tableau 262, page 876](#), et la solution optimale est présentée au [tableau 261 de la page 876](#).

II-2.2.2.2 Cas des demandes non satisfaites différées

II-2.2.22a) Solution analytique et algorithmique

L'indicateur de coût moyen annuel de gestion combine celui du rabais progressif en univers certain ($C(q) = D\left(c_{u_j} + \frac{B_j}{q}\right) + c_c \frac{D}{q} + i\left(c_{u_j} + \frac{B_j}{q}\right) \frac{q}{2}$, [relation 239 de la page 795](#)) et celui de l'univers aléatoire avec demandes différées (rela-

1. Avec $c_r = v - c_{u_j}$, en supposant que la rupture ne puisse porter que sur la tranche acquise au coût unitaire c_{u_j}



TABLEAU 261

Analyse de la politique optimale de la **SUPERLAMBDA** pour la bouilloire électrique (univers aléatoire - rabais progressif- demandes non satisfaites perdues)

Politique optimale d'approvisionnement des bouilloires électriques (Rabais Progressif - demandes perdues)		
Conséquences physiques	Par cycle de réapprovisionnement	Par an
Quantité de commande	1 160	-
Point de commande	203	-
Coût moyen unitaire d'acquisition	30,07586	30,07586
Stock de sécurité	36,33	-
Nombre moyen annuel de commandes (et de cycles de réapprovisionnement)	-	2,07
Intervalle moyen entre 2 commandes	-	139,2 jours
Probabilité de rupture avant livraison	23,37%	-
Rupture moyenne de stock (à 100 % perdue)	6,71	13,88
Demande moyenne satisfaite immédiatement	1 153,29	2 386,12
Pourcentage de demandes non satisfaites immédiatement	0,58%	0,58%
Intervalle moyen entre 2 ruptures	-	595,6 jours
Stock moyen disponible avant livraison	43,04	-
Stock moyen détenu	619,69	619,69
Taux moyen annuel de rotation du stock	-	3,87
Conséquences financières		
Dépense moyenne d'acquisition	34 888,00	71 764,47
Coût moyen de passation de commande	300,00	620,69
Coût moyen de possession	1 801,64	3 727,54
Marge non réalisée pour cause de rupture de stock	66,60	137,80
Coût moyen des demandes différées	0,00	0,00
Indicateur de coût moyen de gestion (achat exclu)	2 168,24	4 486,02
Indicateur de coût moyen de gestion (achat inclus)	37 056,24	76 112,69
Marge nette	9 343,76	19 331,91

Table des matières

Index thématique

TABLEAU 262

Détail des calculs de la recherche de la solution optimale en cas de rabais progressifs en univers aléatoire - demandes perdues -

<i>i</i>	Conditions tarifaires		Recherche de l'optimum hors contrainte		
	plage de commande possible	coût unitaire	q_j^*	s_j^*	Coût annuel
1	$q < 250$	31	505	222	Virtuel
2	$250 \leq q < 500$	30,5	603	218	Virtuel
3	$500 \leq q < 750$	30	760	213	Virtuel
4	$750 \leq q < 1000$	29,5	950	208	76312,11
5	$q \geq 1000$	29	1160	203	76265,43

tion 287 de la page 840 : $C(q, s) = c_c \frac{D}{q} + c_p \left(\frac{q}{2} + s - DL \right) + \left(\frac{c_p L}{2} + c_r \right) \frac{D}{q} I_r(s)$, en

remplaçant, dans cette dernière relation, c_r par c_{rd} et c_p par $i \left(c_{uj} + \frac{B_j}{q} \right)$ et en ajoutant la dépense annuelle d'acquisition.

$$C(q, s) = D \left(c_{uj} + \frac{B_j}{q} \right) + c_c \frac{D}{q} + i \left(c_{uj} + \frac{B_j}{q} \right) \left(\frac{q}{2} + s - DL \right) + \left[i \left(c_{uj} + \frac{B_j}{q} \right) \frac{L}{2} + c_{rd} \right] \frac{D}{q} I_r(s)$$

relation 330

À l'optimum on doit avoir:

$$\frac{\partial C(q, s)}{\partial s} = i \left(c_{uj} + \frac{B_j}{q} \right) + \left[i \left(c_{uj} + \frac{B_j}{q} \right) \frac{L}{2} + c_{rd} \right] \frac{D}{q} [-P(X > s)] = 0$$

d'où:

$$P(X > s^*) = \frac{i(c_{uj} + B_j/q^*)q^*/D}{i(c_{uj} + B_j/q^*)L/2 + c_{rd}}$$

relation 331

Cette relation 331 est identique à la relation 289 de la page 841, en remplaçant c_p par $i(c_{uj} + B_j/q)$ et c_r par c_{rd} . On remarque que q et la probabilité de rupture varient dans le même sens, en conséquence de quoi q et s varient en sens inverse.

De même, on doit avoir:

$$\frac{\partial C(q, s)}{\partial q} = -c_c \frac{D}{q^2} + \frac{i \cdot c_{uj}}{2} - \frac{i \cdot B_j(s - DL)}{q^2} - \left(\frac{c_{uj}L}{2q^2} + \frac{iB_jL}{q^3} + \frac{c_{rd}}{q^2} \right) DI_r(s) - D \frac{B_j}{q^2} = 0$$

ce que l'on peut encore écrire: $-\frac{a}{q^3} - \frac{b}{q^2} + c = 0$, ou $y = -a - bq + cq^3 = 0$

En posant:

$$\left. \begin{aligned} a &= iB_jLDI_r(s) \\ b &= D(c_c + B_j) + iB_j(s - DL) + (ic_{uj}L/2 + c_{rd})DI_r(s) \\ c &= ic_{uj}/2 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} &q^* \text{ tel que :} \\ &-a - bq^* \\ &+ cq^{*3} = 0 \end{aligned} \quad \text{relation 332}$$

La fonction y tend vers $\pm\infty$ lorsque q tend vers $\pm\infty$. Par ailleurs, elle a 2 extrema d'abscisses $\pm\sqrt{b/(3c)}$ et un point d'inflexion d'abscisse nulle et d'ordonnée négative, il n'y a donc qu'une racine positive, laquelle est nécessairement supérieure à $\sqrt{b/(3c)}$, mais on peut remarquer que, pouvant se mettre sous la forme $y = -a + q(cq^2 - b)$, elle prend nécessairement une valeur négative ($-a$) pour $q = \sqrt{b/c}$ qui constitue donc une meilleure borne inférieure dans la recherche de la valeur de q qui annule y que celle fournie par le second extremum (qui est $\sqrt{3}$ plus faible). On peut remarquer que dans la mesure où a est faible par rapport à b , la valeur cherchée sera peu supérieure à $\sqrt{b/c}$. Ajoutons enfin que la valeur de q_j^* prise en univers certain est nécessairement inférieure à celle que l'on obtient en univers aléatoire, car le numérateur de la solution en univers certain (relation 240 de la page 795) est compris dans b , le dénominateur étant le même. Il s'ensuit d'une part que la valeur optimale de l'univers certain peut être utilisé dans la rela-

Table des matières

Index thématique

tion 331 pour une initialisation et, d'autre part, que si cette valeur excède la borne supérieure de la plage admise pour bénéficier du coût d'acquisition c_{u_j} , la solution de l'univers aléatoire est nécessairement virtuelle.

II-2.2.22b) Application numérique

Reprenons l'exemple numérique du § II-2.2.22a en supposant que le coût de rupture d'une demande différée s'élève à 5 dollars liduriens. L'application de cet algorithme (très sommairement décrit) conduit aux calculs numériques intermédiaires donnés au tableau 263, et à la solution optimale du tableau 264.

TABLEAU 263
Détail des calculs de la recherche de la solution optimale
en cas de rabais progressifs en univers aléatoire - demandes différées -

i	Conditions tarifaires		Recherche de l'optimum hors contrainte		
	plage de commande possible	coût unitaire	q_j^*	s_j^*	Coût annuel
1	$q < 250$	31	513	200	Virtuel
2	$250 \leq q < 500$	30,5	610	193	Virtuel
3	$500 \leq q < 750$	30	770	183	Virtuel
4	$750 \leq q < 1000$	29,5	964	171	76583,87
5	$q \geq 1000$	29	1177	158	76500,54

II-2.2.2.3 Cas mixte des demandes non satisfaites partiellement différées et partiellement perdues

L'indicateur de coût de gestion est une moyenne pondérée des indicateurs de la relation 327 de la page 875 et de la relation 330 de la page 877, ce qui conduit à la relation 333.

$$C(q, s) = c_c \frac{D}{q} + i \cdot c_{u_j} \left(\frac{q}{2} + s - DL \right) + \left\{ p \frac{D}{q} \left(i(c_{u_j} + B_j) \frac{L}{2} + c_{rd} \right) + (1-p) \left[(v - c_{u_j}) \frac{D}{q} + i \left(c_{u_j} + \frac{B_j}{q} \right) / 2 \right] \right\} I_r(s) \text{ relation 333}$$

On démontre qu'à l'optimum, on retrouve la relation 293 de la page 842, en remplaçant c_p par $i(c_{u_j} + B_j/q)$:

$$P(X > s^*) = \frac{i(c_{u_j} + B_j/q)}{p \left(\frac{D}{q^*} \right) \left(c_{rd} + \frac{c_p \cdot L}{2} \right) + (1-p) \left(\frac{i(c_{u_j} + B_j/q)}{2} + c_{rp} \cdot \frac{D}{q^*} \right)} \text{ relation 334}$$

et la relation 332 de la page 877 se modifie comme suit:



TABLEAU 264

Analyse de la politique optimale de la **SUPERLAMBDA** pour la bouilloire électrique (univers aléatoire - rabais progressif- demandes non satisfaites différées)

Politique optimale d'approvisionnement des bouilloires électriques (Rabais Progressif - demandes différées)		
Conséquences physiques	Par cycle de réapprovisionnement	Par an
Quantité de commande	1 177	-
Point de commande	158	-
Coût moyen unitaire d'acquisition	30,06032	30,06032
Stock de sécurité	- 8,67	-
Nombre moyen annuel de commandes (et de cycles de réapprovisionnement)	-	2,04
Intervalle moyen entre 2 commandes	-	141,2 jours
Probabilité de rupture avant livraison	56,88%	-
Rupture moyenne de stock (à 0 % perdue)	24,30	49,54
Demande moyenne satisfaite immédiatement	1 152,70	2 350,46
Pourcentage de demandes non satisfaites immédiatement	2,06%	2,06%
Intervalle moyen entre 2 ruptures	-	248,3 jours
Stock moyen disponible avant livraison	15,63	-
Stock moyen détenu	581,55	581,55
Taux moyen annuel de rotation du stock	-	4,13
Conséquences financières		
Dépense moyenne d'acquisition	35 381,00	72 144,77
Coût moyen de passation de commande	300,00	611,72
Coût moyen de possession	1 714,66	3 496,34
Marge non réalisée pour cause de rupture de stock	0,00	0,00
Coût moyen des demandes différées	121,48	247,71
Indicateur de coût moyen de gestion (achat exclu)	2 136,14	4 355,77
Indicateur de coût moyen de gestion (achat inclus)	37 517,14	76 500,55
Marge nette	9 562,86	19 499,45

Table des matières

Index thématique

$$\left. \begin{aligned}
 a &= p_i B_j L D I_r(s) \\
 b &= p [D(c_c + B_j) + i B_j (s - DL) + (i c_{u_j} L / 2 + c_{rd}) D I_r(s)] \\
 &\quad + (1 - p) [D \{ B_j + c_c + (v - c_{u_j}) I_r(s) \} + i B_j (s - DL + I_r(s) / 2)] \\
 c &= i c_{u_j} / 2
 \end{aligned} \right\} \begin{aligned}
 &q^* \text{ tel que :} \\
 &- a - b q^* \\
 &+ c q^{*3} = 0
 \end{aligned}$$

relation 335

En panachant les exemples numériques des deux cas étudiés précédemment, avec $p = 40 \%$, on obtient la solution optimale décrite dans le [tableau 265 de la page 880.](#), après une série de calculs intermédiaires résumés dans le [tableau 266, page 880.](#)



TABLEAU 265

Analyse de la politique optimale de la **SUPERLAMBDA** pour la bouilloire électrique (univers aléatoire - rabais progressif - demandes non satisfaites partiellement perdues)

Politique optimale d'approvisionnement des bouilloires électriques (Rabais Progressif - demandes non satisfaites partiellement perdues)		
Conséquences physiques	Par cycle de réapprovisionnement	Par an
Quantité de commande	1 163	-
Point de commande	192	-
Coût moyen unitaire d'acquisition	30,07309	30,07309
Stock de sécurité	25,33	-
Nombre moyen annuel de commandes (et de cycles de réapprovisionnement)	-	2,06
Intervalle moyen entre 2 commandes	-	139,6 jours
Probabilité de rupture avant livraison	30,62%	-
Rupture moyenne de stock (à 60 % perdue)	9,64	19,88
Demande moyenne satisfaite immédiatement	1 153,36	2 380,12
Pourcentage de demandes non satisfaites immédiatement	0,83%	0,83%
Intervalle moyen entre 2 ruptures	-	455,8 jours
Stock moyen disponible avant livraison	34,97	-
Stock moyen détenu	610,00	610,00
Taux moyen annuel de rotation du stock	-	3,93
Conséquences financières		
Dépense moyenne d'acquisition	34 975,00	71 816,62
Coût moyen de passation de commande	300,00	619,09
Coût moyen de possession	1 777,90	3 668,92
Marge non réalisée pour cause de rupture de stock	57,39	118,43
Coût moyen des demandes différées	19,27	39,77
Indicateur de coût moyen de gestion (achat exclu)	2 154,56	4 446,21
Indicateur de coût moyen de gestion (achat inclus)	37 129,56	76 144,40
Marge nette	9 390,44	19 373,39

Table des matières

Index thématique

TABLEAU 266

Détail des calculs de la recherche de la solution optimale en cas de rabais progressifs en univers aléatoire et avec demandes partiellement perdues

<i>i</i>	Conditions tarifaires		Recherche de l'optimum hors contrainte		
	plage de commande possible	coût unitaire	q_j^*	s_j^*	Coût annuel
1	$q < 250$	31	508	215	Virtuel
2	$250 \leq q < 500$	30,5	604	211	Virtuel
3	$500 \leq q < 750$	30	762	205	Virtuel
4	$750 \leq q < 1000$	29,5	953	198	76335,70
5	$q \geq 1000$	29	1163	192	76275,64

II-2.2.3 Rabais momentané en univers aléatoire

Comme en univers certain, nous examinerons successivement, le cas de la gestion indépendante des articles (c'est-à-dire en supposant réalisables les politiques optimales proposées), en l'absence de rabais sur quantité (§ II-2.2.3.1), puis en présence de rabais sur quantité (§ II-2.2.3.2, page 884) avant d'aborder le cas d'une gestion interdépendante des articles, en raison d'une utilisation commune et simultanée de mêmes ressources rares (§ II-2.2.3.3, page 887).

II-2.2.3.1 Gestion indépendante des articles en l'absence de rabais sur quantité

Par rapport à l'univers certain (cf. § I-2.1.1, page 784), l'analyse du problème fondée sur un stock résiduel nul à la livraison ne présente guère d'intérêt. Le caractère aléatoire de la demande fait que, même si l'on déclenche une commande au franchissement «normal» du point de commande s_1^* (correspondant à la politique optimale du prix actuel c_{u_1}), parce que l'entreprise a pu obtenir de son fournisseur une livraison et un paiement différés, un stock résiduel nul à la livraison R_V n'a que la probabilité $P(X > s_1^*)$ de se produire. On analysera donc directement le cas d'un stock résiduel quelconque lors de la livraison, et l'on travaillera en espérance mathématique, en supposant, dans un premier temps, que le problème se pose avant franchissement du point de commande.

Reprenons l'exemple numérique du § I-2.1.1, page 784, et plaçons-nous d'emblée dans le cas général d'une demande non satisfaite partiellement différée (avec une probabilité $p = 40\%$ et un coût de rupture $c_{rd} = 5$ dollars liduriens) et partiellement perdue (avec une probabilité $(1 - p) = 60\%$ et un coût de rupture égal à la marge non réalisée $v - c_{u_1} = 40 - 30 = 10$ \$). Avant l'annonce d'une hausse tarifaire, la politique optimale se caractérisait (cf. tableau 249, page 848) par une quantité optimale de commande $q_1^* = 515$ et un point optimal de commande $s_1^* = 218$. Après la hausse tarifaire, en supposant inchangé le prix de vente, la politique optimale d'approvisionnement est définie par $q_2^* = 494$ et $s_2^* = 208$, pour un coût moyen annuel avec dépense d'acquisition s'élevant à 82202 dollars liduriens.

Notons encore u , le stock disponible lors de la passation de commande et supposons que le stock disponible lors de l'annonce de la hausse tarifaire soit 250. Deux cas de figure doivent être distingués :

- la commande peut être différée quelque temps et passée lors du franchissement normal du point de commande ($u = s_1^* = 218$) ;
- la commande doit être passée immédiatement pour bénéficier du tarif ($u = 250$).

L'espérance mathématique de rupture de stock $I_r(u)$ est dans le premier cas (cf. tableau 249, page 848) $I_r(u = s_1^* = 218) = 3,88$ (dont 40%, c'est-à-dire 1,55, correspondent à une demande différée et vient donc immédiatement en déduction de la livraison) et le stock résiduel moyen disponible juste avant la livraison est 55,22. Dans le second cas, on trouve facilement (en application de la relation 147 de la page 675 et de la relation 135 de la page 670) $I_r(u = 250) = 0,97$ et, en reprenant la notation R_V pour désigner le stock disponible avant livraison : $R_V(u = 250) = u - DL + I_r(u = 250) = 250 - 166,67 + 0,97 = 84,30$.

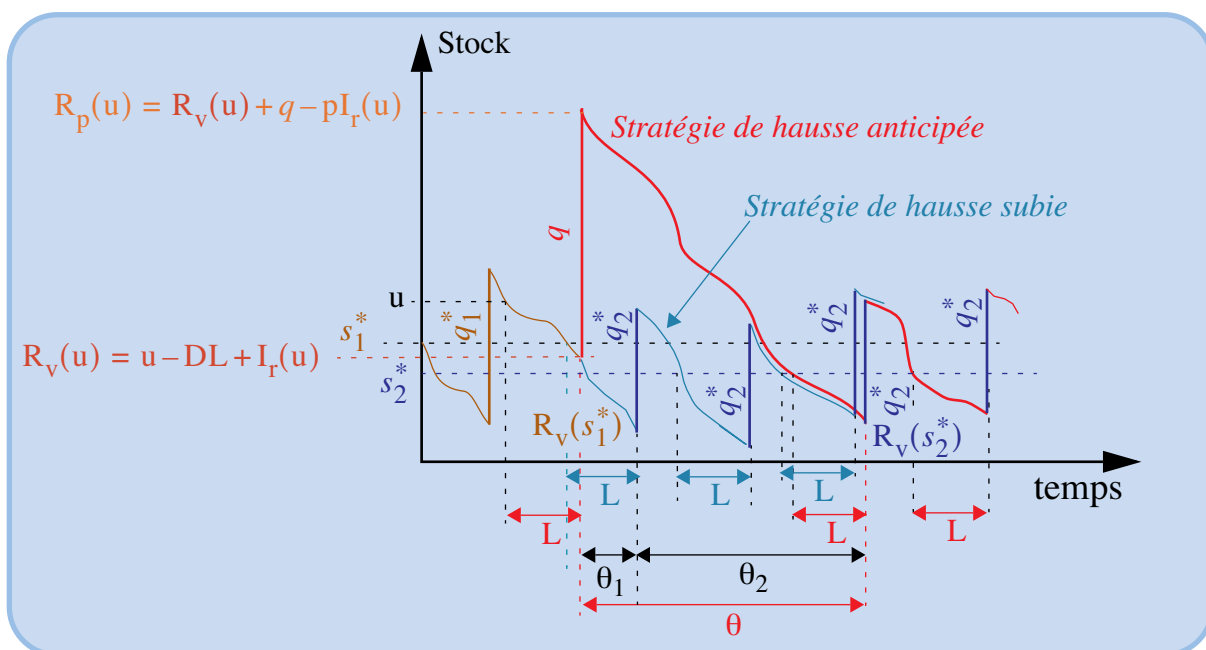
D'une manière générale, le stock disponible après livraison est donné par l'adaptation suivante de la [relation 316 de la page 865](#), obtenue en remplaçant le point de commande s par le stock u dé tenu à la passation de commande :

$$R_p(u) = q + \{(u - DL + I_r(u))\} - pI_r(u) \quad \text{relation 336}$$

Comme en univers certain, le stock disponible après livraison est égal à q augmenté d'une constante. La démarche du § I-2.1.1.2, [page 786](#) est alors facilement adaptable, pour le calcul des conséquences d'une stratégie d'anticipation (voir [figure 217](#)).

FIGURE 217

Comparaison des stratégies de hausse tarifaire anticipée et de hausse tarifaire subie en univers aléatoire



- Le stock disponible passe de $R_p(u)$ lors de la dernière livraison à l'ancien prix et défini par la [relation 316](#), au stock résiduel avant la première livraison au nouveau prix $R_v(s_2^*)$, ce qui conduit à un stock moyen $\{R_p(u) + R_v(s_2^*)\}/2$ qui est détenu pendant une durée $\theta = \{[R_p(u) - R_v(s_2^*)]/D\}$ ans, ce qui conduit à un coût total de possession $ic_{u_1} \frac{R_p(u)^2 - R_v(s_2^*)^2}{2D}$.
- Il faut y ajouter le coût associé à la rupture moyenne $I_r(u)$ que l'on enregistrera à la livraison de q et à celle que l'on enregistrera à la livraison suivante ($I_r(s_2^*)$) et qui s'élève à $\{pc_{rd} + (1-p)(v - c_{u_1})\}[I_r(u) + I_r(s_2^*)]$.

La [relation 337](#) est alors l'équivalent, en univers aléatoire, de la [relation 233 de la page 786](#).

$$C_1(q) = c_c + qc_{u_1} + ic_{u_1} \frac{R_p(u)^2 - R_v(s_2^*)^2}{2D} + \{pc_{rd} + (1-p)(v - c_{u_1})\}[I_r(u) + I_r(s_2^*)]$$

relation 337

Examinons maintenant la stratégie de hausse subie. L'intervalle de temps θ , défini ci-dessus, se décompose en deux : tout d'abord durant une durée θ_1 , l'entreprise supporte un stock financé avec l'actuel prix c_{u1} ; ensuite, pendant θ_2 année, le nouveau régime de croisière s'applique :

- Le stock moyen détenu durant la période θ_1 s'élève à $(R_v(u) + R_v(s_1^*))/2$ et θ_1 peut être estimé à $\theta_1 = (R_v(u) - R_v(s_1^*))/D$; le coût de possession de ce stock est donc : $\frac{R_v(u) + R_v(s_1^*)}{2} \theta_1 i c_{u1} = \frac{R_v(u)^2 - R_v(s_1^*)^2}{2D} i c_{u1}$. À la fin de cette période θ_1 , l'entreprise supporte le coût associé à la rupture $I_r(s_1^*)$, c'est-à-dire : $[p c_{rd} + (1-p)(v - c_{u1})] I_r(s_1^*)$.
- Pendant la période θ_2 , égale à la différence entre θ et θ_1 :

$$\theta_2 = \frac{R_p(u) - R_v(s_2^*)}{D} - \frac{R_v(u) - R_v(s_1^*)}{D} = \frac{R_p(u) - R_v(u) + R_v(s_1^*) - R_v(s_2^*)}{D}$$

elle supportera la fraction θ_2 du coût moyen annuel M associé au nouveau régime de croisière (ici 82 202 dollars liduriens).

En définitive, le coût $C_2(q)$ associé à la stratégie de hausse subie est :

$$C_2(q) = M \left\{ \frac{R_p(u) - R_v(u) + R_v(s_1^*) - R_v(s_2^*)}{D} \right\} + i c_{u1} \frac{R_v(u)^2 - R_v(s_1^*)^2}{2D} + [p c_{rd} + (1-p)(v - c_{u1})] I_r(s_1^*)$$

relation 338

La *relation 338* est alors l'équivalent, en univers aléatoire, de la *relation 233 de la page 786*.

À partir des relations *337* et *338*, il est ensuite facile de montrer que l'économie $C_2(q) - C_1(q)$ réalisée en préférant la stratégie d'anticipation est maximale pour :

$$R_p(u)^* = \frac{M}{i \cdot c_{u1}} - \frac{D}{i}$$

relation 339

Ce qui, compte tenu de la *relation 336 de la page 882*, conduit à la *relation 340*.

$$q^* = \frac{M}{i \cdot c_{u1}} - \frac{D}{i} - u + DL + (1-p)I_r(u)$$

relation 340

Cette *relation 340* est tout à fait similaire à la *relation 231 de la page 785* qui caractérise l'optimum en univers certain : il suffit de remplacer «stock certain après livraison» par «espérance mathématique de stock après livraison» et de tenir compte du fait que l'on passe de l'univers certain à l'univers aléatoire dans le calcul de M , pour avoir exactement la même relation.

Le *tableau 267 de la page 885* illustre l'application de ces relations à notre exemple numérique. Le nouveau coût du régime de croisière est $M = 82087,14$; L'application de la *relation 322 de la page 868* donne, en supposant que la livraison ne puisse être différée : $82087,14/6 - 2400/6 - 0,6 \times 0,97 = 1597$.

On peut ajouter que le déclenchement d'une commande de q unités alors que l'entreprise attend une livraison de q_1^* unités (cas où $u < s_1^*$), conduit seulement à une modification du calcul de l'espérance mathématique du stock $R_p(u)$ disponible après la livraison des q unités. Le stock disponible moyen après la livraison de q_1^* est: $R_p(s_1^*) = q_1^* + s_1^* - DL + (1-p)I_r(s_1^*)$. Entre la livraison de q_1^* et celle de q , s'écoule un intervalle de temps strictement égal à celui qui sépare le franchissement du point de commande s_1^* de celui du niveau de stock u . Il est alors possible de calculer l'espérance mathématique du stock résiduel juste avant la réception des q unités, mais il faut noter que l'on travaille alors à partir d'un stock initial ($R_p(s_1^*)$) connu seulement en espérance mathématique, à moins d'effectuer une double intégration (ou sommation). Dans ces conditions, il est plus simple et sans doute pas tellement faux de reconduire purement et simplement la demande ($s_1^* - u$). Compte tenu de cette dernière approximation on peut écrire alors: $R_p(u) = q + (q_1^* + s_1^* - DL + (1-p)I_r(s_1^*)) - (s_1^* - u)$, d'où:

$$R_p(u) = q + (q_1^* + u - DL + (1-p)I_r(s_1^*)) \quad \text{relation 341}$$

Le raisonnement du paragraphe précédent reste inchangé, $R_p(u)$ restant du type: « $q + \text{constante}$ ». Il faut alors combiner les relations 339 et 339, pour obtenir la solution optimale de la relation 342.

$$q^* = \frac{M}{i \cdot c_{u_1}} - \frac{D}{i} - [q_1^* + u - DL + (1-p)I_r(s_1^*)] \quad \text{relation 342}$$

II-2.2.3.2 Gestion indépendante des articles en présence de rabais sur quantité

On examinera succinctement comment déterminer l'approvisionnement optimal en cas d'augmentation tarifaire s'appliquant au rabais uniforme (§ II-2.2.32a) puis au rabais progressif (§ II-2.2.32b, page 885).

II-2.2.32a) Augmentation tarifaire dans le cas de rabais uniforme

Cette généralisation, qui ne pose aucun problème, est une combinaison des approches du § II-2.2.3.1 précédent, du § II-2.2.1, page 872, et du § I-2.1.3.1, page 796. Elle permet d'établir que la quantité optimale est l'une de celles obtenues à partir de la relation 343 (en indexant par le niveau de prix j , la quantité commandée et le coût unitaire) :

$$q_j^* = \frac{M}{i \cdot c_{u_1}} - \frac{D}{i} - u + DL + (1-p)I_r(u) \quad \text{relation 343}$$

en retenant celle qui maximise l'économie, dont la formulation découle directement, après indexation par j , de la relation 322 de la page 868 et où M reste toujours la somme de la dépense annuelle d'acquisition et de l'indicateur moyen annuel de gestion associés à la politique optimale du futur régime de croisière.

Illustrons ce point en reprenant l'exemple numérique du § II-2.2.1, page 872, en supposant toujours qu'une hausse tarifaire de 10 % soit annoncée et que le stock s'élève à 250 unités à la passation de la commande. La politique optimale est alors décrite dans le tableau 268 de la page 886.

TABLEAU 267

Analyse de la politique optimale de la **SUPERLAMBDA** pour la bouilloire électrique (univers aléatoire - rabais momentané - commande anticipée)



Politique optimale d'approvisionnement des bouilloires électriques			
Conséquences physiques	Régime transitoire	Futur régime de croisière	Régime de croisière actuel
Quantité de commande	1 597	494	515
Point de commande	218	208	218
Stock disponible à la commande	250	-	-
Intervalle moyen entre 2 livraisons	201,7 jours	59,3 jours	61,8 jours
Délai avant franchissement normal du point de commande	3,8 jours	-	-
Probabilité de rupture avant livraison	15,23%	20,42%	15,23%
Rupture moyenne de stock avant livraison (à 60 % perdue)	0,97	5,63	3,88
Rupture moyenne annuelle de stock (à 60 % perdue)	-	27,36	18,10
Pourcentage de demandes non satisfaites immédiatement	-	5,54%	3,51%
Intervalle moyen entre 2 ruptures	-	0 jours	0,00025 jours
Nombre moyen annuel de commandes	-	4,86	4,66
Stock disponible avant la prochaine livraison	84,30	46,97	55,22
Stock disponible après la prochaine livraison	1 680,91	538,71	568,66
Stock moyen annuel équivalent au stock détenu entre les 2 prochaines livraisons	588,18	-	-
Stock moyen détenu	-	290,40	310,25
Taux moyen de rotation du stock	4,08	8,26	7,74
Conséquences financières			
Dépense d'acquisition (ponctuelle ou annuelle)	47 910,00	78 658,25	71 674,27
Coût moyen de commande (ponctuel ou annuel)	300,00	1 457,49	1 398,06
Coût moyen de possession (ponctuel ou annuel)	3 529,08	1 916,66	1 861,50
Marge non réalisée pour cause de rupture de stock	5,81	114,92	108,58
Coût moyen des demandes différées	1,94	54,72	36,19
Indicateur de coût moyen annuel de gestion (achat exclu)	3 836,82	3 543,79	3 404,33
Indicateur de coût moyen annuel de gestion (achat inclus)	51 741,02	82 087,12	74 970,02
Economie réalisée par la commande exceptionnelle	3 135,37	-	-
Marge nette annuelle	-	13 256,21	20 595,67

Table des matières

Index thématique

II-2.2.32b) Rabais momentané sur rabais progressif en univers aléatoire

Sur le plan des principes, rien de bien compliqué dans la mesure où il ne s'agit que de transposer l'approche utilisée au § II-2.2.3.1 précédent, dans la combinaison de celles du § II-2.2.2 (rabais progressif en univers aléatoire) et du § I-2.1.3.2, page 797 (rabais momentané sur rabais progressif en univers certain). Ceci à optimiser la fonction d'économie de la relation 344 de la page 886.

TABLEAU 268

Analyse de la politique optimale de la **SUPERLAMBDA** pour la bouilloire électrique (univers aléatoire - rabais momentané sur rabais uniforme - commande anticipée)

Politique optimale d'approvisionnement des (Livraison non différée - Rabais Uniforme)		
Conséquences physiques	Commande ponctuelle optimale	Politique optimale après hausse
Stock disponible à la commande	250	
Quantité de commande	1 760	1 000
Point de commande	215	187
Coût unitaire d'acquisition	29,00	31,90
Stock résiduel avant livraison	84,30	31,57
Nombre moyen annuel de commandes (et de cycles de réapprovisionnement)		2,40
Intervalle de temps avant passation de la commande suivante	211,2 jours	120 jours
Probabilité de rupture avant livraison	16,69%	34,21%
Rupture moyenne de stock avant livraison (à 60 % perdue)	0,97	11,24
Pourcentage de demandes non satisfaites immédiatement	0,05%	1,12%
Intervalle moyen entre 2 ruptures	-	350,7 jours
Stock moyen disponible après livraison	1 843,91	1 027,08
Stock moyen (annuel) détenu entre les 2 livraisons successives	706,86	524,08
Taux moyen annuel de rotation du stock	-	4,58
Délai avant franchissement normal du point de commande	4,2 jours	-
Conséquences financières		
Dépense d'acquisition (ponctuelle & moyenne annuelle)	51 040,00	76 043,79
Coût de commande (ponctuel & moyen annuel)	300,00	720,00
Coût (ponctuel & moyen annuel) de possession	-	3 343,63
Marge moyenne annuelle non réalisée pour cause de rupture de stock	-	131,08
Coût moyen annuel des demandes différées	-	53,94
Indicateur moyen annuel de coût moyen de gestion (achat exclu)	-	4 248,64
Indicateur moyen annuel de coût moyen de gestion (achat inclus)	-	80 161,35
Marge nette moyenne annuelle	-	15 191,36
Economie réalisée par la commande exceptionnelle	5 088,46	-

Table des matières

Index thématique

$$\begin{aligned}
 C_{2j}(q_j) - C_{1j}(q_j) = & M \left\{ \frac{R_p(u) - R_v(u) + R_v(s_1^*) - R_v(s_2^*)}{D} \right\} \\
 & + i \left(c_{u_{1j}} + \frac{B_j}{q_j} \right) \frac{R_v(u)^2 - R_v(s_1^*)^2}{2D} + \left[pc_{rd} + (1-p) \left\{ v - \left(c_{u_{1j}} + \frac{B_j}{q_j} \right) \right\} \right] I_r(s_1^*) \\
 & - \left[c_c + q_j \left(c_{u_{1j}} + \frac{B_j}{q_j} \right) + \frac{R_p(u)^2 - R_v(s_2^*)^2}{2D} \cdot i \cdot \left(c_{u_{1j}} + \frac{B_j}{q_j} \right) \right] \\
 & - \left[pc_{rd} + (1-p) \left(v - \left(c_{u_{1j}} + \frac{B_j}{q_j} \right) \right) \right] [I_r(u) + I_r(s_2^*)]
 \end{aligned}$$

relation 344

Cette relation qui conduit également à un réseau de courbes avec des parties réelles et des parties virtuelles, mais maintenant, la «jonction» entre les parties réelles n'est plus assurée. La forme analytique de ces courbes étant du type $a_j + b_j q + c_j q^2 + q_j/q$, on montre facilement qu'avec les valeurs prises par les coefficients, la partie de ces courbes associée aux valeurs positives de q se caractérise par un minimum suivi d'un maximum. De ce fait, la résolution numérique du problème posé est un peu plus complexe que dans les cas précédents, car la quantité optimale à commander peut être l'une des bornes de chaque plage de quantités que l'on peut commander à un coût unitaire donné, ou être le maximum local de l'une de ces courbes, à condition qu'il ne soit pas virtuel (ajoutons que la recherche de ce maximum est facilitée par la connaissance d'une borne inférieure obtenue facilement à l'aide de la dérivée seconde de la fonction à optimiser).

Illustrons rapidement ce cas de figure en reprenant l'exemple du paragraphe précédent, mais en passant d'un rabais uniforme à un rabais progressif. La politique optimale est décrite dans le [tableau 269 de la page 888](#).

II-2.2.3.3 Rabais momentané en univers aléatoire et gestion interdépendante des articles en raison d'une utilisation commune et simultanée de mêmes ressources rares

Le cas de figure étudié maintenant est une combinaison des problématiques du [§ I-2.3.14c, page 820](#) (cas de l'univers certain), du [§ II-2.1.1, page 863](#) (contrainte budgétaire en univers aléatoire), du [§ II-2.1.2, page 867](#) (contrainte de stockage en univers aléatoire) et du [§ II-2.2.3.1, page 881](#) (augmentation tarifaire dans le cas d'une gestion indépendante des articles sans rabais sur quantité). Le problème posé est en effet celui de la maximisation de l'économie réalisée sur l'ensemble des articles $\sum_j \{C_{2j}(q_j) - C_{1j}(q_j)\}$.

Table des matières

Index thématique

- où $C_{2j}(q_j)$ et $C_{1j}(q_j)$ ne sont autres que les fonctions de coût définies par les relations [337 \(page 882\)](#) et [338 \(page 883\)](#), avec adjonction de l'indice j associé aux articles,
- avec prise en compte simultanée
 - de la contrainte financière (montant maximal de la commande à passer: $\sum_j c_{u_{1j}} \cdot q_j \leq B$, [relation 262 de la page 818](#), selon la démarche décrite au [§ I-2.3.14c, page 820](#))
 - et de la contrainte de stockage, après livraison, où l'on travaille maintenant en espérance mathématique des stocks disponibles après livraison, noté $R_p(u_j)$ sachant que les stocks disponibles lors de la passation de commande sont u_j .

On adapte alors la [relation 317 de la page 865](#), en tenant compte du fait qu'il n'y a pas lieu ici de prendre en compte le coefficient d'abattement car la livraison s'effectue simultanément pour tous les articles, en cas de décision d'achat anticipé pour bénéficier des prix actuels (ce qui revient à dire ici que l'on ne considère pas le cas, peu vraisemblable, où les livraisons peuvent être différées, comme si la passation de commande s'effectuait, pour chaque article, au franchissement du point de commande, mais à l'ancien prix):



TABLEAU 269

Analyse de la politique optimale de la **SUPERLAMBDA** pour la bouilloire électrique (univers aléatoire - rabais momentané sur rabais progressif - commande anticipée)

Politique optimale d'approvisionnement des (Livraison non différée - Rabais Progressif)		
Conséquences physiques	Commande ponctuelle optimale	Politique optimale après hausse
Stock disponible à la commande	250	
Quantité de commande	2 303	1 155
Point de commande	192	179
Coût moyen unitaire d'acquisition	30,07309	33,08857
Stock résiduel avant livraison	84,30	26,52
Nombre moyen annuel de commandes (et de cycles de réapprovisionnement)		2,08
Intervalle de temps avant passation de la commande suivante	276,4 jours	138,6 jours
Probabilité de rupture avant livraison	30,62%	40,26%
Rupture moyenne de stock avant livraison (à 60 % perdue)	0,97	14,18
Pourcentage de demandes non satisfaites immédiatement	0,04%	1,23%
Intervalle moyen entre 2 ruptures	-	344,3 jours
Stock moyen disponible après livraison	2 386,91	1 175,84
Stock moyen (annuel) détenu entre les 2 livraisons successives	1 185,47	594,50
Taux moyen annuel de rotation du stock	-	4,04
Délai avant franchissement normal du point de commande	7 jours	-
Conséquences financières		
Dépense d'acquisition (ponctuelle & moyenne annuelle)	69 258,32	78 827,42
Coût de commande (ponctuel & moyen annuel)	300,00	623,38
Coût (ponctuel & moyen annuel) de possession	-	3 934,22
Marge moyenne annuelle non réalisée pour cause de rupture de stock	-	122,22
Coût moyen annuel des demandes différées	-	58,95
Indicateur moyen annuel de coût moyen de gestion (achat exclu)	-	4 738,77
Indicateur moyen annuel de coût moyen de gestion (achat inclus)	-	83 566,19
Marge nette moyenne annuelle	-	11 848,66
Economie réalisée par la commande exceptionnelle	6 718,15	-

Table des matières

Index thématique

$$\sum_j a_j \cdot [q_j + \{u_j - D_j L_j + I_r(u_j)\} - p_j I_r(u_j)] \leq A$$

relation 345

On obtient alors, à l'optimum, outre la «classique» saturation des contraintes, une relation analytique qui «panache» les relations 340 (page 883) et relation 265 (page 820).

$$q_j^* = \left(\frac{M_j}{i \cdot c_{u_{1j}}} - \frac{D_j}{i} - u_j + D_j \cdot L_j + (1 - p_j)I_r(u_j) \right) - \lambda_B^* \frac{D_j}{i} - \lambda_A^* \frac{a_j D_j}{i c_{u_{1j}}}$$

avec une détermination de λ_A^* et λ_B^* identique à celle donnée par les relations 266 et 267 (page 822) en y remplaçant R_{v_j} par: $u_j - D_j \cdot L_j + (1 - p_j)I_r(u_j)$.

Chapitre XIII

LOGISTIQUE ET TRANSPORT

La compétitivité d'une entreprise résulte de la conjonction de nombreux facteurs. Les nouvelles formes de concurrence (voir [page 67](#)), en particulier la chronocompétition, et la mondialisation des marchés ont conduit à porter une attention particulière à la distribution physique des marchandises et aux approvisionnements. Le problème du transport sera abordé à la [section II, page 904](#), sous l'angle de l'optimisation des tournées ou de l'affectation de prestations de transport à des véhicules. Il s'agit là de définir des gammes de transport dans le cadre d'une prise de décisions tactiques, si l'on est en présence de problèmes récurrents relativement stables, ou opérationnels, s'il faut apporter des réponses à des problèmes ponctuels. Cette vision reste locale et repose sur l'hypothèse d'une relative indépendance du problème de transport posé, supposé pertinent, avec les autres problèmes que l'on doit résoudre pour apporter au client final le niveau de satisfaction requis. À l'évidence, l'acheminement de marchandises fait intervenir non seulement le transport, mais aussi le réseau d'entrepôts par lequel transitent les marchandises, la configuration et les règles de gestion de ces entrepôts, la longueur des séries mises en production, les délais d'obtention requis par les clients¹, qui impliquent une fréquence plus ou moins forte des tournées, laquelle influe sur les caractéristiques des moyens de transport mobilisés, etc. L'approche logistique que l'on présentera à la [section I](#) met en évidence cette interdépendance des problèmes. Celle-ci doit être prise en compte avant tout au niveau de la réflexion stratégique car une fois configurés le réseau physique de distribution et les moyens de transport mobilisés, les degrés de liberté sont moindres et les contraintes pesant sur chaque sous-système finissent par rendre les problèmes posés relativement indépendants.

Table des
matières

Index
thématique

SECTION I LA LOGISTIQUE

Nous commencerons par définir la logistique (§ I-1), dont le périmètre varie selon les auteurs. Ceci nous conduira à présenter la chaîne logistique (§ I-2, [page 895](#)). On examinera enfin au § I-3, [page 899](#), l'organisation physique du réseau de distribution.

1. Voir définition à la [page 629](#).

I-1 Définition du périmètre de la logistique

Progressivement adoptée par les entreprises occidentales à partir des années soixante, la logistique est d'origine militaire¹ et a conquis ses titres de noblesse au cours de la seconde guerre mondiale en mettant au point des principes dont l'application a été l'un des facteurs du succès des armées alliées. Il s'agissait alors fondamentalement de promouvoir des processus garantissant que les ressources nécessaires à une action militaire soient disponibles au bon moment, avec toutes les caractéristiques quantitatives et qualitatives requises, pour le coût le plus faible possible. Si l'acheminement - et tout ce qui le facilite - était l'aspect le plus visible, il ne pouvait suffire car l'ampleur des besoins et la réactivité requise par certaines actions militaires d'envergure impliquaient un stockage rationnel de ressources en équipements et en hommes, en des points judicieusement choisis, et, en cascade, des actions d'approvisionnement pouvant déboucher sur des spécifications en production, voire aller plus loin encore...

On est donc en présence d'une vision « processus » qui implique, dans sa transposition au management des entreprises, de bien en définir le périmètre. En effet, la vision systémique du fonctionnement d'une entreprise conduit à l'analyser comme un réseau de processus et la logistique, comme une chaîne à optimiser. La tentation est grande pour les spécialistes d'un processus de profiter de l'enchaînement des processus pour tirer à eux progressivement tout le management d'une organisation; les exemples de ces tentations de subordination sont variés.

Selon les perspectives retenues, on inclura ou non dans la logistique la planification et l'ordonnancement de la production, la gestion des systèmes d'information, la prévision de la demande et une bonne partie du contrôle de gestion et même une partie de la gestion commerciale. L'objectif étant de satisfaire le client, certains vont plus loin et y rattachent des préoccupations de conception des biens et services, le marketing ainsi que tout ce qui est lié à l'usage des produits durant leur durée de vie (fiabilité, maintenabilité, services après-vente...). Cela étant, le plus souvent, il ne s'agit pas toujours de tendances « impérialistes », mais de la conséquence d'une approche systémique visant à mieux coordonner dans l'intérêt général, sans chercher à prendre le contrôle des différentes spécialités². Dans la pratique, la place de la logistique n'est pas évidente: le rôle d'intégration et d'interface ne se joue pas sans une coopération qui implique une certaine perte d'autonomie des directions fonctionnelles et une position de tutelle hiérarchique a toutes les chances de poser de redoutables problèmes de légitimité. Examinons

Table des
matières

Index
thématique

1. Les premiers écrits « modernes » sur la logistique remonteraient au XIX^e siècle (voir la préface de l'ouvrage de Tixier, Mathé & Colin (1996, [421]), ainsi que les chapitres II et III de cet ouvrage). Aux États-Unis, la transposition aux entreprises de l'approche logistique s'est accompagnée d'un léger changement d'appellation; on parle désormais de *business logistics*. Voir également le chapitre II de Pimor (2001, [337]). On peut enfin donner la définition actuelle de la logistique pour l'OTAN (1997, [322]): « Planification et exécution de déplacements des forces armées et de leur maintenance. Dans son acception la plus étendue, ce terme englobe les activités militaires qui traite des points suivants: (a) étude, mise au point, acquisition, conservation, transport, distribution, maintenance, évacuation et réforme des matériels; (b) transport de personnel; (c) acquisition ou construction, entretien, mise en œuvre et déclassement d'installation; (d) acquisition ou prestation de services; (e) soutien aux services médicaux ou sanitaires... ».

2. C'est notamment le point de vue de Tixier, Mathé & Colin (1996, [421]) qui écrivent « La véritable démarche logistique ne correspond pas à une fonction. Elle n'a pas à recevoir de support visible. Elle devrait être présente dans les réflexes de tous les responsables de l'entreprise ». Ils ajoutent cependant « il est souvent utile de rappeler sa présence... le responsable logistique peut donc considérer que son rôle consiste à rappeler à tous que penser logistique n'est pas propre à sa fonction, mais n'ayant pas d'autorité sur les autres directeurs, cela ne pourra se faire que par persuasion ».

le point de vue de quelques spécialistes, avant de présenter le point de vue officiel d'organisations professionnelles ou normatives.

Pour Porter, la logistique est une fonction de création de valeur dans la chaîne de valeur (présentée à la [page 961](#)), mais son périmètre reste interne à l'entreprise et la partie approvisionnement est intégrée comme une fonction de support. La vision de Porter de la logistique diffère donc de celle actuellement retenue par les logisticiens, parce qu'elle n'intègre pas explicitement l'amont et l'aval dans la chaîne de valeur et en raison d'une différence d'appréciation sur ce qui contribue directement à la création de valeur.

Pour Tixier, Mathé & Colin (1996, [\[421\]](#), p. 33), «la fonction logistique dans l'entreprise est d'assurer au moindre coût la coordination de l'offre et de la demande, aux plans stratégique et tactique, ainsi que l'entretien à long terme de la qualité des rapports fournisseurs-clients qui la concernent». Ils définissent (1996, [\[421\]](#), p. 5) plus simplement la logistique comme «le processus par lequel l'entreprise gère l'ensemble de ses échanges d'informations et des éléments physiques qui en résultent avec son amont et son aval» et ajoutent «on reconnaît à la logistique un rôle d'**interface**, alors que la gestion des interfaces est devenue un aspect économique stratégique majeur, et parce que l'on sait que le logisticien possède une des clés des enjeux financiers des stocks». Ce rôle d'interface, souligné aussi par Gratacap et Médan (2001, [\[209\]](#)), pose un problème de positionnement, dans l'organisation de l'entreprise, la question étant de savoir, comme indiqué plus haut, si une direction de la logistique doit jouer un rôle hiérarchique ou un rôle de coordination dans une optique de logistique répartie (Colin & Paché, 1988, [\[103\]](#)).

Pour Ballou (1999, [\[33\]](#)), l'un des grands spécialistes nord-américains du domaine, «la mission de la logistique est de fournir des biens et services aux consommateurs au bon endroit, au bon moment et dans les conditions souhaitées, tout en assurant la plus grande contribution à l'entreprise». Il exclut explicitement de la logistique des préoccupations de pilotage de la production et souligne que la logistique crée de la valeur en jouant fondamentalement sur la date de mise à disposition et sur la localisation des biens ou services vendus.

Examinons maintenant la définition donnée en France par l'AFNOR, organisme de normalisation (§ [I-1.2](#)), puis celles proposées par quelques associations professionnelles (§ [I-1.2](#), [page 895](#)).

I-1.1 Définition de la logistique par l'AFNOR

La norme AFNOR NF X 50-600 (1999, [\[7\]](#)) définit la **logistique** comme la «planification, exécution et maîtrise:

- des mouvements et des mises en place des personnes ou des biens et
- des activités de soutien liées à ces mouvements et à ces mises en place,

au sein même d'un système organisé pour atteindre des objectifs spécifiques». Elle poursuit par une définition de la **fonction logistique** qui a «pour finalité la satisfaction des besoins exprimés ou latents aux meilleures conditions économiques et pour un niveau de service déterminé». La **satisfaction du besoin** étant définie «comme la mise à disposition du produit (biens ou services) et le maintien dans le temps de la disponibilité de ces fonctions».

La **démarche logistique** «a pour objectif, en assurant une bonne gestion des opérations logistiques et de leurs interfaces, de permettre à l'entreprise d'atteindre ses objectifs généraux et sectoriels, tout particulièrement ceux relatifs au service au client... La démarche logistique

est globale, elle s'applique à l'ensemble de la chaîne logistique. Elle s'inscrit dans la stratégie de l'entreprise. Elle permet au travers d'une gestion rigoureuse des interfaces de transformer une succession d'opérations en un processus global intégré. Cette démarche s'applique en outre à l'activité de l'entreprise qu'elle s'exerce sous forme continue (fabrication et commercialisation de biens, activités liées au transport de biens ou de personnes) ou sous forme de projet (travaux publics, projets militaires, etc.)».

Pour mieux cerner le périmètre retenu pour la logistique par les experts ayant établi cette norme, on peut lister les sept grandes étapes assignées au processus logistique et les fonctions retenues.

Les sept grandes étapes sont les suivantes, avec les orientations contenues dans cette norme pour définir ces étapes :

- *identifier* les besoins du marché en matière de qualité de service et *déterminer* les objectifs en matière de qualité de service ;
- *concevoir* le système logistique et l'organisation de la chaîne des flux ; définir les caractéristiques logistiques du produit (besoins et contraintes), celles du système après-vente ;
- *développer* le système logistique, l'organisation, les procédures et les systèmes d'informations logistiques, le système de service après-vente, les emballages et *garantir* la disponibilité des ressources opérationnelles ;
- *produire*, c'est-à-dire mettre en œuvre les procédures et systèmes industriels, planifier et programmer les besoins en matières et services, approvisionner ;
- *vendre*, c'est-à-dire mettre en œuvre les procédures et systèmes de distribution, stocker, conditionner, expédier, transporter et installer les produits ; contrôler l'exécution des opérations de transport et distribution ; gérer les retours ;
- *soutenir*, c'est-à-dire mettre en œuvre les procédures et les systèmes de maintenance¹, la réparation et la distribution des pièces ; acquérir, stocker, conditionner, expédier, transporter et livrer les pièces ; entretenir et réparer les produits ; récupérer et recycler les produits ;
- *contrôler* les performances du système logistique : exploiter les résultats, les comparer aux objectifs, apporter les corrections, anticiper...

Cette description montre à l'évidence que la logistique intègre toutes les préoccupations développées dans cet ouvrage et interfère avec presque toutes les grandes fonctions de l'entreprise. Par ailleurs, la vision retenue n'est pas seulement transversale, mais est aussi conçue dans une perspective d'accompagnement des produits sur leur cycle de vie². Il faut ajouter que le fascicule documentaire de l'AFNOR FD X 50-604 (2002, [9]) décrit en détail le processus logistique à partir des activités et des interfaces qui le composent ; il constitue un document de référence incontournable pour toute réflexion stratégique de mise en place d'une démarche logistique en entreprise.

Le fascicule documentaire de l'AFNOR FD X 50-602 (1997, [8]) reprend les résultats d'une grande enquête européenne sur les activités logistiques et définit de

1. L'intégration de la maintenance dans les préoccupations de logistique est bien décrite dans les chapitres X et XI de l'ouvrage de Pimor (2001, [337]).

2. Voir la discussion de ce concept au chapitre II, § II-2.1, page 118 et au chapitre IV, § I-2.1.2, page 263.

manière détaillée une liste de 23 profils professionnels en logistique et de 96 agrégats d'activités logistiques (regroupés en 21 agrégats), avec une explicitation de la relation entre profil professionnel et agrégat d'activités. Le profil professionnel ne correspond pas nécessairement à un métier car la taille de l'entreprise peut faire qu'il n'est pas possible d'occuper la personne à temps plein, auquel cas il y a fusion de profils pour définir un poste. Enfin, ce fascicule identifie 11 profils professionnels de cadres, dirigeants et responsables opérationnels ayant un contenu d'activités logistiques.

I-1.2 Définition de la logistique par les organismes professionnels

Pour l'ASLOG, Association Française pour la Logistique¹, «la logistique est l'ensemble des activités ayant pour but la mise en place, au meilleur coût, d'une quantité de produits, à l'endroit et au moment où une demande existe. La logistique concerne donc toutes les opérations déterminant le mouvement des produits, telles que la localisation des usines et entrepôts, approvisionnements, gestion physique des encours de fabrication, emballage, stockage et gestion des stocks, manutention et préparation des commandes, transports et tournées de livraison»². L'ASLOG propose un référentiel d'audit logistique conçu dans le but d'améliorer les performances des entreprises. L'organisation de ce référentiel, après un volet d'évaluation global, passe en revue la logistique dans la conception, dans l'approvisionnement et la production, dans la commercialisation et dans l'après-vente. La perspective globale est assez proche de celle retenue par l'AFNOR.

Table des matières

Le *Council of Logistic Management* (CLM) définit la logistique comme «la partie du processus de la *supply chain* qui planifie, met en œuvre et contrôle l'efficacité et le bon fonctionnement des flux et stockage de produits, et des informations qui leur sont liées depuis le point d'origine du produit jusqu'à son point de consommation, en vue d'une satisfaction complète et maîtrisée des besoins du client» (cité par Gratacap & Médan (2001, [209])).

Index thématique

I-2 La chaîne logistique

La **chaîne logistique** (*supply chain*³), concept popularisé au milieu des années quatre-vingt-dix, regroupe un certain nombre de principes connus⁴. Considéré par certains, essentiellement comme un argument de vente de consultants, ce concept a pour principal intérêt de forcer à une vision «processus», l'analyse et la résolution de problèmes interdépendants, le plus souvent traités de manière indépendante à la fois pour des raisons organisationnelles (périmètre de responsabilité lié aux services) et intellectuelles (réduction cartésienne de la complexité), par ailleurs liées.

1. ASLOG, 119 rue Cardinet, 75017 Paris, aslog@wanadoo.fr. Cette association est membre de l'*European Logistics Association* (ELA) dont le site est: <http://www.elalog.org> et qui délivre trois niveaux de certification (*EMLog* - *European Master Logistician*, *ESLog* - *European Senior Logistician*, *EJLog* - *European Junior Logistician*).

2. Cette définition, reprise dans l'ouvrage de Tixier, Mathé & Colin (1996, [421]) ne se retrouve plus dans les documents diffusés par l'ASLOG, notamment dans le glossaire proposée sur son site Internet.

3. Cette traduction est celle retenue par l'AFNOR, mais aussi par l'ASLOG qui précise (2002, [22]): «*Supply Chain* ne peut être littéralement traduit en français. Une équivalence possible est chaîne logistique, une autre est démarche logistique globale, une troisième peut être chaîne étendue d'approvisionnements. Il n'y a pas de traduction exacte, en raison du fait qu'en anglais, *to supply* veut à la fois dire approvisionner et fournir, c'est-à-dire deux notions antagonistes».

4. La définition qu'en donne la norme AFNOR (1999, [7]) est des plus générales («suite d'événements, pouvant inclure des transformations, des mouvements ou des mises en place, et apportant une valeur ajoutée») et ne mentionne pas explicitement le client autrement que par le concept de valeur ajoutée qui n'a de sens que par rapport à ce client.

- Il reprend tout d'abord l'idée que la satisfaction d'un client est le résultat de la mise en œuvre d'une succession de processus¹, qu'il s'agit de prendre en considération dans une approche systémique, sans trop se préoccuper du périmètre juridique de l'entreprise, en remontant, si nécessaire, jusqu'à l'approvisionnement des matières premières. Dans cette optique «client - fournisseur», il convient, d'une part, de souligner que les flux physiques qui traversent la chaîne logistique se transforment progressivement pour devenir des produits finis vendus au client final et, d'autre part, de ne pas oublier que le flux n'est pas à sens unique, mais qu'il y a des flux de retour (invendus, retour pour non conformité...). Cette analyse des processus s'appuie sur des séquences élémentaires d'enchaînement de processus «approvisionnement - production - livraison», des processus de «retour» (trop souvent négligés).
- Il reprend ensuite une idée développée par les cybernéticiens² de séparation entre un système opérant et un système de conduite³ conduisant à une vision systémique du système productif. Ici, le système de conduite se traduit concrètement par un ensemble de processus de «pilotage» assurant des fonctions de prévision, d'organisation, de décision et de contrôle, ce qui implique la disponibilité des informations requises pour le bon exercice du pilotage dans laquelle ce sont des flux d'information qui pilotent les flux physiques.
- Dans cette optique, la performance de la chaîne logistique est liée autant à une bonne réactivité physique, qu'à une bonne réactivité informationnelle et il est indispensable d'avoir une vision d'ensemble ne dissociant pas le physique de l'informationnel (au sens large).
- Accessoirement, il reprend une vieille idée développée au XIX^e siècle par les économistes de la dualité des flux physiques et des flux financiers qui sont liés et de sens inverse.
- Enfin, il s'appuie sur l'idée d'une recherche de solutions à un problème posé dans sa complexité et sa globalité. En effet, la juxtaposition d'optima locaux ne peut produire d'optimum global que pour une formulation cohérente de ces problèmes locaux dans laquelle la solution de certains problèmes est une contrainte d'autres problèmes. Ceci a peu de chances de se produire sans un pilotage d'ensemble de ces problèmes locaux, s'appuyant sur un système de rétro-actions⁴, ce qui correspond à une gestion des interfaces, comme indiqué en § I-1.

Le schéma de principe de la chaîne logistique est donné à la [figure 218](#) qui reprend la [figure 2 de la page 43](#).

Les grands groupes de consultants et les grands producteurs d'ERP⁵ ont défini des instrumentations d'analyse et de mise en place de chaîne logistique. On examinera rapidement les principes retenus par le modèle **SCOR** du **Supply-Chain Council**⁶ (SCC), qui résulte d'un effort de mise en commun par un très

1. Voir le § I-3, page 67 du chapitre I et le § I-2.3, page 160 du chapitre III.

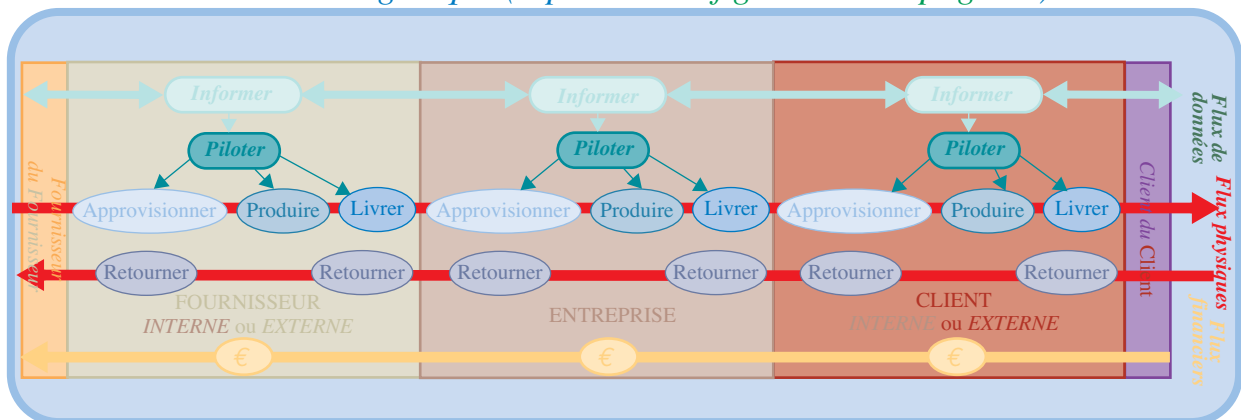
2. Cette vision avait été popularisée avec la chaîne de valeur de Porter (voir page 961), mais celle-ci n'exploite pas l'idée de propagation, en s'arrêtant aux frontières de l'entreprise étudiée.

3. Voir le § I-2.2, page 155 et la figure 34, page 157 du chapitre III.

4. Voir notamment la contribution de Paché & Colin dans l'ouvrage collectif coordonné par Fabbe-Costes, Colin & Paché (2000, [142]).

5. Voir la section III, page 957, du chapitre XIV.

FIGURE 218
La chaîne logistique (reprise de la figure 2 de la page 43)



grand nombre d'entreprises, dans le cadre d'une organisation à but non lucratif. Ce modèle, qui n'entend pas prendre en compte les activités non logistiques, s'appuie de manière explicite sur les concepts bien connus de *reengineering*¹ qui analyse l'existant et propose une solution-cible, du *benchmarking* qui compare la performance d'entreprises similaires, et de la recherche objective des meilleures pratiques² à partir de mesures de performance, dans un cadre «transfonctionnel».

La modélisation de SCOR se fonde sur une description hiérarchique des processus sur quatre niveaux, suivant en cela une démarche classique dans l'analyse formelle des processus (voir [page 160](#)) et dans certains logiciels de simulation (voir [page 152](#)).

Table des matières

Index thématique

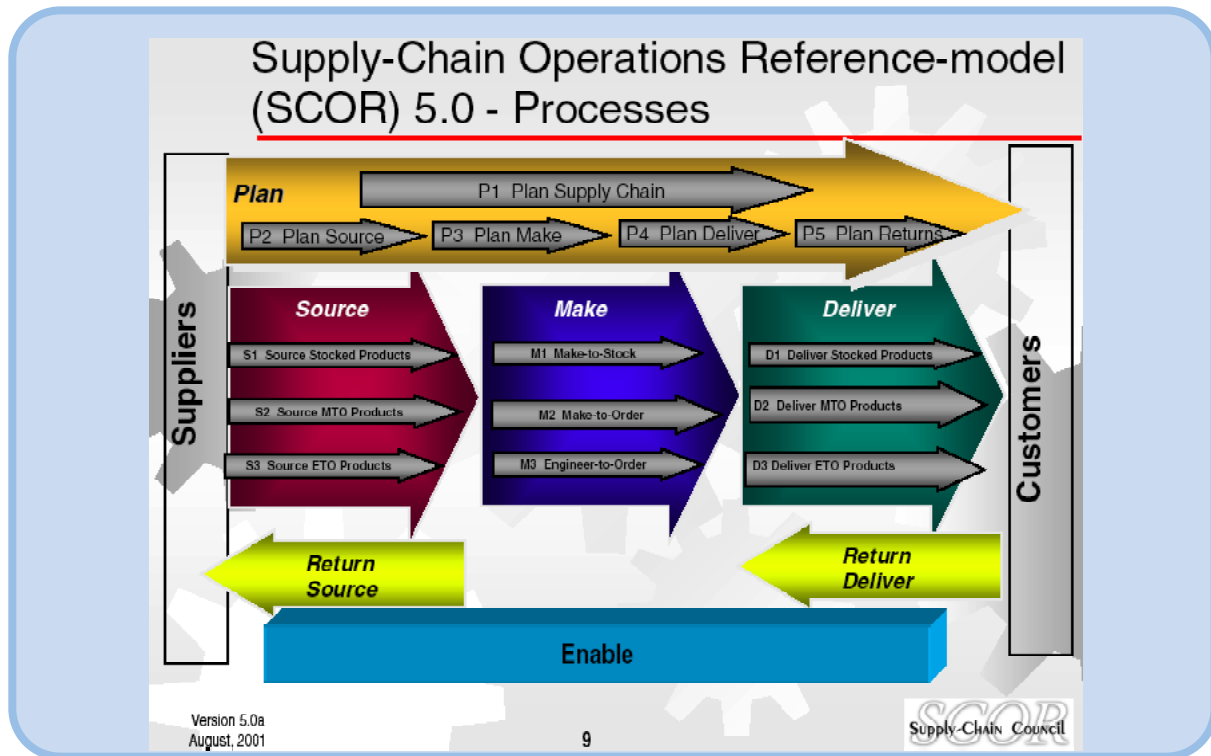
- Le niveau 1 est celui du processus d'ensemble qui propose une architecture générale en six macro-processus de base : processus de pilotage, processus d'approvisionnement, processus de production, processus de livraison, processus de retour des produits et processus de support de la chaîne logistique.
- Le niveau 2 de cette modélisation propose 29 processus génériques de base ; une cartographie des relations entre ces processus est proposée. On reviendra ci-après sur ces processus. Une description simplifiée du niveau 2 de ce modèle est fournie à la [figure 219 de la page 898](#).
- Les processus de niveau 3 correspondent à une décomposition de processus du niveau 2 ; une cartographie des relations entre ces processus de niveau 3 est également proposée.
- Les processus de niveau 4, qui correspondent à une décomposition de processus du niveau 3, sont évoqués, mais non traités car ils correspondent aux processus réels d'une entreprise ; ils sont donc contingents et non génériques.

6. Note de la page précédente. La version 5.0 du modèle *Supply-Chain Operations Reference-model* (SCOR) est la dernière révision majeure disponible au début de l'année 2003, depuis l'introduction de ce modèle en 1996 par le *Supply-Chain Council*, lors de sa création. Cette révision a permis de mieux spécifier les flux de retour allant des clients vers leurs fournisseurs et d'introduire le eCommerce, les améliorations de la prochaine version, prévue pour 2003, porteront principalement sur les indicateurs. Le *Supply-Chain Council* (www.supply-chain.org) est une organisation sans but lucratif qui regroupe plus de 700 entreprises et organisations, aux deux tiers nord-américaines et comporte un tiers de consultants et établissements universitaires.

1. Voir le § I-3.2.2, page 72 du chapitre I.

2. On retrouve ici l'idée le catalogue des meilleurs processus, proposé par les ERP (voir [page 968](#)).

FIGURE 219
L'architecture du modèle SCOR (version 5)



Dans cette modélisation, chaque processus fait l'objet d'une fiche signalétique qui éclaire l'esprit dans lequel cette modélisation a été conçue et doit être utilisée; elle constitue un reflet intéressant de la vision de l'état de l'art par les praticiens et de leurs préoccupations. Chaque fiche utilise une liste commune d'attributs de performance à renseigner (si cela est pertinent et possible), ainsi que les indicateurs à prendre en considération pour évaluer la performance atteinte pour chaque attribut, la cohérence de ces indicateurs dans l'approche hiérarchique devant être assurée. Sur les cinq attributs de performance retenus, trois sont orientés «client» et deux sont orientés «efficacité»; ils portent sur la fiabilité, la réactivité, la flexibilité, les coûts et les actifs mobilisés (vision physique de la performance). Cette fiche signalétique se poursuit par une liste des meilleures pratiques repérées pour le processus étudié, avec leurs caractéristiques, tout ceci restant à un niveau générique.

Il est intéressant de lister les processus de niveau 2 pour mieux comprendre le périmètre exact du modèle SCOR :

- cinq modules de pilotage (niveau tactique et opérationnel): pilotage des approvisionnements, pilotage de la production, pilotage des livraisons, pilotage des retours et pilotage général;
- neuf modules de description de processus obtenus par croisement d'une typologie de production (production pour stock, assemblage à la commande, fabrication à la commande¹) et des trois phases (approvisionner, produire et livrer); bien évidemment, seuls certains de ces processus seront pertinents;

1. Voir définitions au § I-2.1.1, page 48 du chapitre I.

- six modules de description des retours obtenus par croisement du type d'entité concernée (client ou fournisseur) et des types de retour (produit défectueux, surplus, pièces de maintenance);
- neuf modules de processus de support (*enable processes*):
 - établissement et management des principes de management pertinents et cohérents pour l'ensemble de la chaîne logistique, et des règles de gestion qui en découlent,
 - management de la mesure et de l'amélioration de la performance globale de la chaîne logistique, portant sur les coûts, la fiabilité de la distribution, les temps de réponse, la réactivité et les actifs mobilisés,
 - gestion des informations agrégées et détaillées utilisées par la chaîne logistique,
 - management intégré des stocks (matières premières et composants achetés, encours, produits finis) de la chaîne logistique (niveau stratégique, tactique et opérationnel),
 - management de la capacité productive de la chaîne logistique (acquisition, maintenance, externalisation),
 - management des transports,
 - management de la configuration de la chaîne logistique, en cohérence avec le portefeuille de produits et son évolution liée à leurs cycles de vie,
 - management des réglementations (respect des contraintes légales et réglementaires jouant sur l'ensemble de la chaîne logistique),
 - management stratégique de la cohérence de la chaîne logistique avec la stratégie globale de l'entreprise.

Table des matières

I-3 L'organisation physique du réseau de distribution

Une définition pertinente de l'architecture physique du réseau de distribution s'effectue en prenant en compte de nombreux critères :

- volume, valeur et variété des articles, péremption possible de ces articles;
- impact des conditionnements retenus sur les moyens de transport utilisés et l'organisation physique des points de stockage;
- nombre, localisation et volatilité des points de livraison;
- niveau de service requis en matière de délai (moyenne et dispersion), de fiabilité des livraisons (destinataire, quantité requise...), de réactivité aux aléas, de traçabilité; le problème posé est également un problème de stratégie commerciale qui conditionne la politique de distribution d'un portefeuille de produits, mais nous n'aborderons pas ces questions ici¹, considérant qu'elles se situent en amont et interagissent avec les politiques d'approvisionnement des clients, en particulier lorsque ceux-ci relèvent de la grande distribution (gestion des assortiments, des réapprovisionnements, des promotions...), dans le cadre d'une collaboration volontaire ou imposée; cette analyse ne peut faire l'économie, dans la comparaison performances/coûts des alternatives, d'une simulation concrète minimale du fonctionnement des circuits logistiques;
- importance relative des coûts de transport, d'entreposage et d'immobilisation dans le coût de revient total et par rapport à la concurrence.

Index thématique

1. Sur ces problèmes, voir, par exemple, Filser (1989, [148]) et Benoun & Héliès-Hassid (1995, [45]).

La Direction Générale d'une entreprise peut décider de sous-traiter tout ou partie de sa distribution et, dans ce cas, se pose la question de savoir à qui confier la délivrance de ces prestations (§ I-3.1). S'il est décidé que tout ou partie de ces prestations est à exécuter en interne, se pose alors le problème de l'architecture du réseau de distribution (§ I-3.2, page 900).

I-3.1 La sous-traitance de la distribution

La décision d'externaliser ou non les activités de distribution est une décision stratégique majeure dans un environnement concurrentiel où la satisfaction du client au moindre coût est un impératif. Une organisation des transports qui conduit à un acheminement fréquent de camions incomplètement remplis ou vides (le retour à vide est appelé **transport haut-le-pied**) peut conduire à un surcoût fatal pour l'entreprise. De la même façon, des immobilisations importantes dans les entrepôts ou une utilisation trop discontinue de ses ressources en hommes et équipements renchérisent la distribution.

Ces **transporteurs publics** (au sens où leurs prestations sont offertes à tous, par opposition aux **transporteurs privés** qui n'interviennent que pour leurs propres entreprises) peuvent offrir des prestations additionnelles intéressantes : traçabilité de colis en temps réel, mise à disposition de leur expérience en matière douanière dans le cas de transports internationaux, conseils sur le conditionnement et le marquage, pour ne citer que les plus connues. Le transporteur public ne connaît d'économie d'échelle que s'il arrive à bien utiliser ses moyens sur l'ensemble de ses clients. Si tel n'est pas le cas, certaines de ses prestations doivent être facturées plus cher pour tenir compte des retours à vide, ce qui peut poser un problème là où la concurrence par les prix est vive. Deux autres solutions sont envisageables. Certaines prestations peuvent être différées si cela améliore le remplissage des camions, mais cela n'est pas toujours possible si la concurrence par les délais est souvent vive. Reste enfin la possibilité de compléter la charge des camions par du fret confié par d'autres transporteurs, ce qui peut allonger la tournée, ou, symétriquement, de sous-traiter le transport de prestations qui ne peuvent être exécutées dans des conditions de coûts et de délais acceptables.

L'entreprise qui choisit de sous-traiter du transport est appelée donneur d'ordre ou **chargeur**. Elle peut décider de faire appel à un **commissionnaire** qui lui sert d'intermédiaire avec les transporteurs privés. Lorsque la vente se fait directement au consommateur final (ce que l'on appelle encore le **B2C**, pour **Business to Consumer**, par opposition au **B2B**, pour **Business to Business**), le transport final est nécessairement sous-traité. Une bonne présentation du marché des transports, des acteurs et des pratiques contractuelles peut être trouvée dans l'ouvrage de Pimor (2001, [337], chapitre VI).

Au niveau stratégique, plusieurs décisions sont à prendre : niveau de sous-traitance souhaité et avec quel type de prestataires ; pour la partie conservée, définition de l'architecture de réseau utiliser.

I-3.2 Architecture du réseau de distribution

Le client à livrer est celui qui passe commande et paye la marchandise. Pour des produits finis, il ne s'agit normalement pas du client final, la VPC et certaines formes de eCommerce¹ constituant une exception ; pour les autres produits, il

s'agit presque toujours d'une entreprise. A priori, deux types d'acheminement, non exclusifs, sont possibles: l'acheminement direct de l'entreprise au client qui se justifie économiquement pour les clients importants et l'acheminement indirect. L'acheminement indirect qui peut être confié à un prestataire (entreprises de messagerie), en particulier lorsque le client est un client final occasionnel (eCommerce, par exemple), mais pas seulement dans ce cas, implique le transit par un ou deux entrepôts ou plates-formes, voire plus, lorsque la distribution est à l'échelle planétaire.

I-3.2.1 Entrepôt ou plate-forme

Un **entrepôt** a pour vocation de stocker pendant un certain temps de la marchandise, tandis que la **plate-forme** est un lieu dans lequel des marchandises qui arrivent sont immédiatement transbordées, après tri, sur d'autres moyens de transport (on parle encore d'**entrepôt de transit**). Lorsque la marchandise reste dans son emballage sans fractionnement et ne fait donc que transiter en l'état, on parle de **cross-docking**. Ceci implique non seulement une excellente coordination des arrivées et des départs, mais aussi un marquage précis des lots et parfois même un encyclage précis (voir [page 509](#)), la désorganisation engendrée par un mauvais marquage ou une mauvaise synchronisation provoquant rapidement la paralysie de la plate-forme. Cette organisation en plates-formes se retrouve dans la messagerie (colis de moins de 300 kg en France). Les hubs jouent, pour le transport aérien, un rôle similaire à celui des plates-formes pour le transport terrestre; on peut ajouter qu'il concerne également le transport des personnes.

L'arrivée de petits colis en vrac ne permet pas de transbordement immédiat et implique habituellement des opérations de tri manuelles ou automatisées qui font que la synchronisation entre les départs et les arrivées n'est plus possible. On enlève périodiquement ce qui a été trié pour un ensemble de destinations pour charger un véhicule devant effectuer une tournée programmée. L'ancêtre de ce type d'organisation est l'organisation postale. L'**allotement** est la préparation d'une commande pour son destinataire final par un regroupement des articles demandés, dans les quantités requises, ce prélèvement s'appelant **piquage** (ou *picking*).

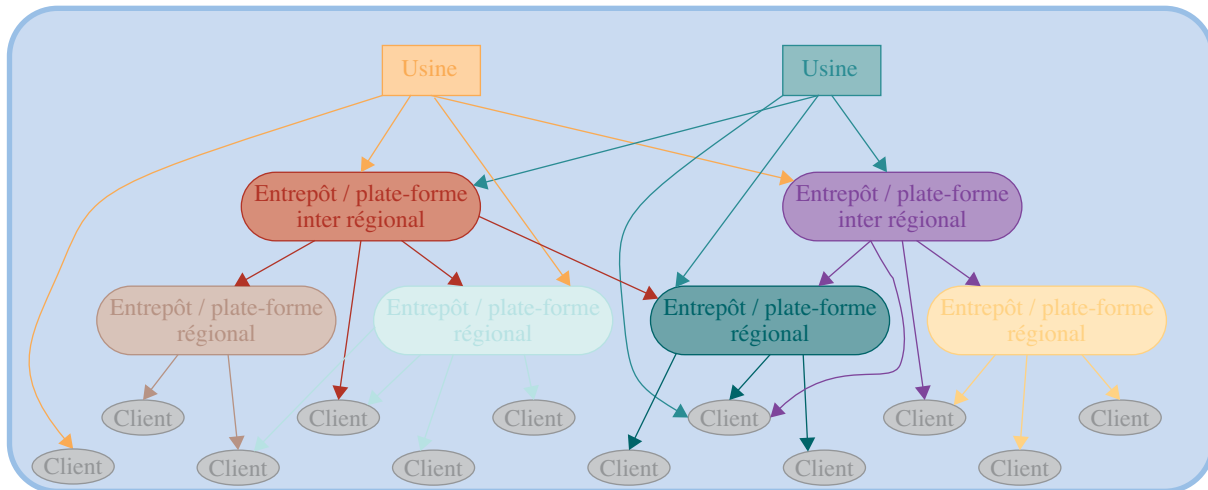
Le passage successif de marchandises par deux entrepôts (ou plates-formes) s'utilise dans une approche de stocks multi-échelons (voir [page 627](#)), où les entrepôts en relation avec les vendeurs finals ne s'approvisionnent pas directement auprès d'une usine – plusieurs usines pouvant fabriquer les mêmes références – mais auprès d'un autre entrepôt (ou plate-forme) jouant un rôle d'intermédiaire sur tout ou partie des références et pour un ensemble d'entrepôts (ou plates-formes). Dans ce schéma, un entrepôt (ou plate-forme) de rang 2, gestionnaire d'un ensemble de références destinées à des vendeurs finals, peut s'approvisionner auprès de plusieurs entrepôts (ou plates-formes) de rang 1 pour des sous-ensembles (habituellement) disjoints de ces références. Cet entrepôt (ou plate-forme) de rang 2 peut lui-même jouer le rôle d'entrepôt (ou plate-forme) de rang 1 pour un autre ensemble de références et servir lui-même tous les points de vente qui lui sont rattachés. Cette conception de réseau se fonde normalement sur un

1. Les implications du eCommerce sur la logistique sont bien décrites dans l'ouvrage de Bauer et al. (2001, [39]), lequel comporte une bibliographie détaillée.

arbitrage entre des coûts de transport entre les différents nœuds du réseau, des coûts d'immobilisation des marchandises, des coûts de détention des entrepôts et des coûts de défaillance du système d'approvisionnement devant faire face à un niveau de service donné. L'entrepôt de rang 2, ou celui de rang 1 en cas de stock mono-échelon, peut être un grossiste et ne pas être sous le contrôle du fabricant. La figure 220 illustre les différents circuits de flux possible d'un réseau de distribution à deux étages.

FIGURE 220

Exemple de circuits de flux possibles dans un réseau de distribution à deux étages
(les différents flux arrivant à un même nœud ne portent normalement pas sur les mêmes références)



I-3.2.2 Localisation des entrepôts

Le problème de la localisation des entrepôts ou plates-formes, leur nombre et leurs caractéristiques (capacité, références affectées...) est un problème redoutable. Si l'on décide de desservir un ensemble prédéterminé de points de livraison (ou d'enlèvement) par un entrepôt unique, on peut commencer par essayer de déterminer une localisation pertinente en recherchant le barycentre de cet ensemble de points, la pondération associée à chaque point étant proportionnelle au volume moyen annuel de livraisons (ou d'enlèvements). Cette première indication est à utiliser avec précaution pour plusieurs raisons :

- les distances réelles ne sont pas euclidiennes, la topographie et les caractéristiques du réseau routier jouent un rôle important,
- la localisation finale doit tenir compte de la qualité de l'accès au réseau routier et du bassin d'emploi dans lequel le personnel devra être recruté,
- le coût du transport n'est pas proportionnel à la distance et au volume à acheminer : une analyse plus fine s'appuyant sur une simulation de tournées et une explicitation des charges variables et fixes s'impose avant le choix définitif ; on peut lister quelques sites candidats proches du barycentre, expliciter de manière réaliste le coût de fonctionnement de ce centre et les coûts des tournées, puis choisir ;
- ce travail préliminaire repose sur des hypothèses implicites d'une certaine pérennité des prestations à fournir qui peut s'avérer risquée et amener à préférer une localisation différente.

Cette démarche est utilisable pour déterminer, dans un ensemble de régions disjointes, la localisation de l'entrepôt qui desservira chacune des régions. Il peut

être décidé de n'avoir que des liaisons directes avec chacun de ces entrepôts ou de travailler dans une structuration multi-échelons. Dans ce dernier cas, il faut déterminer la localisation et le nombre d'entrepôts inter-régionaux. Après avoir défini un ensemble de sites d'entrepôts régionaux possibles, on peut s'appuyer sur la démarche décrite au § I-2.2.2, page 552, du chapitre VIII, dont les extensions par introduction de fonctions de coût non linéaire (décrite au § II-2.3, page 1141, du chapitre XVI) permettent de définir des variantes de capacité de ces sites. Implicitement dans cette démarche on suppose que les coûts d'acheminement des usines aux entrepôts (ou plates-formes) inter-régionaux sont à peu près indépendants des localisations retenues. Cette hypothèse peut s'avérer très contestable et impliquer la prise en compte explicite de ces coûts d'acheminement vers ces dépôts interrégionaux, qui nécessite une adaptation mineure du problème d'optimisation à résoudre, si l'on fait appel à la démarche des modeleurs décrite à la page 1134.

I-3.2.3 Organisation physique des entrepôts ou plates-formes

Le dimensionnement d'un entrepôt est lié aux caractéristiques des références qu'il doit accueillir, mais il dépend aussi de deux séries de facteurs :

- Tout ou partie des marchandises qui passent par le site peut avoir pour vocation de séjourner un certain temps ou ne faire qu'un passage fugitif (cross docking). Ce choix stratégique a des incidences évidentes sur l'importance des zones de stockage nécessaires et sur la configuration des quais de chargement/déchargement.
- La fréquence des tournées d'approvisionnement et d'enlèvement ainsi que l'importance des charges véhiculées influent nécessairement sur les quais de chargement/déchargement et sur l'importance des zones de stockage nécessaires.

Il convient de ne pas oublier de poser le problème dans sa globalité et de tenir compte du fait que certains coûts du sous-système «transport» varient en sens inverse de certains coûts du sous-système «entrepôt». Des optimisations locales basées sur des contraintes imposées par l'un des sous-systèmes sur l'autre peuvent donc conduire à un ensemble de décisions globalement inefficaces. Les principales décisions à prendre dans la configuration d'un entrepôt ou d'une plate-forme, une fois définies les caractéristiques des références qui doivent y transiter, portent sur les moyens de stockage, ceux de manutention et l'organisation des flux dans l'entrepôt, liée à l'attribution d'emplacements fixes ou changeant au stockage de chacune des références.

En fonction de l'encombrement, de la fragilité, du coût et de la demande, les marchandises sont stockées soit en vrac dans des casiers, soit dans des cartons, bacs ou conteneurs rangés sur des rayons ou sur des palettes. La gestion des contenants (bacs, conteneurs, palette) pose des problèmes multiples (standardisation, entreposage des vides, gestion des retours...) qu'il ne faut pas sous-estimer. On distingue cinq modes de stockage (Pimor, 2001, [337], p. 151 et sq.) : le **stockage statique** (rayonnage fixe destiné à accueillir des palettes ou des cartons), le **stockage mobile** qui se déplace et permet une optimisation de la place (on retrouve ce système dans certaines pharmacies), le **stockage rotatif** vertical ou horizontal qui est constitué d'un ensemble de balancelles contenant des casiers et fixées sur une chaîne sans fin, le **stockage dynamique**, réalisé de différentes manières et qui se

fonde sur une logique de file d'attente à capacité limitée (les marchandises sont prélevées en tête de file, jusqu'à libérer une place, les nouvelles marchandises arrivant dans la file en queue de file) et les **transtockeurs** ou **magasins automatiques**, gérés informatiquement.

L'espace alloué à chaque article peut être fixé et rester le même pendant une longue période, ce qui facilite la manutention, mais augmente l'espace requis, le dimensionnement alloué à chaque article étant calculé sur le stock maximum. L'allocation peut être dynamique, ce qui complique la gestion physique des stocks, mais limite l'espace nécessaire.

La manutention s'effectue le plus souvent à l'aide de **chariots élévateurs**, qui nécessitent un contrepoids, et les **transpalettes** (mobilité verticale limitée) et **gerbeurs** (mobilité verticale importante, permettant de placer ou retirer une palette au-dessus d'une pile de palettes ou dans une alvéole en hauteur) qui ne nécessitent pas de contrepoids. Dans la « grande industrie », on trouve des systèmes de **convoyeurs** (du type de ceux qui acheminent les bagages dans les aéroports), souvent pour acheminer des marchandises à trier, et des systèmes de **chariots filoguidés**. Ces derniers sont gérés informatiquement, souvent conjointement avec des transtockers, et suivent le chemin de câbles enterrés dans le sol ; les problèmes posés sont analogues à ceux rencontrés dans le chemin de fer : localisation d'un chariot généralement basée sur sa présence sur une portion de ligne (canton), commande de l'avancement des chariots suivant des règles empêchant qu'ils ne puissent se télescoper, choix du chariot devant effectuer une prestation (la règle « prendre le chariot libre le plus proche » ne donnant pas nécessairement les meilleurs résultats).

SECTION II LA DÉFINITION DE GAMMES DE TRANSPORT

La définition de la production de biens et de services proposée au **chapitre I** (page 41) ne fait pas de distinction entre des opérations de transformation et celles de transport. Le concept de gamme s'applique donc aussi aux opérations de transport mobilisant des moyens de transport et des opérateurs les utilisant. Cette vision globale est conforme à la vision processus défendue dans l'approche de la chaîne logistique. Elle permet d'intégrer le transport dans une vision d'ensemble, ce qui est particulièrement important lorsque celui-ci peut s'effectuer de manière alternative à plusieurs endroits dans la production d'un produit fini. Deux exemples permettent d'illustrer cette remarque.

- Les équipementiers de l'industrie automobile travaillent dans le cadre d'approvisionnements synchrones (voir pages 509 et 599) qui les conduisent à envisager de s'intégrer dans un **Site Avancé Fournisseur** où d'ultimes opérations productives sont effectuées (généralement liées à une différenciation retardée) ou de créer un **Magasin Avancé Fournisseur**. Les gammes alternatives associées à ces deux solutions, qui conduisent au même résultat final pour le client, se différencient par un déplacement de l'opération de transport dans la gamme globale, qui a une incidence sur l'opération de transport (un produit semi-fini n'impliquant pas les mêmes contraintes qu'un produit fini).

- Le second exemple concerne certaines entreprises de réseau «au sens strict». Nous avons vu au § I-2.3.2.4, page 66, du chapitre I qu'elles se caractérisaient par une certaine marge de manœuvre dans la localisation de certains traitements. Par exemple, le courrier envoyé par un bureau de poste à son centre de tri peut avoir fait l'objet d'un tri préalable plus ou moins poussé, ce qui a une incidence non seulement sur les horaires d'enlèvement, mais aussi sur les volumes à acheminer, la ségrégation du courrier devant être conservée dans le transport. Là encore, une réflexion stratégique de réorganisation doit s'appuyer sur l'étude de gammes alternatives globales intégrant des opérations de transport.

La distinction entre une formalisation mono-période et une formalisation multi-périodes des processus de production retenue au chapitre VIII pourrait être utilisée ici, d'autant que certains modèles présentés ici se rattachent à des modèles présentés dans ce chapitre VIII. S'agissant d'une introduction à cette classe de problèmes, on n'abordera que quelques problèmes mono-période, celui de l'organisation des tournées (§ II-1) et celui de l'affectation de prestations de transport à des véhicules (§ II-2, page 921).

II-1 Détermination des tournées

Une bonne organisation de tournées d'acheminement de produits finis ou d'enlèvement de matières premières ou de produits est souvent un enjeu majeur en termes de coûts et de délais. Les tournées d'enlèvement de matières premières se rencontrent dans l'industrie agro-alimentaire (enlèvement de produits fermiers). Les tournées d'enlèvement de produits sont plus rares car, en règle générale, leur acheminement est à la charge du fournisseur, pour lequel il s'agit d'un problème de distribution. Cela étant, dans la grande distribution où la fonction achat est souvent centralisée, se pose la question de savoir si c'est le fournisseur qui doit livrer chacun de ces points de vente, si c'est un prestataire qui prend en charge ce problème ou si c'est l'acheteur qui se fait livrer dans des dépôts régionaux, auquel cas les tournées d'approvisionnement des points de vente sont à sa charge. Un panachage de ces solutions peut être judicieux ; par exemple, si la solution de principe est la dernière des trois évoquées, rien n'empêche d'utiliser la première pour des articles chers, encombrants et peu demandés.

Une tournée se définit par la visite unique de tous les points de livraison ou d'enlèvement d'un ensemble de points à visiter, le problème étant de déterminer l'ordre de passage de ces visites et, éventuellement, de tenir compte de certaines contraintes. Ce problème se pose a priori pour l'organisation de tournées régulières (collecte de lait, approvisionnement de supérettes...), mais, les moyens de traitement dont on dispose et la disponibilité commerciale de distanciers précis font que, de nos jours, l'usage d'un système interactif d'aide à la décision (SIAD) est possible pour traiter quotidiennement des problèmes spécifiques et donc de mieux gérer, par exemple, l'organisation de tournées de réparateurs ou de spécialistes de la maintenance, dont la liste de clients varie d'un jour à l'autre. Ce problème, sous sa forme la plus simple, a déjà été traité au § I-2.1, page 390, du chapitre V¹.

On commencera par formaliser le problème de base du voyageur de commerce, en faisant appel à la programmation linéaire (§ II-1.1). On compliquera ensuite ce

modèle pour introduire le cas de tournées multiples (§ II-1.2, page 911) pour lesquelles peuvent se poser des contraintes de capacité et de fenêtres de temps, avant d'aborder le cas particulier des tournées filaires devenu important dans le cadre de la chrono-compétition (§ II-1.3, page 918).

II-1.1 Le problème «original» du voyageur de commerce

Le problème du voyageur de commerce est celui de la définition d'une tournée dans n villes différentes, en ne passant qu'une seule fois dans chacune de ces villes, avant de revenir dans la ville de départ. Très souvent, cette tournée est à effectuer au cours d'une journée et le lendemain, le problème se pose pour un ensemble différent de villes; au bout de plusieurs jours, par exemple cinq jours ouvrables, on revient sur le problème initialement posé, ce qui revient à définir un cycle de tournées qui se répète tous les cinq jours. On verra à la page 911 comment déterminer une partition optimale des villes à visiter dans un cycle de tournées.

Le problème posé est celui de la définition d'une gamme optimale de transport caractérisée par la sélection d'une liste de n couples «ville d'origine i – ville de destination j » choisis dans un vaste ensemble de couples possibles¹, chaque ville devant être retenue une fois et une seule comme ville de départ et une fois et une seule comme ville d'arrivée. On examinera ici des formalisations en univers certain; l'approche stochastique de ce problème (temps de transport définis par des distributions de probabilité) a été présentée au § I-2.2.3, page 402, du chapitre V et illustrée par un exemple numérique.

II-1.1.1 Formulations possibles de ce problème

Une formulation de ce problème est possible par la programmation linéaire en nombres entiers où la variable binaire x_{ij} vaut 1 si l'on part de la ville i pour se rendre dans la ville j et 0, dans le cas contraire. Pour obtenir une tournée, il faudra :

- partir une fois et une seule de la ville i , ce qui implique (en application de la règle 2 de la page 1139):

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = 1 \quad \text{relation 346}$$

- arriver une fois et une seule dans la ville j , ce qui implique:

$$\sum_{i=1}^n x_{ij} = 1, \text{ pour } i \geq 0 \quad \text{relation 347}$$

1. Note de la page précédente. Par rapport à la typologie introduite au chapitre VIII des problèmes susceptibles d'être traités par la programmation linéaire, on est en présence d'un problème de productions liées de prestations de service faisant appel à des gammes alternatives, dans un cadre mono-période, comme nous l'avons précisé au § I-3.2, page 561. Souvent dans cette classe de problèmes, introduite au § I-2.1.4, page 544, du chapitre VIII, l'ensemble de ces gammes alternatives est supposé connu, le problème posé étant celui de la sélection d'un sous-ensemble de ces gammes minimisant un coût de production. L'explicitation de ces gammes alternatives peut s'avérer un problème rapidement insoluble pour des raisons de combinatoire faisant intervenir des contraintes de temps et / ou d'espace. Il s'agit ici de définir directement des gammes à utiliser, sans passer par leur explicitation systématique préalable.

1. Cette liste peut atteindre $n(n-1)$ couples «origine – destination», puisque pour chacune des n villes i , on a un maximum $(n-1)$ villes j de destination. Dans la suite, on raisonnera en s'appuyant sur cette liste maximale, ce qui ne restreint pas le raisonnement. Dans la pratique, on a intérêt à travailler sur une liste réduite en éliminant les liaisons les plus pénalisantes (en ne retenant, par exemple, pour chaque ville, que les $n/2$ villes les plus proches).

Le nombre de tournées possibles est élevé, puisqu'il y en a $(n-1)!$, si aucun couple «origine – destination» n'est, a priori, exclu. L'introduction d'un critère permet de juger l'intérêt de ces solutions alternatives. Les critères habituellement retenus sont ceux de minimisation du coût global de la tournée ou de la durée totale de la tournée ou de la distance totale parcourue. Si l'on note c_{ij} le coût (ou le temps ou la distance) du transport de i vers j , le critère à optimiser est :

$$\text{Min} \left[\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} \right] \quad \text{relation 348}$$

Il n'est pas possible de quitter une ville pour se rendre dans cette même ville. Le respect de cette interdiction peut être obtenu soit en interdisant à i et j de prendre la même valeur dans le «développement» de la double sommation de la relation 348 ($j \neq i$, ce qui conduit, en réalité, à ne créer que $n^2 - n$ variables x_{ij}), soit en posant $c_{ij} = \infty^1$, ce qui, dans le processus d'optimisation, rend sans intérêt le retour immédiat dans la ville d'où l'on vient. C'est cette seconde solution qui était implicitement retenue dans les relations 346 à 348.

En cas de *matrice symétrique* des distances ($c_{ij} = c_{ji}$), le problème peut être résolu numériquement plus rapidement en utilisant x_{ij} à la place de x_{ji} , pour $j > i$, ce qui divise par 2 le nombre de variables (x_{ij} n'existe que pour $j < i$) et confère à x_{ij} la signification de «la relation entre i et j est utilisée (peu importe qu'elle soit de type i vers j ou j vers i)»; les relations 346 et 347 peuvent alors être remplacées par les contraintes de la relation 349 qui stipulent que toute ville nécessairement reliée à deux autres villes²:

$$\sum_{i>1} x_{i1} = 2; \sum_{j<k} x_{kj} + \sum_{i>k} x_{ik} = 2, \text{ pour } k = 2, \dots, n-1 \text{ et } \sum_{j<n} x_{nj} = 2 \quad \text{relation 349}$$

La résolution de ce problème peut s'effectuer en faisant appel à des algorithmes spécifiques, comme l'algorithme de Little (voir le § I-2.1, page 390, du chapitre V), qui permettent de résoudre aisément des problèmes de tournées portant sur quelques dizaines de villes. La contrepartie est alors l'impossibilité de modifier le problème posé pour le rendre plus réaliste (par l'introduction de contraintes de capacité, de durée, etc.), ce qui n'est pas le cas si l'on utilise les algorithmes généraux des logiciels d'optimisation.

Cependant l'usage de tels logiciels, que l'on privilégie ici, pose un problème pratique redoutable dans la mesure où cette formulation n'empêche pas la création de plusieurs tournées partielles au lieu d'une tournée unique globale. Appuyons-nous sur un exemple pour faire comprendre ce qui peut se passer: si l'on cherche à définir une tournée entre les 6 villes $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon$ et ζ , il est évident qu'une solution constituée des deux tournées partielles $\alpha \rightarrow \beta \rightarrow \gamma \rightarrow \alpha$ et $\delta \rightarrow \varepsilon \rightarrow \zeta \rightarrow \delta$ respecte les contraintes définies par les relations 346 et 347, puisque chaque ville ne sera

1. D'un point de vue opérationnel, n'importe quelle valeur supérieure aux valeurs prises par les c_{ij} suffit pour empêcher de «rester sur place».

2. On passe implicitement d'une notion d'arc orienté à une notion d'arc non orienté. Il s'ensuit que les variables de commande x_{ij} , qui étaient précédemment au nombre de $n(n-1)$, pouvaient se décrire par un tableau carré (dont la diagonale «nord-ouest – sud-est» est neutralisée). Dans cette seconde formulation, elles se décrivent par une matrice triangulaire inférieure et sont au nombre de $n(n-1)/2$; la première contrainte de la relation 349 utilise les variables de la première colonne de cette matrice triangulaire, tandis que la suivante utilise les variables de la colonne k et celles de la ligne k .

qu'une seule fois ville d'origine et une seule fois ville de destination¹. Pour empêcher la création de telles tournées partielles, trois solutions sont envisageables.

La *première solution*, qui est la seule permettant de tirer parti de la symétrie de la matrice des distances (ou des coûts), consiste à ajouter de nouvelles contraintes pour empêcher la formation d'une tournée partielle; par exemple, pour empêcher la formation de la tournée $\alpha \rightarrow \beta \rightarrow \gamma \rightarrow \alpha$, il suffit d'ajouter la contrainte $x_{\alpha\beta} + x_{\beta\gamma} + x_{\gamma\alpha} < 3$. L'inconvénient de la généralisation de cette solution est qu'il faut a priori²

introduire $\sum_{k=2}^{n-1} C_n^k$ contraintes et que l'explicitation de ces contraintes additionnelles est fastidieuse et pénalisante en temps de calcul. Une solution opérationnelle alternative à cette généralisation, facile d'implémentation avec les modeleurs (voir [page 1134](#)), consiste :

- Étape 1 : à partir du problème initial défini par les relations 346 à 348 (ou la [relation 349](#), en cas d'utilisation de la symétrie de la matrice des c_{ij});
- Étape 2 : à résoudre le problème posé puis à examiner la solution trouvée pour détecter la création de tournées partielles;
- Étape 3 : en cas de non-crédation de tournées partielles, la solution trouvée est retenue et le processus de résolution est achevé;
- Étape 4 : à ajouter au problème une (ou plusieurs) nouvelle(s) contrainte(s) pour empêcher la création de la (ou de plusieurs des) tournée(s) partielle(s) trouvée(s) au cours de l'étape précédente puis à revenir à l'étape 2.

La *deuxième solution* est plus simple, en ce sens qu'elle n'implique pas l'utilisation d'une démarche itérative dans la formulation du problème pour arriver à la solution. En contrepartie, elle ne permet aucune extension à ce modèle. Elle se caractérise par l'introduction de la variable θ_i qui s'interprète comme le *rang* de la ville i dans la tournée. Si l'on définit arbitrairement la ville départ comme étant la ville 1, la dernière ville à placer aura le rang n (et donc la plus grande différence possible entre deux rangs est $n-1$); dans ces conditions :

- si la tournée implique de partir de i pour se rendre en j (c'est-à-dire si $x_{ij} = 1$), alors $\theta_i < \theta_j$, ce qui s'écrit encore $\theta_i - \theta_j < 0$;
- si la tournée implique de partir de i pour se rendre dans une ville différente de j (c'est-à-dire si $x_{ij} = 0$), alors on peut avoir aussi bien $\theta_i < \theta_j$ que $\theta_i > \theta_j$, ce qui peut s'écrire $\theta_i - \theta_j < n$, puisque la différence maximale de rang entre les villes restant à placer est égale à $n-1$;

ces deux contraintes se résument facilement³ par la [relation 350](#) dont le second membre est nul si $x_{ij} = 1$ et égal à n , si $x_{ij} = 0$:

1. Par contre, cette solution sera interdite avec la prise en compte de la symétrie par la [relation 349](#), le transport entre α et γ n'étant possible qu'une seule fois. L'utilisation de la symétrie évite donc, par construction, la création des circuits consistant à revenir immédiatement dans la ville que l'on vient de quitter. Par contre cette formulation n'empêche pas l'obtention des tournées partielles mettant en jeu 3 étapes ou plus (par exemple $\alpha \rightarrow \delta \rightarrow \gamma \rightarrow \beta \rightarrow \alpha$).

2. En effet, il faut donc $C_6^2 = 15$ contraintes pour empêcher toute tournée partielle portant sur 2 villes, $C_6^3 = 20$ contraintes pour empêcher toute tournée partielle portant sur 3 villes....., d'où dans notre exemple ($\sum_{k=2}^6 C_7^k = 15 + 20 + 15 + 6 = 56$) 56 contraintes additionnelles.

$$\theta_i - \theta_j < n(1 - x_{ij}), \text{ pour } i \geq 1, j > 1 \text{ et } j \neq i \quad \text{relation 350}$$

On peut noter que cette relation n'est pas appliquée au dernier transport fermant la boucle ($j = 1$) car son application aux étapes d'une boucle implique nécessairement que l'une des paires de deux villes successives de cette boucle conduise à avoir une valeur positive du membre gauche et une valeur nulle du membre droit, ce qui est interdit dans cette relation.

La *troisième solution* est une variante de la solution précédente (basée sur l'idée que toute transformation monotone croissante des θ_i aboutit aux mêmes résultats) permettant certaines extensions du modèle. Elle utilise les temps de transport t_{ij} ¹; dans ce cas, les variables θ_i correspondent aux heures d'arrivées dans les villes i (on pose $\theta_1 = 0$). Avec une date d'arrivée θ_i et un temps de séjour obligatoire (lié à un travail de transbordement, par exemple, mais qui peut être nul) κ_i à l'étape i , la date de départ de i est $[\theta_i + \kappa_i]$. Dans ces conditions:

- si la tournée implique de partir de i pour se rendre en j (c'est-à-dire si $x_{ij} = 1$), alors la date d'arrivée en j ne peut être inférieure au cumul de la date d'arrivée en i , augmentée du temps de séjour obligatoire en i et du temps de transport entre i et j : $\theta_j \geq [\theta_i + \kappa_i + t_{ij}]$,
- si l'on ne se rend pas en j en partant de i , il n'y a pas de relation entre θ_i et θ_j (la date θ_j pouvant être aussi bien antérieure que postérieure à la date θ_i).

Ces deux cas de figure peuvent se décrire par la [relation 351](#)², qui comporte une constante R arbitrairement élevée et possède une structure similaire à celle de la [relation 350](#)³:

$$\theta_1 = 0 \text{ et } [\theta_i + \kappa_i + t_{ij}] - \theta_j \leq R(1 - x_{ij}), \text{ pour } i \geq 1, j > 1 \text{ et } j \neq i \quad \text{relation 351}$$

Dans la deuxième solution, le rang de la dernière ville ne pouvait être qu'égal à n et, par voie de conséquence, celui de la première ville placée ne pouvait qu'être égal à 2. Dans cette troisième solution, il ne peut y avoir de création de tournées partielles, mais, sans contrainte additionnelle, rien n'interdit à un θ_j d'être supérieur à la date de départ de l'étape précédente i augmenté du temps de transport entre i et j . Pour forcer l'égalité, il faut contraindre:

- toutes les heures d'arrivée θ_j , et par voie de conséquence celle de la dernière étape, à être inférieures ou égales au temps de transport total

$$\left[\sum_{i'=1}^n \left\{ \kappa_{i'} + \sum_{j=1}^n t_{i'j} x_{i'j} \right\} \right], \text{ diminué du temps de transport entre la ville } i \text{ et la ville } 1, \text{ tête de tournée;}$$

3. *Note de la page précédente.* il s'agit là d'une application de la contrainte C_3 du [tableau 351](#), page 1138: la [relation 350](#) peut en effet s'écrire $z \leq n\delta$, avec $\delta = 1 - x_{ij}$ et $z = \theta_i - \theta_j - 1$ (les θ_i étant discrets); $\delta = 0 \Rightarrow z = 0$ devient ici $x_{ij} = 1 \Rightarrow \theta_i \leq \theta_j - 1$.

1. Les t_{ij} peuvent être les coefficients de la fonction-objectif, si les c_{ij} représentent les temps de transport; si les t_{ij} représentent des *distances*, cette solution reste utilisable (avec $\kappa_i = 0$), θ_i s'interprétant alors comme le kilométrage parcouru depuis la première ville.

2. On peut remarquer que cette formulation est équivalente à l'utilisation de la contrainte non linéaire (parce que faisant intervenir les produits des variables $x_{ij}\theta_i$ et $x_{ij}\theta_j$) suivante $\{[\theta_i + \kappa_i + t_{ij}] - \theta_j\}x_{ij} \leq 0$.

3. On peut noter que la durée de la tournée s'obtient en ajoutant à la valeur prise par θ_i pour la dernière ville de la tournée, le temps de séjour dans cette ville, augmenté du temps de transport pour revenir à la ville de départ.

- toutes les dates d'arrivée θ_j , et par voie de conséquence celle de la première étape, à être supérieures ou égales au temps de transport entre la ville 1, tête de tournée, et la ville j .

Ces restrictions sont obtenues par la relation 352.

$$\theta_i \leq \left[\sum_{i'=1}^n \left\{ \kappa_{i'} + \sum_{j=1}^n t_{i'j} x_{i'j} \right\} \right] - t_{i1}, \text{ pour } i > 1 \text{ et } \theta_j \geq t_{1j}, \text{ pour } j > 1 \quad \text{relation 352}$$

II-1.1.2 Exemple d'application

Le tableau 270 donne le distancier des 10 principales villes de Lidurie représentées dans la carte de la figure 160, page 554.

TABLEAU 270
Distances c_{ij} entre les principales villes de Lidurie

à de	α ville ($j=1$)	β ville ($j=2$)	γ ville ($j=3$)	δ ville ($j=4$)	ϵ ville ($j=5$)	ζ ville ($j=6$)	η ville ($j=7$)	θ ville ($j=8$)	ι ville ($j=9$)	κ ville ($j=10$)
α ($i=1$)	0	27	61	110	72	206	241	152	276	149
β ($i=2$)	27	0	72	121	61	179	259	130	292	173
γ ($i=3$)	61	72	0	49	131	227	280	200	220	176
δ ($i=4$)	110	121	49	0	180	260	310	246	172	202
ϵ ($i=5$)	72	61	131	180	0	177	235	91	348	172
ζ ($i=6$)	206	179	227	260	177	0	411	112	423	345
η ($i=7$)	241	259	280	310	235	411	0	309	410	110
θ ($i=8$)	152	130	200	246	91	112	309	0	418	261
ι ($i=9$)	276	292	220	172	348	423	410	418	0	304
κ ($i=10$)	149	173	176	202	172	345	110	261	304	0

Table des matières

Index thématique

Étudions l'application des approches de résolution numérique proposées. Avec la première solution (définie en page 908), si l'on utilise la simplification autorisée en cas de matrice symétrique, le problème posé est :

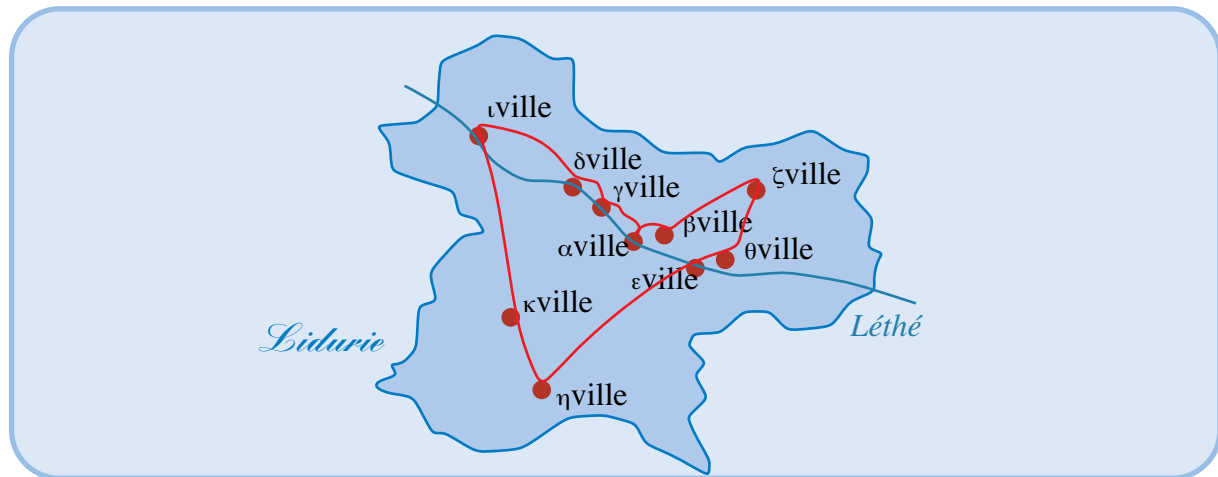
$Min(z)$, avec $z = 27x_{21} + 61x_{31} + 72x_{32} + 110x_{41} + 121x_{42} + 49x_{43} + 72x_{51} + 61x_{52} + 131x_{53} + 180x_{54} + 206x_{61} + 179x_{62} + 227x_{63} + 260x_{64} + 177x_{65} + 241x_{71} + 259x_{72} + 280x_{73} + 310x_{74} + 235x_{75} + 411x_{76} + 152x_{81} + 130x_{82} + 200x_{83} + 246x_{84} + 91x_{85} + 112x_{86} + 309x_{87} + 276x_{91} + 292x_{92} + 220x_{93} + 172x_{94} + 348x_{95} + 423x_{96} + 410x_{97} + 418x_{98} + 149x_{10,1} + 173x_{10,2} + 176x_{10,3} + 202x_{10,4} + 172x_{10,5} + 345x_{10,6} + 110x_{10,7} + 261x_{10,8} + 304x_{10,9}$

Sous contraintes $\sum_{i=2}^{10} x_{i1} = 2$ et $\sum_{j=1}^{k-1} x_{kj} + \sum_{i=k+1}^{10} x_{ik} = 2$, pour $k = 2, \dots, 9$ et

$\sum_{j=1}^9 x_{1j} = 2$ (application de la relation 349), ce qui oblige chaque ville k à être reliée à deux autres villes; par exemple, pour $k = 3$, on a: $x_{31} + x_{32} + x_{43} + x_{53} + x_{63} + x_{73} + x_{83} + x_{93} + x_{10,3} = 2$.

On obtient alors directement (et donc sans création de circuit dans cet exemple) la tournée illustrée à la [figure 221 de la page 911](#), pour un kilométrage total de 1 340 km (ce qui conduit à une durée de 20,6 heures, à la vitesse moyenne de 65 km / heure, sans compter les arrêts pour transbordement).

FIGURE 221
Tournée unique partant d'Alphaville



L'utilisation de la première solution (voir [page 908](#)) sans tirer parti des possibilités offertes par la symétrie de la matrice de distance oblige à utiliser la fonction-objectif définie par la [relation 348 de la page 907](#) et à remplacer la [relation 349 de la page 907](#) par les relations [346 \(page 906\)](#) et [347 \(page 906\)](#), d'où $10 + 10 = 20$ contraintes. Elle conduit, en l'absence de contraintes supplémentaires, aux tournées suivantes $\alpha \rightarrow \gamma \rightarrow \alpha$, $\beta \rightarrow \varepsilon \rightarrow \beta$, $\delta \rightarrow \iota \rightarrow \delta$, $\zeta \rightarrow \theta \rightarrow \zeta$, $\eta \rightarrow \kappa \rightarrow \eta$. L'introduction des 5 contraintes destinées à empêcher ces circuits partiels permet alors d'aboutir immédiatement à la solution optimale précédemment décrite (problème résolu en 2 étapes et 25 contraintes).

Table des matières

Index thématique

La deuxième solution ([page 908](#)) conduit à la même solution optimale, mais au prix de calculs plus longs puisque le nombre de contraintes passe à $10 + 10 + 9 \times 8 = 72$ et le nombre de variables à $10 \times 9 + 9 = 99$ variables.

Avec la troisième solution ([page 909](#)), si l'on suppose que les c_{ij} correspondent à des distances, les variables θ_i représentent le kilométrage total parcouru jusqu'à la ville i ; il faut remplacer, par rapport à la deuxième solution, les contraintes générées par la [relation 350 de la page 909](#) par celles générées par les relations [351](#) et [352 \(page 910\)](#). Par exemple, l'application de la [relation 351](#) donne, pour $j = 4$, les 9 contraintes suivantes, où R est une valeur supérieure au kilométrage maximal de la tournée, par exemple, $R = 10000$: $\theta_4 + c_{41} - \theta_1 \leq R(1 - x_{41})$; $\theta_4 + c_{42} - \theta_2 \leq R(1 - x_{42})$; $\theta_4 + c_{43} - \theta_3 \leq R(1 - x_{43})$; $\theta_4 + c_{45} - \theta_5 \leq R(1 - x_{45})$; ... ; $\theta_4 + c_{4,10} - \theta_{10} \leq R(1 - x_{4,10})$. La solution obtenue est la même que précédemment.

II-1.2 Le problème des tournées multiples à partir d'une même ville, avec introduction de contraintes de capacité et de fenêtres de temps

Ce problème se rencontre classiquement lorsqu'on organise plusieurs tournées de distribution (ou de ramassage) à partir (ou à destination) d'un même dépôt ou plate-forme. On examinera successivement la formulation du problème sans

contrainte additionnelle (§ II-1.2.1), puis avec contrainte de capacité sur les véhicules (§ II-1.2.2, page 914), avec contrainte sur les heures de passage des tournées (§ II-1.2.3, page 916). On a évoqué au début du § II-1.1, page 906, la possibilité de construire un ensemble de tournées qui se suivent d'un jour sur l'autre et reviennent avec une périodicité fixe (cycle de tournées). Dans cette perspective, les ensembles différents de points à visiter chaque jour étaient fixés à l'avance. On peut utiliser la formulation de ce § II-1.2 pour définir une partition optimale des points à visiter, cette solution excluant qu'un même point puisse être visité plusieurs fois au cours d'un même cycle de tournées.

II-1.2.1 Création de tournées multiples à partir d'une même ville

Ce problème a déjà été abordé au § I-2.2.2, page 402 du chapitre V, dans une formulation qui exclut toute prise en compte ultérieure de contraintes, contrairement à la formulation proposée ici.

Dans une formulation simple, le problème de l'organisation de tournées à partir d'un même dépôt est une variante du problème précédent. Elle consiste à définir q tournées, partant toutes de la même ville (par convention ici, la ville 1), étant entendu toutes les autres villes doivent être visitées une fois et une seule. Pour obtenir ce résultat, il suffit de transformer les contraintes portant sur la ville 1, dans les relations 346 et 347 (page 906), en imposant, pour cette seule ville, d'avoir q villes de destination et d'être elle-même ville de destination en provenance de q autres villes. Les relations 346 et 347 deviennent alors :

- partir q fois de la ville 1 :

$$\sum_{j=2}^n x_{1j} = q \quad \text{relation 353}$$

- partir une fois et une seule de chaque ville i autre que la ville 1 (cette ville 1 restant une destination j possible) :

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = 1, \text{ pour } i > 1 \text{ et } i \neq j \quad \text{relation 354}$$

- arriver q fois dans la ville 1 :

$$\sum_{i=2}^n x_{i1} = q \quad \text{relation 355}$$

- arriver une fois et une seule dans chaque ville j autre que la ville 1 (cette ville 1 restant une origine i possible) :

$$\sum_{i=1}^n x_{ij} = 1, \text{ pour } j > 1 \text{ et } j \neq i \quad \text{relation 356}$$

Il est possible de supprimer les relations 353 et 355, c'est-à-dire de *ne pas fixer a priori* le nombre de véhicules utilisés pour déterminer le nombre de véhicules qui minimise le coût de fonctionnement du système étudié (ce nombre étant souvent 1); il convient cependant de les remplacer par la contrainte définie par la relation 357 :

$$\sum_{i=1}^n x_{i1} = \sum_{j=1}^n x_{1j} \quad \text{relation 357}$$

qui oblige à avoir autant de véhicules à l'arrivée de la ville 1 qu'au départ de la ville 1. En fait, cette dernière formulation ne présente de réel intérêt que si d'autres contraintes sont introduites (capacité, fenêtre de temps...) et si la fonction de coût utilisée combine un coût variable proportionnel à la distance totale parcourue et une charge fixe correspondant à une quote-part¹ de l'amortissement et de l'entretien des véhicules utilisés ainsi que de charges salariales des conducteurs de ces véhicules (on examinera au § II-2.3, page 1141, du chapitre XVI, comment tenir compte de telles fonctions de coûts non linéaires).

Si la matrice des distances est symétrique, on pourra remplacer les relations 353 et 355 par la relation 358 qui oblige la première ville (tête de tournée) à avoir 2q liaisons avec les autres villes :

$$\sum_{i>1} x_{i1} = 2q \quad \text{relation 358}$$

et les relations 354 et 356 par la relation 359 qui reprend en partie la relation 349 de la page 907 pour obliger chaque ville $k (>1)$ à avoir 2 liaisons avec les autres villes.

$$\sum_{j<k} x_{kj} + \sum_{i>k} x_{ik} = 2, \text{ pour } k = 2, \dots, n-1 \text{ et } \sum_{j<n} x_{nj} = 2 \quad \text{relation 359}$$

Ces contraintes n'empêchent pas la formation de circuit et il faudra analyser la solution obtenue et rajouter au problème de nouvelles contraintes pour empêcher cette formation, dans le cadre du processus itératif décrit à la page 908.

Table des matières

Si l'on décide de ne pas utiliser la simplification qu'autorise la symétrie de la matrice (en particulier pour pouvoir introduire de nouvelles contraintes), les relations 353 à 356 doivent être utilisées conjointement avec la relation 351 de la page 909, destinée à empêcher tout circuit qu'il faut adapter en cas de tournées multiples :

Index thématique

$$\theta_1 = 0 \text{ et } [\theta_i + \kappa_i + t_{ij}] - \theta_j \leq R \left(1 - \sum_{h=1}^H x_{ijh}\right), \text{ pour } i \geq 1, j > 1 \text{ et } j \neq i \quad \text{relation 360}$$

Par contre, la relation 352 de la page 910, destinée à interdire les temps morts dans la tournée, n'est plus utilisable (et n'est pas adaptable, faute de connaissance préalable des villes affectées à chaque véhicule), ce qui oblige à recalculer les valeurs des θ_j .

On peut illustrer ce cas de figure en supposant maintenant que trois tournées indépendantes ($q = 3$) sont à organiser à partir d'Alphaville. La fonction-objectif de la page 910 reste valable. Si les simplifications de la symétrie sont utilisées, la contrainte de la page 910 reste valable, mais il faut y ajouter la contrainte suivante : $x_{21} + x_{31} + x_{41} + x_{51} + x_{61} + x_{71} + x_{81} + x_{91} + x_{10,1} = 6$. On obtient alors la solution illustrée par la figure 222, pour un kilométrage total de 1472 km (les chargements transportés résultent des données du tableau 271 de la page 916 et sont fournis pour permettre d'introduire l'exemple sur la prise en compte des contraintes de capacité).

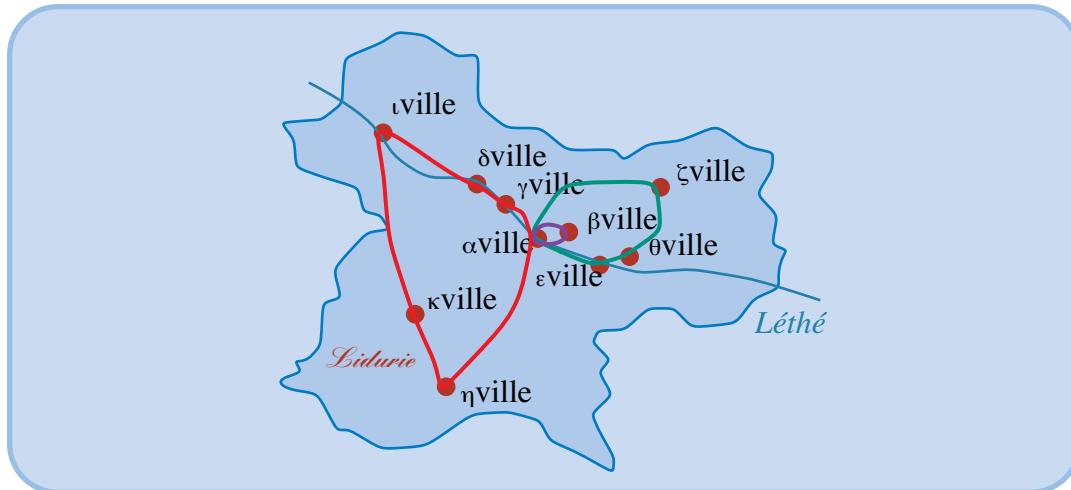
- α -ville \rightarrow β -ville \rightarrow α -ville (chargement = 19 tonnes; distance parcourue = 54 km);

1. calculée sur la période implicitement retenue dans le problème posé, pour être compatible avec les coûts variables proportionnels.

- α -ville \rightarrow ε -ville \rightarrow θ -ville \rightarrow ζ -ville \rightarrow α -ville (chargement = 27 tonnes; distance parcourue = 481 km);
- α -ville \rightarrow γ -ville \rightarrow δ -ville \rightarrow ι -ville \rightarrow κ -ville \rightarrow η -ville \rightarrow α -ville (chargement = 31 tonnes; distance parcourue = 937 km).

FIGURE 222

Trois tournées indépendantes partant d'Alphaville



II-1.2.2 Introduction de contraintes de capacité

De nombreux problèmes de tournées imposent le respect d'une contrainte¹ de capacité (exprimée en volume ou en poids) auquel est assujéti le véhicule effectuant une tournée (implicitement, au § II-1.2.1, on a raisonné à capacité infinie). Ce problème n'a de sens que lorsque l'on est en présence de tournées multiples car il est évident que la recherche d'une tournée optimale unique est a priori sans objet si l'on ne dispose pas au départ d'une capacité suffisante.

Dans cette sophistication du problème, les différents véhicules, repérés par l'indice h , se caractérisent par les capacités u_h (celle-ci étant exprimée en volume ou en poids ou en unité d'œuvre) et chaque ville visitée se caractérise par une utilisation de capacité v_i associée au chargement de marchandises toutes en provenance (ou à destination) du dépôt (il n'y a donc pas de transport à effectuer dans la ville du dépôt). Il faut transformer le problème comme suit :

- les variables de commande du problème (x_{ij}) comportent en plus l'indice h ; cette variable binaire x_{ijh} vaut 1 seulement si le camion h part de i pour se rendre en j et vaut 0, dans le cas contraire (ce qui conduit à retenir la liaison

i vers j lorsque $\sum_{h=1}^H x_{ijh} = 1$);

- la fonction-objectif (relation 348, page 907) doit être remplacée par la relation 361 :

1. La généralisation à une prise en compte simultanée de plusieurs contraintes de capacité (volume et poids, par exemple) différentes est immédiate.

$$\text{Min} \left[\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_{ij} \sum_{h=1}^H x_{ijh} \right] \quad \text{relation 361}$$

- les relations 353 à 356 (page 912), qui définissaient les contraintes de q tournées différentes en partance de la ville 1 (tête de tournée), se transforment pour tenir compte du fait qu'il faut:

- partir q fois de la ville 1 (avec $q \leq H$):

$$\sum_{j=2}^n \sum_{h=1}^H x_{1jh} = q \quad \text{relation 362}$$

- partir une fois et une seule de chaque ville i autre que la ville 1 (cette ville 1 restant une destination j possible):

$$\sum_{j=1}^n \sum_{h=1}^H x_{ijh} = 1, \text{ pour } i > 1 \text{ et } i \neq j \quad \text{relation 363}$$

- arriver q fois dans la ville 1:

$$\sum_{i=2}^n \sum_{h=1}^H x_{i1h} = q \quad \text{relation 364}$$

- arriver une fois et une seule dans chaque ville j autre que la ville 1 (cette ville 1 restant une origine i possible):

$$\sum_{i=2}^n \sum_{h=1}^H x_{ijh} = 1, \text{ pour } j > 1 \text{ et } j \neq i \quad \text{relation 365}$$

- il faut également s'assurer que le camion h qui part d'une ville k est bien celui qui y est arrivé, ce que force la relation 366:

$$\sum_{i=1}^n x_{ikh} = \sum_{j=1}^n x_{kjh}, \text{ pour } k = 1 \text{ à } n \text{ et } h = 1 \text{ à } H \quad \text{relation 366}$$

- il faut également s'assurer que la contrainte de capacité de chaque camion sera respectée; $\sum_{j=1}^n x_{ijh} = 1$ impliquant que le camion h passe par la ville i , il suffit de poser:

$$\sum_{i=2}^n v_i \sum_{j=1}^n x_{ijh} \leq u_h, \text{ pour } h = 1 \text{ à } H \quad \text{relation 367}$$

- enfin, la relation 360 de la page 913, empêchant la création de circuits reste à utiliser:

$$\theta_1 = 0 \text{ et } [\theta_i + \kappa_i + t_{ij}] - \theta_j \leq R(1 - \sum_{h=1}^H x_{ijh}), \text{ pour } i \geq 1, j > 1$$

et $j \neq i$ (relation 360)

Reprenons notre exemple numérique en le complétant par les informations du tableau 271 de la page 916 et en supposant toujours qu'il faille organiser ($q = 3$) tournées quotidiennes indépendantes à partir d'Alphaville, mais cette fois-ci en utilisant trois camions ayant la même capacité, égale à ($u_1 = u_2 = u_3 =$) 30 tonnes, la solution précédemment trouvée ne respecte pas cette contrainte de capacité pour l'une des tournées (la répartition de la charge étant 31, 19 et 27).

TABLEAU 271
Livraisons à effectuer à partir du dépôt d'Alphaville
(= chargement v_i à destination de i)

Ville	β ville ($i = 2$)	γ ville ($i = 3$)	δ ville ($i = 4$)	ε ville ($i = 5$)	ζ ville ($i = 6$)	η ville ($i = 7$)	θ ville ($i = 8$)	ι ville ($i = 9$)	κ ville ($i = 10$)
Livraison (en tonnes)	19	10	7	9	4	6	14	3	5

On obtient alors la solution suivante, pour un kilométrage total de 1578 (contre 1472 en l'absence de limitation de capacité des camions):

- α -ville \rightarrow ζ -ville \rightarrow θ -ville \rightarrow ε -ville \rightarrow α -ville (chargement = 27 tonnes, distance parcourue 481 km);
- α -ville \rightarrow δ -ville \rightarrow ι -ville \rightarrow κ -ville \rightarrow η -ville \rightarrow α -ville (chargement = 21, distance parcourue 937 km);
- α -ville \rightarrow γ -ville \rightarrow β -ville \rightarrow α -ville (chargement = 29, distance parcourue 160 km).

Ajoutons enfin qu'il est possible de supprimer les relations 362 (page 915) et 364 (page 915), c'est-à-dire de *ne pas fixer a priori* le nombre de véhicules utilisés pour déterminer le nombre de véhicules qui minimise le coût de fonctionnement du système étudié, en les remplaçant la relation 368 (qui est une adaptation de la relation 357 de la page 912):

$$\sum_{j=2}^n \sum_{h=1}^H x_{1jh} = \sum_{i=2}^n \sum_{h=1}^H x_{i1h} \quad \text{relation 368}$$

Les remarques formulées en page 912 sur l'intérêt de cette formulation restent valables.

II-1.2.3 Introduction des fenêtres de temps

Dans le problème précédent, on n'a tenu aucun compte des heures d'ouverture des dépôts de destination ni de la durée de chaque tournée. La prise en compte de ce dernier élément est facile, puisque θ_i correspond à l'heure d'arrivée dans le dépôt i et $\theta_i + \kappa_i$, à l'heure de fin du temps de séjour obligatoire dans la ville i : il suffit d'empêcher $\theta_i + \kappa_i$ de prendre une valeur supérieure à la durée limite T :

$$\theta_i + \kappa_i < T, \text{ pour } i > 1 \quad \text{relation 369}$$

Cela étant, les contraintes de fenêtre de temps associées à chaque ville rendent le plus souvent cette dernière relation normalement inutile. Elle ne présente d'intérêt réel que lorsque les différents centres visités s'adaptent aux horaires de passage (et non l'inverse).

On peut illustrer cette prise en compte de contrainte en supposant que chaque opération de déchargement dure 30 minutes, que la vitesse moyenne du transport est égale à 65 km/h, ce qui conduit au tableau 272 (qui résulte de la vitesse et des distances fournies par le tableau 270, page 910), et que les camions soient conduits par deux chauffeurs, avec une amplitude maximale de 14 heures (déplacement + chargement et attente). La minimisation du temps de transport est équivalente à la minimisation de la distance totale parcourue.

TABLEAU 272
*Temps de transport t_{ij} entre les principales villes de Lidurie
 (en minutes – vitesse moyenne de 65 km/h)*

à de	α ville ($j = 1$)	β ville ($j = 2$)	γ ville ($j = 3$)	δ ville ($j = 4$)	ϵ ville ($j = 5$)	ζ ville ($j = 6$)	η ville ($j = 7$)	θ ville ($j = 8$)	ι ville ($j = 9$)	κ ville ($j = 10$)
α ville ($i = 1$)	0,00	0,42	0,94	1,69	1,11	3,17	3,71	2,34	4,25	2,29
β ville ($i = 2$)	0,42	0,00	1,11	1,86	0,94	2,75	3,98	2,00	4,49	2,66
γ ville ($i = 3$)	0,94	1,11	0,00	0,75	2,02	3,49	4,31	3,08	3,38	2,71
δ ville ($i = 4$)	1,69	1,86	0,75	0,00	2,77	4,00	4,77	3,78	2,65	3,11
ϵ ville ($i = 5$)	1,11	0,94	2,02	2,77	0,00	2,72	3,62	1,40	5,35	2,65
ζ ville ($i = 6$)	3,17	2,75	3,49	4,00	2,72	0,00	6,32	1,72	6,51	5,31
η ville ($i = 7$)	3,71	3,98	4,31	4,77	3,62	6,32	0,00	4,75	6,31	1,69
θ ville ($i = 8$)	2,34	2,00	3,08	3,78	1,40	1,72	4,75	0,00	6,43	4,02
ι ville ($i = 9$)	4,25	4,49	3,38	2,65	5,35	6,51	6,31	6,43	0,00	4,68
κ ville ($i = 10$)	2,29	2,66	2,71	3,11	2,65	5,31	1,69	4,02	4,68	0,00

Les heures d'arrivées θ_i correspondent à un repérage temporel relatif par rapport au départ du dépôt central. Pour passer à un repérage temporel «absolu», il faut convertir ces informations en tenant compte de l'heure de départ du camion (ou assigner à θ_1 la valeur de l'heure de départ des camions) et des pauses réglementaires du conducteur lorsqu'il est seul à conduire sur de grands parcours¹. Mais dans la définition du problème, il faut tenir compte également des contraintes d'ouverture des destinataires. On supposera ici que ces fenêtres de temps peuvent être exprimées en utilisant le repérage temporel relatif, ce qui est correct si tous les camions partent en même temps du dépôt central et s'il n'y a pas de pauses réglementaires à respecter. Dans une ville i , on supposera qu'il est possible d'effectuer un transbordement entre le camion et le dépôt local sur la fenêtre de temps $[\theta_{\min_i}, \theta_{\max_i}]$, cette fenêtre étant supposée unique². Ces contraintes s'écrivent:

$$\theta_{\min_i} \leq \theta_i \text{ et } \theta_i \leq \theta_{\max_i}, \text{ pour } i > 1 \quad \text{relation 370}$$

Cette relation 370 remplace la relation 352 de la page 910, car il n'y a plus lieu d'imposer que le temps de la tournée soit strictement une somme de temps de transport et de chargement. Par contre, la relation 360 de la page 913 reste nécessaire pour empêcher tout circuit dans la solution trouvée.

$$\theta_1 = 0 \text{ et } [\theta_i + \kappa_i + t_{ij}] - \theta_j \leq R(1 - \sum_{h=1}^H x_{ijh}), \text{ pour } i \geq 1, j > 1 \text{ et } j \neq i \text{ (relation 360)}$$

On peut ajouter enfin que la définition de fenêtre de temps peut être plus complexe et être du type: le camion peut arriver entre 9 heures ($\theta_{\min_{i1}}$) et

1. La prise en compte automatique des contraintes induites par cette réglementation peut s'effectuer assez facilement en transformant le problème pour accroître l'heure d'arrivée θ_i dans la ville i , de la durée de la pause, si celle-ci doit avoir lieu avant l'arrivée dans la ville i et postérieurement au départ de la ville précédente. Dans le cas présent, ces complications dans la représentation du réel seront ignorées.
2. Dans le cas contraire, il suffit de travailler en relaxant les contraintes de fenêtres de temps, puis de vérifier que les contraintes relaxées sont respectées et, seulement dans la négative, d'introduire les contraintes que la solution relaxée viole.

12 heures ($\theta_{\max_{i1}}$) ou entre 14 heures ($\theta_{\min_{i2}}$) et 19 heures ($\theta_{\max_{i2}}$). Dans ce cas, il suffit de s'inspirer de la contrainte C_3 du [tableau 351 de la page 1138](#) et d'introduire la variable binaire δ_i qui vaut 1 si la première contrainte est active et 0 si c'est la seconde qui l'est :

$$\theta_{\min_{i1}} \leq \theta_i + R(1 - \delta_i), \theta_i \leq \theta_{\max_{i1}} + R(1 - \delta_i) \text{ et } \theta_{\min_{i2}} \leq \theta_i + R\delta_i, \theta_i \leq \theta_{\max_{i2}} + R\delta_i$$

pour $i > 1$ *relation 371*

S'il y a plus de 2 fenêtres de temps, il suffit de généraliser la démarche en introduisant une variable binaire par fenêtre de temps j , valant 1 si la contrainte j est active, et d'utiliser la règle 1 de la [page 1139](#), en imposant que la somme de ces variables binaires soit égale à 1.

$$\theta_{\min_{ij}} \leq \theta_i + R(1 - \delta_{ij}), \theta_i \leq \theta_{\max_{ij}} + R(1 - \delta_{ij}) \text{ pour } j > 0 \text{ et } i > 1 \text{ et } \sum_j \delta_{ij} = 1,$$

pour $i > 1$ *relation 372*

Illustrons numériquement la démarche en gardant les contraintes de capacité et en supposant, pour les fenêtres de temps, que les opérations de manutention ne puissent s'opérer dans les sites de ε -ville, κ -ville et η -ville qu'après 14 heures et qu'il n'y ait pas de contraintes particulières pour les autres sites. On obtient alors la solution suivante (qui fournit les mêmes tournées que précédemment, mais avec une attente à ε -ville) :

- α -ville (départ à 6 heures) \rightarrow ζ -ville (arrivée à 9 heures 10 – départ à 9 heures 40) \rightarrow θ -ville (arrivée à 11 heures 24 – départ à 11 heures 54) \rightarrow ε -ville (arrivée à 13 heures 18 – attente jusqu'à 14 heures – départ à 14 heures 30) \rightarrow α -ville (arrivée à 15 heures 36 – chargement de 27 tonnes – distance parcourue de 481 km);
- α -ville (départ à 6 heures) \rightarrow δ -ville (arrivée à 7 heures 42 – départ à 8 heures 12) \rightarrow ι -ville (arrivée à 10 heures 50 – départ à 11 heures 20) \rightarrow κ -ville (arrivée à 16 heures 01 – départ à 16 heures 31) \rightarrow η -ville (arrivée à 18 heures 12 – départ à 18 heures 42) \rightarrow α -ville (arrivée à 22 heures 25 – chargement de 21 tonnes, distance parcourue de 937 km);
- α -ville (départ à 6 heures) \rightarrow γ -ville (arrivée à 7 heures 26 – départ à 7 heures 56) \rightarrow β -ville (arrivée à 9 heures 03 – départ à 9 heures 33) \rightarrow α -ville (arrivée à 9 heures 58 – chargement de 29 tonnes, distance parcourue de 160 km).

II-1.3 Le problème des tournées multiples filaires

II-1.3.1 Formulation

Un certain nombre de problèmes de transport se caractérisent par l'acheminement de marchandises à destination (ou en partance) d'une localisation vers un ensemble de localisations, mais, à la différence du problème de tournées multiples étudié au [§ II-1.2.1, page 912](#), le temps de transport pour se rendre de la dernière localisation desservie par le véhicule, à la localisation initiale n'a aucune incidence sur la performance de la solution. On désigne cette classe de problèmes sous

le nom de **tournées filaires**¹, le qualificatif « multiples » étant ajouté lorsque l'on cherche à déterminer simultanément plusieurs tournées.

Ce cas de figure se rencontre dans des problèmes très contraints par le temps comme celui de l'acheminement postal en provenance de bureaux de postes et à destination du centre de tri auxquels ces bureaux de poste sont rattachés; en effet, dans ce problème, le retour au bureau de poste initial (ou à tout autre « tête de tournée ») s'effectue en temps masqué. La généralisation du juste-à-temps fait que des problèmes similaires se posent de plus en plus dans la distribution des marchandises. Les caractéristiques suivantes rendent ce problème compliqué :

- le nombre de véhicules nécessaires est à déterminer,
- l'assignation des points de dessertes aux véhicules, un point n'étant desservi que par un véhicule, est à déterminer (un véhicule dessert donc une liste de localisations),
- l'ordre dans lequel un véhicule dessert les localisations qui lui sont affectées est à déterminer; ceci implique qu'en cas d'acheminement de marchandises à destination d'un centre, la localisation « tête de ligne » est, a priori, inconnue (et qu'en cas d'acheminement de marchandises en partance d'un centre, la dernière localisation desservie est, a priori, inconnue).

La solution de ce problème passe par la création d'une localisation fictive ($i = n+1$) se trouvant à une distance nulle de toutes les localisations ($2 \leq i \leq n$). Cette localisation fictive joue un rôle symétrique de la localisation « tête de tournée filaire »: tous les camions en partent (tout comme tous les camions arrivent à la « destination finale de tournée filaire »). Dans ces conditions, il suffit d'adapter les relations 362 à 365 (page 915), pour tenir compte du fait que la localisation $i = 1$ est la localisation d'arrivée et jamais de départ (d'où la relation 375) et non la ville de départ, ce qui donne :

Table des matières

Index thématique

- partir q fois de la localisation fictive « tête de tournée filaire » ($j = n+1$), à destination d'une autre ville que celle qui est « destination finale de tournée filaire » ($j = 1$):

$$\sum_{j=2}^n \sum_{h=1}^H x_{n+1,jh} = q \quad \text{relation 373}$$

- partir une fois et une seule de chaque ville i autre que la localisation « destination finale de tournée filaire » ($i = 1$), laquelle reste autorisée comme destination, et la localisation fictive « tête de tournée filaire » ($i = n+1$), laquelle est exclue comme destination :

$$\sum_{j=1}^n \sum_{h=1}^H x_{ijh} = 1, \text{ pour } 1 < i < n + 1 \text{ et } j \neq i \quad \text{relation 374}$$

- arriver q fois dans la localisation « destination finale de tournée filaire » ($i = 1$), la localisation fictive « tête de tournée filaire » ($i = n+1$) étant exclue comme origine possible :

1. Voir Giard, André & Leguluche (1995, [190]), Giard & Triomphe (1996, [199]) et Giard, Triomphe & André (1997, [201]) pour une présentation de cette classe de problèmes et de réalisation de SIAD, s'appuyant sur des modélisateurs et solveurs, pour les résoudre.

$$\sum_{i=2}^n \sum_{h=1}^H x_{i1h} = q \quad \text{relation 375}$$

- arriver une fois et une seule dans chaque ville j autre que la localisation «destination finale de tournée filaire» ($j = 1$), laquelle est exclue comme origine possible, et de la localisation fictive «tête de tournée filaire» ($j = n+1$), laquelle reste autorisée comme origine possible:

$$\sum_{i=2}^{n+1} \sum_{h=1}^H x_{ijh} = 1, \text{ pour } 1 < j < n + 1 \text{ et } i \neq j \quad \text{relation 376}$$

Ces contraintes ne suffisent pas, il faut les compléter pour obtenir une «formulation minimale» du problème par:

- la contrainte permettant de s'assurer que c'est bien le même camion qui arrive et part d'une même ville (reprise de la [relation 366 de la page 915](#)), en éliminant la localisation «destination finale de tournée filaire» ($k = 1$),

$$\sum_{i=1}^n x_{ikh} = \sum_{j=1}^n x_{kjh}, \text{ pour } k = 2 \text{ à } n \text{ et } h = 1 \text{ à } H \text{ (relation 366)}$$

- la contrainte forçant à respecter la capacité de chaque camion ([relation 367 de la page 915](#)),

$$\sum_{i=2}^n v_i \sum_{j=1}^n x_{ijh} \leq u_h, \text{ pour } h = 1 \text{ à } H \text{ (relation 367)}$$

- la [relation 360 de la page 913](#) reste nécessaire pour empêcher tout circuit dans la solution trouvée: $\theta_1 = 0$ et $[\theta_i + \kappa_i + t_{ij}] - \theta_j \leq R (1 - \sum_{h=1}^H x_{ijh})$, pour

$$i \geq 1, j > 1 \text{ et } j \neq i.$$

- il faut y ajouter les contraintes de fenêtres de temps, ce qui nécessite l'utilisation de la [relation 370 de la page 917](#): $\theta_{\min_i} \leq \theta_i$ et $\theta_i \leq \theta_{\max_i}$, pour $i > 1$.

On peut ajouter¹ que si l'on désire déterminer le parc optimal de véhicules, il suffit d'adapter la [relation 368 de la page 916](#) qui devient ici:

$$\sum_{j=2}^n \sum_{h=1}^H x_{n+1,jh} = \sum_{i=2}^n \sum_{h=1}^H x_{i1h} \quad \text{relation 377}$$

Les remarques formulées en [page 912](#) sur l'intérêt de cette formulation restent valables.

II-1.3.2 Exemple numérique

Reprenons l'exemple numérique de nos trois tournées avec contraintes de capacité, sans faire jouer les contraintes de fenêtres de temps. On obtient alors la solution suivante, pour un kilométrage total de 867, contre 1584, dans le cas de tournées non filaires, avec limitation de capacité des camions (cf. [page 916](#)) et un départ des camions d' α -ville à 6 heures:

1. Un certain nombre d'extensions de ce modèle peuvent être trouvées dans Giard, André et Le Guluche (1995, [190]). Un SIAD s'appuyant sur cette approche est décrit dans Giard, Triomphe et André (1997, [201]).

- α -ville \rightarrow γ -ville \rightarrow δ -ville \rightarrow ι -ville (chargement = 20 tonnes, distance parcourue 282 km; fin de chargement à ι -ville à 11 heures 50);
- α -ville \rightarrow β -ville \rightarrow κ -ville \rightarrow η -ville (chargement = 30 tonnes, distance parcourue 310 km; fin de chargement à η -ville à 12 heures 16);
- α -ville \rightarrow ε -ville \rightarrow θ -ville \rightarrow ζ -ville (chargement = 27 tonnes, distance parcourue 275 km; fin de chargement à ζ -ville à 11 heures 44).

On peut ajouter que le retour à α -ville, qui s'effectue en temps masqué, conduit à ajouter 723 km aux 867 trouvés, ce qui fait alors 1590, contre 1578 en tournées multiples non filaires, mais dans ce dernier cas, la tournée la plus longue s'achève, après manutention, à 12 heures 16, contre 18 heures 42 dans le cas de tournées non filaires (le trajet de retour à α -ville n'étant pas décompté); ceci illustre bien l'intérêt des tournées filaires pour les entreprises confrontées à la chrono-compétition.

II-2 Affectation de prestations de transport à des véhicules

Certains problèmes de transport se caractérisent par une liste cohérente de prestations de transport à exécuter par un ensemble de véhicules (avion, train, camion ou autocar) ou d'opérateurs (conducteur, pilote, hôtesse, contrôleur, etc.); il s'agit d'affecter ces prestations à des véhicules, en minimisant les dépenses engagées¹. Chaque prestation est caractérisée, du point de vue qui nous intéresse ici, par une exécution effectuée entre une heure h_i de départ d'une origine i et une heure h_j d'arrivée à une destination j , différente de i ; les autres caractéristiques de cette prestation importent peu ici. Chaque prestation est effectuée par un seul véhicule ou un seul opérateur². Au cours d'une période, par exemple la journée, une même ressource élémentaire (véhicule ou opérateur) peut prendre en charge plusieurs prestations, à la double condition que chaque prestation ait comme origine, la destination de la prestation précédente, et que son heure de départ soit postérieure à l'heure d'arrivée de la prestation précédente. Une gamme se définit alors comme une liste *cohérente* de prestations que doit prendre en charge une même ressource élémentaire; une telle gamme est appelée **service**, mais aussi, parfois, **tournée** ou **rotation**. Les problèmes de cohérence³ et de détermination préalable des gammes utilisées sont exogènes au problème traité ici.

Table des matières

Index thématique

II-2.1 Modélisation du problème posé

Le problème posé est celui de l'exécution au moindre coût de toutes les prestations par un ensemble de ressources élémentaires utilisant, chacune, une gamme

1. À la différence des problèmes de tournée traités au § II-1, une même ville peut être visitée plusieurs fois par un même véhicule et les heures d'arrivée et de départ sont prédéterminées. On peut ajouter que ce problème a été introduit au § I-2.1.4, page 544 du chapitre VIII et correspond à une variante de celui analysé au § I-2.1.3, page 540 de ce même chapitre. Par rapport à la typologie introduite dans ce chapitre VIII, relative aux problèmes susceptibles d'être traités par la programmation linéaire, on est en présence d'un problème de productions liées de prestations de service faisant appel à des gammes alternatives, dans un cadre mono-période.

2. En anticipant sur la suite de ce paragraphe, la généralisation de cette modélisation au cas d'un appel simultané à n_i opérateurs pour une même prestation i (par exemple, contrôle des billets dans un train), la relation 378 de la page 922 devient $\sum_{k=1}^K h_{ik} x_k = n_i$ et la variable x_i devient une variable discrète positive ou nulle qui s'interprète comme le nombre de ressources effectuant simultanément le même ensemble de prestations.

3. D'autres contraintes peuvent s'ajouter à la double condition introduite: intervalle suffisant entre une heure d'arrivée et une heure de départ, etc.

différente, ce qui revient à choisir les gammes à utiliser dans un ensemble de gammes possibles toutes différentes. La modélisation retenue est de type mono-période (voir page 528), pour un ensemble de ressources défini; il est évident que de nombreux problèmes de ce type doivent être analysés dans le cadre de plusieurs périodes pour plusieurs raisons: disponibilité des ressources (indisponibilité pour raison de maintenance, congés...), variation de l'offre de prestations en raison de celles de la demande (les vols offerts ne sont pas les mêmes en semaine ou en week-end), possibilité de remplacement de retour «haut le pied» en fin de période par l'exécution d'une prestation au cours de la période suivante, ce qui conduit à une variation, d'un jour sur l'autre, des prestations effectuées par un véhicule ou un opérateur. Cela étant, rien n'empêche, sauf des problèmes de résolution numériques liés à la taille du problème et des problèmes d'explicitation des gammes alternatives, de traiter de tels problèmes sur une période unique constituée d'une succession de plusieurs jours. Techniquement:

- la variable binaire x_k associée à la gamme k vaudra 1 si la gamme k est utilisée et 0, dans le cas contraire;
- le coefficient h_{ik} vaudra 1 si la gamme k permet d'exécuter la prestation i et 0, dans le cas contraire;
- chaque ressource élémentaire utilisée ne se verra assignée qu'une seule gamme, ce qui implique que le nombre de ressources élémentaires utilisées est $\sum_k x_k$;
- chaque prestation i doit être exécutée et ne peut l'être que par une seule gamme, ce qui implique la relation 378¹:

$$\sum_{k=1}^K h_{ik} x_k = 1 \quad \text{relation 378}$$

Le coût d'utilisation unitaire c_k d'une gamme peut varier d'une gamme à l'autre, en particulier si la localisation d'arrivée de la dernière prestation exécutée est différente de celle de la première prestation, en raison d'un retour **haut le pied**, c'est-à-dire sans fourniture de prestation par la ressource considérée. Il intègre l'ensemble des charges imputables à l'utilisation de la gamme k , en limitant au maximum les coûts indirects non affectés par les décisions à prendre à partir des résultats trouvés. La détermination des gammes est un problème exogène à celui traité ici, similaire à celui de la recherche des gammes de coupe examiné au § I-2.1.3, page 540 du chapitre VIII.

Le problème posé est donc de déterminer les gammes à utiliser et donc l'effectif nécessaire de façon à minimiser le coût (partiel) de fonctionnement du système productif, les coûts unitaires c_k intégrant l'ensemble des charges imputables à l'utilisation de la gamme k (en limitant au maximum les coûts indirects non affectés par les décisions à prendre à partir des résultats trouvés).

$$\text{Min } z, \text{ avec } z = \sum_{k=1}^K c_k x_k \quad \text{relation 379}$$

1. qui s'apparente formellement à la relation 87 de la page 542 du chapitre VIII.

La représentation graphique de ce problème est similaire à celle de la [figure 155, page 541](#), à ceci près que les ressources mobilisées sont repérées par des variables binaires et non des variables entières quelconques positives ou nulles, que les productions de prestations d'une gamme sont liées par des contraintes spatio-temporelles et que le centre productif est le système de transport étudié.

II-2.2 Exemple d'application

La compagnie Lidurienne **EXPRESSOR** est spécialisée dans le transport de colis entre quatre grandes villes du pays¹ : Alphaville, Bêtaville, Gammaville et Deltaville. Les prestations de transport retenues entre les agences de deux villes sont données dans le [tableau 273](#). Une gamme de transport, désignée ici sous le nom de service, se caractérise par le fait que le véhicule concerné effectue soit une seule prestation (le [tableau 273](#) décrit donc à la fois des prestations et des services possibles, ceux qui se réduisent à la fourniture d'une seule prestation) soit plusieurs prestations ([tableau 274 de la page 923](#)).

TABLEAU 273
Transports devant être assurés par EXPRESSOR

n°	Itinéraire	Horaire	n°	Itinéraire	Horaire	n°	Itinéraire	Horaire
1	α ville- β ville	10h-11h	5	β ville- α ville	15h-16h	9	γ ville- β ville	8h-10h30
2	α ville- γ ville	9h15-11h15	6	β ville- γ ville	11h30-14h	10	γ ville- δ ville	16h-17h45
3	α ville- γ ville	12h-14h	7	γ ville- α ville	12h-14h	11	δ ville- α ville	15h-18h45
4	α ville- δ ville	7h45-11h30	8	γ ville- α ville	15h30-17h30	12	δ ville- γ ville	8h15-10h

Table des matières

TABLEAU 274
Services possibles incluant au moins 2 transports

13 [†]	$\alpha(1) \rightarrow \beta(5) \rightarrow \alpha$	19	$\alpha(2) \rightarrow \gamma(10) \rightarrow \delta$	25	$\gamma(9) \rightarrow \beta(6) \rightarrow \gamma$
14	$\alpha(1) \rightarrow \beta(6) \rightarrow \gamma$	20	$\alpha(3) \rightarrow \gamma(10) \rightarrow \delta$	26	$\gamma(9) \rightarrow \beta(6) \rightarrow \gamma(8) \rightarrow \alpha$
15	$\alpha(1) \rightarrow \beta(6) \rightarrow \gamma(8) \rightarrow \alpha$	21	$\alpha(4) \rightarrow \delta(11) \rightarrow \alpha$	27	$\gamma(9) \rightarrow \beta(6) \rightarrow \gamma(10) \rightarrow \delta$
16	$\alpha(1) \rightarrow \beta(6) \rightarrow \gamma(10) \rightarrow \delta$	22	$\beta(6) \rightarrow \gamma(8) \rightarrow \alpha$	28	$\delta(12) \rightarrow \gamma(7) \rightarrow \alpha$
17	$\alpha(2) \rightarrow \gamma(7) \rightarrow \alpha$	23	$\beta(6) \rightarrow \gamma(10) \rightarrow \delta$	29	$\delta(12) \rightarrow \gamma(8) \rightarrow \alpha$
18	$\alpha(2) \rightarrow \gamma(8) \rightarrow \alpha$	24	$\gamma(9) \rightarrow \beta(5) \rightarrow \alpha$		

Index thématique

[†]. Ce tableau se décompose en trois parties séparées par un trait vertical épais. Chaque information fournie sur une ligne se décompose en un numéro de service et une explicitation du transport effectué par la désignation des villes visitées et, entre parenthèses, les numéros de transports élémentaires utilisés (cf. [tableau 273](#)). Cette numérotation des services commence à 13, les 12 premiers services possibles correspondant aux 12 transports élémentaires du [tableau 273](#).

Le problème posé est celui de la détermination optimale des services à retenir, chaque service mobilisant un seul camion et chaque camion n'étant affecté qu'à un seul service. Dans cet exemple, on tiendra compte du fait que la charge fixe quotidienne de mobilisation d'un camion est estimée à 1000 dollars liduriens et que le véhicule et son équipe doivent nécessairement revenir dans la ville de départ. Lorsque le service ne satisfait pas cette contrainte, un parcours «haut le

1. Vous pouvez consulter la carte simplifiée de la Lidurie à la [page 898](#).

« pied » est nécessaire et coûte 400 dollars liduriens supplémentaires¹. Le problème à résoudre est donc le suivant :

$$\text{Min } z, \text{ avec } z = 1400 \left[\sum_{k=1}^{12} x_k + x_{14} + x_{16} + x_{19} + x_{20} + \sum_{k=22}^{24} x_k + \sum_{k=26}^{29} x_k \right] \\ + 1000[x_{13} + x_{15} + x_{17} + x_{18} + x_{21} + x_{25}]$$

Sous contraintes d'exécution des 12 prestations de transport :

$$x_1 + x_{13} + x_{14} + x_{15} + x_{16} = 1 ; x_2 + x_{17} + x_{18} + x_{19} = 1 ; x_3 + x_{20} = 1 ; x_4 + x_{21} = 1 ; \\ x_5 + x_{13} + x_{24} = 1 ; x_6 + x_{14} + x_{15} + x_{22} + x_{23} + \sum_{k=25}^{27} x_k = 1 ; x_7 + x_{17} + x_{28} = 1 ; \\ x_8 + x_{15} + x_{18} + x_{22} + x_{26} = 1 ; x_9 + \sum_{k=24}^{26} x_k = 1 ; x_{10} + x_{16} + x_{19} + x_{20} + x_{23} + x_{27} = 1 ; \\ x_{11} + x_{21} = 1 ; x_{12} + x_{28} + x_{29} = 1 .$$

Une solution optimale au problème posé consiste à retenir les services 13, 18, 20, 21, 25 et 28. Le coût de fonctionnement minimal correspondant s'élève à 6800 dollars liduriens.

1. Cette valeur est considérée ici comme constante, mais rien n'empêcherait de la moduler en fonction des distances à parcourir et de l'heure du retour.

Chapitre XIV

SYSTÈMES D'INFORMATION et GESTION de la CHAÎNE LOGISTIQUE

La mise en œuvre des techniques présentées dans les chapitres précédents dépend non seulement de la volonté de résoudre efficacement les problèmes rencontrés en production, de la qualité de l'organisation mise en place et de la gestion des ressources humaines, mais aussi de l'existence de systèmes d'information capables de « capter » ou de « transmettre », au bon moment, les informations appropriées. L'information est une ressource au même titre que les hommes et les machines et sa gestion sur le long terme est aussi importante que celle des autres ressources. Là aussi, les choix stratégiques sont importants et des réponses cohérentes doivent être apportées aux questions classiques : « quoi ? », « quand ? », « comment ? », « où ? » et ce, non seulement au niveau des différentes informations véhiculées, mais également sur le positionnement de cette ressource informationnelle par rapport aux autres ressources et au système de conduite du système productif. La réflexion stratégique de nombreux cadres dirigeants est très souvent biaisée par leur méconnaissance des enjeux et problèmes posés par les systèmes d'information. Une telle réflexion doit se fonder sur un minimum de connaissance des technologies mobilisées et être sous-tendue par une vision gestionnaire de ces problèmes¹.

Table des
matières

Index
thématique

SECTION I LES SYSTÈMES D'INFORMATION DE GESTION

Le mythe d'un système d'information unique vers lequel les entreprises tendraient est un de ceux qui façonnent les comportements et mobilisent les énergies. Si l'on peut espérer à terme pouvoir avoir accès, à partir d'un même micro-ordinateur et à condition d'y être autorisé, à n'importe quelle information numérisée disponible dans l'entreprise, cela n'impliquera pas pour autant d'être en présence d'un système d'information unique, d'autant que le niveau de formalisation varie en fonction des possibilités et des besoins (§ I-1). Deux caractéristiques importantes de ces systèmes d'information méritent d'être soulignées : leur inéluctable hétérogénéité (§ I-2, page 927) et certaines caractéristiques de leurs évolutions (§ I-3, page 929). Nous justifierons enfin rapidement les choix opérés (§ I-4, page 932).

1. Parmi les ouvrages permettant ce recul, on peut citer les ouvrages complémentaires de Peaucelle (1999, [330]), de Reix (1995, [358]) et de Marciniak & Rowe (1997, [293]).

I-1 La multiplicité des systèmes d'information

L'information ne présente d'intérêt pour le gestionnaire que dans la mesure où elle est de nature à «éclairer» une décision ou à satisfaire des contraintes réglementaires ou légales. Le [tableau 1 de la page 47](#) montrait la très grande variété de décisions à prendre en production, en croisant le caractère plus ou moins structuré de la décision à prendre, avec sa nature (décision stratégique, tactique ou opérationnelle). Le [tableau 275](#) complète le [tableau 1](#) en donnant des exemples de type de données mobilisées dans ces prises de décision. Cette variété explique la coexistence de plusieurs systèmes d'information en production et ce tableau laisse penser que le système d'information utilisé sera d'autant plus formellement structuré et détaillé que les décisions à éclairer seront programmables et de nature opérationnelle.

TABLEAU 275

Exemple d'informations mobilisées dans la prise de décision de production de produits manufacturés selon les deux typologies décisionnelles retenues

Catégorie de décisions	Exemple de	Décision		
		Structurée	Semi-structurée	Non structurée
Stratégique	Décision	Révision des tables de décision utilisées en gestion des approvisionnements	Réaménagement de l'implantation des équipements d'une usine (décision assistée par ordinateur)	Acquisition d'un système interactif d'aide à l'ordonnancement en ateliers spécialisés
	Données utilisées	Caractéristiques des demandes des références visées, ainsi que de certains coûts (possession, passation de commandes...)	Caractéristiques des flux de production, des équipements et outillages, des magasins...	Caractéristiques du logiciel, essais comparatifs, caractéristiques des ressources et des flux concernés
Tactique	Décision	Révision d'un programme de production de planification glissante (de type MRP)	Gestion d'un projet de lancement de produit nouveau	Réponse à un appel d'offre pour une entreprise d'ingénierie électrique
	Données utilisées	Gammes et nomenclatures de planification, positions de stock...	Liste des tâches, de leurs relations d'antériorité, des ressources mobilisées...	Toute information technique et économique tirée d'affaires similaires déjà traitées
Opérationnelle	Décision	Exécution d'une gamme sur une machine à commande numérique	Ordonnancement en ateliers spécialisés	Allocation de ressources de maintenance corrective
	Données utilisées	Gamme d'usage pour machine à commande numérique	Gamme d'ordonnancement et portefeuille d'ordres de fabrication à exécuter	Programmation prévisionnelle des opérateurs, descriptif de l'incident et de ses conséquences

Table des matières

Index thématique

Ces systèmes délivrent de l'**information primaire**, c'est-à-dire une information sur une modification observable sur l'une quelconque des ressources de l'entreprise ou transaction avec des tiers, et/ou de l'**information traitée**, c'est-à-dire une information élaborée à partir de plusieurs informations primaires pour permettre à des acteurs, internes ou externes à l'entreprise, de mieux comprendre ce qui se passe et de faciliter leurs prises de décision. C'est principalement à de l'information primaire que nous nous intéresserons dans ce chapitre, dans la mesure où les informations traitées dépendent de la façon dont on aborde les problématiques décisionnelles qui, par ailleurs, ne concernent pas toutes la gestion de la production et des approvisionnements.

I-2 L'irréductible hétérogénéité des systèmes d'information

Plusieurs systèmes apparemment semblables, parce que mobilisant des concepts voisins, ne peuvent être fusionnés, en raison de leurs différences de perspective retenue dans la description du monde réel. C'est ainsi, par exemple, que la description du système productif et de ses potentialités, qui passe classiquement par des ensembles de gammes, de nomenclatures et de ressources en personnel, équipements et outillages, s'effectue par le biais de quatre systèmes d'information, relativement indépendants :

- Sur le *très court terme*, le pilotage en temps réel d'une production exécutée par des machines à commande numérique implique l'usage de gammes opératoires informatisées et très détaillées (« avancer l'axe de 2,35 cm, le faire pivoter de 30°... ») ; lorsqu'on est en présence de postes de travail non automatisés, les informations utilisées sont le plus souvent consignées sur un support écrit et comportent des schémas qui permettent l'usage d'informations plus sommaires, le savoir-faire de l'ouvrier palliant le manque de détail.
- Sur le *court terme*, dans des environnements productifs qui ne sont pas totalement automatisés, le problème de l'ordonnancement de la production implique l'usage de gammes opératoires plus grossières décrivant globalement le temps nécessaire pour passer de l'état initial des composants arrivant sur un poste de travail, à l'état final du composant ou du produit lorsqu'il quitte ce poste de travail ; par ailleurs, la gamme peut décrire une séquence d'opérations effectuées sur des postes différents et les références utilisées ne correspondent qu'à des articles stockables, ce qui implique l'absence de désignation pour repérer les états transitoires des flux au cours du processus de transformation, contrairement à ce qui se passe pour le système précédent. Les préoccupations de chaîne logistique (voir § I-2, page 895, du chapitre XIII) font qu'à ces préoccupations de pilotage de la production s'ajoutent de nombreux échanges en temps réel avec des fournisseurs ou des ¹clients, échanges qui conditionnent la formulation des problèmes de production.
- Sur le *moyen terme*, des problèmes de planification de la production peuvent se poser et conduire à l'usage de logiciels comme ceux de MRP-II ; dans ce cas, le découpage temporel utilisé pour définir les capacités et les charges est de l'ordre de la semaine ou du mois et les gammes de fabrication/assemblage portent sur des familles de références qui opèrent la fusion d'articles faiblement différenciés et mobilisant de manière voisine les mêmes ressources,

1. Voir sur ce point Allab, Swyngedaum & Talandier (2000, [14]).

elles-mêmes regroupées en ensembles homogènes; ce processus d'agrégation vise, au prix d'une perte de précision, à faciliter des arbitrages portant sur des décisions fortement liées temporellement du fait de l'explosion des nomenclatures et des processus d'absorption des délais.

- Sur le *long terme*, l'étude de l'évolution des ressources permanentes de l'entreprise en équipements et en hommes implique l'usage de données encore moins détaillées et donc de gammes et de nomenclatures encore plus frustes.

Lorsque l'on allonge l'horizon temporel, la transformation des informations utilisées pose le problème du lien qui existe entre informations de même nature. Ce processus d'agrégation conduit habituellement, pour les ressources (opérateurs, machines), à la partition d'un ensemble en sous-ensembles d'éléments substituables (on est alors en présence d'un mécanisme de *généralisation*) tandis que, pour les gammes opératoires, il conduit à la création d'informations de *nature différente*¹. Pour illustrer ce point, on peut retenir l'exemple des quatre types de gamme. Le passage d'une gamme détaillée de l'un quelconque des trois premiers niveaux à une gamme agrégée du niveau immédiatement supérieur s'effectue principalement:

- par élimination d'informations détaillées devenues inutiles pour le niveau supérieur (par exemple, détail du mouvement d'outils pour exécuter une opération);
- par l'utilisation de durées moyennes, lorsque la gamme est définie pour des conditions d'utilisation assez variables (plage de vitesse de coupe, par exemple) ou pour résumer des opérations technologiquement similaires portant sur des références voisines réunies en une même famille ou, enfin, pour tenir compte du fait que la nouvelle gamme est définie pour un ensemble de ressources substituables, mais non identiques (pool de machines de caractéristiques voisines, par exemple);
- par la sommation de durées du chemin critique des opérations élémentaires.

Ces règles d'agrégation sont largement empiriques et comportent une part importante d'appréciation pour définir des seuils de discrimination au-delà desquels le processus d'agrégation «semble» critiquable, compte tenu de l'usage qui sera fait de ces informations.

Les difficultés auxquelles on est confronté dans le processus d'agrégation sont amplifiées dans le cadre de processus de désagrégation car le problème n'est plus de déterminer comment éliminer des informations qui deviennent superflues, mais comment en engendrer de nouvelles, plus détaillées. Ceci est réalisé en faisant appel à des règles empiriques dont la pertinence est loin d'être toujours garantie. C'est ainsi que la planification hiérarchisée² propose une programmation de la production par famille de références, information que l'on doit ensuite «éclater» à un niveau plus fin à l'aide de règles qui doivent être compatibles avec les infor-

1. Ceci exclut tout mécanisme de généralisation-spécialisation (au sens des bases de données) et explique l'utilisation du terme *agrégation* qui est plus général que celui de *généralisation*.

2. Voir la [section V, page 498](#), du [chapitre V](#) où l'on a pu montrer que si l'agrégation d'informations ne posait pas de problème majeur, il n'en était pas de même dans les procédures de désagrégation.

mations disponibles à ce niveau fin et rester globalement cohérentes avec les données agrégées.

Ces obstacles rencontrés dans les processus d'agrégation / désagrégation expliquent que l'on observe une gestion relativement autonome des systèmes d'information évoqués et ce d'autant plus facilement que les acteurs qui les utilisent ne sont pas les mêmes. La cohérence de l'ensemble de ces systèmes doit cependant faire l'objet d'une surveillance attentive pour plusieurs raisons.

- Deux systèmes «successifs» peuvent partager une même description de ressources ou de produits; celle-ci doit être identique pour les deux systèmes. L'une des difficultés souvent rencontrée dans la mise en œuvre des principes de l'ingénierie concurrente¹ est l'incompatibilité des nomenclatures utilisées par des services différents (Bureau d'études et bureau des méthodes, par exemple), pour gérer les mêmes objets du monde réel.
- Le processus de regroupement d'éléments dans un ensemble (pool de machines, par exemple) lie ces systèmes d'information par un ensemble de contraintes d'intégrité (cardinalité et valeurs de certains attributs) qui devraient conduire à l'usage de nomenclatures des ressources explicitement liées.
- Les modifications réalisées à un niveau bas (création, suppression ou transformation de gamme, par exemple) peuvent induire des modifications sur certaines informations agrégées du niveau supérieur et en particulier sur les éléments équivalents de ce niveau (par exemple, gamme) ou sur des règles de regroupement d'éléments dans des ensembles (par exemple, règles de constitution d'un pool de machines).

Table des matières

I-3 Quelques tendances lourdes

Index thématique

L'évolution de ces systèmes d'information peut être caractérisée sous l'angle technique et les transformations observables sont notables. On en évoquera certaines de manière incidente, dans la mesure où elles ont un impact organisationnel fort. On se focalisera ici sur deux évolutions marquantes du point de vue de la gestion: l'extension des périmètres des systèmes d'information (§ I-3.1) et la transformation perpétuelle de ces systèmes qui conduit à de redoutables problèmes de cohérence et de viabilité (§ I-3.2, page 931).

I-3.1 Une extension des périmètres spatiaux et temporels des systèmes d'information

Depuis un peu plus d'un siècle, la transformation rapide de l'environnement des entreprises (analysée en page 67) et la complexité accrue des problèmes à traiter ont conduit les entreprises à une spécialisation du travail, conduisant à une diminution constante de la part relative de la main-d'œuvre directe (justement celle dont l'usage est décrit par des gammes), par le biais:

- d'une préparation croissante du travail permettant de passer à une prise de décisions structurées: création de données sur les produits (service des études) et sur les processus de fabrication (service des méthodes), organisa-

1. Voir définition en page 270.

tion de la production sur le moyen terme (service de planification) et le court terme (service d'ordonnancement),

- de la création de service de support de la production (maintenance, logistique, qualité...),
- du développement des achats, pour permettre une focalisation de l'entreprise sur son cœur de métier.

Cette spécialisation s'est accompagnée de la création de systèmes d'information dédiés. Depuis une quinzaine d'années, pour un certain nombre de raisons, avancées notamment par les tenants du *reengineering* (voir page 72), on assiste à une recherche d'intégration se fondant sur une vision processus. Il s'ensuit que le périmètre spatial et temporel de certains systèmes d'information se déforme.

- L'organisation scientifique du travail a conduit au début du siècle dernier à une rationalisation de la production s'appuyant, notamment, sur une explicitation des gammes de production. Un mouvement similaire s'est amorcé au début des années quatre-vingt pour la production de prestations de service, en particulier dans les *back-offices* (banques, assurance, centres d'appel...), modifiant les systèmes d'information existants, avec toutefois un degré moindre de précision dans la description des gammes (ce qui conduit souvent à des systèmes d'information partiellement informatisés). Cette explicitation est à la fois liée au mouvement de la qualité, qui implique une explicitation de ce qui doit être fait, et à la recherche d'une meilleure maîtrise des coûts.
- La gestion de processus implique des échanges d'informations entre systèmes internes (services...) jusqu'alors relativement indépendants. Ceci conduit souvent à transformer certaines informations des systèmes d'information qui supportent ces systèmes internes (par exemple, harmonisation des nomenclatures du bureau des méthodes et du bureau des études). Cette transformation peut être plus radicale et aller jusqu'à une fusion des systèmes d'information. L'usage du concept de cycle de vie dans la conception des produits¹, celui d'ingénierie concurrente², les approches de *chaîne logistique*³ et le passage aux ERP / ERM sont autant de raisons de cette évolution.
- Chaque système d'information se caractérisait par la délivrance d'informations caractérisées par une certaine temporalité liée principalement aux décisions à l'usage qui en était fait par le système interne qui l'avait créé. Le couplage plus ou moins fort de systèmes d'information lié, notamment, à l'approche processus ou à l'ingénierie concurrente, conduit à un élargissement de l'horizon temporel des informations mises à la disposition des acteurs.

1. Voir le § II-2.1, page 118, du chapitre II. Cette volonté de travailler sur le cycle de vie des produits se retrouve également dans le «courant» du **Soutien Logistique Intégré** (SLI). La norme NF-X 60-600 indique que «la logistique de soutien vise à assurer, dans les meilleures conditions économiques, la disponibilité des biens pendant leur durée de vie en tenant compte des conditions données d'utilisation». De manière simplifiée (Berthélemy, 1992, [49]), «le soutien logistique est principalement constitué des rechanges, de la documentation, des outillages et de la formation technique, permettant d'assurer la maintenance, chez l'utilisateur, ou l'efficacité du service après-vente, lorsque l'on se place dans l'optique du fournisseur».

2. Voir page 270.

3. Voir page 895.

- L'approche réseau¹ conduit de plus en plus à des relations stables entre entreprises qui induisent des échanges permanents d'informations entre systèmes d'information d'entreprises différentes, avec ce que cela implique en effort de normalisation. Dans cette perspective, les premières tentatives importantes dans la recherche d'une standardisation des structures de données permettant à des entreprises différentes de partager efficacement une partie de leur système d'information sont celles du **CALS**² et de l'**EDI** (Echange de Données Informatisé³) qui ont permis en France la mise en place de véritables partenariats, notamment dans la branche automobile et celle du BTP.

I-3.2 Des systèmes en perpétuelle transformation

Avant d'examiner des approches, il convient de souligner que la mise en place d'un nouveau système décisionnel s'accompagne presque toujours d'une adaptation de tout ou partie des systèmes d'information utilisés par l'entreprise, obligeant le plus souvent à redéfinir certaines interfaces entre systèmes d'information. Ces difficultés sont parfois sous-estimées, mais ces problèmes d'évolution sont inéluctables. En effet, il en est de même pour les systèmes d'information que pour les autres ressources productives permanentes : l'adaptation partielle et périodique de ces ressources est, par nature, génératrice d'une certaine hétérogénéité, certains « composants nouveaux » étant techniquement en avance ou surdimensionnés par rapport aux besoins pour permettre l'indispensable adaptation du portefeuille de ressources à l'évolution de la demande que l'on veut satisfaire.

Il convient donc de composer avec l'inéluctable hétérogénéité des systèmes d'information devant collaborer, mais aussi évoluer en fonction des besoins. La maîtrise de ce mécano, de sa cohérence et de son évolution par transformations/remplacements progressifs, faisant appel aux opportunités d'une offre technologique et logicielle en perpétuelle transformation, pose de redoutables problèmes méthodologiques que cherche à résoudre l'approche d'urbanisation du système d'information⁴.

Enfin, l'une des transformations notables que l'on observe est la tendance à la **répercussion immédiate d'informations élémentaires** tout au long de la chaîne logistique, ce qui permet une meilleure prise de décision et une réduction des encours. Par exemple, la répercussion immédiate de la commande d'un garagiste

1. Voir le § I-2.3, page 62 du chapitre I; voir également les articles de V. Giard sur ce thème (1994, [181], et 2000, [188]).

2. L'administration américaine a une fois de plus joué un rôle de pionnier dans la recherche d'une standardisation permettant à des entreprises différentes de partager efficacement une partie de leur système d'information. Le projet CALS, initialisé en 1985 par le Department of Defense (DoD) des États-Unis, visait à rationaliser l'information technique des produits et systèmes développés pour son compte dans le cadre de marchés publics; des extensions opérées en 1987 puis en 1989 conduisent au CALS/CE (*Computer-aided Acquisition and logistic Support with Concurrent Engineering*) qui consiste (voir Benchimol, 1993, [44], p. 24) «à regrouper, tout au moins conceptuellement, l'ensemble des données techniques concernant un produit, à les faire évoluer tout au long de son cycle de vie et à les mettre à disposition des différentes parties prenantes dans les limites de leurs droits d'accès, sous la forme la mieux appropriée à l'usage qu'elles ont à en faire, qu'il s'agisse d'entités internes à l'entreprise, d'un groupe d'entreprises travaillant sur un projet commun ou d'entreprises extérieures (maître d'ouvrage ou client, maître d'œuvre ou donneur d'ordre, fournisseur...) ou, dans le cas du DoD, des représentants de l'administration chargés de l'acquisition». Le manuel de logistique de l'OTAN (1997, [322]) décrit également les évolutions dans ce domaine. Les extensions internationales de ce mouvement (voir Chevalier, 1993, [93]) et notamment au niveau français (DGA) et britannique attestent d'une prise de conscience croissante qu'il s'agit là d'un enjeu fondamental dans la gestion des systèmes complexes et un facteur de compétitivité vital à terme.

d'un jeu de pneus à un dépôt régional, au dépôt national et à l'usine permet de mieux planifier la production et les tournées et évite l'impact des effets du lotissement inévitable lorsque le dépôt national ne connaît la demande qu'à travers les commandes des dépôts régionaux et que l'usine ne connaît la demande qu'à travers les commandes des dépôts nationaux ; cet effet de lotissement est de même nature que celui signalé dans l'analyse de la MRP (page 460).

I-4 Les systèmes d'information retenus

On s'attachera dans ce chapitre à présenter les bases de deux approches complémentaires de système d'information dont il convient de bien mesurer la portée car les choix effectués dans ce domaine ont un impact majeur ; de nombreuses entreprises ont rencontré des difficultés majeures à la suite de décisions stratégiques prises par des cadres dirigeants n'ayant aucune connaissance des fondements méthodologiques des approches retenues.

- De nos jours, on retrouve dans presque toutes les entreprises un système d'information très formalisé s'appuyant sur une base de données décrivant les ressources, les produits et la production (on ne traitera pas ici le transport qui pose quelques problèmes spécifiques). Cette formalisation est possible en raison des possibilités d'explicitation d'informations relativement stables et fréquemment utilisées. On examinera dans la [section II](#) les bases de cette approche et son application en gestion de la production. Dans la [section III, page 957](#), on examinera une approche de la création/transformation de ce système d'information de gestion, connue sous le nom d'ERP/ERM qui s'appuie à la fois sur des bases de données et sur une vision « processus »¹ de la gestion d'une entreprise.
- On trouve par ailleurs des systèmes d'information complémentaires, moins formalisés, décrivant des ensembles de procédures. De nos jours, cette explicitation de procédures s'effectue très souvent dans le cadre d'une démarche « qualité », associée ou non à une certification de l'entreprise. Nous examinerons rapidement ces approches dans la [section IV, page 971](#), tout en soulignant dès à présent que le succès de ce type de démarche repose au moins autant sur une organisation tournée vers l'amélioration continue que sur le système d'information assurant la maîtrise de la qualité.

SECTION II LA BASE DE DONNÉES DE LA PRODUCTION

Les spécialistes s'accordent pour reconnaître que, même avec certaines limites, les bases de données relationnelles présentent des avantages de souplesse et

3. *Note de la page précédente.* Voir Sandoval (1990, [371]). La tendance est actuellement à la migration vers un langage standard, international et multisectoriel proposé par les nations unies, connu sous le nom de norme UN/EDIFACT (United Nation / Electronic Data Interchange For Administration Commerce and Transport, dont la version européenne est EANCOM (voir Gratacap & Medan, 2001, [209], p. 320-323). Voir également l'ouvrage de Allab, Swyngedaum & Talandier (2000, [14]), sur l'impact des NTIC sur la logistique et la contribution de Fabbe-Costes dans l'ouvrage collectif de Fabbe-Costes, Colin & Paché (2000, [142]). Un panorama plus technique peut être trouvé dans Pimor, alors directeur de la stratégie et des études logistiques à France-Télécom (2001, [337]).

4. *Note de la page précédente.* L'ouvrage de Longépé (2001, [285]) donne un bon aperçu de ce type d'approche qui se propage depuis quelques années.

1. Sur le concept de processus et ses implications, voir § I-3, page 67, du chapitre I.

d'adaptabilité qui font que cette approche s'impose dans le cadre d'une réflexion stratégique orientée vers la conception du système d'information de l'entreprise. L'approche dite «relationnel objet»¹ se diffuse depuis quelques années, permettant de modéliser plus naturellement les objets de la base (les dernières versions d'Oracle supportent le relationnel objet).

Dans les deux cas, ces approches sont utilisées dans le cadre d'une analyse de l'existant ou de sa transformation. Il y a alors autant de représentations possibles que l'on a de situations initiales différentes et de problèmes différents à régler. Cette contingence, qui limite à une étude de cas la présentation que l'on peut faire de ces approches, peut être contournée, en présentant des solutions génériques pertinentes pour des classes de problèmes et de processus, ce qui revient à utiliser une *modélisation a priori du système d'information*. Cette démarche est implicitement retenue par les ERP / ERM (présentés en [section III, page 957](#)) qui s'appuient tous ou presque sur des bases de données relationnelles et proposent de décrire le fonctionnement d'une entreprise par le biais d'un mécano de processus auxquels sont associés des schémas conceptuels de données pouvant être fusionnés.

On commencera (§ II-1) par un bref rappel des concepts utilisés dans la modélisation des systèmes d'information et des conventions graphiques utilisées par l'une des approches s'inscrivant dans ce cadre. Ensuite (§ II-2, [page 936](#)), on présentera un modèle statique décrivant les composants d'un système de production et son état à un moment donné. Enfin (§ II-3, [page 949](#)) on introduira une version dynamique de ce modèle de données.

Table des matières

II-1 Le modèle «Entité - Relation»

Index thématique

Depuis la fin des années soixante-dix, une nouvelle génération de «bases de données», celle des bases de données de type relationnel, a vu le jour et s'est imposée. Cette approche assure une indépendance complète entre les données et les traitements, ce qui assure la souplesse maximale des systèmes d'information, tant du point de vue de leurs utilisations que de celui de leurs modifications. Un certain nombre de règles de structuration de cette base de données sont disponibles pour éviter toute redondance d'informations et assurer une cohérence sémantique des relations qui lient les concepts manipulés. Cette section ne vise qu'à rappeler la définition de certains termes utilisés dans le modèle entité-relation, ainsi que la logique sous-jacente dans la représentation du réel par une base de données de type relationnel, fondée sur le modèle entité-relation². La transposition dans une modélisation «objet» ne pose pas de problème particulier, mais dépasse le propos introductif que l'on s'est fixé ici³.

La description de la base de données proposée § II-2, [page 936](#), s'appuiera sur la [figure 224, page 938](#) à laquelle le lecteur se reportera pour comprendre les commentaires qui vont suivre. Le formalisme retenu est celui du modèle Galion (Flory, 1988, [151]) qui assure une meilleure lisibilité que celui de la représentation de Merise dès lors que l'on cherche à décrire un système d'une certaine

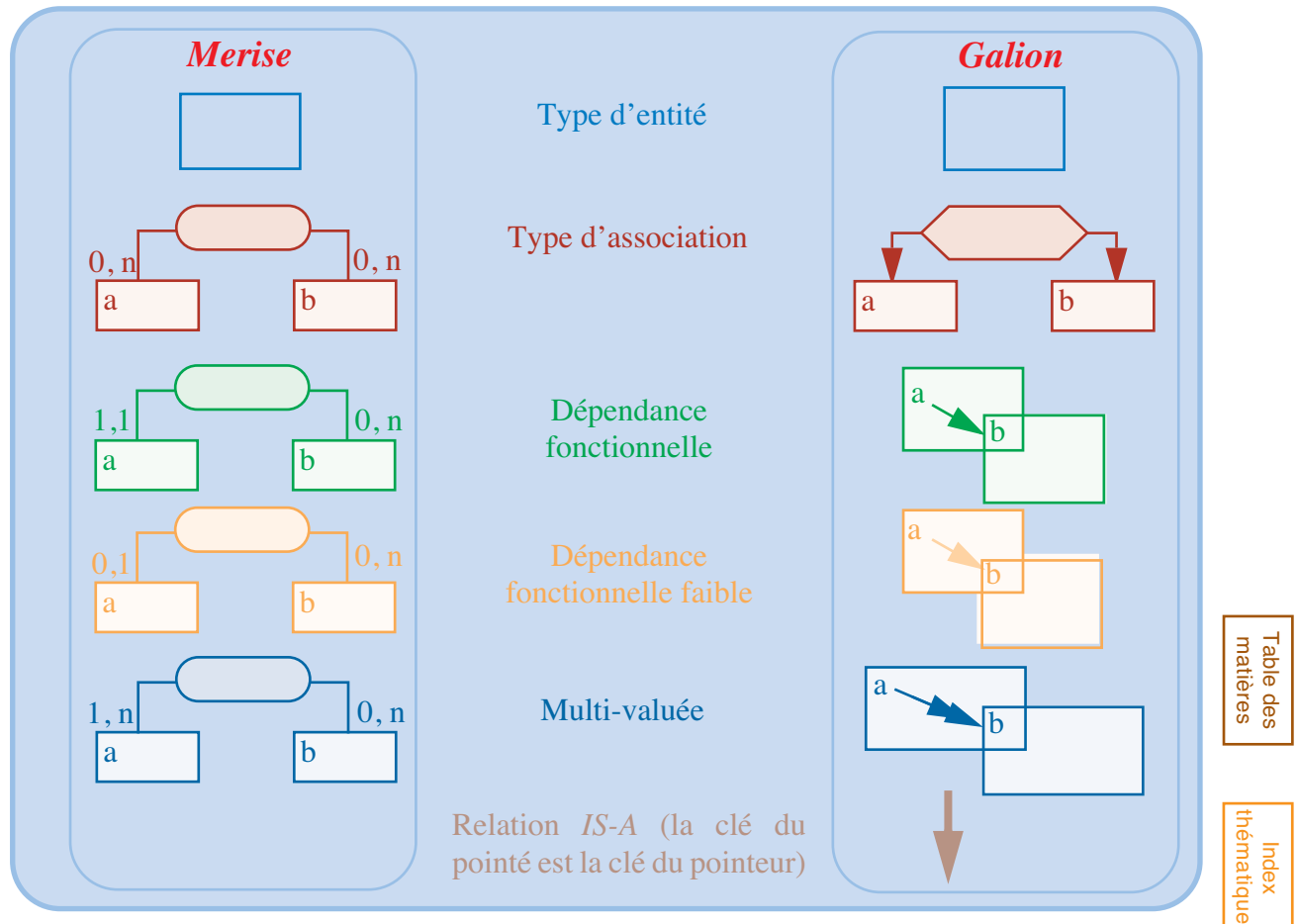
1. Pour une présentation synthétique, voir Ayache & Flory (1996, [26]).

2. Pour une présentation synthétique de l'approche relationnelle, voir Flory & Laforest (1996, [152]).

3. Pour une présentation synthétique de l'approche «objet», voir Ayache et Flory (1996, [26]).

complexité. Pour permettre au lecteur familiarisé avec le formalisme Merise de lire plus facilement les schémas présentés ici, la [figure 223](#), présente les correspondances entre les deux formalismes.

FIGURE 223
Correspondance des formalismes Galion et Merise



Chaque cartouche rectangulaire de cette figure correspond à un **type d'entité**, c'est-à-dire un type générique représentant des éléments de même nature. Dans chaque rectangle figure un certain nombre de rubriques permettant de caractériser chaque entité de l'ensemble définissant le type d'entité. De la rubrique située en haut d'un rectangle, rubrique qualifiée de **clé**, partent des flèches vers les autres rubriques qualifiées de **propriétés**. Chaque flèche symbolise ce que l'on appelle une **dépendance fonctionnelle**, ce qui signifie que la connaissance de la valeur prise par la clé engendre sans ambiguïté celle de la rubrique vers laquelle est pointée la flèche et que l'on a désignée sous le nom de propriété. L'ensemble des rubriques et des dépendances fonctionnelles d'un cartouche peut être représenté par une **relation** (on parlera ici de Relation-Entité ou de RE) que l'on repérera par la lettre R, suivie d'un numéro d'ordre. Par exemple, la relation R6 de la [figure 224](#), [page 938](#) indique qu'à un numéro d'opérateur (l'opérateur étant un agent de production d'un bien ou d'un service) ne correspond qu'un nom d'opérateur et un seul et, à un instant donné, une seule localisation physique dans l'entreprise (celle-ci étant codifiée sous la forme d'un numéro de localisation). Implicitement dans la base de données, on aura un fichier associé à la relation R6, fichier dans lequel chaque opérateur sera repéré par le triplet « numéro de l'opérateur, nom de

l'opérateur, localisation de l'opérateur». Il est évident qu'il ne saurait y avoir deux enregistrements ayant la même valeur de clé, dans ce fichier (règle d'**unicité de la clé**).

Chaque cartouche hexagonal représente un **type d'association** entre les types d'entités. Ces associations s'imposent lorsqu'à la valeur prise par la variable associée à une rubrique, ne correspond pas une valeur unique de la variable associée à une autre rubrique. Dans notre exemple, il est évident que l'une des caractéristiques intéressantes d'un opérateur est sa qualification. Cependant, certains opérateurs peuvent être polyvalents, c'est-à-dire posséder plusieurs qualifications. Le fichier correspondant à cette association comportera donc un certain nombre d'enregistrements pour lesquels un même numéro d'opérateur pourra apparaître plusieurs fois avec des numéros de qualification différents (ce qui est impossible dans le fichier associé à la relation R6). Les flèches qui partent de ce cartouche hexagonal vont aux cartouches rectangulaires des entités utilisées dans l'association et correspondent à une extension de la notion de dépendance fonctionnelle. Elles visualisent un «couplage» techniquement possible entre des types d'entités différents: par exemple, connaissant les informations décrites par les relations R6, R7 et R8, il est possible de connaître, d'une part, tous les opérateurs ayant une qualification donnée et, d'autre part, de connaître toutes les qualifications possédées par un opérateur donné. La clé d'un type d'association comporte donc plusieurs rubriques qui sont les clés des types d'entité sur lesquelles elles pointent.

Table des matières

Index thématique

L'ensemble des entités et des relations visualisées par ce schéma constitue ce que l'on appelle un **Système de Relations - Entités** (SRE). Le modèle entité-relation conduit à une représentation unique du réel par un SRE, parce qu'il impose aux relations que retient l'analyste la contrainte suivante: toute rubrique appartenant à plusieurs relations constitue obligatoirement la clé de l'une de ces relations. Une telle rubrique, lorsqu'elle se trouve dans la relation où elle n'est pas clé, est appelée **référence** par les spécialistes de base de données. Elle permet de naviguer dans la base de données, c'est-à-dire de passer d'une relation à une autre, ce qui implique que la valeur prise par une référence existe nécessairement pour la clé correspondant à cette même rubrique (contrainte que les spécialistes qualifient d'**intégrité référentielle**). Il convient donc de *lire de bas en haut ce graphique*, certaines informations susceptibles d'exister dans un cartouche étant conditionnées par l'existence d'informations de cartouches situés en aval.

Dans le corps du texte, la description de chaque relation s'effectue habituellement à l'aide du formalisme $R_n(\underline{A_1}, A_2, A_3\dots)$, où R_n repère la relation n , les A_i correspondent au nom des rubriques qui la composent, la (ou les) rubrique(s) constituant la clé de la relation étant soulignée(s); par exemple, le type d'opérateur se décrira donc par la relation suivante (cf. § II-2.1.6, page 940) «R6(#OPERATEUR, NOM OPERATEUR, #LOCALISATION OPERATEUR)». Chaque relation donne naissance à un fichier dans la base de données. Les utilisateurs exploitent cette base par des requêtes (qui peuvent porter sur plusieurs tables nécessairement liées les unes aux autres par un chemin dans le SRE) pour fournir une grande variété d'états de sortie (dont la structure formelle est largement indépendante de celle des fichiers utilisés).

Ajoutons enfin qu'il existe des cas où un type d'entité joue des rôles différents. Par exemple, un ingénieur est un employé, ce que l'on notera par une double flèche¹ (par exemple : #INGENIEUR \Rightarrow #EMPLOYE ou bien #ARTICLE COMPOSANT \Rightarrow ARTICLE) et par des flèches épaisses dans les SRE de ce chapitre.

II-2 Présentation du modèle statique de système d'information en gestion de production

On s'intéressera dans ce paragraphe et le suivant au système d'information permettant de piloter la production à un niveau opérationnel (problématique d'ordonnancement étudiée au chapitre V, page 359), sans rentrer dans le détail de l'exécution d'une opération sur une machine². Une adaptation mineure de ce modèle (rapidement abordée à la page 955) permet de prendre en compte les décisions de planification (problématique de MRP présentée au chapitre VI, page 455).

Un modèle est une représentation plus ou moins fidèle d'une réalité complexe. Le parti pris retenu ici est d'atteindre une certaine généralité descriptive et donc de pouvoir prendre en compte correctement des organisations de la production variées. Il s'ensuit que la présentation faite aux paragraphes II-2 et II-3 peut être simplifiée pour adapter le modèle à des situations plus simples, correspondant à un système productif particulier³. Ce modèle représente les principales entités que l'on rencontre en production. Ces entités sont caractérisables par une liste d'attributs. Il est évident que n'ont pu être pris en compte, ici, que les principaux d'entre eux et que peuvent manquer certains attributs liés à des procédures de gestion spécifiques à telle ou telle entreprise. Par l'adjonction de nouvelles entités et/ou de nouveaux attributs à des entités existantes, le gestionnaire pourra «élaborer» une image plus fidèle à la réalité qu'il souhaite décrire.

L'une des difficultés majeures que l'on rencontre dans la mise au point d'un système d'information général tient au fait que l'on peut souhaiter disposer à la fois d'une photographie instantanée de l'état d'un système de son historique ou d'une image de la projection d'une utilisation future possible de ce système. Les deux préoccupations ne sont pas antagonistes, mais elles compliquent un peu la structure du système d'information, notamment parce que, selon l'usage requis, il sera fait appel à des sous-ensembles différents du système général et que les règles de cohérence des informations entre ces sous-systèmes sont loin d'être triviales. On commencera par présenter ici le modèle statique du système d'information de gestion de production avant d'examiner sa version dynamique⁴ au § II-3, page 949.

Cette seconde section est dédiée à la présentation d'un modèle de SRE susceptible de décrire de manière assez exhaustive, semble-t-il, à la fois le système productif et ce qu'il peut produire ainsi que ce qu'il est en train de produire à un

1. \Rightarrow , lire «est un rôle de».

2. Ce qui relève d'un autre système d'information qui peut ou non être nécessairement informatisé (comme c'est le cas de la commande numérique des machines-outils...).

3. Par exemple, on peut utiliser la gamme associée à une production en *flow shop*, pour décrire une production de type *flow shop* (voir page 51 et le chapitre V), l'inverse n'étant pas possible.

4. Indiquons, avant d'analyser ces schémas conceptuels, que ceux-ci s'appuient sur la communication de Flory & Giard (1988, [153]) qu'ils complètent sur beaucoup d'aspects.

instant donné. Des adaptations seront proposées au § II-3, page 949, pour aboutir à une version dynamique du modèle. Le schéma conceptuel de la figure 224 de la page 938 se divise en quatre ensembles qui sont, de bas en haut :

- le premier décrit le système physique de production, c'est-à-dire les *ressources productives*,
- le deuxième décrit l'ensemble des produits, matières premières, composants susceptibles de transiter dans le système productif et que l'on qualifiera de *production potentielle*,
- le troisième décrit les *processus productifs*, c'est-à-dire ce que peut produire le système et comment,
- le dernier décrit les flux transitant effectivement à un instant donné dans le système productif; cette partie correspond à la *production en cours*.

Les trois premiers ensembles correspondent à des données structurelles, largement indépendantes des décisions de production, même si certaines d'entre elles peuvent être affectées par ces décisions (par exemple, la localisation de ressources telles que les hommes ou les engins de manutention varie en fonction des décisions prises, mais leurs caractéristiques physiques restent stables). Ces données structurelles sont définies dans une optique de gestion de la production et peuvent ne pas être suffisantes, notamment sur le plan technique. Le dernier ensemble (production en cours) ne comporte que les données «éphémères», lesquelles sont stockées dans des fichiers dont le contenu est appelé à se modifier rapidement.

L'optique retenue ici est celle d'une description aussi complète que possible de «ce qui se passe»; une description plus sommaire peut s'avérer être suffisante en fonction du système de pilotage retenu. Rappelons qu'il a été dit en introduction que le système réel peut être moins complexe que celui envisagé ici (ce qui se traduit par des suppressions de rubriques et/ou de relations).

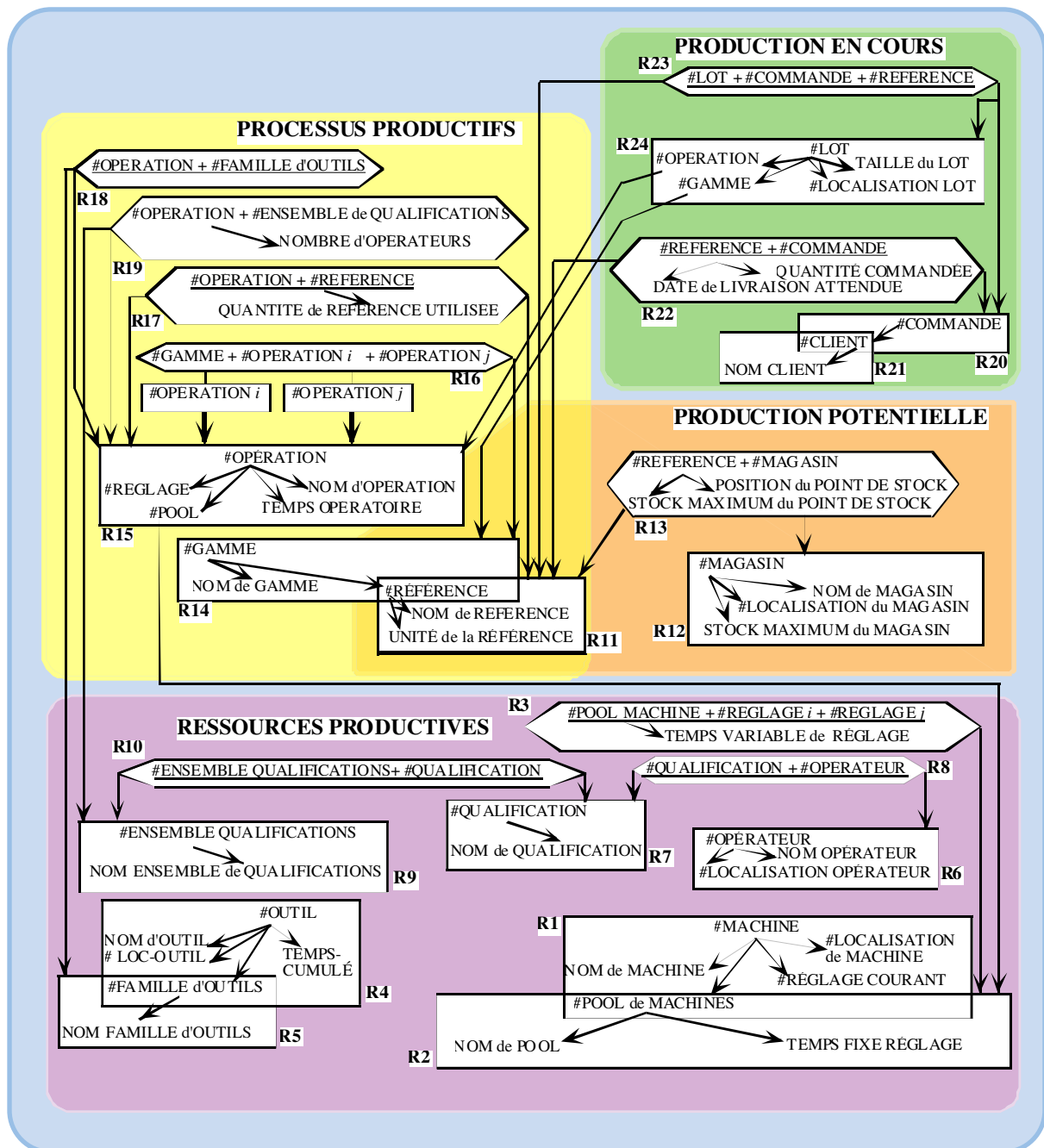
II-2.1 Le système productif

Un système productif peut être décrit par des ressources en hommes (R6), machines (R1), outils (R4). Le système d'information proposé repose sur des types d'entités associés à chaque catégorie de ressources. Des ressources appartenant à une même catégorie peuvent être de caractéristiques identiques et, de ce fait, rigoureusement substituables. Pour en tenir compte, la notion d'ensemble de ressources interchangeable a été introduite sous la forme de pool pour les machines (R2), de qualification pour les opérateurs (R8), et de famille pour l'outillage (R5).

II-2.1.1 Machines (R1)

La première rubrique de ce type d'entité est le numéro de machine #MACHINE et en constitue la clé unique. À côté du NOM de MACHINE, on trouve trois autres rubriques dépendant fonctionnellement de #MACHINE. La première est le numéro de pool, #POOL, auquel se rattache la machine, pool constitué de machines dont les performances sont considérées comme techniquement équivalentes (l'équivalence pouvant laisser une marge plus ou moins importante à l'appréciation du concepteur du système d'information, en fonction des besoins à satisfaire). Il s'ensuit que les gammes ne feront pas référence directement aux machines, mais

FIGURE 224
Modèle statique du système d'information de gestion de production

Table des
matièresIndex
thématique

aux pools de machines (R15, voir § II-2.3.2, page 945), la sélection de la machine du pool devant être utilisée dépendant d'une décision de pilotage du système.

On trouve ensuite une rubrique qui est une propriété, la localisation de la machine, #LOCALISATION de MACHINE, qui se définit par ses coordonnées cartésiennes. Cette localisation peut être approximative pour les installations fixes et plus fine pour les ressources mobiles (par exemple, chariot filoguidé). Dans les systèmes productifs non totalement informatisés, il sera possible d'utiliser une valeur « localisation inconnue » pour indiquer la position d'une ressource en déplacement entre une origine et une destination connues. Cette localisation sera utilisée pour repérer où sont les en-cours de production.

La dernière propriété est le numéro de réglage actuel de la machine, noté #REGLAGE, qui sera utile notamment dans le cas de machines dont les temps de réglage varient de manière significative en fonction du réglage antérieur. Si cette information n'est pas pertinente pour une machine donnée, il suffira d'assigner une valeur arbitraire (0, par exemple) aux #REGLAGE. La notion de réglage se définit par un ensemble d'informations incluant les outils montés, catégorie d'huile de coupe, etc.

On peut avoir intérêt à créer une propriété supplémentaire (définissant une variable logique ou une variable quantitative caractérisant une capacité) lorsque certaines machines se caractérisent par la possibilité d'effectuer une même opération simultanément pour plusieurs lots de références différentes (manutention, traitement thermique ou chimique, par exemple).

II-2.1.2 Pool de machine (R2)

Le numéro de pool, #POOL, est la clé de ce type d'entité. Par définition, n'importe quelle machine appartenant à un pool donné peut remplacer une autre machine de ce pool avec les mêmes performances (temps de lancement, temps opératoire unitaire...). Cette relation comporte deux propriétés: le temps fixe de réglage TEMPS FIXE de RÉGLAGE et sa désignation NOM de POOL.

Le temps de réglage nécessaire à l'exécution d'une opération n'est pas associé à celle-ci, mais au réglage requis par celle-ci. Cette information est «remontée» au niveau du pool en ce qui concerne le temps fixe de préparation et lorsque s'y ajoute un temps variable en fonction du réglage antérieur, il devient nécessaire d'introduire la relation R3, temps variable de réglage.

II-2.1.3 Temps variables de réglage (R3)

Il s'agit ici de pouvoir décrire la possibilité d'avoir des temps de réglage dépendant du réglage précédent (problématique introduite au § I-2, page 388 du chapitre V). Ce type d'entité correspond à une association comportant une clé constituée de trois rubriques: le numéro de pool #POOL, le réglage initial #REGLAGE_i et le réglage final #REGLAGE_j. Ces deux dernières rubriques sont deux rôles¹ de la rubrique #REGLAGE; elles prennent alors nécessairement les mêmes valeurs que celles que peut prendre le réglage courant #REGLAGE. Figure en outre dans cette relation une propriété, le temps variable de réglage (TEMPS VARIABLE de RÉGLAGE). Si cette notion s'avère sans objet pour un pool donné, le fichier correspondant à cette relation ne comportera pas d'enregistrement pour le pool considéré.

II-2.1.4 Outillage (R4)

L'exécution d'une opération sur une machine peut requérir la présence d'un ou plusieurs outils (voir R11). Le plus souvent, plusieurs outils identiques sont disponibles et constituent un ensemble que l'on repérera par le vocable «famille d'outils» (voir R5, page 940). Le choix de l'outil ne dépend pas toujours uniquement du réglage d'une machine et, pour cette raison, on «rattachera» l'outil à

1. Voir définition page 936.

l'opération (par l'intermédiaire de la famille à laquelle il appartient) et non à la machine (voir R18, [page 946](#)).

Le numéro de l'outil, #OUTIL, est la clé de cette relation R4 qui comporte deux propriétés correspondant à des informations permanentes: le nom de cet outil NOM d'OUTIL (qui peut ne pas être nécessaire dans de nombreux cas) et sa famille d'appartenance #FAMILLE d'OUTILS. Les deux dernières propriétés de cette relation correspondent à des informations dont la mise à jour peut être très fréquente.

Il s'agit tout d'abord de la localisation de l'outil #LOCALISATION d'OUTIL qui permet au système d'enregistrer la localisation de l'outil à la date courante d'analyse du système¹. Il peut s'agir d'un magasin ou d'une machine sur laquelle l'outil est monté. Il peut s'agir encore d'un centre de réparation, notamment dans le cas d'outils d'usure (outillage de coupe, par exemple). Le système de localisation spatiale utilisé ici devra être cohérent avec ceux des relations comportant également une identification spatiale.

La dernière propriété est le temps cumulé d'utilisation (TEMPS CUMULÉ). Cette information peut être remise périodiquement à jour à l'occasion d'une sortie ou d'une rentrée d'outil en magasin, en fonction des gammes utilisées. Elle est nécessaire pour les outils d'usure qui font l'objet d'une rénovation périodique. Elle s'impose de plus en plus pour les autres outils susceptibles de faire l'objet d'une maintenance préventive ou conditionnelle.

II-2.1.5 Famille d'outils (R5)

Cette relation possède une clé, le numéro de famille #FAMILLE et une propriété, le nom de cette famille d'outils NOM de FAMILLE. Aucune dépendance fonctionnelle n'est supposée exister entre la machine d'un pool et l'outil d'une famille, dans la mesure où l'exécution d'une opération sur une machine peut requérir la présence de plusieurs outils appartenant à des familles différentes. Inversement, l'outil d'une famille donnée pourra être monté sur des machines appartenant à des pools différents. L'association R18 (cf. [§ II-2.3.5, page 946](#)) explicitera la liaison entre outil et machine par le biais des opérations.

II-2.1.6 Opérateur (R6)

Par opérateur, il faut entendre toute personne qualifiée pour exécuter des opérations sur au moins une machine. Cet opérateur est repéré par un numéro d'identification #OPERATEUR dans le système d'information. Cette première rubrique est la clé unique de cette relation qui possède nécessairement comme propriété une information moins «technocratique», le nom de l'opérateur (NOM d'OPERATEUR) (le cas de deux opérateurs ayant le même nom n'étant pas à exclure, il est difficile de prendre comme clé de cette relation le nom de l'opérateur).

Certains opérateurs sont polyvalents en ce sens qu'ils sont capables de conduire des machines appartenant à des pools différents. Dans certains cas, cette polyvalence va pratiquement de soi si les pools concernés ne diffèrent que par des caractéristiques mineures telles que la vitesse d'exécution d'une opération. L'aptitude d'un opérateur à exécuter un «type d'opération» sur des machines d'un pool

1. Dans la version statique du système d'information de production, le temps n'intervient pas autrement que le fait que toutes les informations décrites sont valides à un même instant du temps.

donné sera appelée *qualification*. Un opérateur pouvant posséder plusieurs qualifications, la qualification ne saurait être en dépendance fonctionnelle avec l'opérateur, ce qui explique l'introduction de l'association R18. La relation R18 (cf. § II-2.3.5, page 946) décrira, en outre, la possibilité qu'une opération nécessite simultanément la présence de plusieurs opérateurs (n'ayant pas nécessairement la même qualification).

Comme n'importe quelle ressource, la localisation d'un opérateur se définit par ses coordonnées spatiales (#LOCALISATION d'OPERATEUR). Il est évident que ce repérage spatial doit être cohérent avec celui des machines afin de pouvoir «envoyer» les opérateurs requis aux «bonnes» machines pour exécuter une opération donnée. On pourra, en outre, utiliser une valeur conventionnelle de localisation pour indiquer que l'opérateur est absent du système productif pour des raisons diverses telles que congés ou maladie.

II-2.1.7 Qualification (R7)

La notion de qualification a été introduite au début du § II-2.1, page 937 et précisée au § II-2.1.6, page 940. Ce type d'entité comporte une clé unique, le numéro de qualification, #QUALIFICATION, et une propriété, la désignation de la qualification (NOM de QUALIFICATION). L'une des qualifications utilisées pourrait être «pas d'opérateur requis» pour tenir compte de la possibilité de réaliser certaines opérations sur certaines machines, sans la présence physique d'un opérateur. Ce cas de figure se rencontre dans le cas de robots, engins de manutention automatisés (chariots filo-guidés, par exemple), mais également pour des machines partageant un même conducteur, dès lors que sa présence n'est requise qu'au lancement de l'opération. Mais, dans ce dernier cas, il convient de séparer une opération en deux, la première nécessitant la présence de l'opérateur, et la seconde ne la nécessitant pas.

Table des matières

Index thématique

II-2.1.8 Qualification des opérateurs (R8)

Ce type d'entité décrit l'association entre les opérateurs et les qualifications. Cette relation comporte donc une clé composée des rubriques #OPERATEUR et #QUALIFICATION et ne comporte pas de propriétés. On est en présence d'une multivaluée de l'entité opérateur: un opérateur pouvant avoir plusieurs qualifications.

II-2.1.9 Ensemble de qualifications (R9)

Pour exécuter une opération, un opérateur possédant une qualification d'un type donné peut être requis, mais souvent, lorsque la nomenclature des qualifications est importante, on a le choix pour exécuter cette opération entre plusieurs qualifications. Il faut donc introduire la notion d'ensemble de qualifications. Celle-ci ne découle pas d'une partition des qualifications puisqu'elle résulte d'une analyse des gammes utilisées et d'un compromis sur des regroupements possibles de qualifications. La notion d'ensemble de qualifications correspond donc à une vision étroitement technique vue du côté de la demande. Ce type d'entité décrit ces ensembles de qualifications et comporte une clé correspondant au numéro d'ensemble de qualifications (#ENSEMBLE de QUALIFICATION) et une propriété, le nom de cet ensemble de qualifications (NOM d'ENSEMBLE de QUALIFICATION).

II-2.1.10 Définition d'un ensemble de qualifications (R10)

Une qualification donnée peut appartenir à plusieurs ensembles de qualifications et un ensemble de qualifications comporte, par définition, plusieurs qualifications. La relation R10 décrit cette association à l'aide d'une clé composée de #QUALIFICATION et de #ENSEMBLE de QUALIFICATION et ne comporte aucune propriété.

II-2.2 Les flux de production potentiels

Ce paragraphe est consacré aux pièces détachées, composants, sous-ensembles ou matières premières diverses repérés par un numéro de référence, susceptibles de transiter dans le système productif et d'y être stockés. Un en-cours ne faisant pas l'objet d'un stockage n'est normalement pas référencé. On retrouve néanmoins sans difficulté le lot correspondant à un en-cours par le biais de sa localisation, comme on le verra au § II-2.4.5, page 948.

II-2.2.1 Références (R11)

Tout « objet » (composants, matières premières...) possédant le même numéro de référence, #REFERENCE, doit être considéré comme rigoureusement substituable avec n'importe quel autre objet possédant ce même #REFERENCE qui constitue la clé de la relation R11. Ces articles peuvent être fabriqués ou approvisionnés à l'extérieur. Le processus de production est décrit par une gamme (voir les relations R14 à R18). La désignation en clair de la référence NOM de REFERENCE est une propriété de cette relation, tout comme l'unité retenue dans la description des stocks de cette référence. Cette dernière rubrique, UNITÉ de la REFERENCE, doit être connue pour pouvoir mesurer la « consommation » d'un espace de magasin consécutive au stockage de la référence. Pour ce faire, soit on utilise des unités classiques d'espace ou de volume, soit on se ramène à une unité d'œuvre correspondant à un « article de base » que l'on utilise comme référence pour convertir les quantités des autres articles. Cette unité sera la même que celle utilisée pour quantifier un point de stock (relation R13) et la capacité du magasin dans lequel la référence est stockée (R12).

II-2.2.2 Magasins (R12)

Ce type d'entité possède comme clé le numéro de magasin #MAGASIN et trois propriétés: le nom du magasin, NOM de MAGASIN, sa localisation, #LOCALISATION de MAGASIN (les commentaires antérieurs relatifs à la localisation des machines peuvent être intégralement repris ici), et la capacité de stockage maximale du magasin, STOCK MAXIMUM du MAGASIN, exprimée dans une unité cohérente avec celle utilisée par les références qui peuvent y être stockées (voir R11). Il s'agit ici d'une capacité de stockage définie pour l'ensemble des références du magasin.

II-2.2.3 Point de stock (R13)

Le point de stock se définit par le stockage possible d'une référence donnée dans un magasin considéré. Une même référence peut donc être stockée dans plusieurs magasins. Une gestion des stocks implique une connaissance précise de la position de stock de chaque point de stock. Le type d'entité R13 permet ce suivi par l'utilisation d'une clé comportant les rubriques #REFERENCE et #MAGASIN. À

tout moment, le point de stock est caractérisé par sa position (POSITION du POINT de STOCK), information dont la mise à jour peut être fréquente.

Dans la mesure où un même magasin est partagé par plusieurs articles, cette relation comporte nécessairement une information sur le stock maximal (STOCK MAXIMUM du POINT de STOCK) que peut atteindre la référence considérée dans ce magasin sans qu'il y ait un risque de pénurie d'espace pour l'ensemble des références. Dans un contexte stochastique, la somme de ces STOCK MAXIMUM du POINT de STOCK sera supérieure au STOCK MAXIMUM du MAGASIN de la relation R12 (ce qui permet de prendre en compte les problématiques de contraintes de stockage étudiées au § II-3, page 753, du chapitre XI et au § II-2.1.1, page 863, du chapitre XII).

II-2.3 Les processus productifs

Toute production d'un bien peut être considérée comme l'exécution d'une liste d'opérations modifiant les caractéristiques physiques ou spatiales (localisation) d'un produit, ces modifications n'étant prises en compte par le système d'information que lorsqu'elles sont jugées significatives. Cette définition, relativement large, permet de traiter non seulement des **gammes de fabrication et/ou d'assemblage** (modification physique du produit), mais aussi les **gammes de manutention** (modification de la localisation d'un produit au sein d'un système productif), les **gammes d'approvisionnement** (modification de la localisation d'un produit par son introduction dans le système productif) et les **gammes de maintenance** (correspondant à des opérations d'inspection, c'est-à-dire de mise à jour d'une information sur l'état d'une ressource, ou de réparation correspondant à une remise en état d'une ressource). Il faut rappeler (voir chapitre I, page 43) que la production d'un service ne diffère guère de celle d'un bien du point de vue de la consommation de ressources. La différence tient essentiellement à son objet qui consiste en une mise à la disposition des tiers, de produits ou d'informations simples ou complexes. Du point de vue du système d'information, les concepts manipulés sont identiques.

Ce paragraphe est centré sur les gammes de fabrication et/ou d'assemblage qui correspondent au cas de figure le plus complexe, les autres gammes ne présentant qu'un sous-ensemble des caractéristiques des gammes de fabrication et/ou d'assemblage.

Une **gamme** est une liste ordonnée d'opérations permettant de fabriquer (ou de transporter ou d'inspecter ou d'acheter) une référence #REFERENCE. À une référence donnée peuvent correspondre plusieurs gammes. Lorsque ce cas se produit, les différentes gammes associées à cette référence sont qualifiées de **gammes alternatives**. C'est un cas de figure de plus en plus répandu, avec la généralisation de machines polyvalentes (machines à commandes numériques, ateliers flexibles...). La plupart du temps, ces gammes alternatives possèdent quelques opérations communes. L'aspect combinatoire de l'explicitation de toutes les gammes alternatives possibles conduit, souvent et pour des raisons de temps et d'encombrement de fichiers, à ne pas formuler explicitement toutes les gammes alternatives, celles-ci n'étant alors définies et introduites dans le système d'information que lorsque se posent de sérieux problèmes de goulot d'étranglement dans l'utilisation de certaines ressources.

Une opération donnée peut ne pas être précédée ou suivie des mêmes opérations pour deux raisons : opérations communes de gammes alternatives pour une référence donnée et cas d'une même opération intervenant dans la fabrication de références différentes. Le concept de séquençement des opérations est donc à rattacher à la notion de gamme par le biais d'une association entre un numéro de gamme et un couple ordonné d'opérations (d'où la clé composée de trois rubriques de la relation R16). La formulation choisie est la plus générale possible pour permettre de décrire des gammes utilisées par des organisations productives de type *job shop* (voir page 51 et page 362) ; elle permet sans difficulté de décrire les **gammes convergentes**¹, les **gammes divergentes**² et les gammes des organisations productives de type *flow shop* (voir page 51 et page 362), même si une formulation alternative plus performante peut être utilisée lorsque l'on se trouve toujours dans ce cas de figure. Pour éviter toute redondance, les principales informations techniques doivent être fournies au niveau de l'opération (voir les relations R15, page 945, et R18, page 946) et non de la gamme. Dans la mesure où une gamme est associée à une référence, il sera possible de retrouver les en-cours de production ; on verra que les relations R23 (page 948) et R24 (page 948) autorisent une connaissance approximative, mais suffisante, de l'état d'avancement de n'importe quelle commande.

Une nomenclature est associée à une référence, mais dans la mesure où il est nécessaire de connaître les composants auxquels une opération fait appel, cette information se déduit de la gamme par le biais de la relation R17 (page 946). Il est possible de créer un type d'entité correspondant à une nomenclature, mais il y aurait alors une redondance d'information (que l'on peut accepter pour un système d'information réel au nom de l'efficacité, mais pas au niveau de la modélisation générique retenue ici). Une approche récursive fournit une connaissance précise des besoins en approvisionnement de matières premières et de composants, à la suite d'une décision de lancement en fabrication.

II-2.3.1 Gamme (R14)

Cette relation comprend une clé, le numéro de gamme (#GAMME) et deux propriétés : le nom de la gamme (NOM de GAMME) et la référence qu'elle permet de fabriquer (#REFERENCE). Comme il a été indiqué précédemment, une gamme peut être établie non seulement pour des opérations de fabrication ou d'assemblage, mais aussi pour de la manutention, de l'inspection ou de l'approvisionnement (pour les références qui ne sont pas fabriquées par les systèmes productifs). On doit noter que les informations qui se retrouvent habituellement dans les documents techniques de gammes se trouvent « éparpillées » dans les relations R14 à R18 (ce qui peut troubler les spécialistes de gestion de production peu familiarisés avec les bases de données).

1. Une **gamme** est dite **convergente** lorsque chaque opération peut avoir plusieurs antécédents, mais, au plus, un seul successeur. Ce type de gamme se retrouve classiquement dans les processus d'assemblage organisés en lignes de production (voir page 53 et le chapitre IX, page 925) ou faisant appel à une configuration de *flow shop* (voir page 51 et page 362).

2. Une **gamme** est dite **divergente** lorsque chaque opération peut avoir plusieurs successeurs, mais, au plus, un seul antécédent. Cette possibilité existe notamment lorsqu'une opération d'assemblage pour contrôle est suivie d'une opération de désassemblage en composants, chacun d'entre eux étant susceptible de faire l'objet de nouvelles opérations.

Le parti pris retenu, ici, est celui d'une dépendance fonctionnelle entre gamme et référence, autrement dit une gamme donnée n'est utilisable que pour produire une seule référence, ce qui correspond au cas de figure le plus souvent rencontré et de loin (l'utilisation de processus et nomenclatures rigoureusement identiques devant conduire à des «objets» parfaitement substituables). Lorsque plusieurs opérations sont identiques, d'un strict point de vue technique, le produit fabriqué peut ne pas être pour autant toujours le même et différer sur des aspects mineurs tels que celui de la couleur. Ces différences mineures, compte tenu de la définition retenue pour la référence, obligent à travailler sur des références repérées par des codes différents. On peut avoir alors intérêt à complexifier le schéma conceptuel en faisant appel à la notion de rôle (voir [page 936](#)).

II-2.3.2 Opération (R15)

La clé de ce type d'entité est le numéro d'opération (#OPERATION), dont le nom est NOM d'OPERATION (propriété de R15). La codification en usage peut être créée de façon à permettre l'identification immédiate du type d'opération (de fabrication, d'assemblage, de manutention, d'inspection ou d'approvisionnement). Une opération donnée est exécutable sur n'importe quelle machine d'un pool donné. La seconde propriété de cette relation est donc le numéro de pool (#POOL). Dans la mesure où nous avons vu qu'une «opération physique» peut être exécutée sur des machines de pools différents pour conduire à un même «résultat physique»; ces opérations auront des codes différents et seront utilisées par des gammes différentes. Les informations techniques sont fournies par deux propriétés: le temps opératoire unitaire (TEMPS OPÉRATOIRE) et le numéro de réglage (#RÉGLAGE); si cette dernière information n'est pas pertinente pour une opération, on conviendra d'utiliser un numéro de réglage «fictif».

Table des matières

Si une opération doit être exécutée par plusieurs machines mises en série, il sera nécessaire d'éclater cette opération en opérations élémentaires, chacune d'entre elles ne requérant qu'une seule machine.

Index thématique

Certains processus de fabrication peuvent requérir la présence simultanée de deux machines (la plupart du temps, la seconde étant une machine de manutention). Dans ce cas, le numéro de pool (#POOL) et, sans doute, le temps opératoire doivent devenir des attributs de la relation R18 et non de la relation R15 (sauf si la seconde machine peut être considérée comme un outil).

II-2.3.3 Séquencement (R16)

Comme nous l'avons dit dans l'introduction de ce § II-2.3, une opération donnée peut être utilisée par des gammes alternatives et, pour cette raison, ne doit pas être traitée en dépendance fonctionnelle au travers d'une gamme, mais d'une association, ce que nous examinons maintenant. La clé du type d'entité R16 est constituée de trois rubriques: le numéro de gamme (#GAMME), définie en R14, et deux opérations, l'opération i (#OPERATION $_i$) et l'opération j (#OPERATION $_j$). Par convention, l'opération i doit être exécutée avant l'opération j (relation d'antécédence). Ces #OPERATION $_i$ et #OPERATION $_j$ sont des rôles de l'entité opération (la notion de rôle ayant été rappelée en [page 936](#)). Pour décrire complètement une gamme, il faudra introduire une opération fictive qui permettra d'initialiser le processus.

La notion de séquencement n'implique pas que la totalité d'un lot soit terminée avant que ne puisse commencer l'opération suivante. Ce problème classique de recouvrement trouve une solution dans ce modèle, laquelle sera présentée au § II-2.4.5, page 948.

II-2.3.4 Nomenclature (R17)

Une **nomenclature** n'est rien d'autre que la liste des composants et/ou matières premières requises pour fabriquer une référence donnée. Il n'a pas été retenu ici de conserver cette formulation «classique», dans la mesure où elle conduirait à une certaine redondance. Il est en effet nécessaire de connaître de manière précise les opérations qui feront appel à tel ou tel composant de la nomenclature. Le type d'entité R17 comporte une clé composée du numéro d'opération (#OPERATION) et de la référence utilisée (#RÉFÉRENCE). Il s'agit d'une association puisqu'une référence peut être appelée par plusieurs opérations et qu'une opération peut nécessiter plusieurs références. Il résulte de cette formulation qu'il est possible de retrouver sans difficulté une nomenclature par le biais de la gamme (R14 et R16) et que les concepts de gamme et de nomenclature sont étroitement imbriqués dans ce modèle.

La dernière information nécessaire est la quantité requise de la référence utilisée pour fabriquer une unité de la référence dont on étudie la gamme/nomenclature. Cette rubrique, QUANTITÉ de RÉFÉRENCE UTILISÉE, constitue la dernière propriété de cette relation R17. L'unité à utiliser dans cette consommation de référence doit être cohérente avec celle utilisée par ailleurs (voir R12, page 942).

II-2.3.5 Les caractéristiques techniques d'une opération (R18 et R19)

À des fins de gestion, on doit connaître les différentes ressources qui seront mobilisées pour exécuter une opération, mais il n'est pas nécessaire de disposer d'informations à un très grand niveau de détail, dans la mesure où la gamme utilisée par les gestionnaires n'a pas à être aussi précise que celle utilisée par les techniciens. Nous avons décrit précédemment le séquencement des opérations, la nomenclature et le pool de machines où une opération doit être exécutée. Il nous reste maintenant à définir les autres ressources nécessaires, à savoir l'outillage et les opérateurs. La relation R18 comporte une clé composée de #OPERATION et #FAMILLE d'OUTILS. Plusieurs enregistrements correspondant à une même #OPERATION, l'association ainsi décrite permettra de repérer les ressources en outillage nécessaire (on est donc implicitement en présence d'une logique de type *et* et non d'une logique de type *ou*).

De même, la relation R19 est une association dont la clé est constituée de #OPERATION et de #ENSEMBLE de QUALIFICATIONS (voir R9, page 941). S'il s'avère que plusieurs opérateurs appartenant au même ensemble de qualifications sont nécessaires pour exécuter l'opération, on devra ajouter comme nouvelle propriété à la relation le nombre d'opérateurs requis.

Supposons maintenant qu'une opération exige non seulement la présence de plusieurs opérateurs, mais également celle de plusieurs machines utilisées simultanément et de plusieurs outils appartenant à des familles différentes. Dans ce cas, notre modèle doit être adapté. Tout d'abord, le #POOL qui actuellement est une

propriété de R15 disparaît de cette relation ainsi que le numéro de réglage qui lui est associé. On obtient alors la relation :

R'15(#OPÉRATION, NOM-OPÉRATION, TEMPS-OPERATOIRE).

La relation R18 doit également subir une transformation pour tenir compte de la possible présence de plusieurs machines et de plusieurs outils. Elle devient alors la relation :

R'18(#OPÉRATION + #POOL + #FAMILLE d'OUTILS, #RÉGLAGE).

II-2.4 La gestion des en-cours

Sans commande à exécuter, il ne peut y avoir de production. La dernière partie du modèle s'attache à décrire les flux transitant dans le système productif. Les types d'entité R20 à R24 décrivent la partie minimale du système d'information permettant le lancement en production des commandes ainsi que leur suivi. Des extensions du SRE devront être faites si l'on souhaite, en outre, compléter le système d'information dédié ici à la gestion de la production, par d'autres extensions répondant à des préoccupations telles que la facturation, la comptabilité analytique... Ces extensions ne seront pas envisagées ici car elles ne relèvent pas directement du système d'information de gestion de production, mais d'un système plus large dont le système étudié ici n'est qu'un sous-ensemble¹.

II-2.4.1 Commandes (R20)

Par commande, nous entendons soit la commande d'un client si l'entreprise est principalement orientée vers un travail à la commande, soit un ordre de fabrication lorsque l'entreprise travaille plutôt dans une optique de reconstitution de stocks (production pour stocks de produits intermédiaires ou finis, dans le cadre ou non d'un plan directeur de production). Une commande est enregistrée sous un numéro d'ordre (#COMMANDE) et possède comme propriété unique le numéro de client (#CLIENT). Cette dernière rubrique est à remplacer par une donnée d'un plan de production jouant un rôle similaire, lorsque l'on travaille pour reconstitution de stocks. Nous ne conserverons que la première de ces deux possibilités, dans la mesure où elles n'entraînent pas de restrictions du point de vue de la modélisation.

II-2.4.2 Clients (R21)

Ce type d'entité comporte une clé unique, le numéro de client (#CLIENT), et une propriété, le nom du client (NOM du CLIENT). D'autres propriétés peuvent être envisagées, telles que l'adresse, le numéro de compte en banque..., mais elles ne seront pas reprises ici puisque le parti pris de ce modèle est d'en limiter le champ d'application à la seule gestion de production. Dans le cas d'une nomenclature à étages et/ou lorsque l'entreprise travaille pour stock, il sera nécessaire de traiter comme des clients les responsables de certains magasins (voir § II-2.4.4, page 948).

1. Cette combinaison de sous-ensembles, partageant des types d'entités, est à la base des ERP / ERM que l'on verra en section III, page 957.

II-2.4.3 Ligne de commande (R22)

Une commande peut porter sur des références différentes et une référence donnée peut se retrouver sur plusieurs commandes. La relation R22 décrit ce type d'association par une clé double composée du numéro de commande (#COMMANDE) et du numéro de référence (#RÉFERENCE). Cette relation comporte, en outre, une propriété, la quantité commandée (QUANTITÉ COMMANDÉE); elle peut comporter d'autres propriétés additionnelles comme la date de livraison souhaitée.

II-2.4.4 Lot d'une référence (R23)

La production par lot reste encore, de nos jours, un mode d'organisation largement prédominant. Dans ce contexte, la définition d'un ordonnancement passe par celle de lots associés à une référence donnée destinés à satisfaire la demande émanant d'une ou plusieurs commandes. Dans ce dernier cas, il y a regroupement de commandes pour une référence donnée. Un lot peut comporter la totalité des quantités commandées par une ou plusieurs commandes, mais il est également possible que celui-ci ne porte que sur une fraction d'une commande. On trouvera donc aussi bien des processus d'éclatement que des processus de regroupement. Le suivi en production exigera la création d'un type d'entité associant dans une clé comportant trois rubriques: le numéro de commande (#COMMANDE), le numéro de référence (#RÉFERENCE) et le numéro de lot (#LOT) dont les spécifications seront fournies par la relation R24. Les quantités lancées en production peuvent être supérieures aux quantités commandées pour tenir compte d'éventuels rebuts.

Le lancement en fabrication d'une référence déclenche implicitement la réservation des composants et matières premières requises par sa nomenclature. Si les réservations ne peuvent être effectuées du fait d'une insuffisance de stock, cette explosion de nomenclature s'accompagnera de l'émission d'ordres de fabrication dont les caractéristiques dépendent du système de décision utilisé (définition de variables de commande introduites aux chapitres **XI** et **XII**, telles que le point de commande, le niveau de rechargement ou la quantité économique de commande).

II-2.4.5 Caractéristiques du lot (R24)

Un lot dont le numéro est #LOT (clé unique de R24) se caractérise par sa taille (TAILLE du LOT) et un numéro de gamme (#GAMME). En cas de gammes alternatives possibles, la sélection de la gamme associée à un lot relèvera du système de décision, le système d'information, là encore, ne faisant que prendre acte des conséquences d'une décision. La taille du lot peut, comme on l'a vu, être supérieure aux quantités commandées du fait de l'existence possible de rebuts.

Ces informations sont insuffisantes pour être en mesure de suivre l'état d'avancement du lot. Les exigences d'un suivi en temps réel vont conduire à ajouter deux propriétés à cette relation. Tout d'abord, on trouvera le numéro d'opération en cours d'exécution (#OPERATION) qui peut être vu comme un rôle de R15, mais que nous n'avons pas traité comme tel dans le SRE, dans la mesure où la mise à jour de cette rubrique ne saurait être manuelle et ne pose donc pas de problème particulier pour l'intégrité de la base. Il faut ensuite savoir sur quelle machine cette

opération est en cours d'exécution et cette information sera fournie par le numéro de localisation (#LOCALISATION du LOT).

Un lot donné peut, à l'instant t , ne se trouver sur aucune machine, tout simplement parce que ce lot est en attente de traitement devant une machine occupée, ou parce que l'ensemble des composants requis n'est pas disponible. Se pose alors un problème de repérage spatial pour le système d'information. Ce problème peut trouver une solution par l'utilisation d'un numéro fictif de localisation s'analysant comme «lot traité sur aucune machine». Si l'on met à jour simultanément l'information de l'opération et celle de la localisation, l'enregistrement comportant cette localisation fictive ne peut que garder comme numéro d'opération celui de l'opération qui vient de se terminer. Il est dès lors relativement facile d'identifier, au moins approximativement, la localisation du lot, puisque l'on sait par la gamme le numéro d'opération en attente d'exécution. Si l'on souhaite avoir une connaissance plus exacte, il faudra alors identifier les zones sur lesquelles les encours de production peuvent être stockés (ces zones ne pouvant être considérées comme des magasins, puisque nous réservons cette appellation aux aires de stockage de références terminées). Une solution similaire peut consister à définir un (#LOCALISATION de POOL) comme propriété additionnelle du type d'entité «Pool» puisqu'un lot est en attente d'affectation devant un pool de machines.

Une gamme étant associée à un lot d'une référence donnée, il doit y avoir un traitement identique de tous les éléments constitutifs du lot. Il en résulte que lorsqu'un flux est scindé en plusieurs flux pour l'exécution d'une opération donnée (par exemple, l'utilisation de machines identiques mises en parallèle), il sera nécessaire de distinguer autant de lots différents pour la référence considérée.

Il est possible, sans trop de difficulté, de prendre en compte la possibilité de recouvrement d'opérations par du travail en temps masqué. Dans la mesure où le recouvrement ne s'accompagne pas d'un transfert immédiat d'un poste de travail à un autre poste de travail d'une fraction d'un lot et que, pour ce faire, un engin de manutention (au sens large) doit être utilisé, il suffit de fractionner le lot en des lots correspondant aux quantités manutentionnées. Cette solution est cependant difficilement applicable lorsque l'on est en présence d'une manutention totalement automatisée, ou même dans le cas de transferts utilisant la gravité. En effet, dans ces cas de figure, le lot de transfert peut être d'une unité et l'on en arrive à la manipulation d'un nombre trop important d'informations. On doit faire appel à des jeux différents de convention pour transcrire le problème posé par une connaissance suffisamment fine de la réalité dans la représentation du système d'information. On pourra, par exemple, donner à chaque unité d'un lot un numéro d'ordre et ne chercher à connaître l'état du système qu'à intervalles réguliers. Dans ce cas, si l'on savait à l'instant $t-1$ que le lot unitaire i était en cours de traitement sur une machine, et qu'à l'instant t le lot unitaire j est en cours de traitement, c'est qu'entre $t-1$ et t les lots unitaires i à $j-1$ ont été achevés.

II-3 Présentation du modèle dynamique de système d'information en gestion de production

Le modèle statique visait à permettre une description «instantanée» du système productif et de son utilisation. Une telle approche doit nécessairement être complétée pour permettre la préparation de décisions. La prise de décision en tant

que telle ne nous intéresse pas ici, ni ses fondements. Ce qui importe c'est de *pouvoir décrire une évolution prévisible de l'état du système productif* dans un contexte de simulation, c'est-à-dire en tenant compte d'arrivées prévues dans le système et de décisions envisagées pour résoudre les différents problèmes rencontrés.

Il est évident que les informations requises pour la préparation des décisions diffèrent selon que l'on est en présence de décisions de type opérationnel ou de décisions de type tactique ou stratégique. Comme cela a été indiqué en introduction de cet ouvrage, le niveau de détail requis n'est pas le même et notamment le traitement du temps ne saurait être le même.

Avant d'examiner ces deux extensions du système d'information introduit au § II-2, il faut ajouter que nous ne traiterons pas ici d'un dernier besoin, celui de «l'archivage» de ce qui s'est passé dans le système productif, notamment à des fins de contrôle a posteriori, d'une part parce que l'on peut sans difficulté transposer à cette fin les principes développés ci-après (§ II-3.1) et, d'autre part, parce que le type de contrôle souhaité a nécessairement une incidence sur l'archivage qui implique une perte d'informations par sommation d'informations ponctuelles pour constituer des agrégats jugés significatifs d'un point de vue de gestion. Nous terminerons par quelques indications sur l'adaptation du système permettant la prise en compte de certaines décisions tactiques (§ II-3.2, page 955) et par quelques remarques d'implantation (§ II-3.3, page 956).

II-3.1 Système d'information et décisions opérationnelles de production

C'est avant tout à la préparation de décision d'ordonnancement que ce type de système d'information est destiné. Les décisions de type programmable (au sens de H. Simon) peuvent être prises en temps réel en fonction de la connaissance que l'on a de l'état du système. Les autres décisions impliquent plus ou moins la fourniture à un décideur de l'image des conséquences d'un ensemble de décisions généralement prises séquentiellement pour résoudre des problèmes hautement combinatoires.

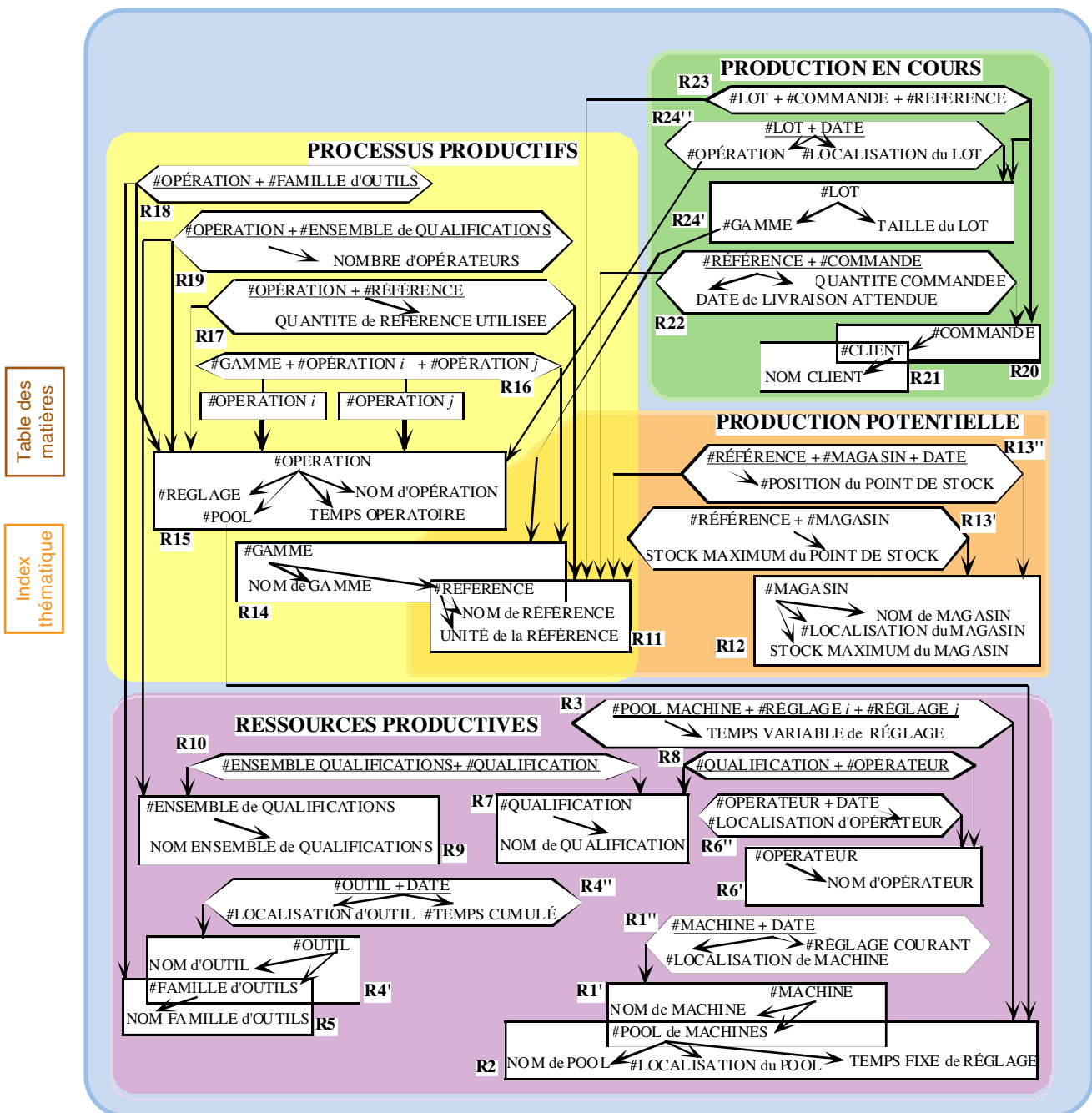
Les types d'entité des trois premiers ensembles de la *figure 224 de la page 938* jouissent d'une grande stabilité, dans la mesure où le portefeuille de ressources, les processus productifs et ce que sait faire le système productif sont fixés sur le court terme. Cela étant, il est possible d'agir sur la présence plus ou moins grande de certaines ressources (heures supplémentaires) et certaines rubriques, comme celles qui ont trait à la localisation, sont amenées à varier au cours du temps. La description des processus productifs est donc le seul ensemble d'informations à rester totalement stable.

Le traitement du temps peut être abordé de deux manières. On peut retenir d'abord une vision «cinétique» du système en conservant des images successives prises à intervalle régulier, l'amplitude de cet intervalle devant être assez faible pour que toute modification de l'état du système productif puisse être immédiatement prise en compte. Cette approche ne nécessite pas de transformation notable de la *figure 224 de la page 938* (introduction d'une rubrique date dans certaines clés), mais se traduit à l'évidence par une «inflation» des informations à stocker

difficile à supporter et conduit implicitement à l'abandon d'une logique de base de données relationnelles. La seconde approche vise à n'enregistrer que ces changements d'état de telle ou telle partie du système à l'occasion d'événements (modification de l'utilisation d'une ressource notamment). C'est cette seconde approche que nous avons retenue dans la mesure où c'est la seule à permettre l'absence de redondance d'information. Le nouveau schéma conceptuel des données est fourni par la figure 225.

FIGURE 225

Modèle dynamique du système d'information de gestion de production



Examinons successivement l'adaptation des trois ensembles de données modifiées par l'approche dynamique du court terme, avant d'aborder la fusion des systèmes d'information présentés (§ II-3.1.4, page 954).

II-3.1.1 Les ressources productives

On commence par isoler les rubriques correspondant aux « invariants » du système productif (du moins sur le court terme qui nous préoccupe) et l'on crée des entités nouvelles correspondant à des associations qui décrivent l'évolution de l'utilisation des ressources.

Si l'on veut traiter l'ensemble des machines par un même type d'entité (la localisation étant appelée à changer pour les machines servant à la manutention), la relation R1 se scinde en deux pour donner, dans la [figure 225 de la page 951](#), les relations R1' et R1'' suivantes :

R1' (#MACHINE, NOM de MACHINE, #POOL)

R1'' (#MACHINE + DATE, #RÉGLAGE, #LOCALISATION de MACHINE)

On peut également dissocier les « machines fixes » des machines mobiles ; dans ce cas, la formulation retenue, pour ces dernières, sera celle que l'on vient de proposer et deux nouvelles relations R1''' et R1'''' seront créées pour les machines fixes qui ne différeront de R1' et R1'' que par le transfert de la rubrique de localisation de la machine dans l'équivalent de R1' (donnée invariable). Pour respecter l'unicité de la clé, on ne créera d'enregistrement nouveau de ces relations que lorsque la valeur d'une propriété (localisation ou réglage) est modifiée (ce qui ne peut pas se produire pour la relation R1'). Cette règle sera implicitement retenue dans les autres cas que nous envisagerons.

De même, la relation R6 se scinde en deux pour donner les relations R6' et R6''.

R6' (#OPÉRATEUR, NOM d'OPÉRATEUR)

R6'' (#OPÉRATEUR+DATE, #LOCALISATION d'OPÉRATEUR)

Là encore, il peut y avoir lieu de dédoubler les relations R6' et R6'' selon une logique similaire à celle décrite pour R1' et R1'' pour tenir compte du fait que certains opérateurs sont toujours au même poste de travail. Mais, à la différence du cas précédent où la rubrique #LOCALISATION de MACHINE de R1''' ne pouvait pas changer de valeur, la rubrique #LOCALISATION d'OPÉRATEUR de R6''' pourra changer de valeur si l'on retient la possibilité d'utiliser cette rubrique pour « notifier » l'absence d'un opérateur du système productif. Cette notification de l'absence ou de la présence d'opérateurs dans le système productif dépend des paramètres de simulation, le système d'information se contentant d'enregistrer les conséquences de choix relatifs à la durée de travail des ressources.

Pour les outils, la transformation est tout aussi évidente. La relation R4 devient :

R4' (#OUTIL, NOM d'OUTIL, #FAMILLE d'OUTILS)

R4'' (#OUTIL+DATE, TEMPS CUMULÉ, #LOCALISATION d'OUTIL)

Le seul point supplémentaire qui mérite d'être précisé c'est que l'on considérera qu'une mise à jour de la rubrique TEMPS CUMULÉ ne s'impose qu'à l'occasion d'un changement d'affectation de l'outil.

L'un des principaux problèmes rencontrés dans les nouveaux systèmes de production qui mettent l'accent sur la flexibilité est la possibilité d'utiliser de manière extrêmement souple des gammes alternatives. Comme on l'a déjà indiqué ([page 943](#)), l'explicitation de toutes les gammes alternatives possibles ne semble pas réaliste, compte tenu du caractère hautement combinatoire de ces gammes que cette explicitation entraîne. Une solution possible pour limiter le volume d'informations consiste à ne générer ces gammes alternatives qu'en cas de besoin, c'est-

à-dire lorsque surviennent des goulots d'étranglement que l'on n'arrive pas à résorber facilement avec les gammes actuellement disponibles. Cette mise à jour du système d'information ne pourra pas s'effectuer forcément en temps réel, auquel cas il faudra que soit mis en place un système d'alerte sollicitant une révision du portefeuille de gammes, dès lors que certains goulots d'étranglement surviennent trop fréquemment.

Le traitement de ces gammes alternatives peut être grandement facilité par la transformation suivante du système d'information. Il suffit de créer la notion de type d'opérations sur la base de considérations techniques (par exemple, une opération de fraisage dont les spécifications restent dans un ensemble de plages de valeurs). Cette relation a une clé, le numéro de l'ensemble d'opérations (#TYPE d'OPÉRATIONS), et une propriété, le nom de cet ensemble (NOM du TYPE d'OPÉRATIONS). Dans la relation R15, il faut introduire le #TYPE d'OPÉRATIONS comme propriété de la relation décrivant une opération. Il faut ensuite créer un nouveau type d'entité comportant une clé double constituée du #TYPE d'OPÉRATIONS et du #POOL, cette nouvelle relation s'interprète comme le fait que n'importe quelle machine appartenant à un pool donné peut réaliser n'importe quelle opération appartenant à l'ensemble d'opérations lié au pool dans l'association. Cette transformation du système autorise, en cas de problème, une recherche plus facile de possibilités techniques alternatives. Cela dit, on se trouve alors dans le cadre d'une vision intégratrice des systèmes d'information des fonctions « méthodes », « bureau d'études » et « ordonnancement » qui se généralise actuellement.

Table des matières

II-3.1.2 La production potentielle

Le troisième sous-ensemble de la [figure 224 de la page 938](#) retraçait les flux susceptibles de transiter dans le système productif. Il est évident que la liste des références que le système est susceptible de produire reste inchangée sur le court terme. La seule chose qui variera est relative au stockage et de déstockage des références en fonction des besoins de la production (prélèvement sur un stock) ou de la fin de l'exécution d'une gamme (alimentation d'un stock).

Index thématique

Dans ce contexte, la relation R13 qui définit un point de stock perd la rubrique STOCK MAXIMUM du POINT de STOCK et s'enrichit de la rubrique DATE qui s'intègre à la clé pour donner la relation R'13 suivante, dans la [figure 225 de la page 951](#) :

R13' (#REFERENCE+#MAGASIN+DATE, POSITION du POINT de STOCK)

L'information stable de la quantité maximale d'une référence que l'on peut stocker dans ce magasin (STOCK MAXIMUM du POINT de STOCK) reste dans une relation où le temps n'intervient pas et qui n'est autre que la relation R13 « amputée » de la rubrique tributaire du temps (POSITION du POINT de STOCK), ce qui donne la relation R13'' suivante :

R13'' (#REFERENCE+#MAGASIN, STOCK MAXIMUM du POINT de STOCK)

II-3.1.3 Les flux de production

La relation R24 décrit les principales caractéristiques d'un lot. Comme précédemment, on éclatera cette relation en deux pour isoler ce qui est stable de ce qui ne l'est pas. On crée donc une relation R24' dont la clé est #LOT et qui comporte deux propriétés #GAMME et TAILLE du LOT.

La définition de la relation R24'' décrivant la partie dynamique s'effectue en retenant une clé comportant les seules rubriques #LOT et DATE, les rubriques décrivant la localisation du lot et son état d'avancement par le biais de l'opération en cours étant alors des propriétés de cette relation. Dans une optique de simulation, la date retenue est celle de la fin d'exécution de l'opération et lorsque cet enregistrement est créé, il n'y a pas de question à se poser sur ce lot tant que la date courante de la simulation n'est pas égale à la date de la clé de cet enregistrement. Cette convention permet à la fois de connaître si un lot est en cours de traitement et si une machine est libre ou non (par le biais de sa localisation). Lorsque les deux dates coïncident, les ressources utilisées sont implicitement libérées. Un nouvel enregistrement est créé dans lequel la rubrique #OPERATION prend la valeur de l'opération suivante de la gamme. Il peut ou non y avoir, à cette étape, une décision de regroupement ou d'éclatement de lots, ce qui peut conduire à la création d'un nouveau numéro de lot (sinon, l'ancien est conservé). Conventionnellement, la rubrique DATE de l'enregistrement peut prendre la valeur zéro pour indiquer que la date de fin de cette nouvelle opération n'est pas encore connue. Un traitement similaire peut être retenu pour la localisation du lot. Cela étant, la connaissance des files d'attente devant les pools passe par un traitement que l'on peut éviter pour diminuer les temps de traitement, en ajoutant au type d'entité «pool» une rubrique de localisation (#LOCALISATION du POOL) qui correspond à l'endroit où les lots sont en attente d'affectation à une machine. Il est alors possible de donner à la rubrique (#LOCALISATION du LOT) la valeur que prend la rubrique #LOCALISATION du POOL et par le biais d'index appropriés, la recherche est immédiate. On a dans ces conditions :

R2 (#POOL, TEMPS FIXE de RÉGLAGE, NOM du POOL, #LOCALISATION du POOL)

R24' (#LOT, #GAMME, TAILLE du LOT)

R24'' (#LOT+DATE, #OPÉRATION, #LOCALISATION du LOT)

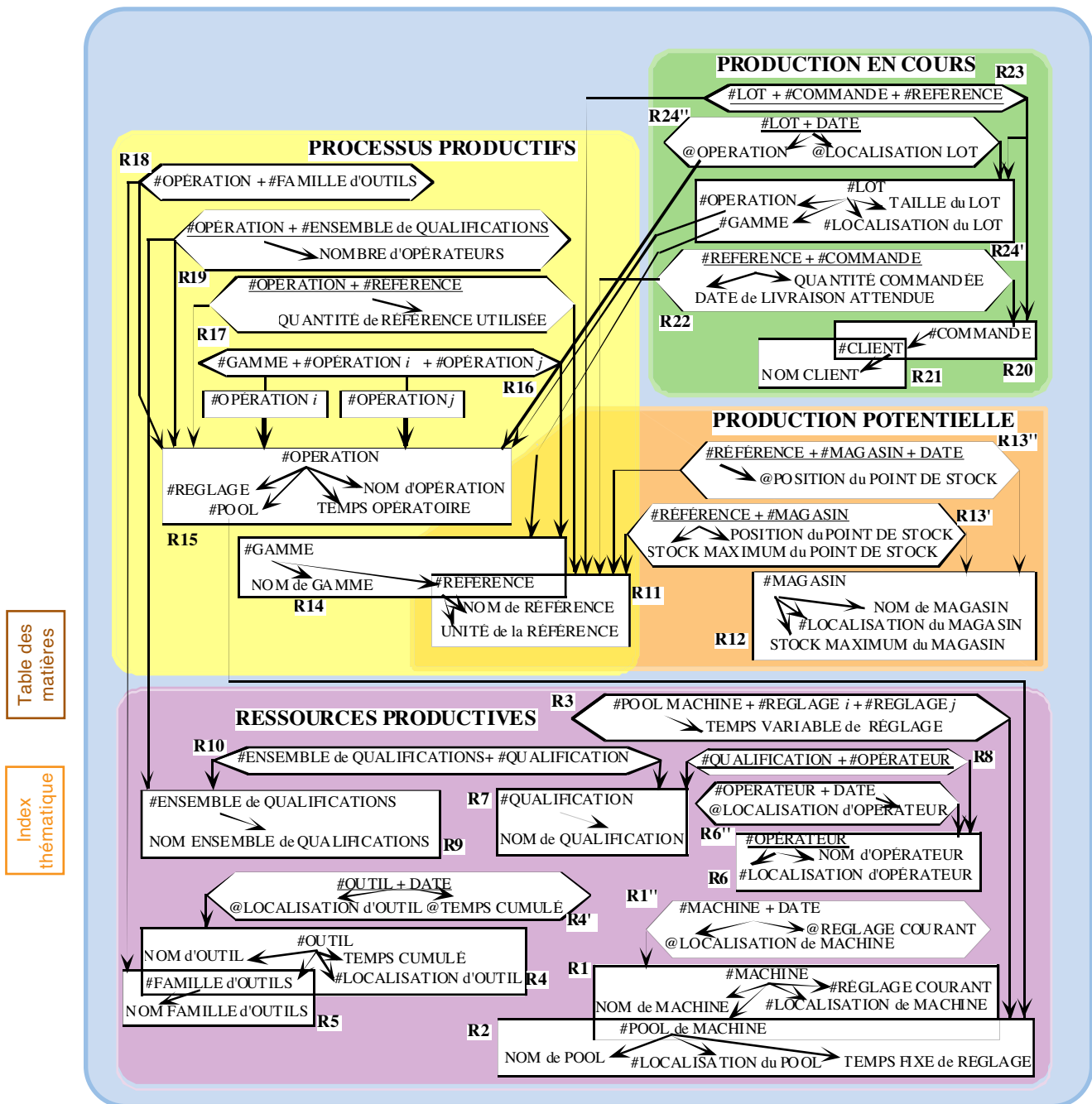
Il peut être utile, pour des raisons liées à l'exploitation des propositions d'ordonnancement, d'ajouter la rubrique DATE de DEBUT comme propriété de la relation R24'' (dans laquelle DATE a été définie conventionnellement comme la date de fin de l'opération pour le lot). Il est évident enfin que la décision d'affectation d'un lot à une machine se traduit immédiatement par la modification des valeurs des rubriques DATE et #LOCALISATION.

II-3.1.4 Fusion des modèles statiques et dynamiques

La coexistence de la base de données s'appuyant sur le SRE correspondant au modèle dynamique que l'on vient de décrire (figure 225, page 951) avec la base de données s'appuyant sur le SRE correspondant au modèle statique (figure 224, page 938) est difficilement imaginable en raison de l'importance de la redondance informationnelle que ceci implique. La solution la plus simple consiste à adjoindre au SRE de la figure 224, page 938, les associations dans lesquelles intervient la date et, pour lever toute ambiguïté au niveau du dictionnaire des rubriques, de modifier le libellé des propriétés de ces associations pour les définir comme «prévisionnelles» (ce que l'on a fait en remplaçant les # par des @), d'où le SRE de la figure 226, page 955.

FIGURE 226

Fusion du modèle statique et du modèle dynamique du système d'information de gestion de production



II-3.2 Système d'information et décisions tactiques de production

On se place maintenant dans une optique de moyen terme. Dans ce cadre, il n'est plus possible de travailler à un niveau fin pour deux raisons. Tout d'abord, on ne dispose normalement pas dans les industries manufacturières de la connaissance précise d'un portefeuille de commandes sur les 6 à 24 mois à venir, mais de prévisions globales, au mieux pour chaque produit fini vendu. Cela étant, à supposer qu'une telle connaissance soit possible, elle se traduirait par une masse considérable d'informations à manipuler et même si l'entreprise disposait de capacités de stockage suffisantes, resterait le problème de son utilisation dans le

cadre d'une simulation. Nous avons vu, en effet, avec les techniques de MRP que l'on cherchait à prendre quelques décisions clés qui permettent de faire face à une demande prévisionnelle dont les caractéristiques ne sont pas stables. Il s'ensuit que l'on est amené, dans ce cadre, à opérer des transferts de charges de travail en suivant des logiques de simulation arrière en partant d'une logique d'ordonnancement au plus tard. L'optique de simulation du court terme privilégie une simulation avant en partant d'un ordonnancement au plus tôt. Le panachage de ces deux approches pose d'évidents problèmes de cohérence entre les deux descriptions de la réalité.

La description des processus productifs (ensemble «production potentielle» de la [figure 224, page 938](#)) n'a pas de raison de subir de modification sauf lorsqu'il est fait appel aux notions de macro-gammes et macro-nomenclature qui obligent à dupliquer les types d'entités correspondants (y compris celle des références) et à ajouter au niveau fin des propriétés assurant la cohérence du système (par exemple, la relation R11 décrivant la référence s'enrichit d'une dépendance fonctionnelle conduisant à la création de la propriété «macro-référence», par ailleurs, clé du type d'entité macro-référence à créer dans ce cadre).

Au niveau des ressources, il est habituel que le système ne se focalise que sur la ressource considérée comme critique, considérant que l'on pourra trouver un ordonnancement détaillé dans lequel les autres ressources seront disponibles. Le plus souvent, il s'agit de la ressource machine. On doit décrire cette ressource sous la forme d'un échancier de disponibilité exprimé généralement en heures. Pour ce faire, il convient d'introduire un type d'entité «échancier» dont la description peut être la suivante : R2' (#POOL+DATE, HEURES DISPONIBLES). Il est bien évident que l'on peut, sans difficultés, transposer ce qui vient d'être dit au cas des ensembles de qualification si l'on veut pousser plus loin l'analyse des ajustements charge-capacité.

De même, au niveau des commandes (relation R22) par celle de plan directeur de production. En pratique, on crée la relation R25 qui est une association décrivant les échanciers du plan directeur de production.

R25 (#REFERENCE+DATE, BESOINS-BRUTS)

Une information comme le délai d'obtention correspondra à une nouvelle rubrique du type d'entité «référence» (R11), laquelle aura le statut de propriété.

II-3.3 Implantation

Le schéma conceptuel présenté a l'avantage d'une grande simplicité et ses adaptations sont relativement aisées. Il n'en reste pas moins que son implantation n'est pas toujours aisée, pour plusieurs raisons.

- Tout d'abord, ce n'est que depuis peu que les logiciels existants garantissent «par construction» l'intégrité de la base des données (unicité de clé et intégrité référentielle); dans beaucoup de cas, les informaticiens sont encore obligés d'écrire en mode procédural les contrôles que l'on doit opérer. La transformation d'un système existant en un système s'appuyant sur une base de donnée relationnelle implique la réécriture d'un certain nombre de chaînes de traitement.

- Le concept d'intégrité de la base peut être élargi pour intégrer le respect d'un certain nombre de règles supplémentaires auxquelles doivent obéir les données, qui sont liées à des procédures et des normes organisationnelles. Ces contraintes sont parfois difficiles à prendre en compte dans le cadre des logiciels existants. Une bonne réflexion sur les processus et procédures est indispensable avant toute transformation d'un système d'information.
- Ce type de système d'information est normalement partagé par de très nombreux utilisateurs qui peuvent être amenés à utiliser simultanément certaines informations en consultation ou en mise à jour. Ceci pose quelques problèmes supplémentaires pour garantir la cohérence et l'intégrité de la base (gestion des droits d'accès en lecture / écriture, au niveau de la rubrique).

Le changement n'est pas si simple pour d'autres raisons. Toute entreprise qui n'est pas une *start-up* utilise nécessairement un système d'information pour gérer sa production. Les bases de ce système partiel peuvent être assez différentes de celles décrites ici et ne permettent que la satisfaction d'un ensemble limité de besoins. On observe souvent que la recherche de la satisfaction de nouveaux besoins se traduit par la création de «verrues» ou de systèmes complémentaires qui semblent, au départ, satisfaisants, mais conduisent le plus souvent à des redondances informationnelles mal maîtrisées et à des incohérences génératrices de dysfonctionnements; de surcroît, elles rendent généralement plus difficile toute évolution ultérieure. Les remarques faites au § I-3.2, page 931, doivent être prises en compte, sachant qu'une vision d'ensemble s'inspirant des principes que l'on a présentés permet d'éviter certains écueils, mais aussi que le passage à une approche de type ERP / ERM peut conduire au même résultat.

Table des matières

SECTION III LES ERP / ERM

Index thématique

Au cours des quarante dernières années, les progrès de l'informatique de gestion ont permis une intégration progressive de la gestion de la production par les logiciels de production qui ont commencé par gérer de manière intégrée les nomenclatures et gammes avant de gérer également les flux et les stocks (MRP I¹ et logiciels d'ordonnancement) puis les ressources (MRP II), en y adjoignant enfin des applications complémentaires de comptabilité de gestion, de gestion des commandes, des achats, etc.

Dans les années quatre-vingt, les nouvelles technologies de l'information et de la communication (NTIC) ont d'abord été utilisées pour automatiser certains processus de services fonctionnels, sans remettre en cause véritablement ceux-ci. Au tout début des années quatre-vingt-dix, le *reengineering*² est arrivé avec la volonté de transformer radicalement les processus en s'appuyant sur les NTIC. L'angle d'attaque reste partiel, puisque l'on reconstruit un seul processus à la fois, en adaptant le système d'information existant sans le remettre en cause fondamentalement.

Les **ERP** (*Enterprise Resource Planning*), appelés encore, de manière plus exacte, **ERM** (*Enterprise Resources Management*), s'inscrivent dans ce double

1. Voir chapitre VI.

2. Voir § I-3.2.2, page 72, au chapitre I.

mouvement et se caractérisent par une offre logicielle s'adaptant facilement à une très grande variété d'entreprises. La traduction française proposée (**PGI**, pour Progiciel de Gestion Intégrée) ne réussit pas à s'imposer, sans doute en raison de l'offre logicielle. L'usage de l'acronyme ERP est tel que nous n'utiliserons que celui-ci. Les ERP sont des progiciels de gestion intégrés qui visent à gérer de manière efficace l'ensemble des ressources de l'entreprise. Ils proposent une architecture modulaire permettant de composer à la carte un système sur mesure, en s'appuyant sur une base de données relationnelle et une base de processus adaptables aux spécificités du pays (langue, réglementation) et de l'entreprise (métiers, procédures, etc.).

Les ERP se diffusent vers la fin des années quatre-vingt-dix¹ pour de multiples raisons :

- La multiplication des sites des grands groupes internationaux et leur dissémination autour du monde, souvent liée à des acquisitions d'entreprises, sont un facteur naturel d'hétérogénéité. La montée en puissance des réseaux d'entreprises ne fait que renforcer cette tendance et la rendre de moins en moins compatible avec la chrono-compétition qui se généralise.
- Grâce aux bases de données relationnelles et aux architectures «clients-serveur», il devient possible de mettre fin à la prolifération anarchique et incontrôlée de systèmes d'information communiquant difficilement. L'obsolescence de certains systèmes d'information est devenue encore plus perceptible avec le passage à l'an 2000.
- L'approche par processus mobilisant plusieurs services fonctionnels s'accommode mal des systèmes d'informations conçus par et pour ces services fonctionnels. La vision étendue du processus qui s'impose progressivement au cours des années quatre-vingt (cf. [page 67](#)) connaît, à la fin des années quatre-vingt-dix, une consécration, avec le concept de chaîne logistique, qui ne fait que renforcer le besoin de changement.
- Les méthodologies de conception des systèmes d'information connaissent une évolution sensible au cours des années quatre-vingt-dix. En effet, celles mises au point au début des années quatre-vingt sont longues et coûteuses et s'avèrent difficiles à mettre en œuvre. En outre, le postulat selon lequel le maître d'ouvrage est le mieux placé pour définir le cahier des charges se traduit, le plus souvent, par une simple automatisation des processus sans réelle réflexion sur leurs transformations.

Les ERP, s'appuyant sur une capitalisation des processus les plus performants, identifiés par les consultants, proposent une alternative en couplant une base de processus et une base de données partagée par ces processus. Dans ces conditions, la conception d'un système d'information découle du mécano de processus élémentaires retenus pour satisfaire les besoins d'une organisation, dans une

1. En 2000, les ERP les plus diffusés sont SAP AG, Baan, Oracle, QAD, J.D. Edwards et People Soft. Parmi les ouvrages consacrés à cette approche, on peut citer celui de Lequeux (1999, [275]) à orientation « mise en œuvre informatique » (et qui présente une fiche signalétique d'une trentaine d'ERP), celui de Curran & Ladd (2000, [115]) dédié à la modélisation des processus sous SAP R/3, et ceux de Ptak (2000, [354]) et Shtub (1999, [385]) qui présentent l'intégration des ERP dans la problématique de la gestion de production et des approches de chaîne logistique.

approche de « configuration à la commande ». On examinera la méthodologie des ERP (§ III-1) avant de voir leur mise en œuvre (§ III-2, page 968).

III-1 La méthodologie des ERP

On traitera les caractéristiques techniques d'un ERP (§ III-1.1) et la base de processus (§ III-1.2, page 961) avant d'évoquer les problèmes méthodologiques que cette approche présente (§ III-1.3, page 963).

III-1.1 Les caractéristiques techniques d'un ERP

On examinera successivement l'organisation logicielle d'un ERP (§ III-1.1.1) et la conception de la base de processus (§ III-1.1.2, page 960).

III-1.1.1 L'organisation logicielle d'un ERP

Selon leur sensibilité, les spécialistes mettent l'accent sur les composants logiciels dans le cadre d'une architecture modulaire (Lequeux (1999, [275]) ou sur les processus (Curran et Ladd, 2000, [115]). Dans la mesure où il y a correspondance entre un processus et un module, la différence importe peu, mais nous préférons retenir la seconde approche qui oblige à raisonner plus en termes de fonctionnement d'une entreprise qu'en termes de fonctionnement d'un progiciel modulaire. Les ERP se caractérisent par :

- une architecture applicative ouverte et incrémentale pour permettre une implémentation aisée de nouveaux modules permettant une prise en compte de nouveaux processus,
- une conception de modules génériques associés à des processus-types utilisables par de nombreuses entreprises,
- des possibilités d'adaptation de ces modules pour tenir compte de caractéristiques locales (méthodes de gestion, niveau d'intégration avec l'amont et l'aval, lois et règlements du pays...).

Par ailleurs, la conception des logiciels des ERP est de type événementiel, c'est-à-dire orientée vers le traitement d'activités concourantes et asynchrones, une activité, se concrétisant ici par un traitement d'informations, étant déclenchée par l'occurrence d'un événement lié à un changement d'état d'un élément du système sous contrôle. Dans notre contexte, ces événements sont variés ; ils peuvent correspondre à une action délibérée d'un acteur (demande de lancement d'un traitement) ou découler automatiquement de la connaissance, par le système d'information, de la modification de l'état du système : libération d'une ressource (équipement, personnel), franchissement d'un seuil (niveau de stock, date...), arrivée/sortie d'une ressource physique (matière, équipement, personnel) ou d'une information (bon de commande d'un client ou à un fournisseur...). Cette approche qui consiste à modéliser les événements est assez ancienne. Elle remonte aux années soixante-dix avec les premiers langages de simulation¹ et l'usage des réseaux de Petri² par un certain nombre de méthodes de conception des systèmes d'informations³. Plus récemment, une technique de modélisation telle UML (Unified Modeling

1. Voir Fishman (1978, [150]).

2. Voir note du bas de la page 161.

3. En particulier, avec le modèle conceptuel des traitements de Merise et la méthode Remora.

Language) fonde sa méthodologie dans son aspect dynamique sur une approche événementielle et semble s'imposer comme standard¹, mais d'autres langages de programmation² comme Visual Basic ont popularisé cette approche.

III-1.1.2 L'environnement informatique d'un ERP

Les ERP s'appuient sur une **architecture «client-serveur»**, où le niveau «serveur» correspond à un ensemble de machines offrant des services (données, applications et certaines ressources) à un ensemble de machines du niveau «client» en fonction de leurs droits d'accès, ces ensembles n'étant généralement pas disjoints. Dans la répartition des tâches entre les machines, on distingue³ trois types de fonctions assurées par des machines d'un réseau :

- Les **serveurs de données** assurent le stockage, la mise à disposition et la mise à jour des données utilisées dans le système d'information. Ils utilisent une base de données relationnelle qui peut être répartie (c'est-à-dire hébergée sur des sites différents) ou non et qui dispose des procédures garantissant l'intégrité et la cohérence de la base pour l'ensemble de l'entreprise. Ces serveurs font l'objet de traitements par lots⁴ (*batch*) et de transactions individuelles, en très grand nombre et pouvant être simultanées.
- Les **serveurs d'applications** offrent aux postes de travail (terminaux, micro-ordinateurs) mis en réseau l'utilisation de programmes.
- Les **serveurs de présentation** sont utilisés par les postes de travail; ils peuvent être hébergés en totalité ou non par ceux-ci et utilisent des interfaces graphiques de bonne qualité ergonomique. Ces serveurs permettent d'appeler des applications offertes par les serveurs d'application pour utiliser et mettre à jour les données des serveurs de données.

Les ERP s'appuient aujourd'hui plus volontiers sur des architectures distribuées de type *Web*. Dans ce cas particulier, la notion de poste client dédié au serveur disparaît car la transmission est intégralement assurée à partir de n'importe quel poste de travail autorisé à se connecter et possédant une adresse Internet. L'application peut elle-même être distribuée sur plusieurs serveurs sans que cela pose un problème à l'utilisateur. Dans le type de configurations *Web*, l'accès au serveur doit être protégé par des autorisations (système *FireWall*) et des mots de passe. Les types de protection concernent :

- le stockage et la gestion des données ;
- le stockage et la mise en œuvre des logiciels d'application ;
- les communications entre les serveurs et entre serveurs et postes clients.

Ces fonctions peuvent être assurées soit par un même serveur, soit être spécifiques à un serveur (on parle alors de système dédié : par exemple, on peut réserver un

1. *Note de la page précédente*. Pour une présentation synthétique de cette approche, voir par exemple l'ouvrage de Morley, Hughes et Leblanc (2002, [311]).

2. Voir Finkelstein, Kramer et Nuseibeh (1994, [149]).

3. On parle alors d'architecture clients-serveurs en modèle 1/3, 2/3 ou 3/3 selon que l'on est en présence de systèmes offrant le premier, les deux premiers ou les trois types de services. Les grands ERP comme SAP ont une architecture client-serveur 3/3.

4. La répercussion instantanée des conséquences d'une modification élémentaire de la base (livraison à un client, par exemple) ne pose guère de problème sur la mise à jour d'autres informations élémentaires, mais est difficilement envisageable pour des informations synthétiques, ce qui justifie un certain nombre de traitements par lot.

serveur spécifiquement dédié aux fonctions de communication et de sécurisation de réseaux).

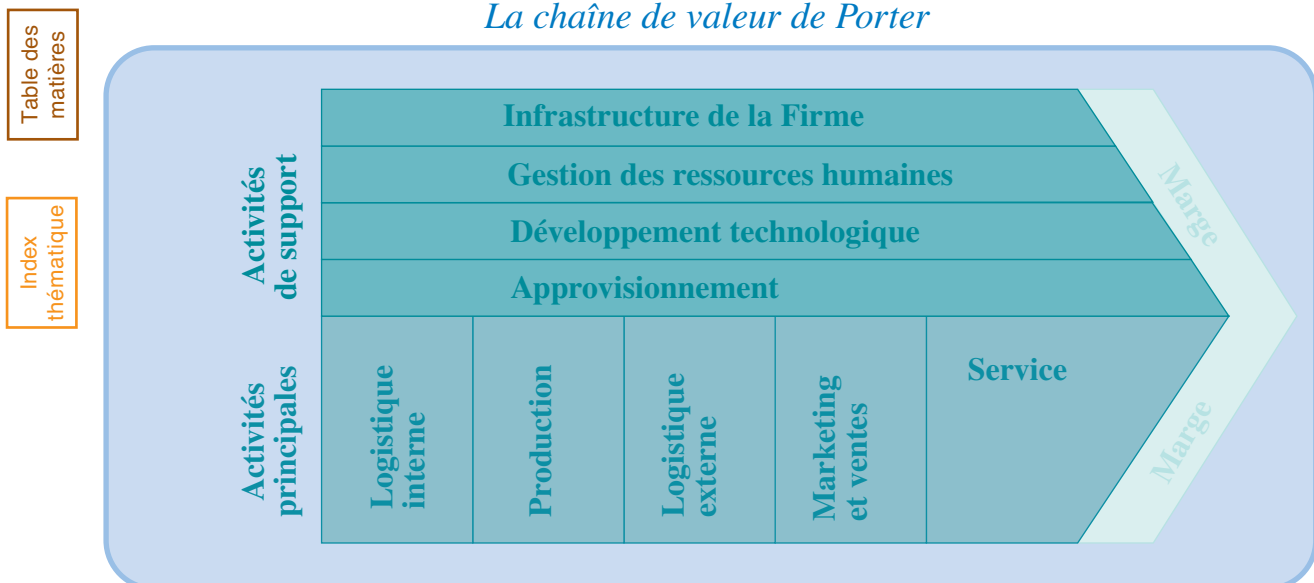
III-1.2 Le réseau de processus d'un ERP

Après avoir évoqué les fondements auxquels se réfèrent le plus souvent les spécialistes des ERP (§ III-1.2.1), on examinera, en nous appuyant sur un ERP existant, comment se structure et s'utilise une base de processus (§ III-1.2.2, page 961).

III-1.2.1 Les fondements

La démarche des ERP s'appuie sur l'analyse de la chaîne de valeur de Porter (1986, [343]) qui décompose les activités d'une entreprise – lesquelles s'analysent comme des processus – en activités principales, celles qui créent directement de la valeur, et les activités de support qui permettent aux activités principales de se réaliser (voir figure 227, page 961). Plus que la liste et le contenu exact de ces activités, ce qui importe également c'est l'idée selon laquelle la valeur ajoutée d'une entreprise est obtenue par un enchaînement de processus. Cette vision transversale, que l'on retrouve chez plusieurs auteurs avant Porter, permet de mieux saisir comment une entreprise répond à la demande du marché et a longtemps été utilisée comme outil d'analyse stratégique.

FIGURE 227
La chaîne de valeur de Porter



III-1.2.2 La base de processus et son usage

Il convient d'examiner l'organisation logique d'une base de processus (§ III-1.2.2.1) avant d'en voir l'usage (§ III-1.2.2.2).

III-1.2.2.1 L'organisation logique de la base de processus

On retiendra ici la démarche de l'ERP SAP/R3 pour illustrer la méthodologie mise en œuvre qui s'appuie sur un enchaînement de processus piloté par des événements. Quatre concepts sont mobilisés :

- Le premier concept est celui d'**événement**, lequel a été évoqué à plusieurs reprises. Un événement peut correspondre à la libération d'une ressource (équipement, personnel), au franchissement d'un seuil (niveau de stock, date...), à l'arrivée dans le système (ou à la sortie du système) d'une ressource physique (matière, équipement, personnel) ou d'une information (bon de commande d'un client ou à un fournisseur...). La détection d'un événement a pour objet de déclencher une action et correspond donc à une réponse à la question quand ?
- Le deuxième concept est celui de **tâche** ou de **fonction**, selon le niveau de détail où l'on se situe (la fonction correspondant à un ensemble de tâches). Il s'agit d'un travail à exécuter à l'intérieur d'un processus; il constitue une réponse à la question quoi ?
- Le troisième concept est celui d'**unité organisationnelle**. Il définit qui exécute une tâche (réponse à la question qui ?). Les relations hiérarchiques entre ces unités organisationnelles sont décrites par l'organigramme de l'organisation.
- Enfin, le dernier concept est la **ressource informationnelle ou physique**: quelles ressources (informations ou produits) sont nécessaires pour exécuter la tâche? quelle est la production (informations ou produits) qui résulte de l'exécution de la tâche? Il faut noter que le niveau de détail reste grossier et qu'une partie des informations mobilisées par une tâche du processus est implicite et découle des enclenchements décrits dans le flux de contrôle (voir ci-après).

Ces concepts sont mobilisés pour décrire un processus par une cartographie (voir [figure 228, page 963](#)). Les relations entre ces concepts font également l'objet de conventions graphiques. Le flux de contrôle (flèches en pointillés) décrit les relations d'antériorité ou interdépendances logiques entre événement et tâches ou processus avec, le cas échéant, des connecteurs visualisant des opérateurs logiques (ou, et, ou exclusif).

À partir de cette cartographie du processus, on tire un certain nombre de cartographies complémentaires, chacune d'entre elles correspondant à un point de vue particulier: cartographie des interactions entre unités organisationnelles, cartographie des tâches, etc.

Des ERP comme SAP disposent de plus d'un millier de processus élémentaires. Ceux-ci sont organisés de manière arborescente pour en faciliter la recherche. Le premier niveau de l'arborescence correspond aux grandes fonctions, dans une énumération assez proche de celle de Porter et dans lequel interviennent des scénarios correspondant à des hypothèses sur l'environnement technico-économique conduisant à des processus différenciés (vente par correspondance, vente téléphonique...).

III-1.2.2.2 L'utilisation de la base de processus

La cartographie d'un processus nécessite d'identifier les objets de gestion sur lesquels on désire s'appuyer, les processus de gestion disponibles, les scénarios à mobiliser et les unités organisationnelles amenées à travailler sur le processus. Les objets de gestion ont deux caractéristiques: ils contiennent des structures de

FIGURE 228
Conventions retenues dans la cartographie d'un processus sous SAP

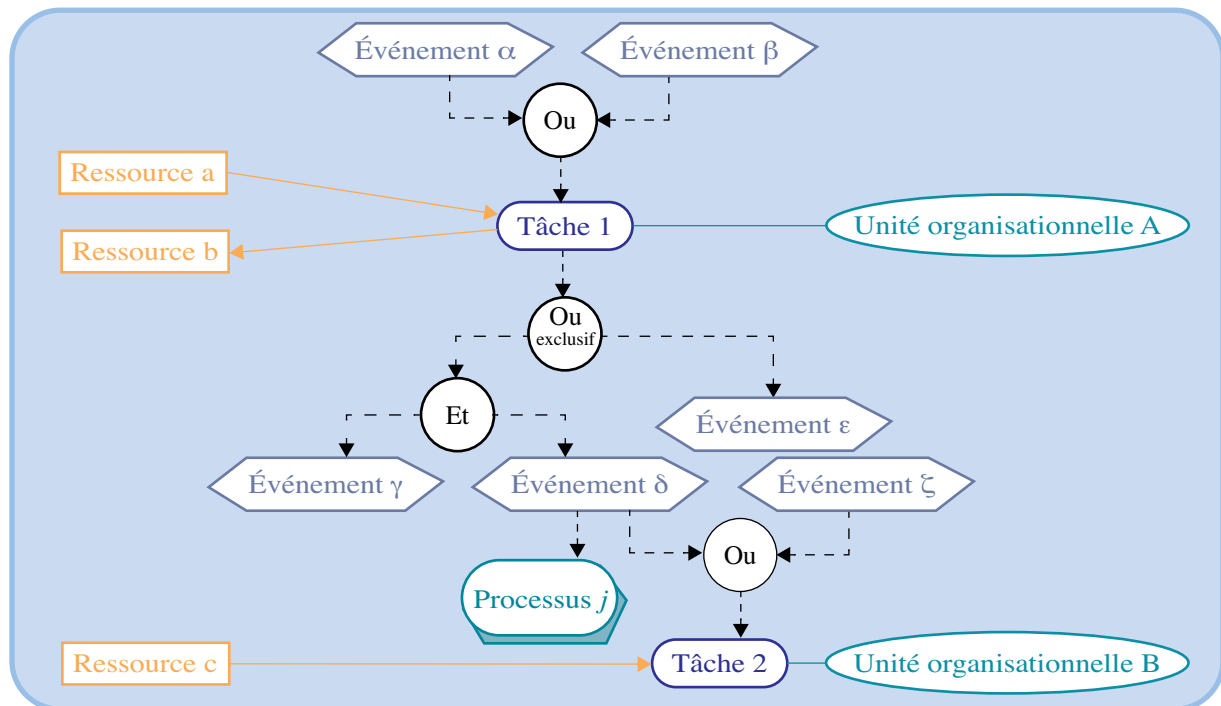


Table des matières

données qui les relient aux autres objets et ils sont utilisés pour exécuter des méthodes de gestion. Les processus sont fabriqués à partir d'événements et de fonctions (caractérisées par des attributs qui permettent d'en comprendre l'usage, le contexte et la nécessité).

Index thématique

Une fois le processus sélectionné, on s'interroge pour savoir s'il inclut toutes les fonctions (dans la négative il faut les ajouter), si certaines ne sont pas inutiles (il faut alors les supprimer) et si l'adjonction de certaines tâches est de nature à améliorer le processus (dans l'affirmative, il faut les ajouter).

Le mécano de processus retenu en définitive détermine la structure du modèle conceptuel des données sous-jacent.

III-1.3 Les problèmes méthodologiques posés

Cette approche des ERP pose des problèmes méthodologiques au niveau informatique (§ III-1.3.1) et au niveau de la relation forte liant événements et processus (§ III-1.3.2, page 967).

III-1.3.1 Problèmes liés à la fusion des sous-schémas de données découlant du mécano de processus retenu

Certains processus alternatifs peuvent reposer sur des sous-schémas de données incompatibles, ce que montraient déjà de nombreuses observations faites dans la présentation du modèle générique introduit en section II. Dès lors, la fusion des sous-schémas de données résultant du mécano de processus retenus peut poser des problèmes. Pour éviter ces problèmes, on peut retenir le schéma de données le plus général, mais ceci se traduit par une perte d'efficacité dans un certain nombre de

cas, en particulier lorsque l'on est amené à utiliser une table décrivant une association entre deux types d'entités, alors que l'on se trouve dans le cas d'une dépendance fonctionnelle entre ces deux types d'entités permettant de se passer de cette association. De nombreux exemples peuvent être trouvés.

Prenons l'exemple de la chaîne « bon de commande - bon de livraison - facture ». Supposons que le processus de traitement de ces données repose sur le fait qu'une commande est honorée en totalité par une seule livraison et qu'une facture traite un seul bon de commande. Dans le passage du schéma « entité - relation » au schéma relationnel, il n'y a pas lieu de créer de tables décrivant les associations entre bon de livraison et bon de commande, d'une part, et entre facture et bon de livraison, d'autre part, puisque l'on est en présence de dépendances fonctionnelles¹. En outre, il est inutile de créer la table « ligne de bon de livraison » décrivant l'association entre bon de livraison et article, et la table « ligne de facture » décrivant l'association entre facture et article, parce que ces informations sont redondantes avec celles de la table « ligne de commande », compte tenu des deux dépendances fonctionnelles identifiées. La figure 229 illustre ce passage du schéma « entité - relation » (utilisant un formalisme Merise) au schéma « relationnel » utilisé dans l'implémentation.

FIGURE 229
Processus « commande - livraison - facturation » - cas 1

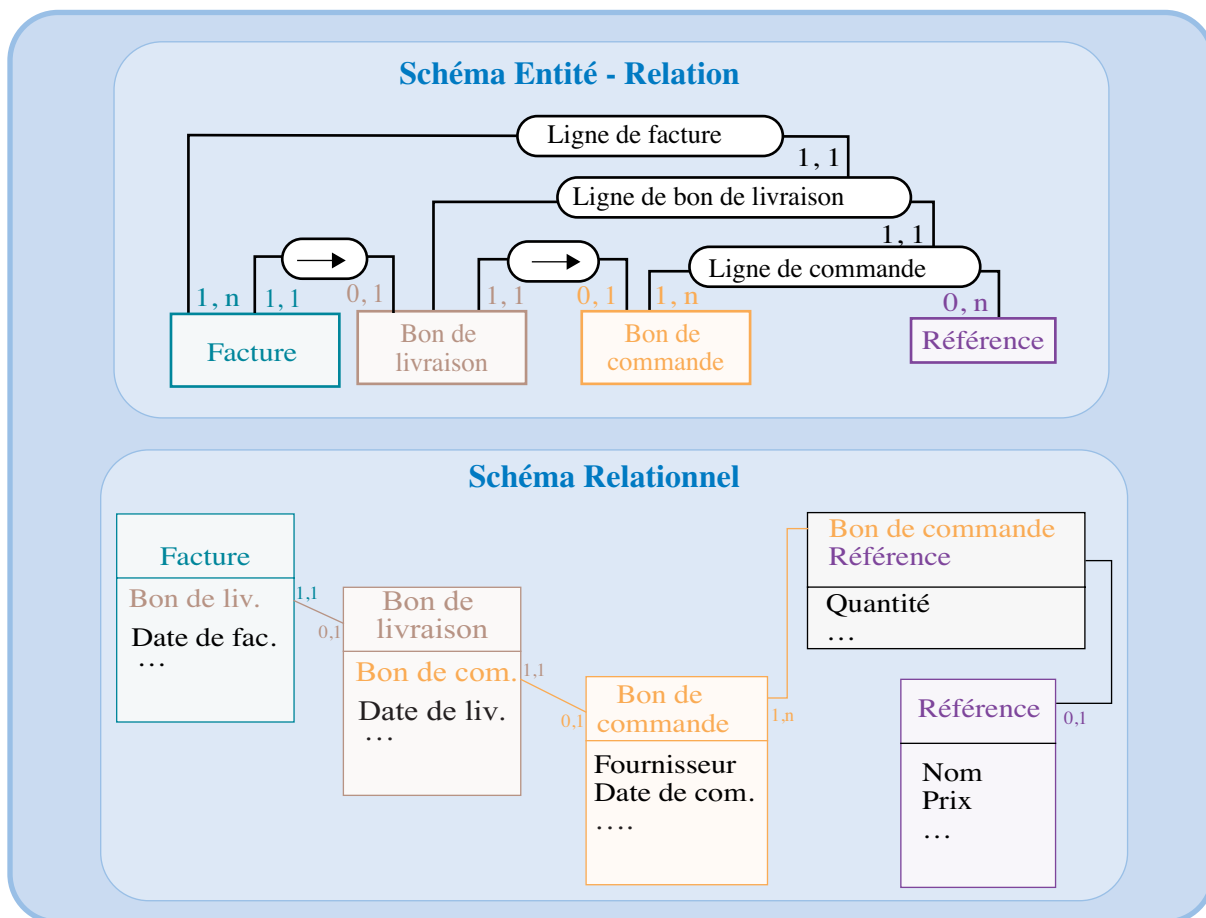
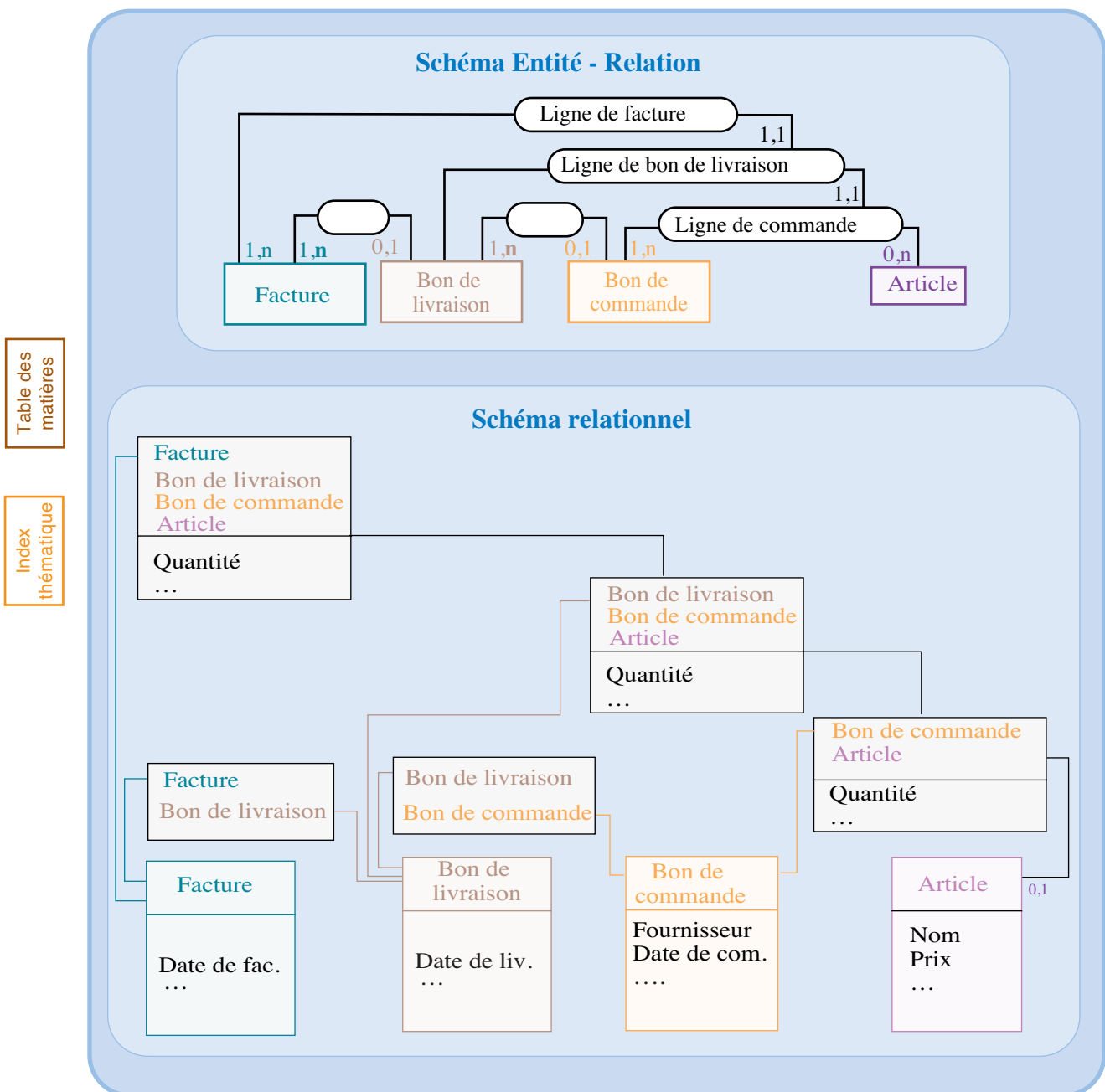


Table des matières
Index thématique

1. Il peut être envisagé d'utiliser dans ce cas, une entité unique fusionnant ces trois entités.

Supposons maintenant qu'un bon de commande puisse faire l'objet de plusieurs livraisons (et, pour simplifier, que la commande d'une ligne de commande soit livrée en une seule fois), qu'une livraison puisse porter sur des lignes de commande de bons de commande différents et qu'une facture puisse porter sur plusieurs commandes, qu'elles soient honorées en totalité ou non. Dans ce cas, les cardinalités du schéma «entité - association» changent, supprimant les dépendances fonctionnelles identifiées dans le processus précédent et de nouvelles tables doivent être créées. La figure 230 illustre ce changement et montre la nécessité de créer quatre nouvelles tables.

FIGURE 230
Processus « commande - livraison - facturation » - cas 2



Prenons maintenant l'exemple des gammes de production. Dans le cas général, une gamme se caractérise par un ensemble de relations d'antériorité entre des couples d'opération, étant entendu qu'une opération - aval peut avoir plusieurs

ancêtres et qu'une opération - amont peut avoir plusieurs descendants. Si l'on suppose, conformément à ce qui a été vu au § II-2.3.1, page 944, que la gamme n'est utilisée que pour une seule référence, on obtient alors les deux schémas de la figure 231, dans laquelle deux relations *is-a* sont utilisées (usage du concept de rôle). Si l'entreprise ne traite que des gammes linéaires, les cardinalités de l'asso-

FIGURE 231
Gamme de production quelconque

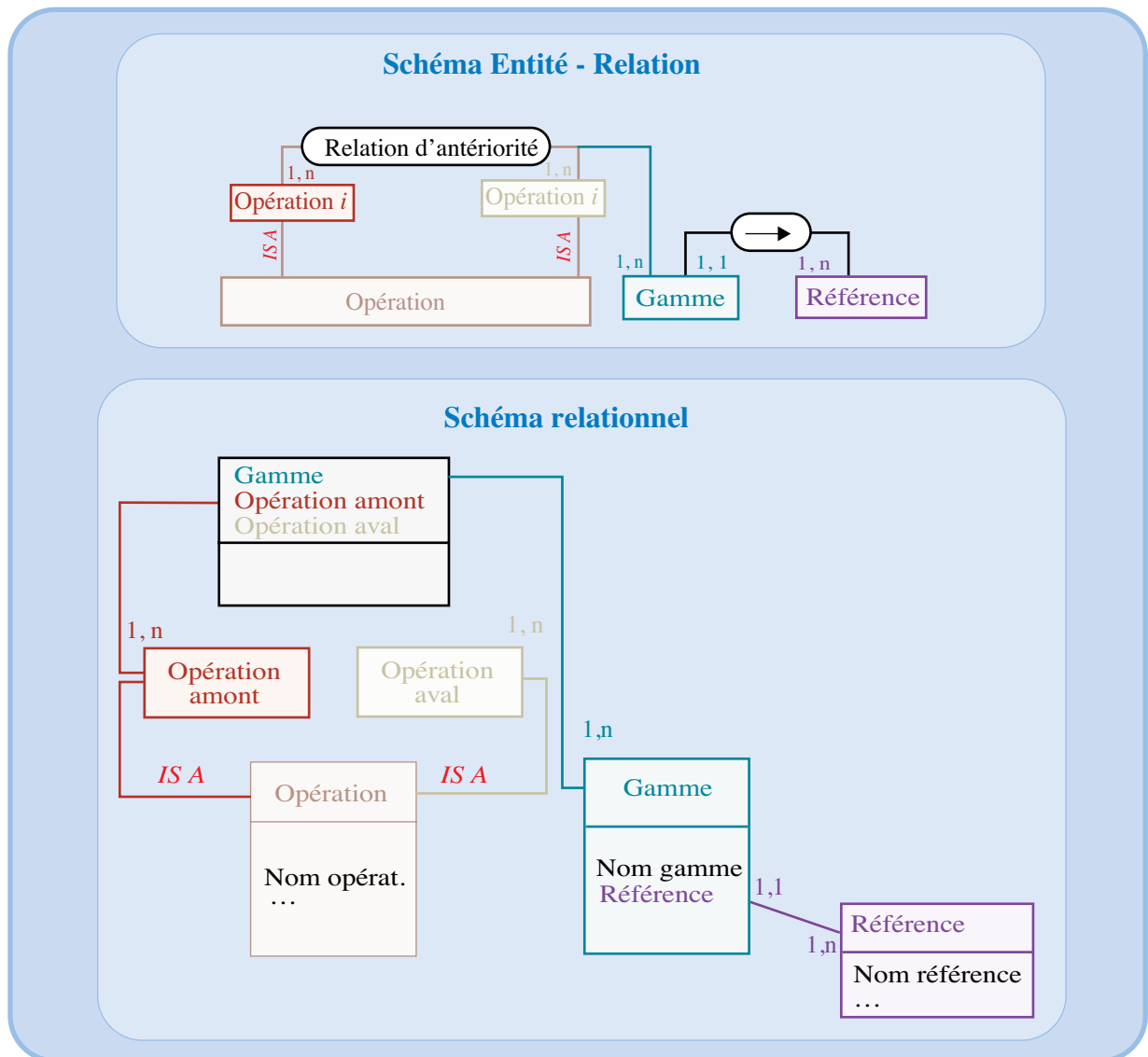


Table des matières

Index thématique

ciation en font une dépendance fonctionnelle, rendant inutile la création d'une table, ce qu'illustre la figure 232.

Dans nos deux exemples, il est possible de proposer des processus alternatifs utilisant le sous-schéma de données correspondant au processus le plus complexe, mais cela se fait au détriment de la performance des traitements. On peut remarquer également que les entités élémentaires restent les mêmes, ce qui change ce sont les cardinalités et le nombre de relations décrivant des associations. Ceci conduit à dire que si chaque ensemble de processus alternatifs utilise le même ensemble d'entités et si le mécano de processus implique seulement de nouvelles associations entre les entités des différents processus, les problèmes posés sont limités. Il n'en est pas de même dans le cas contraire.

FIGURE 232
Gamme de production linéaire

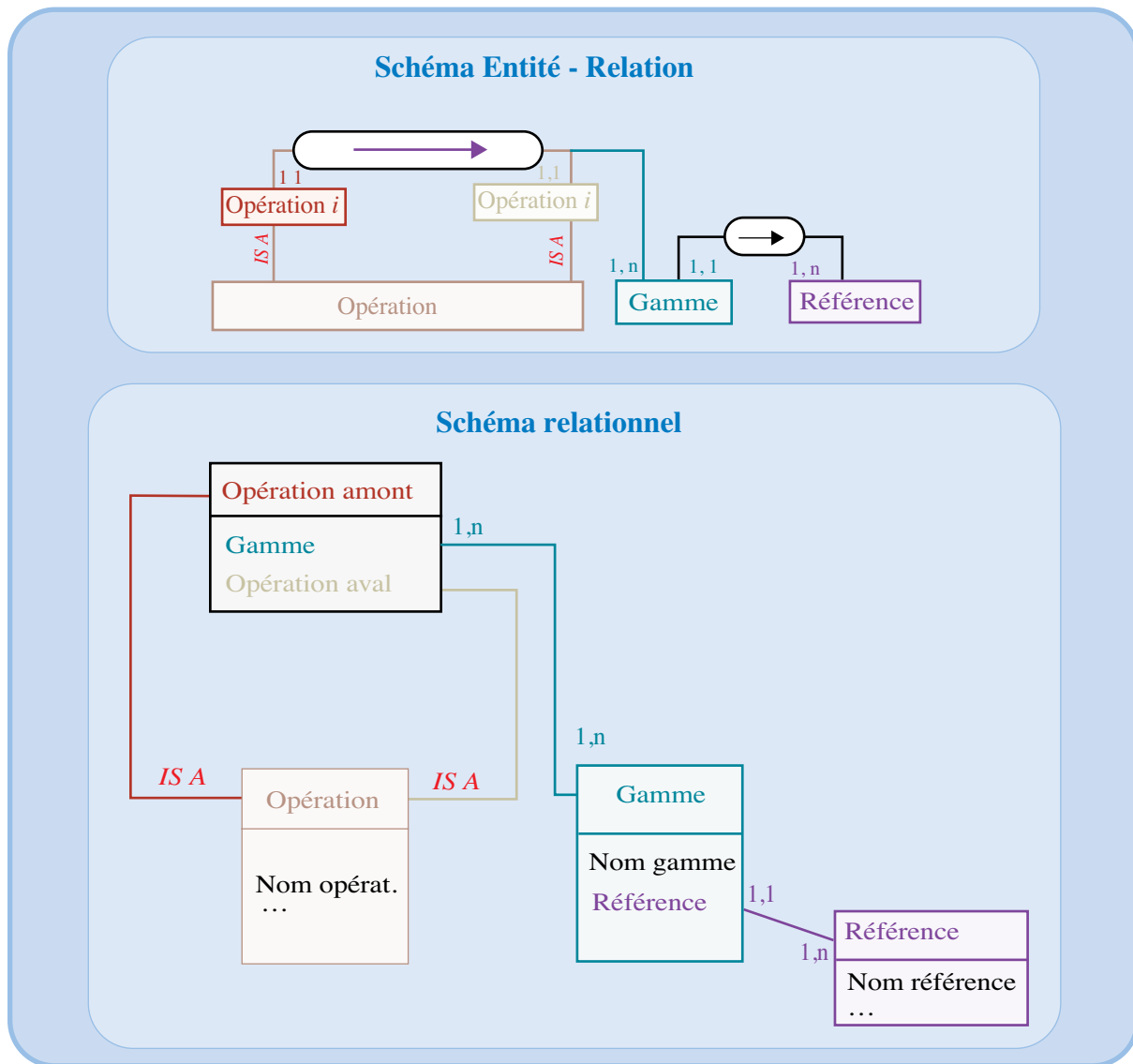


Table des matières

Index thématique

Ces remarques sur les problèmes de fusion de sous-schémas de données expliquent les difficultés techniques rencontrées lorsque l'on veut faire coexister des modules d'un ERP avec des applications spécifiques, qu'elles préexistent à l'arrivée de l'ERP ou qu'elles soient acquises postérieurement. Outre les difficultés liées à des changements organisationnels, un travail d'adaptation de données existantes est souvent nécessaire pour faire coexister et collaborer des systèmes différents.

III-1.3.2 Problèmes liés à la liaison événement-processus

Si l'on revient sur la démarche du *reengineering*, dans une optique de transformation radicale de processus, on se rend compte que la relation «événement $e \rightarrow$ processus p » retenu n'a rien d'automatique: le processus p peut être déclenché par un tout autre événement e' et l'événement e peut déclencher un tout autre processus p' .

Pour s'en convaincre, il suffit de reprendre l'exemple du changement du processus de paiement des fournisseurs de Ford décrit par Hammer et Champy (1993, [215]). Antérieurement, le fait générateur déclenchant le processus de paiement d'un fournisseur était le rapprochement d'une facture fournisseur et d'une notification de conformité émise par le service consommateur des marchandises achetées. Le nouveau processus s'appuie sur une logique de gestion par exception et prend comme fait générateur la livraison, en utilisant des informations recueillies dans le processus antérieur de passation de la commande. Dans ce changement, on assiste à un déplacement dans le temps et dans l'espace du fait générateur du paiement d'un fournisseur et à une modification du rôle des acteurs. Des améliorations peuvent alors reposer sur le remplacement d'un enchaînement de processus par un nouveau processus (ou un nouvel enchaînement de processus nouveaux). Cette possibilité est difficile à prendre en compte par les ERP, même si, d'une certaine manière, les scénarios que l'on peut retrouver dans la base de modèles (production pour stock *versus* production à la commande, par exemple) offrent la possibilité de décrire des enchaînements de processus.

Cette remarque conduit à souligner les risques de conservatisme d'un usage mal maîtrisé des ERP, au même titre – et pour des raisons similaires – que celui des systèmes-experts.

III-2 Mise en œuvre des ERP

Après avoir évoqué les avantages et inconvénients d'un ERP, nous en précisons les limites sur le plan de la gestion (les limites méthodologiques venant d'être évoquées).

III-2.1 Les avantages et inconvénients d'un ERP

De nombreux auteurs (parmi lesquels Peaucelle, [330], Schtub, 1999, [385]) listent les avantages et inconvénients des ERP. Nous les complétons par quelques remarques additionnelles liées à ce qui a été dit précédemment.

L'appel à un ERP présente de nombreux avantages parmi lesquels on peut citer.

- Par rapport à une solution de développement spécifique, cette approche permet de réduire sensiblement le temps nécessaire pour définir une nouvelle solution en s'appuyant sur un **catalogue des meilleurs processus**¹, bénéficiant donc des meilleures expertises. Les modules retenus restent alors à adapter et à implémenter. Le gain de temps dans la mise en œuvre de la décision dépend de la «distance» entre la situation actuelle et la cible. Signalons que des enquêtes font état d'une durée moyenne d'implantation de près de deux ans.
- Indépendamment du fait qu'«éviter de réinventer l'eau chaude» est préférable, le client d'un ERP n'a pas à supporter le coût élevé de création et de maintenance de systèmes «maison». Il évite le risque de perte de compétences liées aux développeurs de l'entreprise (ou de la SSII appelée en maîtrise d'œuvre) qui sont souvent fortement exposés aux attraits du «turn-

1. Ce qui pose implicitement le problème de la qualification de ces processus: qui attribue ce label? sur quelles bases? sous quelles conditions d'application? On retrouve ce problème dans l'approche de la chaîne logistique (§ I-2, page 895 du chapitre XIV).

over», ce qui induit un risque important sur l'évolutivité du logiciel. Enfin, l'audit déjà réalisé sur certains modules, en particulier sur ceux qui ont trait à de l'information réglementairement encadrée, garantit la qualité des informations produites, ce qui évite toute une série de contrôles habituellement effectués.

- Il découle de ce qui précède que l'appel à un ERP peut limiter les risques de dérives de coûts et de délai dans la recherche et la définition d'une solution évolutive, à condition que ce projet soit correctement géré.
- Enfin, pour avoir une vision globale et pertinente des nouveaux processus, la solution de développements spécifiques implique des expertises de modélisation peu souvent disponibles en interne. Dans la solution ERP, ces spécialistes n'existent pas non plus, mais les méthodologies éprouvées mises en œuvre permettent une formation des participants au projet ERP, à l'analyse des processus et leur amélioration. Schtub (1999, [385]) souligne avec raison que ceci contribue à l'apprentissage organisationnel au sens de d'Argyris et Schon (1978, [20]) pour qui l'apprentissage organisationnel implique la détection et la correction d'erreur soit sans remise en cause de normes, objectifs et politiques (simple boucle d'apprentissage), soit avec remise en cause d'un ou plusieurs de ces éléments (double boucle d'apprentissage). On est clairement ici dans le cadre de la double boucle.

Cette solution présente aussi des inconvénients.

- Tout d'abord, la flexibilité de cette approche est réduite, elle oblige le plus souvent à se plier aux standards, ce qui n'est pas sans poser de nombreux problèmes. L'adéquation des processus de l'ERP aux spécificités du système productif et de son environnement socio-économique est plus ou moins bonne et cela conduit parfois à vouloir plier l'organisation à l'ERP plutôt que l'inverse¹. À partir de ce qui a été dit sur la relation entre processus et schéma conceptuel des données, il est évident l'adjonction de propriétés à des relations existantes (au sens des BDR) ne pose pas de problème contrairement à l'adjonction de nouvelles entités inexistantes dans l'ERP. Ceci est particulièrement gênant lorsque l'on décide de travailler avec un niveau de détail plus ou moins poussé (regroupement de charges ou de ressource, par exemple), ce qui se traduit par des nomenclatures hiérarchiques avec création de nouvelles entités.
- L'efficacité de ces processus de référence présente un caractère contingent, car elle est très certainement conditionnée par le respect d'un certain contexte technique, économique et social.
- L'entreprise qui fait d'un ERP le cœur de son système d'information prend le risque de dépendre de son fournisseur, tant sur sa capacité à suivre les évolutions technologiques que dans celle de coller aux évolutions des besoins des utilisateurs.
- Le recours à des processus «certifiés efficaces» ne procure plus un avantage compétitif dès lors que leur usage est généralisé. À cela, on peut rétorquer

1. On retrouve là le propos de Berry sur la façon dont les technologies mises en œuvre conditionnent les organisations (1983, [48]).

que la différenciation doit jouer surtout sur les processus principaux sur lesquels l'entreprise fonde son avantage compétitif.

- Les ERP ont des limites, mais celles-ci reculent rapidement. En 2000, les ERP restent surtout orientés vers la satisfaction du *back office* et des efforts sont accomplis pour mieux prendre en compte les processus du *front office*, qu'il soit en contact direct avec la clientèle ou non (eCommerce ou *web office* et places de marché virtuelles), dans une optique de chaîne logistique.

Enfin, il convient de ne pas oublier que l'amélioration de certains processus repose sur une amélioration ou l'introduction d'outils de gestion (règles associées à des décisions programmables, utilisation de systèmes d'aide à la décision...) qui ne relève pas de la problématique des ERP. Plus on s'engage dans des traitements sophistiqués d'informations élémentaires pour aboutir à des « indicateurs », moins on a de chances de rester dans une problématique ERP.

III-2.2 Implantation d'un ERP

La mise en place d'un ERP étant longue et coûteuse¹, il est souhaitable de s'appuyer sur une structure de projet qui réfléchit sur les processus, les métiers et les nouvelles ressources informationnelles et procédurales à mettre en place pour améliorer la productivité. Il est préférable de commencer par appliquer la démarche aux processus considérés comme non stratégiques afin de pouvoir se concentrer sur les processus stratégiques, les autres processus étant pris en charge par des applications tierces, le plus souvent interfacées à la base de données de l'ERP.

La définition des processus-cibles s'effectue par une équipe qui comporte les représentants des différentes fonctions, mais il convient de veiller à ce que le point de vue des services ne soit pas prédominant et à ce que les acteurs choisis acceptent de réfléchir dans une perspective d'amélioration globale des processus. En général, ils n'ont pas de connaissance en matière de modélisation de processus et il convient de les former, pour les amener à prendre du recul.

D'une certaine façon, la mise en place des ERP s'avère plus facile que celle du *reengineering*², parce que la refonte des systèmes d'information est perçue comme inéluctable et que la « caution » de performance des processus élémentaires permet de vaincre plus facilement les réticences et les pesanteurs sociologiques. Par rapport au *reengineering*, l'approche ERP permet de gagner du temps en conception, puisqu'il n'y a pas à chercher de solution innovante et que l'on se contente de choisir des processus élémentaires. Cela étant, en dépit de ce qu'écrivent certains spécialistes (Curran et Ladd, 2000, [115]), les changements induits sont sans doute comparables : des informations doivent être reformatées ou créées pour une conformité aux nouveaux standards et de nouvelles procédures et nouveaux rôles doivent être définis et mis en œuvre, avec ce que cela peut impliquer sur le plan individuel. Les témoignages de difficultés de mise en œuvre (Cliff,

1. Aux États-Unis, en 1999, des études de cabinets spécialisés faisaient état des valeurs moyennes suivantes : mise en place en 23 mois, coût de 1,5 million de dollars. Peaucelle (1999, [330]) présente une bonne analyse des problèmes et des coûts engendrés par la mise en place d'un ERP.

2. Les problèmes rencontrés dans l'application de cette démarche conduisent à de nombreux échecs et l'association souvent abusive entre le *downsizing* et le *reengineering* rend cette démarche de plus en plus difficile à accepter chez les salariés.

1999, [98]) montrent qu'en définitive le changement via ERP n'est guère plus facile que celui via le *reengineering*.

La conception modulaire retenue permet théoriquement de s'adapter à n'importe quel environnement, mais, en réalité, la structure du schéma conceptuel de données n'est compatible qu'avec un nombre limité de procédures et de configurations de systèmes productifs existants, ce qui s'explique par des raisons organisationnelles et par les raisons techniques évoquées au § III-1.3.1, page 963. Dès lors, l'implantation de tels logiciels est non seulement coûteuse et longue, mais elle implique souvent des adaptations génératrices de nombreux problèmes socio-organisationnels¹. Cela étant, l'hétérogénéité intra- et inter-entreprise des systèmes d'information pose des problèmes de plus en plus difficiles qu'il faudra bien résoudre tôt ou tard. Il est cependant préférable d'y aller progressivement car il est difficile et trop risqué de tout changer en même temps : on ne retient alors que les seuls modules jugés intéressants, les autres processus étant pris en charge par des applications tierces le plus souvent interfacées à la base de données de l'ERP.

III-2.3 L'utilisation d'un ERP dans une approche de chaîne logistique

Dans la souplesse offerte par un ERP, on a vu que les fonctions ou tâches d'un processus sont prises en charge par des unités organisationnelles. Rien ne s'oppose à une utilisation d'un ERP dans une optique traditionnelle de processus élémentaires confiés à des services. La programmation événementielle procure une amélioration par rapport aux approches traditionnelles en répercutant automatiquement des informations d'un processus à un autre et en activant automatiquement certains d'entre eux. Cela étant, le cloisonnement des services favorise les arbitrages locaux (dates de livraison promises par le commercial sans tenir compte des possibilités de la production, etc.) et conduit à une absence de visibilité du processus global devant satisfaire la demande d'un client.

L'approche de la chaîne logistique intégrée n'est possible que dans le cadre d'une intégration informationnelle que, pratiquement, seuls les ERP offrent ou certains systèmes d'information interconnectés par EDI (voir page 931), sous certaines conditions (répercussion immédiate et à tous les échelons pertinents, de l'information dans le système récepteur). Sa mise en œuvre implique également de définir autrement les unités organisationnelles et les processus dont elles ont la responsabilité (voir chapitre III, § I-2.4, page 167).

SECTION IV GESTION DE LA QUALITÉ

La maîtrise de la qualité des produits et services est une préoccupation qui remonte à l'antiquité et qui, à l'ère pré-industrielle, a principalement été traitée par le biais de réglementations de la puissance publique² et de corporations professionnelles, régulant l'accès et l'exercice d'un métier. La révolution industrielle qui vise à obtenir une certaine production de masse provoque des efforts de standardisation des produits et des processus³, ayant une incidence sur la qualité. Dès la

1. Voir, par exemple, Davenport (1998, [121]) et Cliffe (1999, [98]).

2. Par exemple, le code d'Hammourabi comporte des normes techniques à respecter dans la construction de bâtiments et les sanctions encourues en cas de non-respect.

fin du XIXe siècle, le courant de l'organisation scientifique du travail met en place des procédures d'**inspection de la qualité**. Il s'agissait alors de vérifier la conformité de produits à des spécifications techniques requises (limites de tolérance à respecter). Au lendemain de la première guerre mondiale, le passage progressif à une production de masse rend de plus en plus difficile le contrôle systématique de la production, alors que les nouvelles organisations du travail multiplient les problèmes de qualité. Simultanément, la vision déterministe des processus de production, niant implicitement le caractère inéluctable d'une certaine dispersion des caractéristiques des produits, cède progressivement la place à une vision stochastique, permettant le développement du **contrôle statistique de la qualité**. On utilise alors des cartes de contrôle¹ pour interpréter les observations faites sur un échantillon aléatoire, pour décider de la conformité d'un lot d'articles produits ou achetés. Au lendemain de la première guerre mondiale, un pas supplémentaire est franchi avec l'**assurance de la qualité**². En déplaçant le contrôle des produits vers celui des processus, c'est une approche de prévention des problèmes de qualité qui est proposée, la qualité se créant dans les processus; ceux-ci font l'objet d'une attention nouvelle, d'inspiration systémique, dans un environnement jusqu'alors marqué par une division du travail conduisant à privilégier une vision locale des problèmes. Ce mouvement, concomitant à celui de la création du marketing, se caractérise également par l'émergence du client et de ses attentes dans la définition des spécifications des produits et, corrélativement, l'usage de normes comme argument commercial. Au cours de ces deux dernières décennies, s'est développé le **Management par la Qualité Totale** (ou le **Total Quality Management, TQM**). Il s'agit à la fois d'une extension de l'application de l'assurance de la qualité sur l'ensemble de la chaîne logistique et d'un nouvel élargissement de périmètre, considérant que l'amélioration de la qualité implique d'aller au-delà des processus et que c'est l'ensemble de l'organisation qui est concerné³, impliquant une autre vision de la gestion des ressources humaines.

IV-1 Les normes ISO 9000

L'ISO (*International Standard Organisation*⁴) est une fédération mondiale de plus de 130 organismes nationaux de normalisation; il s'intéresse à l'ensemble des domaines scientifiques et techniques à l'exception de l'ingénierie électrique et électronique (couverts par le CEI). Le principal organisme de normalisation français est l'AFNOR (www.afnor.fr) qui est membre de l'ISO. La vocation de tels organismes est la production de normes.

3. Sur cette question de la standardisation, voir le [chapitre II, page 133](#).

1. Le fondateur de cette «révolution conceptuelle» est W. A. Shewart qui publie en 1931 *Economic control of manufactured products*, après avoir jeté les bases de son approche, en 1925, dans un article du *Journal of the American Statistical Association*.

2. Pour une présentation synthétique de ces outils statistiques du contrôle de la qualité, le lecteur peut se reporter à l'ouvrage de Daudin & Tapiero (1996, [119]).

3. À l'origine de ce mouvement, on trouve l'utilisation faite après la seconde guerre mondiale des travaux de Deming et Juran par l'industrie japonaise, ceux de Feigenbaum aux États-Unis. À partir des années soixante, les Japonais mettent en place les cercles de qualité. À la fin des années quatre-vingt, le *kaizen* (voir [page 70](#)) reprend, de manière plus globale et systématique, les conditions organisationnelles de l'amélioration continue.

4. Organisation Internationale de Normalisation, selon la version française des normes; son site est www.iso.ch.

Une **norme** est un ensemble publié de recommandations permettant le traitement d'une classe de problèmes répétitifs, le plus souvent génériques et librement¹ adopté par des entreprises pour gérer certains aspects de leurs relations contractuelles avec leurs clients (entreprises ou particuliers). Ces normes reflètent un compromis daté se traduisant par une certaine répartition des risques techniques et économiques entre les parties qui échangent un produit ou une prestation ; l'évolution de l'environnement technico-économique conduit inéluctablement à des adaptations périodiques de normes, à l'abandon de certaines et à la création d'autres.

La famille des normes ISO 9000 (AFNOR, 2001, [6]) a été élaborée pour aider les organismes², de tous types et de toutes tailles, à mettre en œuvre et à appliquer des systèmes de management de la qualité efficaces. Ces normes³ forment un ensemble cohérent relatif aux systèmes de management de la qualité et facilitent la compréhension mutuelle dans le cadre des échanges commerciaux nationaux et internationaux.

IV-1.1 La norme ISO 9000 (décembre 2000)

La norme NF EN ISO 9000 (indice de classement X 50-130) décrit les principes essentiels des systèmes de management de la qualité et en spécifie la terminologie. Elle ne peut pas faire l'objet d'une demande de certification par une entreprise.

Les clients exigent des produits⁴ et des services dont les caractéristiques répondent à leurs besoins et leurs attentes. Ces besoins et attentes sont exprimés dans des spécifications désignées globalement par l'expression «exigences des clients». Ces exigences peuvent être spécifiées contractuellement par le client ou déterminées par l'entreprise. Dans chacun de ces cas, c'est le client qui, en définitive, détermine l'acceptabilité du produit et des services. Dans ces conditions, la norme définit la **qualité** comme «l'aptitude d'un ensemble de caractéristiques intrinsèques à satisfaire des exigences». Dans cette définition, le terme intrinsèque, utilisé par opposition à «attribué», signifie présent dans quelque chose, notamment en tant que caractéristique permanente. L'évolution de l'environnement technique, économique et social modifiant les besoins et attentes des clients⁵, les entreprises sont amenées à améliorer leurs produits et processus de manière continue.

1. *Note de la page précédente.* Contrairement aux lois et règlements, qui s'imposent à tous. Dans la production de l'AFNOR, il convient de distinguer les normes (préfixe NF ; par exemple, la norme NF EN ISO 9000 a, en outre, le statut de norme européenne (préfixe EN) et reproduit intégralement la norme ISO), des fascicules de documentation (préfixes FD) orientés vers la description de bonnes pratiques. On peut ajouter que le CEN (Comité Européen de Normalisation ; site www.cenorm.be) a pour objet d'harmoniser les normes de 19 pays européens ; ces normes européennes garantissent un niveau minimal de performance et de sécurité qui permet la libre circulation dans la CEE des produits qui les respectent (estampillage CE).

2. Ce terme, plus général que celui d'entreprise, est systématiquement utilisé dans ces normes. Nous le reprenons donc ici.

3. Dans les paragraphes qui suivent, de larges citations proviennent de ces normes pour éviter d'en déformer la teneur. Ces citations ne sont pas repérées en tant que telles et sont assorties de commentaires.

4. Cette définition inclut quatre catégories génériques de produits : les services, les «softwares» correspondant à la création d'une information ou d'une procédure, les produits matériels et les produits issus de processus à caractère continu. On retrouve toutes les catégories de production présentées dans le chapitre introductif, [page 44](#). On a conservé ici la terminologie retenue dans cet ouvrage, qui ne distingue que les produits et les services et, en ce qui concerne les produits, ne s'attache pas au caractère discret ou continu du mode de production.

5. Voir, sur ce point, les discussions du § I-4, [page 107](#), du [chapitre II](#).

Cette norme fonde les systèmes de management conçu pour une amélioration continue des performances, tout en répondant aux besoins de toutes les parties intéressées (voir [figure 233, page 975](#)), sur **huit principes fondamentaux** (qui constituent la base des normes de systèmes de management de la qualité de la famille ISO 9000).

- *Orientation client* - Les organismes dépendent de leurs clients, il convient donc qu'ils en comprennent les besoins présents et futurs, qu'ils satisfassent leurs exigences¹ et qu'ils s'efforcent d'aller au-devant de leurs attentes.
- *Leadership* - Les dirigeants établissent la finalité et les orientations de l'organisme. Il convient qu'ils créent et maintiennent un environnement interne dans lequel les personnes peuvent pleinement s'impliquer dans la réalisation des objectifs de l'organisme. Dans la norme, l'accent est mis sur le management de la qualité. La politique qualité et les objectifs-qualité de l'organisme sont définis par la direction, qui doit la promouvoir à tous les niveaux de l'organisme pour accroître la sensibilisation, la motivation et l'implication, qui doit aussi s'assurer que les exigences des clients représentent une priorité à tous les niveaux de l'organisme et que les processus appropriés sont mis en œuvre pour permettre de répondre aux exigences des clients. Un système de management de la qualité efficace et efficient doit être mis en place et tous les moyens nécessaires, mobilisés pour atteindre ces objectifs. La façon d'exercer le *leadership* a un impact important sur le principe suivant.
- *Implication du personnel* - Les personnes à tous niveaux sont l'essence même d'un organisme et une totale implication de leur part permet d'utiliser leurs aptitudes au profit de l'organisme.
- *Approche Processus* - Un résultat escompté est atteint de façon plus efficace lorsque les ressources et activités afférentes sont gérées comme un processus. L'objet de la norme ISO 9000 est d'encourager l'adoption de **l'approche processus**² pour gérer un organisme, laquelle est définie comme l'identification et le management méthodiques des processus utilisés dans un organisme, et plus particulièrement les interactions de ces processus, ce qui renvoie au principe suivant.
- *Management par approche système* - Identifier, comprendre et gérer des processus corrélés comme un système, contribue à l'efficacité et l'efficience de l'organisme.
- *Amélioration continue* - Il convient que l'amélioration continue de la performance globale d'un organisme soit un objectif permanent de l'organisme. Il

1. Le fascicule FD X 50-179 de l'AFNOR (décembre 2000) propose un guide d'identification des exigences client. Le fascicule de documentation FD X 50-172 de l'AFNOR (mars 1999) propose une méthodologie pour la conduite d'enquêtes de satisfaction client.

2. *Note de la page précédente.* Le fascicule FD X 50-176 de l'AFNOR (juin 2000) propose des lignes directrices pour aider à comprendre cette approche processus et propose des recommandations pour le déploiement de cette approche dans un organisme. Il propose de distinguer 8 catégories de processus (mis en relation étroite avec la norme ISO 9001):

- un processus de direction: management de la qualité de l'organisme;
- cinq processus de réalisation: processus client, organisation et ordonnancement de la réalisation du produit, conception du produit, approvisionnement des éléments nécessaires à la réalisation, production du produit;
- deux processus de support: ressources humaines, ressources liées aux infrastructures.

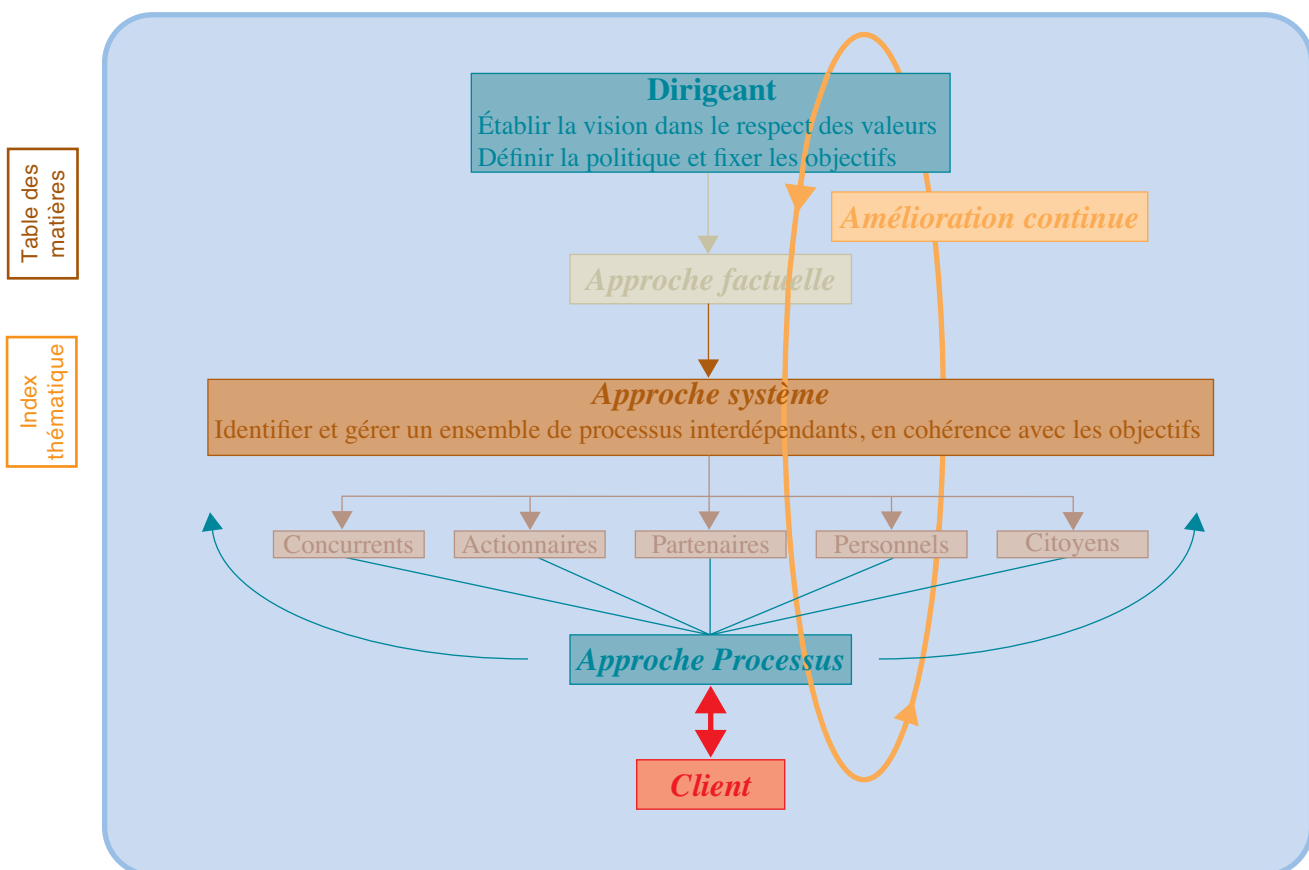
Rappelons que la problématique des processus a été introduite au [chapitre I, § I-3, page 67](#). et que les problèmes de cartographie des processus sont abordés au [chapitre III, § I-2.3, page 160](#).

est fait explicitement référence dans ces normes à la roue de Deming (voir [figure 12, page 71](#)). Cette amélioration implique de disposer d'indicateurs et de tableaux de bord¹, mais aussi que l'on puisse évaluer l'efficacité du système qualité mis en place².

- *Approche factuelle pour la prise de décision* - Les décisions efficaces se fondent sur l'analyse de données et d'informations. Dans cette optique, les techniques statistiques permettent une meilleure compréhension et prise en compte de la variabilité de caractéristiques mesurables des produits et des processus³. Ce principe de décisions fondées sur des données objectives et non sur de simples impressions ou rumeurs se retrouve dans tous les écrits sur la qualité.
- *Relations mutuellement bénéfiques avec les fournisseurs* - L'organisme et ses fournisseurs sont interdépendants et des relations mutuellement bénéfiques augmentent les capacités des deux organismes à créer de la valeur.

FIGURE 233

Schéma de chaînage des principes de management de la qualité avec les acteurs de l'organisation (source FD X 50-173, in AFNOR, 2001, [6])



1. Le fascicule FD X 50-171 de l'AFNOR (juin 2000) propose une méthodologie pour concevoir, mettre en place et animer un système d'indicateurs et de tableaux de bord.

2. Le fascicule FD X 50-174 de l'AFNOR (septembre 1998) fournit les lignes directrices sur l'évaluation de l'efficacité d'un système qualité avec la définition de l'approche d'évaluation sous forme d'une grille, la démarche pour la construire et la façon de l'utiliser.

3. La norme ISO/TR 10017, non reprise en norme NF, fournit des conseils sur l'utilisation des techniques statistiques dans un système de management de la qualité.

Selon les promoteurs de cette norme, l'usage d'un **système de management de la qualité** (dont les exigences font l'objet de la norme ISO 9001) incite les organismes à analyser les exigences des clients, à définir les processus qui contribuent à la réalisation d'un produit acceptable pour le client et à en maintenir la maîtrise. Il peut fournir le cadre d'amélioration continue permettant d'accroître la probabilité de satisfaire les clients et les autres parties intéressées. Enfin, il apporte, à l'organisme et à ses clients, la confiance en son aptitude à fournir des produits qui satisfont aux exigences. Ce système de management de la qualité doit être périodiquement audité¹ pour en évaluer l'efficacité et identifier les opportunités d'amélioration. On distingue trois types d'audit :

- Les audits de première partie sont effectués par l'organisme pour ses besoins internes et peuvent servir de base à une autodéclaration de conformité.
- Les audits de seconde partie sont effectués par des clients de l'organisme ou par d'autres personnes pour le compte du client.
- Les **audits de tierce partie** sont effectués par des organismes externes et indépendants. Ces organismes, généralement accrédités, fournissent la certification ou l'enregistrement de la conformité à des exigences telles que celles de l'ISO 9001.

Une **démarche** permettant de développer et de mettre en œuvre un système de management de la qualité, mais aussi d'entretenir et d'améliorer un système de management de la qualité existant, comporte plusieurs étapes, telles que :

- la détermination des besoins et des attentes des clients et des autres parties intéressées ;
- l'établissement de la politique qualité et des objectifs « qualité » de l'organisme ;
- la détermination des processus et des responsabilités nécessaires pour atteindre les objectifs « qualité » ;
- la détermination et la fourniture des ressources nécessaires pour atteindre les objectifs « qualité » ;
- la définition des méthodes permettant de mesurer l'efficacité et l'efficience de chaque processus ;
- la mise en œuvre de ces méthodes pour mesurer l'efficacité et l'efficience de chaque processus ;
- la détermination des moyens permettant d'empêcher les non-conformités et d'en éliminer les causes ;
- l'établissement et l'application d'un processus d'amélioration continue du système de management de la qualité.

Dans ce système de management de la qualité, la **documentation**, qui relève des systèmes d'information de l'organisation, est une activité à valeur ajoutée qui permet la communication des objectifs et la cohérence des actions. Son utilisation contribue à réaliser la conformité aux exigences des clients et l'amélioration de la qualité ; c'est aussi un support de formation permettant d'assurer la répétabilité et

1. Les normes NF EN 30011-1, NF EN 30011-2 et NF EN 30011-3 (août 1993 ; indice X 50-136-1, X 50-136-2 et X 50-136-3) décrivent les lignes directrices à suivre en matière d'audit des systèmes qualité. On les retrouve dans AFNOR (2001, [6]).

la traçabilité et de fournir, si nécessaire, des preuves tangibles; enfin, cette documentation doit permettre l'évaluation du système de management de la qualité. Une typologie des documents utilisés dans les systèmes de management de la qualité est proposée par cette norme :

- les **manuels qualité** qui fournissent des informations cohérentes, en interne et à l'extérieur, concernant le système de management de la qualité;
- le **plan qualité** qui définit de quelle manière le système de management de la qualité s'applique à un produit, un projet ou un contrat spécifique;
- les **spécifications** qui sont des documents formulant des exigences;
- les **lignes directrices** qui sont des documents formulant des recommandations ou des suggestions;
- les documents fournissant des informations sur la manière de réaliser des activités et des processus de manière cohérente; ces documents peuvent inclure des documents de procédures, des instructions de travail, des plans;
- les **enregistrements** qui sont des documents fournissant des preuves tangibles de la réalisation d'une activité ou de résultats obtenus.

IV-1.2 La norme ISO 9001 (décembre 2000)

La norme NF EN ISO 9001¹ (indice de classement X 50-131), établie à des fins de certification par les entreprises, spécifie les exigences relatives à un Système de Management de la Qualité (SMQ) lorsqu'un organisme :

- doit démontrer son aptitude à fournir régulièrement un produit² conforme aux exigences des clients et aux exigences réglementaires applicables,
- vise à accroître la satisfaction de ses clients par l'application efficace du système, y compris les processus pour l'amélioration continue du système et l'assurance de la conformité aux exigences des clients et aux exigences réglementaires applicables.

Cette norme s'appuie sur la norme ISO 9000 et fournit un ensemble de principes à respecter, sans chercher à uniformiser les structures et documentation des SMQ. Elle se fonde sur une **approche processus** qui permet de maîtriser les relations entre les processus au sein du système de processus, ainsi que sur leurs combinaisons et interactions. Utilisée dans un système de management de la qualité, cette approche souligne l'importance :

- de comprendre et de satisfaire les exigences;
- de considérer les processus en termes de valeur ajoutée;
- de mesurer la performance et l'efficacité des processus;
- d'améliorer en permanence des processus sur la base de mesures objectives.

Cette focalisation sur les processus implique, selon cette norme, que l'organisme :

1. La version 2000 de cette norme annule et remplace la version 1994 de cette norme ainsi que la norme NF EN ISO 9002 portant sur «Système qualité - Modèle pour l'assurance de la qualité en production, installation et prestations associées» et la norme NF EN ISO 9003, «Système qualité - Modèle pour l'assurance de la qualité en contrôle et essais finals».

2. et services (voir note 4 de la page 973).

- identifie les processus nécessaires au système de management de la qualité et leur application dans tout l'organisme,
- détermine la séquence et l'interaction de ces processus,
- détermine les critères et les méthodes nécessaires pour assurer l'efficacité du fonctionnement et de la maîtrise de ces processus,
- assure la disponibilité des ressources et des informations nécessaires au fonctionnement et à la surveillance de ces processus,
- surveille, mesure et analyse ces processus,
- met en œuvre les actions nécessaires pour obtenir les résultats planifiés et l'amélioration continue de ces processus.

Les exigences en matière de **documentation** qui en découlent sont précises. Cette documentation doit comprendre :

- l'expression documentée de la politique qualité et des objectifs « qualité » ;
- un *manuel qualité* qui précise le domaine d'application du système de management de la qualité (y compris le détail et la justification des exclusions), les procédures documentées établies pour le système de management de la qualité ou la référence à celles-ci, et une description des interactions entre les processus du système de management de la qualité ;
- les procédures documentées exigées par la présente Norme internationale ;
- les documents nécessaires à l'organisme pour assurer la planification, le fonctionnement et la maîtrise efficaces de ses processus ;
- les *enregistrements* exigés par la norme ISO 9001 et devant être maîtrisés ; ceci implique que ces enregistrements sont établis et conservés pour apporter la preuve de la conformité aux exigences et du fonctionnement efficace du système de management de la qualité ; par ailleurs, ils doivent rester lisibles, faciles à identifier et accessibles et une procédure documentée doit être établie pour assurer l'identification, le stockage, la protection, l'accessibilité, la durée de conservation et l'élimination des enregistrements.

Ces documents requis pour le système de management de la qualité doivent être **maîtrisés**, ce qui implique qu'une procédure documentée doit être établie pour :

- approuver les documents quant à leur adéquation avant diffusion ;
- revoir, mettre à jour si nécessaire et approuver de nouveau les documents ;
- assurer que les modifications et le statut de la version en vigueur des documents sont identifiés ;
- assurer la disponibilité sur les lieux d'utilisation des versions pertinentes des documents applicables ;
- assurer que les documents restent lisibles et facilement identifiables ;
- assurer que les documents d'origine extérieure sont identifiés et que leur diffusion est maîtrisée ;
- empêcher toute utilisation non intentionnelle de documents périmés, et les identifier de manière adéquate s'ils sont conservés dans un but quelconque.

L'organisme doit déterminer les activités de **surveillance et de mesure** à entreprendre et les dispositifs de surveillance et de mesure nécessaires pour apporter la preuve de la conformité du produit aux exigences déterminées. Il doit planifier et mettre en œuvre les processus de surveillance, de mesure, d'analyse et d'amélioration.

ration nécessaires pour démontrer la conformité du produit, pour assurer la conformité du système de management de la qualité et pour améliorer en permanence l'efficacité du système de management de la qualité. Ceci doit inclure la détermination des méthodes applicables, y compris les techniques statistiques, ainsi que l'étendue de leur utilisation.

L'organisme doit **améliorer en permanence l'efficacité du SMQ** en utilisant la politique qualité, les objectifs «qualité», les résultats d'audit, l'analyse des données, les actions correctives et préventives ainsi que la revue de direction. L'amélioration de la qualité des produits relève d'une démarche de qualité totale telle qu'envisagée par la norme ISO 9004. L'amélioration de la qualité est vue ici au travers d'**actions correctives** (adaptées aux effets des non-conformités rencontrées et visant à éliminer les causes de non-conformités afin d'éviter qu'elles ne se reproduisent) et **préventives** (adaptées aux effets des problèmes potentiels et visant à éliminer les causes de non-conformités potentielles afin d'éviter qu'elles ne surviennent).

Enfin, cette norme définit un certain nombre d'exigences par grande catégorie de processus¹, mais que nous n'examinerons pas, puisque ce qui nous intéresse ici c'est principalement les systèmes d'information.

IV-1.3 La norme ISO 9004 (version 2000)

La norme ISO 9004 «Systèmes de management de la qualité - Lignes directrices pour l'amélioration des performances» n'a pas été établie à des fins de certification par les entreprises. L'objet de cette norme, recommandée comme guide pour les organismes dont la direction souhaite aller au-delà des exigences de l'ISO 9001, est l'amélioration des performances de l'organisme et la satisfaction des clients et des autres parties intéressées. Elle reprend la structure retenue par la norme ISO 9001 qu'elle cite très largement à travers des encarts. À chaque fois, elle propose un certain nombre de principes susceptibles de faciliter l'amélioration de performance ou l'accroissement de la satisfaction.

1. Voir la typologie retenue dans la note 2 de la page 974.

Chapitre XV

TECHNIQUES DE PRÉVISION

Gérer c'est aussi prévoir. Après avoir examiné la problématique prévisionnelle (section I), nous étudierons les filtres linéaires qui sont les plus utilisés en gestion (section II, page 1007), avant d'aborder les techniques de prévision qui se fondent sur des historiques complets (section III, page 1071).

SECTION I PRÉSENTATION DE LA PROBLÉMATIQUE PRÉVISIONNELLE DANS LES CHRONIQUES

Les **chroniques** que l'on appelle encore **séries temporelles** ou **séries chronologiques** correspondent à une série d'observations (ponctuelles ou agrégées) effectuées au cours de périodes ou à des instants donnés et qui sont ordonnées selon leurs dates d'observation. Prévoir à partir de chroniques, c'est utiliser les informations du passé d'une (ou plusieurs) chronique(s) pour fournir la valeur la plus probable d'une chronique donnée pour une ou plusieurs périodes à venir.

Table des matières

Avant toute étude d'une chronique, à des fins de prévision, il convient tout d'abord (voir § I-1) de redresser la série pour en éliminer les variations accidentelles dont l'origine est parfaitement connue (grève, etc.) et qui ne sauraient faire l'objet de prévisions « normales ». Ensuite, il faut analyser la série redressée pour voir à quel type de série temporelle on a affaire. Ce problème typologique sera abordé au § I-2, page 987, et l'on examinera au § I-3, page 997, comment déceler l'existence de cycles dans une chronique. Il faudra enfin sélectionner une technique de prévision adaptée aux problèmes classiquement rencontrés en entreprise. Une présentation sommaire des techniques disponibles sera faite au § I-4, page 1005; on y justifiera la sélection des techniques qui seront présentées dans les sections II et III.

Index thématique

La version CD-Rom de ce chapitre permet d'accéder directement à un logiciel exploitant les principales techniques décrites dans ce chapitre. La présence d'une icône en marge du texte (comme celle figurant dans cette page) indique la possibilité d'utilisation de la technique décrite dans le texte et le lien hypertextuel placé sur cette icône permet d'accéder à l'exemple numérique utilisé dans le texte. Les figures et tableaux reproduits dans ce chapitre qui auraient pu être établis à partir de ce logiciel ne l'ont pas été pour des raisons de lisibilité. Vous avez la possibilité de créer vos propres exemples pour exploiter les possibilités offertes, mais ce logiciel n'a qu'une vocation pédagogique et ne prétend en aucun cas, concurrencer les quelques logiciels professionnels qui existent dans ce domaine¹.



1. Voir avertissement de la note du bas de la page 8.

I-1 Redressement préalable des chroniques

La chronique étudiée doit porter sur un phénomène homogène. Cette remarque implique concrètement dans les entreprises que, dans les procédures d'enregistrement de la demande, soient bien dissociées les commandes exceptionnelles (difficiles à prévoir) ou celles passées par les gros clients réguliers (très encadrées contractuellement) de celles passées par les «petits clients», dont il est possible de prévoir globalement le «comportement statistique», du moins sur le court terme.

Préalablement à toute analyse d'une chronique, il convient dans bien des cas de procéder à un «nettoyage» préalable de la chronique, à moins que les techniques d'enregistrement des données ne rendent cette précaution inutile. Il s'agit, en effet, d'éliminer des perturbations importantes dont l'origine est parfaitement connue, pour pouvoir rechercher les caractéristiques structurelles des chroniques étudiées.

Le premier redressement concerne l'inégalité de la longueur des périodes, lorsque ce problème se pose. Certaines irrégularités se reproduisent de cycle en cycle: par exemple sur les séries mensuelles, les mois comportent 28 (ou 29) jours pour le mois de février et 30 ou 31 pour les autres mois, d'une année sur l'autre. Comme on le verra, ces irrégularités peuvent être éliminées ou considérées comme étant de nature saisonnière. Plus ennuyeux est le problème d'une activité qui s'effectue de façon intermittente. Par exemple, de nombreuses usines ne travaillent que 5 jours par semaine et, pour un mois donné, le nombre de week-ends, et donc le nombre de jours ouvrables, varie d'une année sur l'autre. Il faut alors redresser les informations mensuelles au prorata du nombre de jours effectifs dans le mois considéré. Si l'année considérée comporte 260 jours ouvrables, le mois standard comporte alors $260/12 = 21,67$ jours (en supposant que l'entreprise travaille sur 12 mois); si l'activité d'un mois donné est de 15325, pour un mois de 20 jours ouvrables, on corrigera cette valeur par le ratio $21,67/20$, ce qui donne une activité corrigée de 16602.

La définition du nombre de jours ouvrables du mois standard peut être encore plus délicate que ne le laisse penser cet exemple. En effet, une source de variation possible (mais non obligatoire) de l'activité d'une année sur l'autre est l'inégalité observée du nombre de jours ouvrables par an. En pareil cas, on aura intérêt à effectuer le calcul du nombre de jours ouvrables de notre mois standard sur l'ensemble des années étudiées, au lieu d'établir un mois standard différent par année. Toutefois, cette dernière méthode présente l'inconvénient d'obliger tous les ans à corriger l'intégralité des chroniques brutes disponibles en fonction du nouveau standard calculé. C'est pourquoi, certaines entreprises préfèrent travailler systématiquement avec le mois standard d'une année de référence qui devient, en quelque sorte, l'année «normale». Lorsque la notion de jour ouvrable ne s'impose pas, une correction similaire à celle décrite précédemment peut s'effectuer sur la base du nombre total de jours par mois.

Dans certains cas (activité commerciale par exemple), le nombre de lundis, de mardis..., du mois, explique une partie des variations constatées d'un mois à l'autre. On utilise dans ce cas la technique précédente, mais en raisonnant en nombre de journées standard. La conversion d'un nombre de jours ouvrables en nombre de jours standard s'effectue à partir d'un tableau de correspondance assignant une valeur à chaque jour ouvrable de la semaine. Ces valeurs sont obtenues

à partir de l'analyse de la répartition du chiffre d'affaires dans une « semaine type », en effectuant le rapport du chiffre d'affaires d'un jour donné, au chiffre d'affaires moyen quotidien, comme l'illustre le [tableau 276](#). Selon la nature du problème posé et du degré de précision souhaité, cette analyse sera effectuée au niveau d'un rayon, d'un magasin ou d'un groupe de magasins (ou de rayons identiques de plusieurs magasins).

TABLEAU 276
*Détermination du nombre de jours standard représenté
par chaque jour de la semaine*

Jours de la semaine	Lundi	Mardi	Mercredi	Jeudi	Vendredi	Samedi	Total	Moyenne
Chiffre d'affaires (Millions de dollars liduriens)	3	5	6	7	11	16	48	8
Conversion en jours standard	0,375	0,625	0,750	0,875	1,375	2,000	6	-

Supposons, par exemple, que dans ce magasin le chiffre d'affaires s'élève à 3750000 dollars liduriens en janvier 2001, et que le nombre moyen mensuel de jours ouvrables standard soit de 26. Connaissant les jours ouvrables de janvier 2001 (voir [tableau 277](#)), il est facile de déterminer le nombre de jours standard correspondant pour ce mois. Le chiffre d'affaires corrigé du mois de

TABLEAU 277
Calcul du nombre de jours standard du mois de janvier 2001

Jours		Lundi	Mardi	Mercredi	Jeudi	Vendredi	Samedi	Total
Nombre mensuel de jours	observés	4	5	5	4	4	4	26
	standard †	1,500	3,125	3,750	3,500	5,500	8,000	25,375

†. = nombre mensuel de jours observés x conversion en jours standard (donnée au [tableau 276](#)); exemple pour le lundi: $4 \times 0,375 = 1,500$.

janvier 2001 s'élève donc à $3750000 \times 26/25,375 = 3842365$ dollars liduriens, pour le rayon étudié. Ajoutons enfin que les corrections de l'inégalité du nombre de jours ouvrables par mois (ou trimestre ou semestre) conduit inéluctablement à observer que le cumul annuel des données corrigées ne coïncide plus avec le cumul annuel des données non corrigées (mais, d'habitude, la différence est relativement très faible).

Le mode de correction que l'on vient de présenter ne peut être utilisé lorsque le phénomène étudié conduit à de faibles valeurs pour le découpage spatial et temporel retenu, car on aboutit alors à des valeurs qu'il est impossible d'arrondir sans vider de sens la correction de l'inégalité du nombre de jours ouvrables. Par exemple, lorsque l'on s'intéresse à la demande mensuelle de pièces détachées d'un concessionnaire automobile, les références existantes sont, pour la plupart d'entre elles, très peu demandées, voire pas demandées certains mois. En pareil cas, devant l'inutilité de procéder à une correction de l'inégalité du nombre de jours ouvrables, il ne reste plus qu'à préconiser l'utilisation de périodes comportant le même nombre de jours ouvrables, par exemple un multiple d'un nombre entier de semaines, à moins d'utiliser un découpage temporel moins fin. En tout

état de cause, l'utilisation de périodes égales ne résout pas les problèmes occasionnés par certaines perturbations (présence de jours fériés, grèves...), sauf s'il y a report de la demande au sein de la même période.

Les tableaux 278 et 279 illustrent ce point. Ils ont été établis à partir d'une même simulation de 2600 demandes journalières suivant la même loi de Poisson de paramètre 0,5. Le nombre 2600 correspond à 5 jours ouvrables pendant 52 semaines sur 10 ans, sans prise en compte des jours fériés ni des années bissextiles. La moyenne journalière retenue conduit à une demande moyenne annuelle de 130. Le tableau 278 décrit une série annuelle comportant 13 périodes de 4 semaines, chaque période comportant donc un nombre constant de jours ouvrables.

TABLEAU 278
Demandes par périodes de 20 jours ouvrables établies à partir de la simulation de 2600 demandes quotidiennes[†]

Année	Numéro de périodes (de 20 jours)													Σ
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	
1	10	12	11	14	5	8	10	6	11	8	13	11	12	131
2	8	7	16	8	8	6	13	6	10	8	13	7	7	117
3	7	12	6	13	11	14	12	9	8	13	15	10	11	141
4	12	12	13	14	10	7	7	13	8	6	7	7	11	127
5	5	4	12	9	14	6	11	8	7	12	12	7	9	116
6	12	12	12	18	8	9	15	7	6	17	13	5	8	142
7	13	10	11	12	10	8	9	15	11	5	10	9	10	133
8	7	9	9	7	12	11	9	6	9	15	8	8	10	120
9	8	7	10	4	8	13	11	8	13	13	10	12	16	133
10	11	9	9	14	9	11	9	12	8	11	6	12	10	131
Σ	93	94	109	113	95	93	106	90	91	108	107	88	104	1291

Table des matières

Index thématique

†. Voir la représentation graphique de cette chronique à la figure 234, page 986.

La reconstitution de données mensuelles (tableau 279 et figure 234) a été réalisée pour montrer les distorsions souvent introduites par cette manière habituelle de procéder, notamment dans l'identification du processus caractérisant la demande. En effet, le test du χ^2 (voir tableau 281 de la page 986), habituellement utilisé pour juger de la plus ou moins grande adéquation de la distribution observée avec une distribution théorique de référence (ici une loi de Poisson dont la moyenne est estimée à partir de la série reconstituée d'observations soit mensuelles soit sur des périodes de 20 jours), conduit à une valeur calculée du χ^2 nettement plus forte avec la chronique mensuelle (15,1 qui correspond à un risque limite d'environ 10%, de rejet à tort de l'hypothèse selon laquelle «les écarts entre la distribution observée et la distribution théorique sont imputables aux fluctuations d'échantillonnage») qu'avec la chronique sur des périodes de 20 jours ouvrables (6,9 qui correspond à un risque limite de rejet à tort, d'environ 70%).

On peut ajouter que la solution suggérée ne modifie pas sensiblement l'importance des fichiers détenus par l'entreprise, ni les modes de raisonnement (on verra cependant que ce type de chroniques, caractérisé par des valeurs faibles ou

TABLEAU 279
Demandes mensuelles établies à partir de la simulation de 2 600 demandes quotidiennes et du tableau 280 du nombre mensuel de jours ouvrables[†]

Périodes	Mois												Σ
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	
1	15	10	14	8	8	10	10	9	7	16	12	12	131
2	8	9	15	9	7	12	11	9	9	13	8	7	117
3	7	12	8	14	13	15	12	10	12	14	13	11	141
4	12	12	19	11	9	7	12	12	7	7	7	12	127
5	5	5	14	7	16	9	9	8	9	13	12	9	116
6	13	12	15	16	8	18	8	8	11	19	6	8	142
7	15	10	10	15	8	13	12	13	8	9	9	11	133
8	8	8	9	8	16	10	10	8	12	12	9	10	120
9	8	8	9	5	12	13	10	12	14	11	13	18	133
10	12	9	11	13	10	11	13	10	11	9	11	11	131
Σ	103	95	124	106	107	118	107	99	100	123	100	109	1291

†. Voir illustration de cette chronique à la figure 245, page 1035.

TABLEAU 280
Nombre de jours ouvrables

Périodes	Mois											
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	23	20	21	22	22	21	23	21	22	23	20	22
2	22	20	22	22	21	22	23	21	22	22	21	22
3	21	20	23	22	21	22	22	22	22	21	22	22
4	21	20	23	21	22	22	21	23	22	21	22	22
5	22	20	23	20	23	22	21	23	21	22	23	20
6	23	20	22	21	23	21	22	23	20	23	22	20
7	23	20	21	22	23	20	23	22	21	23	21	21
8	23	20	21	22	22	21	23	21	22	23	20	22
9	23	20	21	22	22	21	23	21	22	23	20	22
10	21	20	23	22	21	22	22	22	22	21	22	22

Table des matières

Index thématique

souvent nulles, pose un problème particulier quant au choix des filtres linéaires utilisables).

Se pose également le problème d'incidents tels que les grèves, ruptures d'approvisionnement... entraînant une baisse momentanée d'activité. On peut¹ en tenir compte en diminuant d'autant le nombre de jours de référence de l'année, et du mois considéré, à condition toutefois que ne se produise aucun phénomène de rattrapage (c'est-à-dire de demande dont la satisfaction peut être différée). Dans le cas contraire, il est préférable de procéder à une estimation même très grossière des jours d'activité rattrapés et de leur répartition dans le temps.

1. Une autre méthode existe, l'utilisation de variables indicatrices, emploi de régression linéaire multiple (voir § III-1.1.2, page 1076).

FIGURE 234
Chronique mensuelle du tableau 279

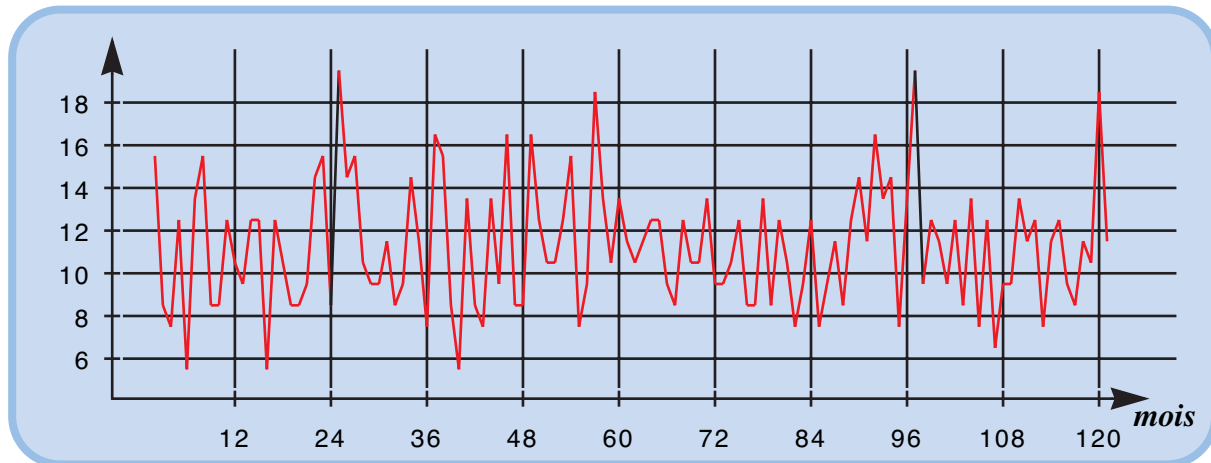


TABLEAU 281
Distribution de fréquence des demandes périodiques (20 jours) et
des demandes mensuelles

Série	Fréquence	Demande												\bar{x} et σ^2	Test du χ^2	
		5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	≥ 16			Σ
mensuelle	absolue	3	1	9	18	17	12	11	19	11	5	6	8	120	$\bar{x} = 10,76$ $\chi^2 = 15,1$	$\alpha \approx 10\%$
	relative %	2,5	0,8	7,5	15,0	14,2	10,0	9,2	15,8	9,2	4,2	5,0	6,7	100		
périodes (20 jours)	absolue	6	9	14	18	14	13	14	17	12	5	4	4	130	$\bar{x} = 9,95$ $\chi^2 = 6,95$	$\alpha \approx 70\%$
	relative %	4,6	6,9	10,8	13,9	10,8	10,0	10,8	13,1	9,2	3,9	3,1	3,1	100		

Table des matières

Index thématique

Le problème des jours fériés et des fêtes mobiles dont l'incidence peut fortement varier, suivant leur «place» dans la semaine, est plus délicat à résoudre. En effet, on peut procéder de la même façon que pour les incidents, ce qui du point de vue de la recherche de «régularité» sur le passé est sans doute préférable, mais conduit à des calculs complémentaires pour redresser les prévisions en fonction des jours fériés à venir. On peut également considérer le particularisme de ces jours comme partie intégrante de la saisonnalité. Ce dernier point de vue, qui d'une certaine façon correspond à une solution de facilité, ne peut être adopté que si le découpage temporel s'y prête.

Ces différents correctifs peuvent avoir pour effet d'expliquer dans certains cas la quasi-totalité de fluctuations que sans cela on aurait attribué à une influence saisonnière, compliquant ainsi inutilement l'analyse des chroniques.

Enfin, lorsque l'on travaille sur des chroniques en valeur, il est parfois préférable d'éliminer préalablement l'incidence de l'inflation sur l'évolution observée du phénomène étudié, surtout si le rythme d'inflation varie sensiblement d'une période à l'autre. Un indice des prix¹ sera alors utilisé pour déflater la série brute, pour se ramener «aux conditions économiques» d'une période de référence, comme l'illustre l'exemple du [tableau 282](#).

TABLEAU 282
Exemple de déflation d'une série

Période t	Janvier 2001	Février 2001	Mars 2001	Avril 2001
Indice de prix (base 100 janvier 1991)	117,2	116,9	117,3	117,5
Observation	1000	1130	950	1220
Valeur déflatée (aux conditions de janvier 1991)	$853 (= \frac{1000}{1,172})$	967	810	1038

Pour une analyse plus approfondie de ces points, vous pouvez vous reporter au [chapitre III](#), § II-2.2.3, page 182, pour la prise en compte de l'inflation dans les calculs économiques et au [chapitre XVII](#), pour l'usage des mathématiques financières.

I-2 Typologie des chroniques

On peut décomposer les chroniques les plus complexes en trois composantes, mais bon nombre d'entre elles n'en possèdent que deux, voire une seule²:

- une **composante tendancielle**, appelée encore **trend**, que l'on notera f_t (§ I-2.1, page 987);
- une **composante cyclique**, appelée encore **composante saisonnière**, que l'on notera c_t (§ I-2.2, page 988);
- une **composante aléatoire**, appelée encore **perturbation aléatoire** ou terme résiduel, que l'on notera ε_t (§ I-2.3, page 989).

On examinera successivement ces différentes composantes avant de voir comment elles se combinent.

I-2.1 Composante tendancielle

Elle est de nature déterministe et se décrit par une fonction continue et dérivable dans laquelle le temps est la *seule* variable explicative. La composante tendancielle décrit les tendances lourdes d'un phénomène sur longue période (plusieurs années) et est la seule composante susceptible de faire l'objet d'une approche de

1. Voir Giard (1995, [182]), chapitre I, § II.2.24.

2. Certains auteurs comme Lewandowski (1979, [281]), p. 40, ajoutent l'influence des variations calendaires, des fêtes mobiles et même les variations climatiques (lorsqu'elles jouent un rôle, ce qui est le cas pour la consommation de boisson par exemple) que nous considérons ici comme relevant du redressement préalable de la série, mais techniquement le résultat est le même. Lewandowski ajoute en outre une composante correspondant à l'influence des actions spéciales en marketing (campagne promotionnelle de l'entreprise ou de ses concurrents); la quantification de cette composante lorsqu'elle intervient, est fondamentale, tant dans une optique d'un marketing mix optimal que dans ses incidences sur la politique d'approvisionnement. Mais sa quantification est très délicate (voir Lewandowski (1979, [281]), chapitre IV, et plus particulièrement les p. 219 à 228) et dépasse le propos introductif que l'on s'est fixé dans ce chapitre.

type causal, c'est-à-dire d'être expliquée par un modèle économétrique faisant dépendre la variable étudiée, d'une ou plusieurs autres variables.

Cette composante tendancielle est le plus souvent décrite par une fonction polynomiale en t , de degré n , avec $n = 1$ ou 2 (mais très rarement $n > 2$): $f_t = at + b$, ou $f_t = at^2 + bt + c$. On utilise également assez souvent la fonction puissance pour décrire des évolutions de type exponentiel: $f_t = f_0 B^{at}$, ou $f_t = f_0 e^{bt}$ (avec $B^a = e^b$) et, pour certaines chroniques susceptibles de faire l'objet d'un phénomène de saturation, on utilise encore d'autres lois, comme la loi logistique $f_t = a/(b + e^{ct})$ ¹.

La détermination d'une fonction du temps associable à la composante tendancielle n'est pas toujours possible, si l'on raisonne avec un découpage temporel assez fin. C'est le cas, en particulier, si l'on étudie des chroniques de produits faisant l'objet de campagne: par exemple, pour un fabricant de bouteilles, le marché des cols de vins du Beaujolais vendus pour la mise en bouteille, dépend fondamentalement de l'importance de la récolte de l'année et d'une décision de stockage ou de déstockage prise par des organisations professionnelles: l'évolution tendancielle du marché des cols de Beaujolais s'effectue donc par palier et n'a donc de sens que pour une campagne complète (ne coïncidant pas avec l'année civile) et non au niveau de données mensuelles (ce qui conduit, comme on le verra, à une détermination bien particulière de la composante saisonnière).

I-2.2 Composantes cycliques

L'activité économique connaît une superposition de rythmes naturels. Si on prend par exemple la demande de transport des voyageurs, celle-ci connaît des fluctuations importantes au cours d'une journée, fluctuations qui se reproduisent avec régularité parce que le transport est lié à une activité professionnelle ou scolaire, elle-même soumise à des horaires d'une grande stabilité. Des fluctuations hebdomadaires se superposent à ces fluctuations journalières, elles sont liées à des usages professionnels et aux migrations personnelles du week-end. À ces fluctuations s'ajoutent également des fluctuations mensuelles liées à des habitudes de vacances, et des super-pointes, dont l'importance est liée à la plus ou moins grande proximité de fêtes mobiles et de week-ends.

Ces diverses fluctuations ne se retrouvent pas nécessairement dans les chroniques étudiées, car celles-ci peuvent correspondre à des données plus ou moins agrégées. L'une des composantes de cette agrégation de données est le découpage temporel retenu, lequel est largement tributaire du but poursuivi dans la constitution de la chronique, ou, s'il s'agit d'un « sous-produit » d'une activité de gestion, du « rythme » de cette activité (périodicité liée à une gestion de stocks de type calendaire, par exemple).

Ce qui caractérise avant tout la composante cyclique, c'est sa périodicité, c'est-à-dire que le comportement de la valeur observée pour une période t quelconque s'explique, par rapport au trend (lorsque ce dernier existe), par la valeur observée pour une période $t - k$, k étant la périodicité. La combinaison du trend et de la valeur cyclique sera étudiée au § I-2.4, page 994. L'analyse de la composante cyclique amène 3 remarques.

1. Pour une présentation de ces lois, voir Giard (1995, [182]), chapitre VI, § I.3.

- Tout d'abord, plusieurs cycles peuvent se superposer, autrement dit il est possible de décomposer la composante cyclique en plusieurs composantes c_{ht} de périodicités différentes k_h .
- Ensuite, dans un cycle donné, les composantes cycliques ne sont pas forcément toutes significativement différentes les unes des autres: par exemple dans une chronique mensuelle, il suffit que le seul mois d'août ait un «comportement» différent des autres mois pour que l'on parle d'un cycle annuel. Bien souvent les paramètres saisonniers c_t mis en évidence dans des études sommaires de chroniques n'en sont pas et s'expliquent en réalité par les perturbations aléatoires qui (pour reprendre notre exemple), sur un même mois donné et sur plusieurs années, ont très peu de chances de se compenser (ce point sera illustré à la fin du [page 996](#)).
- Enfin la composante cyclique peut, elle-même, connaître une évolution temporelle, mais, pour reprendre notre exemple, la référence de temps de cette évolution n'est alors plus le mois, mais l'année. La détection de cette évolution suppose que l'on dispose de chroniques assez longues. Certaines techniques de prévision (mais pas toutes) intègrent ces évolutions de composantes cycliques, en particulier le modèle de Holt-Winters (cf. [§ II-3.3, page 1056](#)) et les procédures de Box et Jenkins (cf. [§ III-2, page 1083](#)).

I-2.3 Composante aléatoire

Sa caractéristique essentielle est d'être non déterministe: la composante aléatoire, à laquelle se résument certaines chroniques, peut correspondre à des processus aléatoires de nature bien différente. On s'intéresse plus particulièrement à trois d'entre eux:

- processus purement aléatoire ([§ I-2.3.1](#)),
- processus aléatoire dont les paramètres varient au cours du temps ([§ I-2.3.2, page 993](#)),
- processus stationnaires ([§ I-2.3.3, page 994](#)).

I-2.3.1 Processus purement aléatoire

La variable aléatoire ε_t suit¹ un **processus purement aléatoire** si la chronique qu'elle génère est une séquence de réalisations de variables mutuellement indépendantes et de même distribution de probabilité.

L'indépendance des lois de probabilité implique en particulier que l'espérance mathématique et la variance de n'importe quelle perturbation aléatoire ε_t soient indépendantes de sa date t ($E(\varepsilon_t) = \mu$ et $V(\varepsilon_t) = \sigma_\varepsilon^2$, quelle que soit la période t). Habituellement, si l'espérance mathématique n'est pas nulle ($\mu \neq 0$), on considère que μ appartient à la composante tendancielle et l'on travaille sur la variable centrée ($\varepsilon_t - \mu$) qui a même variance (et une espérance mathématique nulle). Cela dit, cette façon de procéder n'est acceptable que pour quelques distributions de probabilités, comme celle de la loi Normale car ce type de dissociation n'a pas de sens pour des distributions de probabilités comme celle de la loi de Poisson, même si l'on peut considérer dans ce cas, qu'il y a fluctuation autour d'une valeur

1. Voir Chatfield (1975, [91]), p. 39-40.

centrale (la moyenne de cette loi de Poisson) laquelle peut s'analyser comme une composante tendancielle.

L'indépendance mutuelle implique que la covariance de 2 perturbations aléatoires décalées d'un nombre j quelconque de périodes soit nulle :

$$E(\varepsilon_t) = \mu ; V(\varepsilon_t) = \sigma_\varepsilon^2 ; \text{COV}(\varepsilon_t, \varepsilon_{t+j}) = 0, \forall j \text{ Processus purement aléatoire}$$

relation 380

Un processus purement aléatoire est encore appelé **bruit blanc**¹. La loi suivie par la variable aléatoire ε_t peut être quelconque, mais celle qui est la plus couramment utilisée est la loi Normale, au point que, pour certains auteurs², l'appellation «bruit blanc» implique nécessairement la normalité des perturbations aléatoires.

Ces différentes hypothèses sont celles qui sont habituellement utilisées en régression linéaire pour pouvoir prétendre que les coefficients de régression observés sur un échantillon constituent des estimations correctes des paramètres inconnus dans la population-mère, et l'hypothèse de normalité des résidus est également nécessaire pour juger par intervalle de confiance les différents paramètres de régression³.

Un exemple de perturbations aléatoires qui suivent un processus purement aléatoire caractérisé par une loi Normale d'écart-type $\sigma_\varepsilon = 10$ et de moyenne nulle, généré sur tableur à partir des fonctions statistiques et de générateurs de nombres aléatoires⁴, est donné au **tableau 283**.

TABLEAU 283
Génération aléatoire de 12 réalisations de la loi $\mathcal{N}(0,10)$

t	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
ε_t	8,27	-0,22	8,10	20,97	3,31	-11,22	-7,29	7,55	0,05	-14,33	1,61	2,95

Un certain nombre de chroniques se résument souvent à un processus purement aléatoire de moyenne non nulle. Prenons le cas de la demande pour un article donné pendant une période de 20 jours ouvrables, suivant une loi Normale de moyenne 167, et d'écart type 50 (ce qui correspond aux exemples du **chapitre XII, § I-1.1, page 772**); une simulation aléatoire de cette demande sur 25 périodes (de 20 jours ouvrables) génère la chronique donnée en colonne 4 du **tableau 284**. Il convient toutefois de rappeler que l'indépendance de la demande d'une période sur l'autre n'est réalisée que si les procédures de gestion de stock de cet article contrent efficacement des comportements erratiques (achat de précaution en cas de rupture de stock, spéculation à la rupture de stocks...). La colonne 5 du **tableau 284** sera utilisée au **§ I-2.3.2, page 993**.

L'analyse de la demande d'une référence peut être poussée plus loin, notamment lorsque l'on s'intéresse au secteur de la distribution et que l'on peut consi-

1. Ce terme, donné initialement par les ingénieurs à ce type de processus, est lié à son comportement en analyse spectrale; voir Kendall (1973, [260]) p. 99.

2. par exemple Anderson (1976, [15]) p 12-13.

3. Voir, par exemple, Giard (1995, [182]), chapitre VI, § II.1 et II.2.

4. Par exemple, sous Excel (en «localisation» française), cette génération aléatoire de réalisations d'une variable aléatoire suivant la loi $\mathcal{N}(0; 10)$ est obtenue par la formule: «= LOI.NORMALE.INVERSE(ALEA();0;10)».

TABLEAU 284
Simulation de processus purement aléatoire (colonne 4)
et avec tendance (colonne 5)

t	Aléa F_t †	u_t ‡ $P(U < u_t)$ $= F_t$	x_t *	z_t ††	t	Aléa F_t	u_t $P(U < u_t)$ $= F_t$	x_t	z_t
1	796	0,8274	208	211	14	791	0,8099	207	244
2	491	-0,0226	166	170	15	263	-0,6341	135	167
3	791	0,8099	207	215	16	675	0,4538	190	230
4	982	2,0969	272	283	17	413	-0,2198	156	195
5	630	0,3319	184	195	18	391	-0,2767	153	194
6	131	-1,1217	111	122	19	938	1,5382	244	299
7	233	-0,729	131	144	20	656	0,4016	187	238
8	775	0,7554	205	225	21	995	2,5758	296	365
9	502	0,005	167	187	22	885	1,2004	227	290
10	76	-1,4325	95	113	23	20	-2,0537	64	105
11	564	0,1611	175	201	24	421	-0,1993	157	215
12	616	0,295	182	210	25	971	1,8957	262	340
13	448	-0,1307	160	190	-	-	-	-	-

†. Nombres extraits d'une table de nombres au hasard = fréquence cumulée aléatoire (unité 1000).

‡. Variable centrée réduite correspondant à la fréquence cumulée de la colonne précédente (loi Normale).

*. Génération aléatoire du processus purement aléatoire $\mathcal{N}(167; 50)$, à partir de la variable centrée réduite aléatoire de la colonne précédente.

††. Génération aléatoire du processus aléatoire dont les paramètres varient au cours du temps, introduit en exemple au § I-2.3.2, page 993 : $\mathcal{L}(\epsilon_t) = \mathcal{N}(167 \cdot 1,01274^t; 50 \cdot 1,01274^{t/2})$.

Table des matières

Index thématique

dérer que l'on est en présence de phénomènes stationnaires (du moins sur un horizon suffisant). En effet, dans ce contexte, la demande qui s'exprime, au cours d'un intervalle de temps donné T, est le résultat de la «combinaison» de deux facteurs: le nombre n_T de clients ayant demandé cette référence et la demande d_i (supérieure à zéro) effectuée par chacun des clients i (i variant de 1 à n_T). La généralisation des codes à barres et l'introduction rapide de «scanners» ou de crayons optiques, dans le secteur de la «grande distribution», permet maintenant une saisie aisée de ces informations. Lorsque l'intervalle de temps considéré et l'espérance mathématique du nombre de clients n_T sont assez grands et que les demandes «individuelles» sont indépendantes dans le temps, on retombe assez classiquement sur une distribution normale de la demande sur la période (en vertu du théorème de la limite centrale). Dans le cas contraire et notamment lorsque l'on s'intéresse à un article durant une période correspondant à un délai d'obtention relativement courte, l'analyse de la demande est plus complexe; on y consacra le § I-2.3.1.1. Le problème se complique singulièrement lorsque le délai d'obtention est lui-même aléatoire (cf. § I-2.3.1.2, page 992). Ces problèmes seront traités assez sommairement ici; le lecteur intéressé par une analyse des travaux conduits dans ce domaine pourra consulter Bagchi, Haya et Ord (1984, [27]).

I-2.3.1.1 Intervalle de temps certain

Dans le cas discret, l'analyse de la demande d_i fait appel assez classiquement aux modèles statistiques suivants: loi binomiale, loi de Poisson, loi binomiale négative et loi géométrique. La sélection d'un modèle n'est pas aisée, mais l'on peut guider la réflexion sur des considérations de forme (symétrie...) et sur certaines caractéristiques analytiques telles que le rapport de la variance à la moyenne (rapport égal à 1 pour la loi de Poisson, inférieur à 1 pour la loi binomiale et supérieur à 1 pour la loi binomiale négative). Dans le cas continu, il pourra être fait appel à de nombreux modèles et notamment à ceux de la loi Normale (cas symétrique) et de la loi gamma (dissymétrie). Certains de ces modèles, en particulier ceux permettant d'avoir des valeurs négatives ou nulles, doivent être adaptés (distribution tronquée) pour pouvoir prétendre décrire correctement la demande portant sur un bien ou un service. Le problème de la reconnaissance du modèle approprié n'est pas facile, compte tenu de la taille des échantillons habituellement disponibles et des problèmes de fluctuations d'échantillonnage qui en résultent. Fréquemment, les risques de rejet à tort de plusieurs solutions alternatives sont voisins, ce qui rend le choix final difficile et partiellement arbitraire.

En ce qui concerne la modélisation de la distribution du nombre de clients par unité de temps, le modèle le plus fréquemment utilisé reste celui de la loi de Poisson. La combinaison des distributions théoriques de la demande d'un client avec celle du nombre de clients, sur une période T , donne quelques résultats analytiques décrits dans des ouvrages spécialisés comme celui de Kendall et Stuart (1976, [261]) et dans l'article synthétique de Bagchi, Haya et Ord (1984, [27]). On peut citer notamment:

- une demande d_i suivant une loi de Bernouilli (loi binomiale dans laquelle $n = 1$) se combine avec un nombre de clients n_T suivant une loi de Poisson pour donner une loi de Poisson (pour la demande d_T);
- une demande suivant une loi logarithmique se combine avec un nombre de clients suivant une loi de Poisson pour donner une loi binomiale négative;
- une demande d_i suivant une loi binomiale se combine avec un nombre de clients suivant une loi binomiale pour donner une loi binomiale;
- une demande d_i suivant une loi binomiale se combine avec un nombre de clients suivant une loi de Poisson pour donner une loi de Poisson.

I-2.3.1.2 Intervalle de temps aléatoire

Lorsque la distribution de demande d_T par intervalle de temps est connue (éventuellement, après une étude du type de celle qui précède) et que l'on s'intéresse à la distribution de cette demande sur un intervalle de temps aléatoire, on dispose également de quelques résultats analytiques:

- une demande d_T suivant une loi exponentielle se combine avec une durée suivant une loi géométrique pour donner une loi exponentielle;
- une demande d_T suivant une loi de Poisson se combine avec une durée suivant une loi exponentielle pour donner une loi géométrique;
- une demande suivant une loi de Poisson $\mathcal{P}(m)$ se combine avec une durée suivant une loi Normale $\mathcal{N}(m', s)$ pour donner une distribution de Hermite (pour $m' > m \cdot s^2$);

- un résultat analytique est disponible pour le cas de la demande suivant une loi de Poisson se combinant avec durée suivant une loi Normale tronquée ;
- une demande suivant une loi Normale se combine avec une durée suivant une loi exponentielle pour donner une loi exponentielle tronquée ;
- un résultat analytique est disponible pour le cas de la demande suivant une loi Normale se combinant avec une durée suivant une loi gamma.

D'un point de vue pratique, le nombre de résultats analytiques disponibles est relativement faible et même quasiment inexistant si l'on cherche à combiner les trois composantes (d_i , n_T , T). En outre, l'existence de solution analytique n'implique pas que la solution trouvée soit facile à mettre en œuvre d'un point de vue numérique. Pour cette raison, l'approche simulateur peut être utilisée pour fournir une estimation des probabilités recherchées. De nos jours, il est possible d'avoir immédiatement une bonne reconstitution de la distribution de probabilité résultant de la combinaison des distributions de probabilité (théoriques ou empiriques) de ces composantes, en utilisant certains add-ins de tableur (par exemple, @risk et Excel¹). S'il est nécessaire d'inclure ces reconstitutions de distribution dans des programmes de gestion pour des prises de décision automatiques, il suffit de reprendre dans l'ouvrage de Fishman (1978, [150]) les algorithmes disponibles pour la vingtaine de modèles de probabilité les plus usités et qui utilisent des générateurs de nombres aléatoires.

I-2.3.2 Processus aléatoire dont les paramètres varient au cours du temps

Table des matières

Index thématique

On classera dans cette catégorie les processus aléatoires dont les réalisations sont indépendantes d'une période sur l'autre, mais dont les paramètres évoluent au cours du temps. Cette évolution est de nature déterministe, mais son observation est des plus difficiles puisque chaque observation est une réalisation d'une variable aléatoire différente des précédentes. Pour bien faire comprendre ce point, nous utiliserons un exemple numérique, mais auparavant résumons les propriétés de cette classe de processus aléatoire :

$$E(\varepsilon_t) = \mu_t ; V(\varepsilon_t) = \sigma_{\varepsilon_t}^2 ; \text{COV}(\varepsilon_i, \varepsilon_{t+j}) = 0 \quad \textit{Processus aléatoire dont les paramètres varient au cours du temps} \quad \textit{relation 381}$$

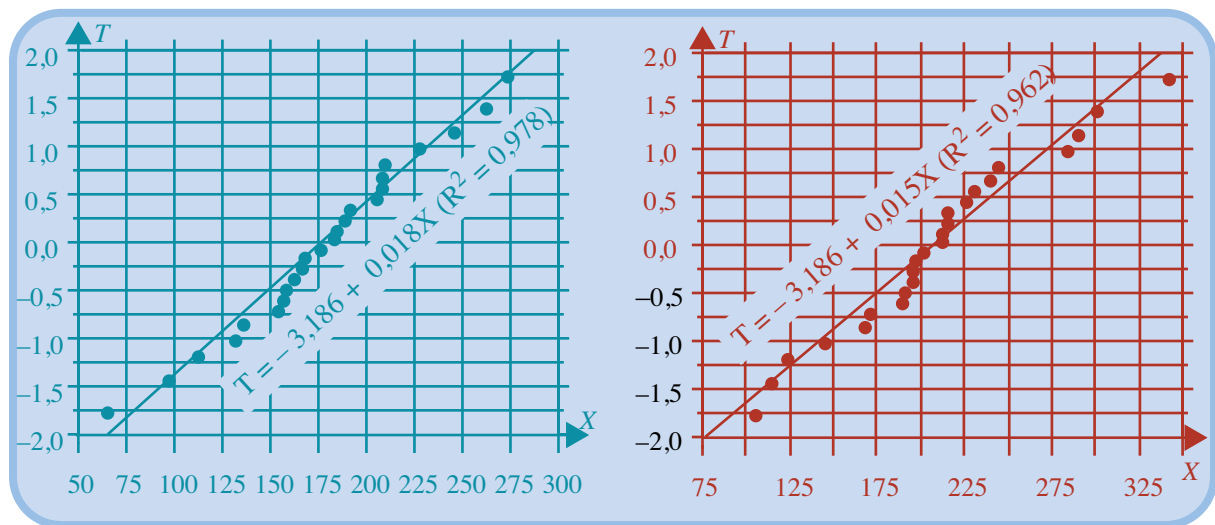
Illustrons par un exemple ce type de processus : si la demande de l'article étudiée précédemment s'accroît en moyenne et en variance de 20% par an et si l'année comporte 288 jours ouvrables, ce qui correspond à un taux de croissance de 1,274% par période de 20 jours ouvrables, la demande pour la période t suivra la loi Normale : $\mathcal{L}(\varepsilon_t) = \mathcal{N}(167 \cdot 1,01274^t ; 50 \cdot 1,01274^{t/2})$. La colonne 5 du [tableau 283 \(page 990\)](#) fournit une simulation de 25 occurrences de cette variable aléatoire.

Le problème pratique qui se pose lorsque l'on rencontre de telles chroniques est celui de l'identification de leurs lois d'évolution. La [figure 235 de la page 994](#) retrace les droites de Henry correspondant aux colonnes 4 et 5 du [tableau 283 de la page 990](#) et leurs équations de régression (sur les variables centrées réduites correspondantes²). Une analyse un peu rapide peut laisser croire, dans le second

1. Voir Giard (1995, [182]), chapitre II, §II.3

FIGURE 235

Droites de Henry sur les colonnes 4 et 5 du tableau 284 de la page 991



cas, que la chronique étudiée se réduit à un processus purement aléatoire, mais l'utilisation de filtres linéaires (cf. page 1015) permet en réalité de détecter la présence d'une évolution affectant la moyenne du processus étudié.

I-2.3.3 Processus stationnaires

Par rapport au processus purement aléatoire, le processus stationnaire se caractérise par une dépendance de ε_t avec $\varepsilon_{t-1}, \varepsilon_{t-2}, \dots, \varepsilon_{t-k}$ (k pouvant du reste être égal à 1 et donc la dépendance se limiter à une seule période), la moyenne et la variance de ε_t restant indépendantes de t . La dépendance entre ε_t et ε_{t-j} (avec $j \leq k$), se traduit par la propriété suivante: la covariance entre ε_t et ε_{t-j} ($\text{COV}(\varepsilon_t, \varepsilon_{t-j})$) reste constante et ne dépend que du décalage j et non de la date t :

$$E(\varepsilon_t) = \mu ; V(\varepsilon_t) = \sigma_\varepsilon^2 ; \text{COV}(\varepsilon_t, \varepsilon_{t+j}) = K_j \text{ Processus stationnaire}$$

relation 382

Une présentation rigoureuse des processus stationnaires nécessite¹ de faire appel à la notion de *distribution de probabilité jointe*, ce qui ne sera pas fait ici. De tels processus se rencontrent assez souvent et posent des problèmes en régression linéaire, où leur occurrence biaise les estimateurs classiquement utilisés; mais on verra au § III-3, page 1101, comment régler ces délicats problèmes.

I-2.4 Combinaison des composantes d'une chronique

Les différentes composantes d'une chronique, f_t le trend, c_t la composante cyclique, et ε_t la perturbation aléatoire, peuvent se combiner soit de façon additive, soit de façon multiplicative. Toutes les combinaisons sont a priori possibles, mais en réalité trois d'entre elles seulement sont habituellement utilisées²:

2. Voir Giard (1995, [182]), chapitre III, § II.1.3, pour une présentation de la régression sur droite de Henry.

1. Voir par exemple Chatfield (1975, [91]), p. 35-36, Nelson (1973, [315]), chapitre V, Box et Jenkins (1970, [65]) p. 26.

$$\begin{aligned} x_t &= f_t + c_t + \varepsilon_t && \text{(modèle 1)} \\ x_t &= f_t \cdot c_t \cdot \varepsilon_t && \text{(modèle 2)} \\ x_t &= (f_t \cdot c_t) + \varepsilon_t && \text{(modèle 3)} \end{aligned}$$

Le modèle 1 est dit **modèle additif** et le modèle 2 **modèle multiplicatif**. Le modèle 2 se ramène sans difficulté au modèle 1 en effectuant une transformation logarithmique ($x_t = f_t \cdot c_t \cdot \varepsilon_t \Leftrightarrow \log x_t = \log f_t + \log c_t + \log \varepsilon_t$). Dans un certain nombre de cas, on effectue une transformation logarithmique pour stabiliser la variance, c'est-à-dire pour empêcher la variance de croître avec t , lorsque x_t croît lui-même avec t . Le modèle 3 qui est un *modèle mixte*¹ est d'un usage moins fréquent, et son étude analytique est plus délicate. Toutefois, on en verra une application fort intéressante avec le modèle de Holt et Winters (cf. § II-3.3, page 1056).

En ce qui concerne la composante cyclique, on convient² le plus souvent :

- Pour le modèle 1, que la somme des c_t sur un cycle complet est nécessairement nulle, autrement dit qu'il y a compensation des fluctuations saisonnières au cours du cycle de façon à ce qu'il n'inclut aucun mouvement tendanciel.
- Pour le modèle multiplicatif, on effectue la même hypothèse, mais sur le modèle 2 transformé en logarithme. Si la somme des logarithmes des composantes cycliques est nulle, cela revient à dire³ que leur produit est égal à 1, ou encore que leur moyenne géométrique est égale à l'unité.

Cette hypothèse de nullité de la somme des composantes cycliques dans le cas du modèle additif (ou sa «transcription» dans le cas du modèle multiplicatif) est connue sous le nom de **principe de conservation des aires**, mais en réalité elle ne s'impose pas toujours, comme on le verra au § III-1.1, page 1071. L'application de ce principe implique que la composante aléatoire a une espérance mathématique nulle dans le cas où cette composante joue additivement (modèles 1 et 3) et à avoir une espérance mathématique égale à 1 dans le cas où cette composante joue de façon multiplicative (ce que l'on justifiera à la page 1073 pour le modèle 2, la justification pour le modèle 3 étant similaire).

Table des matières

Index thématique

$$\sum_{j=1}^m c_j = 0 \text{ (principe de conservation des aires : modèle additif) } \quad \text{relation 383}$$

$$\prod_{j=1}^m c_j = 1 \text{ (principe de conservation des aires : modèle multiplicatif) } \quad \text{relation 384}$$

L'exemple suivant illustre la différence entre ces 3 modèles. On référencera par l'indice supplémentaire 1, c_t et ε_t ($\rightarrow c_{1t}$ et ε_{1t}) lorsque ceux-ci jouent de façon

2. Note de la page précédente. Voir Chatfield (1975, [91]), p. 15-16.

1. Un autre modèle mixte, que l'on utilise parfois est : $x_t = f_t \cdot c_{1t} + c_{2t} + \varepsilon_t$.

2. Voir Calot (1973, [82]) p. 355-357.

3. $\sum_{j=1}^m \log c_j = 0 \rightarrow \prod_{j=1}^m c_j = 1$; mais très souvent, pour simplifier les calculs, on se contente de $\sum_{j=1}^m c_j = m$, qui donne des valeurs proches. Lorsque cette égalité n'est pas respectée, on corrige alors les coefficients en les multipliant par $m / \sum_{j=1}^m c_j$ dans le modèle additif. Sur ce point, voir page 1019.

additive, et par l'indice 2 lorsqu'ils jouent de façon multiplicative. Les chroniques sont trimestrielles et portent sur 3 ans.

$$f_t = 100 + 2t + 0,1t^2$$

$$c_{1t} = \{+5; -2; -4; +1\} \text{ (incidence additive)}$$

$$c_{2t} = \{1,049; 0,981; 0,963; 1,009\} \text{ (incidence multiplicative)}$$

$L(\varepsilon_{1t}) = N(0, 10)$, avec génération aléatoire (cf. [tableau 283, page 990](#))

$$\varepsilon_{2t} = e^{\varepsilon_{1t}/100}$$

TABLEAU 285
Construction de 3 modèles à partir des mêmes composants

t	f _t	c _{1t}	ε _{1t}	f _t +c _{1t}	c _{2t}	f _t ·c _{2t}	ε _{2t}	Modèle 1	Modèle 2	modèle 3
								f _t +c _{1t} +ε _{1t}	f _t ·c _{2t} ·ε _{2t}	(f _t ·c _{2t})+ε _{1t}
1	102,10	5	8,27	107,10	1,049	107,10	1,086	115,37	116,34	115,37
2	104,40	-2	-0,22	102,40	0,981	102,42	0,998	102,18	102,19	102,20
3	106,90	-4	8,10	102,90	0,963	102,94	1,084	111,00	111,63	111,04
4	109,60	1	20,97	110,60	1,009	110,59	1,233	131,57	136,39	131,56
5	112,50	5	3,31	117,50	1,049	118,01	1,034	120,81	121,98	121,32
6	115,60	-2	-11,22	113,60	0,981	113,40	0,894	102,38	101,37	102,18
7	118,90	-4	-7,29	114,90	0,963	114,50	0,930	107,61	106,45	107,21
8	122,40	1	7,55	123,40	1,009	123,50	1,078	130,95	133,19	131,05
9	126,10	5	0,05	131,10	1,049	132,28	1,001	131,15	132,35	132,33
10	130,00	-2	-14,33	128,00	0,981	127,53	0,866	113,67	110,50	113,20
11	134,10	-4	1,61	130,10	0,963	129,14	1,016	131,71	131,23	130,75
12	138,40	1	2,95	139,40	1,009	139,65	1,030	142,35	143,83	142,60

Table des matières

Index thématique

On peut noter, sur l'exemple numérique du modèle 1, que la composante aléatoire (générée aléatoirement ici) peut biaiser le jugement que l'on porte sur la composante tendancielle, car une régression linéaire en t effectuée sur les ε_t donne: $\varepsilon_t = -1,004t + 8,169$ ($\hat{\rho}^2 = 0,058$) ou sur les composantes cycliques, car si l'on somme par trimestre les ε_t , on obtient

- trimestre 1: 8,27 + 3,31 + 0,05; moyenne = + 3,88
- trimestre 2: -0,22 - 11,22 - 14,33; moyenne = - 8,59
- trimestre 3: 8,1 - 7,29 + 1,61; moyenne = + 0,81
- trimestre 4: 20,97 + 7,55 + 2,95; moyenne = + 10,49

Cet exemple illustre bien la grande difficulté qu'il y a à décomposer correctement une chronique en tendance, saisonnalité et perturbations aléatoires.

On utilisera comme exemple de chronique avec saisonnalité, trend et perturbations aléatoires, une chronique de ventes du rayon de journaux de l'hypermarché Casimouth d'Alphaville, redressée pour tenir compte de l'incidence des grèves corrigée au prorata des jours ouvrables et de l'inflation (cf. § I-1, page 982). Les données sont fournies au [tableau 286](#). Ce type de tableau, dans lequel on repère les années en lignes et les mois en colonnes, est connu sous le nom de **tableau de Buys-Ballot**. La représentation graphique de cette chronique est donnée à la [figure 236](#).

FIGURE 236

Chronique de ventes du rayon de ventes de journaux du Casimouth d'Alphaville

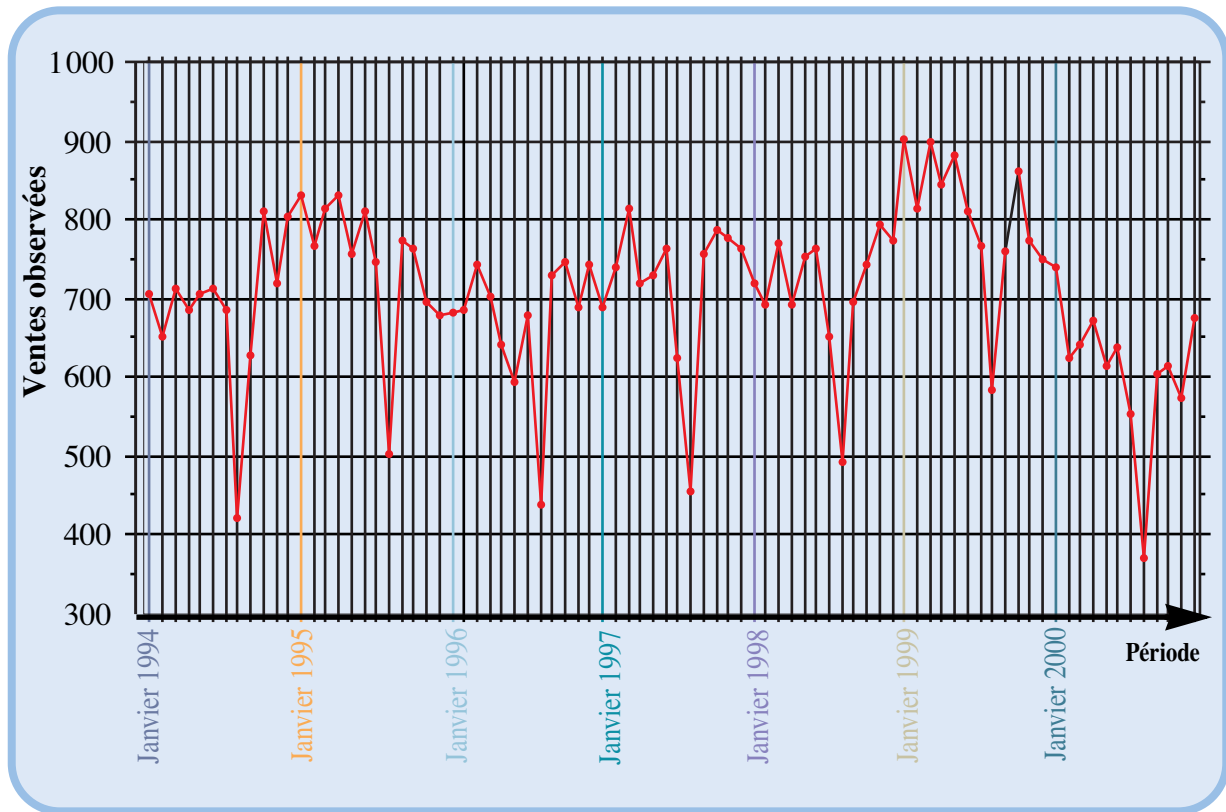


Table des matières

TABLEAU 286

Ventes du rayon de ventes de journaux du Casimouth d'Alphaville

Index thématique

	Janvier	Février	Mars	Avril	Mai	Juin	Juillet	Août	Septembre	Octobre	Novembre	Décembre	Total	Moyenne
1994	705	653	713	684	707	714	684	422	629	811	721	803	8246	687
1995	831	765	815	830	756	811	746	504	774	762	695	680	8969	747
1996	682	684	743	701	641	595	679	439	728	746	688	743	8069	672
1997	689	741	815	719	730	764	626	456	757	786	778	762	8623	719
1998	719	692	771	692	753	764	652	494	696	742	794	773	8542	712
1999	901	815	900	846	883	811	766	584	761	863	773	751	9654	805
2000	739	624	640	672	615	638	555	372	605	615	573	674	7322	610
Total	5266	4974	5397	5144	5085	5097	4708	3271	4950	5325	5022	5186	59425	4952

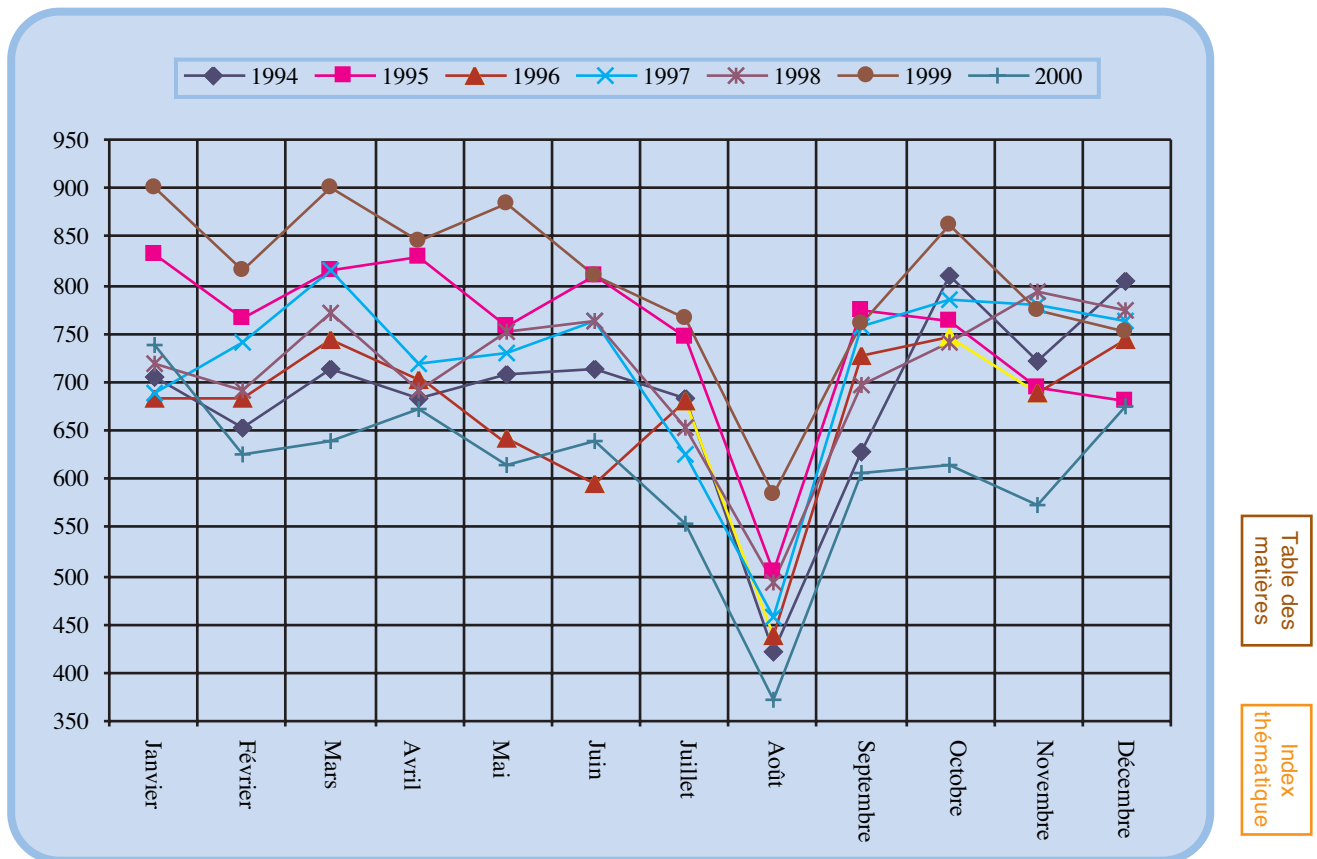
I-3 Détection de la saisonnalité

La détection de la saisonnalité d'une chronique est moins évidente qu'il ne paraît de prime abord. Certes, l'expérience et le bon sens sont irremplaçables pour fournir des hypothèses de saisonnalité, mais, bien souvent, l'idée que l'on peut se faire des fluctuations temporelles d'une demande se résume à une appréciation qualitative portant sur une ou deux « superpointes » ou « super creux » (les fêtes de

fin d'année et le mois d'août), sans forcément savoir si la saisonnalité est aussi forte pour tous les articles ou toutes les prestations. Un instrument utile de détection de la saisonnalité est le graphique superposé, c'est-à-dire le report sur un même graphique mensuel d'une chronique annuelle (voir figure 237), mais il est bien souvent insuffisant.

FIGURE 237

Graphique superposé des ventes du rayon de ventes de journaux du Casimouth d'Alphaville



Il convient de bien distinguer deux problèmes dans cette détection de la saisonnalité :

- Le premier est de savoir s'il existe un rythme saisonnier, sans se poser la question de savoir si chaque période constitutive d'un cycle saisonnier a un comportement réellement spécifique ; autrement dit, on peut détecter une saisonnalité pour une chronique annuelle dans laquelle deux mois seulement sont significativement différents du comportement « moyen » caractérisant les dix autres mois.
- Le second problème ne se pose que si l'on a répondu affirmativement au premier ; il s'agit alors de quantifier la saisonnalité de chaque période constitutive d'un cycle, et d'en détecter le caractère plus ou moins significatif.

Les techniques que nous allons aborder dans ce § I-3 ne concernent que le premier de ces deux problèmes. La première d'entre elles est le corrélogramme, et la seconde l'utilisation de tests statistiques.

I-3.1 Le corrélogramme

Le corrélogramme est la représentation graphique d'une série de coefficients d'autocorrélation. Après avoir défini le coefficient d'autocorrélation (§ I-3.1.1), nous en verrons l'interprétation (§ I-3.1.2, page 1002).

I-3.1.1 Le coefficient d'autocorrélation

Le coefficient d'autocorrélation n'est qu'un coefficient de corrélation un peu particulier. Mais rappelons tout d'abord ce qu'est le coefficient de corrélation r entre une variable Z et une variable Y : c'est un indicateur statistique de la plus ou moins bonne liaison linéaire entre ces deux variables Z et Y , que l'on définit

comme: $\rho = \frac{\text{COV}(Z, Y)}{\sqrt{\text{V}(Z)\text{V}(Y)}}$ dont les relations de définition et de calcul sont:

$$\rho = \frac{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (z_i - \bar{z})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (z_i - \bar{z})^2\right) \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2\right)}} = \frac{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n z_i \cdot y_i - \bar{z} \cdot \bar{y}}{\sqrt{\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n z_i^2 - \bar{z}^2\right) \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i^2 - \bar{y}^2\right)}}$$

relation 385

TABLEAU 287
Calcul du coefficient de corrélation entre Z et Y

i	y_i	z_i	$z_i \cdot y_i$	z_i^2	y_i^2
1	16	13	208	169	256
2	13	7	91	49	169
3	7	18	126	324	49
4	18	24	432	576	324
5	24	19	456	361	576
6	19	15	285	225	361
7	15	28	420	784	225
8	28	30	840	900	784
9	30	33	990	1089	900
10	33	23	759	529	1089
11	23	32	736	1024	529
$n = 12$	32	39	1248	1521	1024
(Σ)	258	281	6591	7551	6286
$\frac{(\Sigma)}{n}$	21,50	23,42	549,25	629,25	523,83

L'application de cette relation sur le tableau de données ponctuelles 287 donne $\rho = \frac{549,25 - 21,5 \times 23,42}{\sqrt{(629,25 - 23,42^2)(523,83 - 21,5^2)}} = 0,649$. Si les couples d'observation portent sur la même variable X , avec un décalage d'une période: $y_i = x_t$ et $z_i = x_{t-1}$ le coefficient de corrélation est alors appelé **coefficient d'autocorrélation**.

Table des matières

Index thématique

tion, le préfixe «auto» étant ajouté pour indiquer que l'on travaille en réalité sur la même variable. Le calcul du coefficient d'autocorrélation de la chronique du **tableau 288** conduit à recréer le **tableau 287 de la page 999** qui comporte 12 couples de valeurs (y_i, z_i) et est tel :

- que Y est une chronique constituée des $13 - 1 = 12$ premières observations de la chronique X du **tableau 288**
- et que Z est une chronique constituée des $13 - 1 = 12$ dernières observations de la chronique X du **tableau 288**.

Le coefficient d'autocorrélation est donc 0,649.

TABLEAU 288
Chronique utilisée pour introduire le coefficient d'autocorrélation

t	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
x_t	16	13	7	18	24	19	15	28	30	33	23	32	39

Le décalage retenu ici était d'une période, mais on peut aussi bien retenir un décalage quelconque j . Si $j = 3$ par exemple, on «tire» de la chronique initiale une série statistique de $13 - 3$ couples de valeurs (z_i, y_i) , composée d'une série Y , constituée des $13 - 3 = 10$ premières observations de la chronique X du **tableau 288** et d'une série Z , constituée des $13 - 3$ dernières observations, ce qui conduit au **tableau 289** à partir duquel on obtient $\rho = 0,589$.

TABLEAU 289
Calcul du coefficient d'autocorrélation d'ordre 3

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y_i	16	13	7	18	24	19	15	28	30	33
z_i	18	24	19	15	28	30	33	23	32	39

On peut définir autant de coefficients d'autocorrélation que de décalages possibles (c'est-à-dire ici 10, car, pour que le calcul du coefficient de corrélation garde un sens, il faut au moins 3 couples de valeurs). Pour différencier ces coefficients d'autocorrélation, on les indice par le décalage, c'est-à-dire que l'on utilise la notation ρ_j (dans notre exemple, nous avons donc $\rho_1 = 0,649$ et $\rho_3 = 0,589$), et l'on parle de **coefficient d'autocorrélation d'ordre j** (ou de *coefficient d'autocorrélation de décalage j*).

La généralisation de ce qui vient d'être vu conduit à un calcul du coefficient ρ_j d'autocorrélation d'ordre j , en deux temps :

- formation des couples $(y_i = x_t, z_i = x_{t+j})$,
- puis application de l'une des formules précédentes à cette série statistique (y_i, z_i) .

mais on peut également condenser ces deux étapes en une, à l'aide d'indices appropriés, les formules ρ_j devenant alors :

$$\rho_j = \frac{\frac{1}{n-j} \sum_{t=1}^{n-j} \left\{ \left(x_t - \frac{1}{n-j} \sum_{i=1}^{n-j} x_i \right) \cdot \left(x_{t+j} - \frac{1}{n-j} \sum_{i=j+1}^n x_i \right) \right\}}{\sqrt{\left[\frac{1}{n-j} \sum_{t=1}^{n-j} \left\{ x_t - \frac{1}{n-j} \sum_{i=1}^{n-j} x_i \right\}^2 \right] \left[\frac{1}{n-j} \sum_{t=1}^{n-j} \left\{ x_{t+j} - \frac{1}{n-j} \sum_{i=j+1}^n x_i \right\}^2 \right]}}$$
, d'où:

$$\rho_j = \frac{\frac{1}{n-j} \sum_{t=1}^{n-j} x_t \cdot x_{t+j} - \left(\frac{1}{n-j} \sum_{t=1}^{n-j} x_t \right) \left(\frac{1}{n-j} \sum_{t=j+1}^n x_t \right)}{\sqrt{\left[\frac{1}{n-j} \sum_{t=1}^{n-j} x_t^2 - \left(\frac{1}{n-j} \sum_{t=1}^{n-j} x_t \right)^2 \right] \left[\frac{1}{n-j} \sum_{t=1}^{n-j} x_{t+j}^2 - \left(\frac{1}{n-j} \sum_{t=j+1}^n x_t \right)^2 \right]}}$$
 relation 386

Le **corrélogramme** n'est autre que la représentation graphique des couples (k, ρ_k) , avec k en abscisse et ρ_k en ordonnée. La **figure 238**, correspond au corrélogramme de la chronique des ventes du rayon de Casimouth. La signification des bornes inférieures et supérieures sera faite au § I-3.1.2, page 1004, où l'on interprétera les résultats trouvés. La **méthode de Quenouille** (cf. Kendall, [260], p. 93) est utilisée ici¹ (voir calculs du **tableau 290 de la page 1002**), car elle permet de réduire de façon importante le biais obtenu en calculant directement le coefficient d'autocorrélation d'ordre j sur l'intégralité de la chronique.

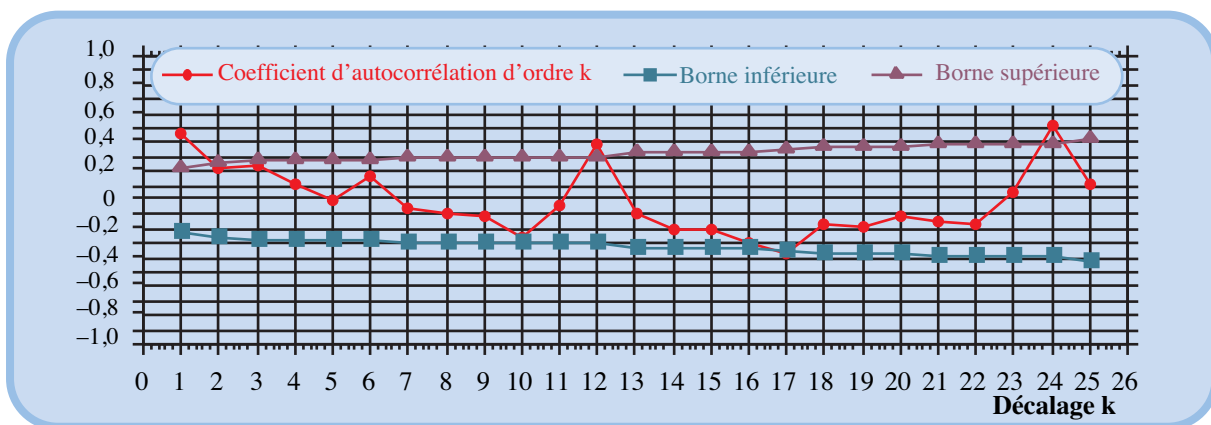
Table des matières

$$\hat{\rho}_k = 2r_k - \frac{r'_k + r''_k}{2}$$
 Méthode de Quenouille relation 387

Index thématique

où r_k est le coefficient d'autocorrélation d'ordre k calculé sur la chronique initiale, r'_k est le coefficient d'autocorrélation d'ordre k calculé sur la première moitié de cette chronique et r''_k est le coefficient d'autocorrélation d'ordre k calculé sur la seconde moitié de cette chronique.

FIGURE 238
Corrélogramme de la chronique des ventes de Casimouth.



L'expérience montre qu'il est souhaitable d'établir les corrélogrammes pour une valeur maximale de k correspondant à deux fois le nombre de périodes du

1. Cette méthode est à utiliser sur des séries suffisamment longues car elle risque autrement, en cas de série «chaotique» n de fournir des estimations aberrantes (c'est-à-dire sortant de la fourchette $[-1; +1]$).



TABLEAU 290

Calculs du corrélogramme de la chronique des ventes de Casimouth (tableau 279 de la page 985) selon la méthode de Quenouille.

Décalage k	Coefficient d'auto-corrélation calculé sur la série des			$\frac{r'_k + r''_k}{2}$ $\hat{\rho}_k = 2r_k - \frac{r'_k + r''_k}{2}$	Décalage k	Coefficient d'auto-corrélation calculé sur la série des			$\frac{r'_k + r''_k}{2}$ $\hat{\rho}_k = 2r_k - \frac{r'_k + r''_k}{2}$
	84 valeurs r_k	42 premières valeurs r'_k	42 dernières valeurs r''_k			84 valeurs r_k	42 premières valeurs r'_k	42 dernières valeurs r''_k	
1	0,436	0,229	0,572	0,472	14	-0,293	-0,416	-0,364	-0,196
2	0,221	0,059	0,372	0,227	15	-0,228	-0,117	-0,391	-0,202
3	0,254	0,210	0,308	0,249	16	-0,304	-0,245	-0,368	-0,302
4	0,099	-0,055	0,221	0,115	17	-0,354	-0,141	-0,526	-0,375
5	0,027	-0,036	0,130	0,007	18	-0,178	-0,032	-0,356	-0,162
6	0,157	0,071	0,236	0,161	19	-0,292	-0,371	-0,409	-0,194
7	-0,094	-0,242	-0,023	-0,056	20	-0,176	-0,103	-0,393	-0,104
8	-0,109	-0,217	-0,043	-0,088	21	-0,103	0,281	-0,385	-0,154
9	-0,122	-0,094	-0,172	-0,111	22	-0,124	0,087	-0,264	-0,160
10	-0,275	-0,306	-0,266	-0,264	23	0,145	0,461	-0,005	0,062
11	-0,071	-0,130	-0,090	-0,032	24	0,600	0,794	0,557	0,525
12	0,352	0,369	0,244	0,398	25	0,126	0,099	0,176	0,115
13	-0,155	-0,312	-0,122	-0,093					

cycle présumé, plus 1. Dans le cas de données mensuelles et de présomption d'un cycle annuel, cette règle empirique conduit à un corrélogramme portant sur $2 \times 12 + 1 = 25$ valeurs de coefficients d'autocorrélation.

I-3.1.2 Interprétation du coefficient d'autocorrélation

Tout d'abord, comme n'importe quel coefficient de corrélation, le coefficient d'autocorrélation ρ_j est compris entre -1 et $+1$, et plus sa valeur absolue est proche de l'unité, plus forte est la liaison entre x_t et x_{t-j} .

Cette liaison peut impliquer l'existence d'un cycle saisonnier de j périodes, plusieurs cycles pouvant d'ailleurs se superposer. Elle peut également être le signe que la composante aléatoire suit un processus stationnaire (défini au § I-2.3.3, page 994 et sur lequel on reviendra en détail au § III-2, page 1083), surtout si les premiers coefficients d'autocorrélation sont significativement différents de zéro. Elle peut enfin s'expliquer par l'existence d'un trend lequel peut ou non se combiner avec les composantes cycliques.

Mais se pose alors un problème d'appréciation. En effet, si l'on se réfère au modèle théorique d'un processus purement aléatoire (voir définition au § I-2.3.1, page 989) qui est la seule chronique sur laquelle il ne reste plus rien à expliquer, les coefficients d'autocorrélation ρ_j sont tous nuls (pour j différent de 0 bien entendu). Or on n'observera pas de coefficients d'autocorrélation strictement égaux à zéro et certains peuvent ne pas être significativement différents de zéro.

La théorie de la distribution d'échantillonnage des coefficients d'autocorrélation fournit un instrument d'interprétation du corrélogramme.

Le coefficient d'autocorrélation d'ordre j de la population mère, dont est (implicitement) extraite notre chronique, est noté ρ_j et est inconnu. Celui que l'on observe sur un échantillon de $n - j$ valeurs (tirés d'une chronique de n termes) est le seul que l'on connaisse en définitive, et il sera noté r_j . Mais si l'on suppose (dans l'absolu) qu'il y a une infinité d'échantillons de taille n que l'on peut extraire de la population mère, on peut définir une variable aléatoire que l'on notera r_{j_n} correspondant au coefficient d'autocorrélation d'ordre j observable dans un échantillon de taille n , et qui est représentative de la distribution d'échantillonnage des coefficients d'autocorrélation d'ordre j (de même que l'on note «classiquement» f_n la fréquence d'apparition d'un caractère donné, observable dans un échantillon de taille n , et f celle observée dans un échantillon donné). On montre¹, si $\rho_j = 0$, que :

$$E(r_{j_n}) = -\frac{1}{n-j} \quad \text{relation 388}$$

c'est-à-dire qu'en moyenne il faut s'attendre (si l'hypothèse d'une autocorrélation nulle est fondée) à observer des coefficients plutôt légèrement négatifs et que :

$$V(r_{j_n}) \approx \frac{1}{n} \quad \text{relation 389}$$

Table des matières

Index thématique

Lorsque les perturbations aléatoires ε_t suivent en outre une loi Normale, ce qui est le cas la plupart du temps (aléas provoqués par de très nombreuses causes accidentelles, indépendantes, et dont aucune n'est prépondérante) on peut alors calculer un intervalle de confiance à 95 % pour tester l'hypothèse du bruit blanc puisque r_{j_n} suit alors une loi Normale.

$$\mathcal{L}(r_{j_n}) = \mathcal{N}\left(-\frac{1}{n-j}, \frac{1}{\sqrt{n}}\right) \quad \text{relation 390}$$

La règle approximative suivante (qui considère comme nulle l'espérance mathématique et approxime par 2, le «classique» 1,96) est souvent utilisée : «il y a 95 % de chances que des coefficients d'autocorrélation ne soient pas significativement différents de zéro lorsqu'ils sont compris dans la fourchette $\pm 2/\sqrt{n}$ ». Cette règle implique que, sur un corrélogramme de 20 coefficients non significativement différents de zéro, on déclarera en moyenne (c'est-à-dire si la même règle est très souvent utilisée) à tort l'un de ces coefficients significativement différent de zéro.

Dans la chronique de ventes du rayon de ventes de journaux du Casimouth d'Alphaville, l'application de cette règle donne une fourchette de $\pm 0,22$. L'examen du corrélogramme de la [figure 238, page 1001](#), suggère tout d'abord l'existence d'une saisonnalité annuelle (ce que suggérait déjà fortement le

1. Voir Kendall (1976, [260]), p. 92 pour l'espérance mathématique et p. 89, pour la variance. On peut ajouter que l'on montre que $V(\rho_{1n})$ est inférieur à $\frac{1}{n-1}$ plus un terme de l'ordre de n^{-2} (voir [260], p. 90).

graphique superposé de la [page 998](#)), puisque r_{12} et r_{24} sont nettement significatifs et positifs. Ses coefficients d'autocorrélation d'ordre 1, 2 et 3 sont significativement positifs, et ceux d'ordre 14, 15, 16 et 17 sont significativement négatifs. Ces informations seront exploitables, par comparaison avec des corrélogrammes de référence, dans le cadre des approches de type «Box et Jenkins» (cf. [§ III-2, page 1083](#) et [§ III-3, page 1101](#)), mais, en cas d'écart-type important, l'interprétation du corrélogramme peut s'avérer difficile.

On montre également que, d'une façon générale, la variance de la distribution d'échantillonnage du coefficient d'autocorrélation d'ordre j dépend de **tous** les coefficients d'autocorrélation ρ_j . Une approximation assez précise (voir, par exemple Kendall, [260], p. 88) est donnée par la formule de Barlett :

$$V(r_{j_n}) \approx \frac{1}{n} \sum_{-\infty}^{+\infty} \{ \rho_i^2 + \rho_{i-j} \cdot \rho_{i+j} - 4\rho_i \cdot \rho_j \cdot \rho_{i+j} + 2\rho_i^2 \cdot \rho_j \} \quad \text{Formule de Barlett}$$

relation 391

Mais la formulation approchée que l'on utilise en général, en supposant que ρ_j et les coefficients d'ordre supérieur sont faibles, est la suivante :

$$V(r_{j_n}) \approx \frac{1}{n} \left(1 + 2 \sum_{i=1}^{\infty} \rho_i^2 \right) \quad \text{relation 392}$$

Une utilisation de cette [relation 392](#) est faite dans les corrélogrammes de ce chapitre¹.

I-3.2 Tests d'hypothèse du caractère aléatoire des fluctuations d'une chronique

Ces tests² ne présentent d'intérêt que pour une détection automatique sur un très grand nombre de séries, ou en cas de doute sur une série particulière en complément du corrélogramme. On ne présentera ici qu'un seul test, représentatif de cette approche, sans donner de démonstration. Il s'agit d'un test Fishérien³ sur le nombre de points de retournement. Pour chaque observation t de la chronique, on définit une variable auxiliaire y_t susceptible de ne prendre que les valeurs 0 ou 1. Elle prendra la valeur 1, si l'observation x_t constitue un point de retournement et la valeur 0 dans les autres cas, c'est-à-dire que l'on a :

- $(x_t > x_{t+1} \text{ et } x_t > x_{t-1}) \text{ ou } (x_t < x_{t+1} \text{ et } x_t < x_{t-1}) \Rightarrow y_t = 1$
- $y_t = 0$ dans les autres cas de figure.

1. Par exemple, dans le corrélogramme de la [figure 238, page 1001](#), on a (en mettant les indices j et n sur le même niveau) :

$$V(r_{1n}) = \frac{1}{84} = 0,0119 \rightarrow \sigma_{r_{1n}} = 0,109 \rightarrow \text{intervalle} = \pm 0,2182$$

$$V(r_{2n}) = \frac{1}{84}(1 + 2 \times 0,471^2) = 0,0172 \rightarrow \sigma_{r_{2n}} = 0,131 \rightarrow \text{intervalle} = \pm 0,2622$$

$$V(r_{3n}) = \frac{1}{84}\{1 + 2(0,471^2 + 0,227^2)\} = 0,0184 \rightarrow \sigma_{r_{3n}} = 0,1357 \rightarrow \text{intervalle} = \pm 0,2714$$

2. Voir sur ce point Kendall (1976, [260]), chapitre II.

3. Voir Giard (1995, [182]), chapitre VII, § II.1.1.

On effectue ensuite le décompte du nombre z de points de retournement sur la chronique des n observations¹ : $z = \sum_{t=2}^{n-1} y_t$. On montre² que $E(z) = \frac{2}{3}(n-2)$ et $V(z) = \frac{16n-29}{90}$ et que z tend rapidement avec n , vers une loi Normale (disons pour fixer les idées $n > 30$):

$$\mathcal{L}(z) = \mathcal{N}\left(\frac{2}{3}(n-2), \sqrt{\frac{16n-29}{90}}\right) \quad \text{relation 393}$$

L'application de ce test à la chronique des ventes du rayon de ventes de journaux du Casimouth d'Alphaville donne $z = 49$ et $\mathcal{L}(z) = \mathcal{N}(54,67 ; 3,82)$. Cette variable z a donc 95 % de chances de se trouver dans la fourchette $\frac{2}{3}(84-2) \pm 1,96 \sqrt{\frac{16 \times 84 - 29}{90}}$, c'est-à-dire dans l'intervalle [47,17; 62,16]. Au vu du test, on serait donc tenté de conclure au caractère aléatoire. Or, ce serait manifestement une erreur, car l'examen graphique montre bien la très grande régularité de comportement du mois d'août. Ce qui est vraisemblable, et les analyses ultérieures le confirmeront, c'est que la saisonnalité n'existe que pour quelques mois et que, pour les autres, l'aléatoire est la règle, c'est-à-dire que la saisonnalité n'est pas significative. Cet exemple montre bien le danger qu'il peut y avoir à appliquer «automatiquement» des tests statistiques, du moins sur des chroniques présentant un intérêt vital pour l'entreprise.

Table des matières

I-4 Techniques de prévision

La classification des techniques de prévision est, comme toute classification, en partie arbitraire. Celle que l'on propose au § I-4.1 n'échappe pas à la règle. On examinera ensuite au § I-4.2, page 1007, selon quels critères doit s'effectuer le choix d'une technique de prévision.

Index thématique

I-4.1 Typologie des techniques de prévision

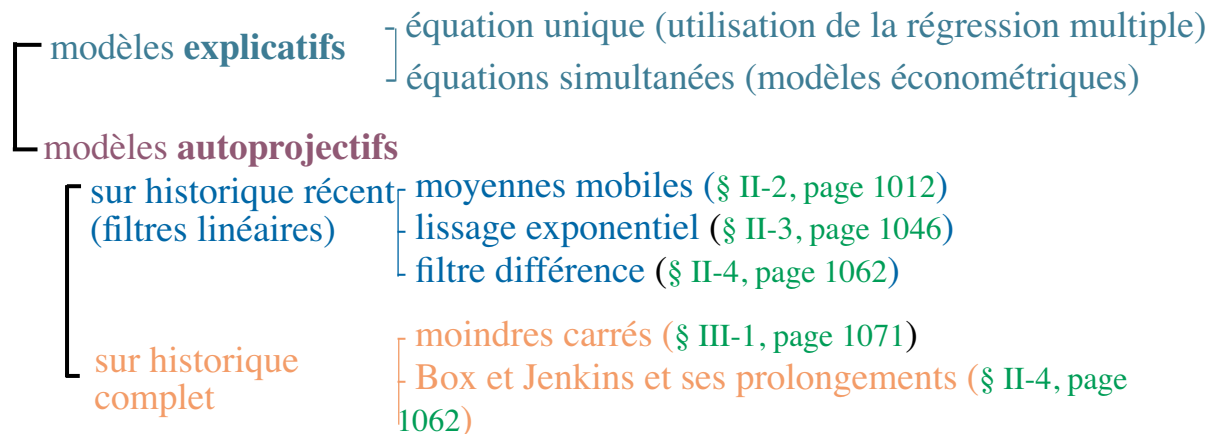
Le classement que l'on propose ici, sous la forme très succincte d'un schéma arborescent, est le suivant (on a mentionné entre parenthèses le numéro du paragraphe où la technique considérée est traitée):

Le premier clivage est celui qui oppose **modèles explicatifs** et **modèles auto-projectifs**. Dans le premier cas, la prévision se fonde, au moins en partie, sur des valeurs prises par des variables autres que celle que l'on cherche à projeter, tandis que, dans le second cas, on considère que le futur se déduit tout naturellement du passé. En réalité, ces deux classes de modèles ne poursuivent pas les mêmes buts et ne s'adressent pas aux mêmes séries car:

- la poursuite des tendances du passé, observées sur une série qui est à la base des modèles autoprojectifs, ne s'opère sans trop de risque que sur le court terme;

1. Si deux valeurs successives sont identiques, il convient de les considérer, pour ce test, comme une observation unique et de diminuer en conséquence d'une unité le nombre de périodes observées.

2. Voir Kendall (13), p. 22-24.



- un modèle explicatif n'est envisageable qu'à un niveau d'agrégation de données suffisant (cette agrégation portant sur les dimensions spatiales et temporelles, ainsi que le nombre d'articles ou de prestations de service pris en compte dans la chronique).

Ces deux critères doivent être simultanément pris en compte : un modèle explicatif est envisageable pour de la prévision à court terme portant sur des séries très agrégées (études prévisionnelles réalisées pour des chambres syndicales, ou entreprises en situation dominante sur un marché).

Les modèles explicatifs ne seront pas abordés ici car leur étude ne saurait se faire en dehors du contexte précis d'un problème particulier posé, puisqu'il nécessite la définition d'un certain nombre d'hypothèses de comportement découlant d'une théorie préalablement élaborée du fonctionnement du phénomène étudié. On peut toutefois indiquer que les modèles explicatifs à équation unique seront implicitement abordés avec les prolongements récents de Box et Jenkins (§ III-3, page 1101).

Plus contestable, sans doute, est la partition retenue pour les modèles autoprojectifs. Elle s'explique par des considérations de coûts : les techniques opérant sur un historique récent et restreint sont peu onéreuses à l'utilisation et généralement moins fiables¹ aussi les réservera-t-on de préférence aux procédures automatiques de prévision de la demande d'articles ou prestations de service de catégorie B ou C (dans une analyse type A-B-C où, comme nous l'avons vu au [chapitre X, § II-1.2.1, page 636](#), les produits de catégorie A correspondent le plus souvent à environ 80 % du montant global en valeur, et de l'ordre de 20 % des «références» de produits ou de prestations de service). Les techniques n'utilisant que la partie la plus récente de la chronique, correspondent à la famille des filtres linéaires et seront étudiées en détail à la [section II](#).

Sous la rubrique «moindres carrés» des modèles autoprojectifs travaillant sur l'historique complet, on a regroupé un certain nombre de méthodes qui s'inspirent toutes de la méthode des moindres carrés (qui est une technique de calcul de paramètres d'une fonction cherchant à minimiser un indicateur d'écarts quadratiques).

1. Du moins dans leur version initiale, car ces techniques se sont considérablement sophistiquées depuis une trentaine d'années, mais les accroissements spectaculaires du rapport «performance/coût» observé en informatique les rendent exploitables sans aucun problème, même à grande échelle.

Une dernière branche importante des modèles autoprojectifs est constituée par l'analyse spectrale. Son étude ne sera pas abordée ici, car elle nécessite¹ des chroniques plus longues que celles que l'on rencontre en général en gestion, ce qui ne l'empêche pas d'avoir fait ses preuves en économie sur des chroniques annuelles portant sur plusieurs siècles !

I-4.2 Critères de choix d'une technique de prévision

Ce choix doit s'opérer en cherchant à minimiser le coût d'obtention de la prévision pour un niveau de précision donné, mais il faut tenir compte également du type de chronique et de la finalité du traitement qui jouent souvent le rôle de contraintes dans cette recherche d'optimum ;

- Le *coût du traitement* dépend de 2 facteurs :
 - l'algorithme de calcul inhérent à la technique de prévision choisie et, de ce point de vue, certaines techniques impliquent l'usage d'ordinateurs performants,
 - la longueur de l'historique qu'il faut conserver, ce qui se traduit par un coût de stockage des données et de traitement plus ou moins important.

Ces deux facteurs ne sont pas indépendants, les techniques qui utilisent le maximum d'informations sont en général celles qui utilisent les algorithmes les plus complexes ; un arbitrage devra être effectué entre le coût de constitution et de traitement d'une information, et les avantages que l'on en retire (par exemple, il peut même être moins onéreux de ne pas traiter d'informations si l'activité peut être facilement régulée par un stock dont le coût de possession est négligeable).

- Le *type de chronique*² doit également être pris en considération. Les techniques de prévision ne sont pas universelles. Plusieurs paramètres sont à prendre en compte dans le choix d'une technique : longueur de l'historique possédé, existence d'une saisonnalité, importance relative des trois composantes d'une série.
- Enfin, la *finalité du traitement* joue un rôle dans ce choix. Certaines techniques de prévision ne sont appropriées que pour le court terme et fournissent des résultats catastrophiques si l'on tente de les utiliser pour le moyen ou le long terme.

SECTION II LES FILTRES LINÉAIRES

Les filtres linéaires constituent des instruments commodes de décomposition d'une chronique en ses diverses composantes et de prévisions (indépendantes) de ces composantes ; ces diverses prévisions sont ensuite combinées pour obtenir une prévision « globale » pour la chronique étudiée (un exemple de cette approche sera présenté au § II-2.3, page 1045).

Nous commencerons par préciser la notion de filtre (§ II-1) avant d'introduire les filtres les plus usités : les moyennes mobiles (§ II-2, page 1012), le lissage

1. Voir sur ce point Chatfield (1996, [91]), p. 163. Les chapitres VI et VII de cet ouvrage constituent une bonne introduction à l'analyse spectrale.

2. Voir Kendall (1976, [260]), p. 126-128.

exponentiel (§ II-3, page 1046) et les filtres «différence» (§ II-4, page 1062, réservé à une étude plus poussée des techniques de prévision). Nous terminerons par des remarques générales sur l'utilisation des filtres (§ II-5, page 1063).

II-1 La notion de filtre

Après avoir posé une définition des filtres (§ II-1.1), nous aborderons les éléments à prendre en compte dans le choix d'un filtre (§ II-1.2).

II-1.1 Définition

La notion de filtre est assez générale et recouvre un certain nombre de techniques dont certaines sont répandues depuis longtemps, comme la technique de la moyenne mobile, et d'autres d'émergence plus récente comme le lissage exponentiel. On ne s'intéressera ici qu'aux **filtres linéaires**, mais le qualificatif «linéaire» sera le plus souvent omis pour alléger l'exposé.

Le filtre linéaire est le mode de transformation d'une chronique x_t en une autre chronique y_t à partir d'une combinaison linéaire de termes consécutifs de la chronique initiale. La traduction mathématique de cette définition est la suivante:

$$y_t = \sum_{i=1}^s a_i \cdot x_{t-r+i} \quad \text{relation 394}$$

- les a_i sont les coefficients de pondération dont la somme est généralement égale à 1, et parfois à 0 (cf. § II-4, page 1062);
- r est un **décalage** temporel caractéristique d'un filtre donné; la première valeur calculable de y_t est telle que $t = r$, pour que $x_{t-r+1} = x_1$;
- s est le nombre de termes consécutifs de la chronique initiale, nécessaires pour définir un terme de la nouvelle chronique; notons dès à présent que le nombre s peut être infini (voir § II-3, page 1046).

FIGURE 239
Filtres linéaires



II-1.2 Choix d'un filtre linéaire

On peut définir une infinité de filtres linéaires puisque le nombre de combinaisons linéaires que l'on peut imaginer est illimité, mais seuls quelques-uns présentent un intérêt pratique; leur choix résulte de la prise en considération de facteurs que l'on va succinctement présenter (§ II-1.2.1), puis illustrer par un exemple (§ II-1.2.2, page 1009).

II-1.2.1 Éléments de détermination du choix d'un filtre

Ce choix résulte de la prise en considération:

- a) d'hypothèses faites sur les composantes certaines de la chronique, c'est-à-dire la composante tendancielle et la composante saisonnière (cette dernière composante pouvant d'ailleurs être absente de la chronique étudiée). Le filtre

retenu permet, en l'absence de composante aléatoire et si les hypothèses de départ sont fondées, de retrouver très exactement le paramètre ou la valeur du modèle théorique que le filtre linéaire cherche à retrouver (voir [page 1011](#) et [page 1015](#));

- b) d'un *objectif sur l'interprétation à donner au filtre linéaire* y_t ; celui-ci peut représenter par exemple :
- une estimation de la composante tendancielle à la période t , ou une mesure de l'évolution de cette composante tendancielle,
 - une estimation de la composante saisonnière,
 - une estimation prévisionnelle faite à la date t pour une valeur observable à une date ultérieure $t + k$,
 - une mesure de la composante aléatoire, le filtre linéaire utilisé ayant pour vocation d'éliminer les composantes tendancielle et aléatoires;
- c) d'une prise en considération de l'*impact de la composante aléatoire* sur :
- la *performance* du filtre retenu, ce qui expliquera l'introduction des filtres des moindres carrés (cf. [§ II-2.2](#)) et fera préférer dans certaines utilisations cette catégorie de filtres à celle des filtres linéaires empiriques (cf. [§ II-2.1](#), [page 1012](#)),
 - la *longueur* s du filtre retenu; nous verrons par exemple, pour les filtres en moyenne mobile, que les «distorsions» introduites par l'existence de la composante aléatoire sont d'autant plus atténuées que la longueur du filtre est importante; dans le même ordre d'idée les chroniques se réduisant à un processus aléatoire (loi de Poisson, par exemple) de moyenne faible (pour le découpage spatial et temporel retenu) peuvent présenter de nombreux zéros et doivent de ce fait être traitées avec des filtres prenant en compte un historique assez long pour que l'estimation «courante» de la moyenne ne soit pas trop «chahutée»;
- d) d'un *arbitrage effectué entre les composantes certaines* (c'est-à-dire les composantes tendancielle et saisonnière) *et la composante aléatoire*, qui conduit éventuellement à préférer accorder systématiquement un poids plus fort aux observations les plus récentes dans le filtre linéaire retenu (il s'agit là des techniques de lissage exponentiel qui seront étudiées au [§ II-3](#), [page 1046](#)), pour privilégier la détection rapide des modifications de comportement des composantes certaines de la chronique, sur la recherche de l'atténuation des perturbations générées par la composante aléatoire; cet arbitrage s'effectuera normalement sur la base d'informations qualitatives (connaissance de l'entreprise, de son environnement, de concurrence...).

Ces différentes considérations dans le choix d'un filtre apparaîtront dans l'étude des filtres que l'on présentera dans les pages suivantes, mais nous allons néanmoins tenter de les illustrer dès maintenant à l'aide d'un exemple.

II-1.2.2 Illustration de la démarche

Supposons par exemple que :

- l'évolution tendancielle f_t d'une chronique x_t soit linéaire (hypothèse de travail, cf. [§ II-1.2.1a](#)),
- l'objectif poursuivi soit de retrouver à l'aide d'un filtre linéaire cette valeur f_t (objectif retenu, cf. [§ II-1.2.1b](#)).

Prenons arbitrairement les deux filtres linéaires suivants (nous verrons ultérieurement qu'il s'agit de filtres en moyennes mobiles centrées):

- le premier filtre se caractérise par les paramètres suivants: $s = 3, r = 2, a_1 = a_2 = a_3 = 1/3$, ce qui donne:

$$y_t = \frac{1}{3}x_{t-2+1} + \frac{1}{3}x_{t-2+2} + \frac{1}{3}x_{t-2+3} = \frac{1}{3}x_{t-1} + \frac{1}{3}x_t + \frac{1}{3}x_{t+1} = \frac{1}{3}(x_{t-1} + x_t + x_{t+1})$$

- le second filtre se caractérise par les paramètres suivants: $s = 5, r = 3, a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = a_5 = 1/5$, ce qui donne:

$$y_t = 0, 2x_{t-3+1} + 0, 2x_{t-3+2} + 0, 2x_{t-3+3} + 0, 2x_{t-3+4} + 0, 2x_{t-3+5}$$

$$y_t = 0, 2x_{t-2} + 0, 2x_{t-1} + 0, 2x_t + 0, 2x_{t+1} + 0, 2x_{t+2}$$

$$y_t = 0, 2(x_{t-2} + x_{t-1} + x_t + x_{t+1} + x_{t+2})$$

Supposons que l'on applique ces deux filtres linéaires à la chronique suivante, $x_t = f_t + 10 + 2t$, qui ne comporte qu'une composante tendancielle linéaire à l'exclusion de toute autre composante.

TABLEAU 291
Chronique se limitant à une composante tendancielle

t	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x_t	12	14	16	18	20	22	24	26	28	30

L'application du premier filtre, qui permet de calculer comme première valeur $y_t = y_r = y_2$, donne:

$$y_2 = \frac{1}{3}x_1 + \frac{1}{3}x_2 + \frac{1}{3}x_3 = \frac{12}{3} + \frac{14}{3} + \frac{16}{3} = 14,$$

$$y_3 = \frac{1}{3}x_2 + \frac{1}{3}x_3 + \frac{1}{3}x_4 = \frac{14}{3} + \frac{16}{3} + \frac{18}{3} = 16$$

, ..., d'où l'on tire la nouvelle chronique y_t du **tableau 292**.

TABLEAU 292
Application du premier filtre à la chronique du tableau 291

t	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x_t	12	14	16	18	20	22	24	26	28	30
1er filtre y_t			16	18	20	22	24	26		

L'application du second filtre, qui permet de calculer comme première valeur $y_t = y_r = y_3$, donne:

$$y_3 = 0, 2(x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5) = 0, 2(12 + 14 + 16 + 18 + 20) = 16$$

etc., d'où l'on tire la seconde chronique y_t du **tableau 293**:

TABLEAU 293
Application du second filtre à la chronique du tableau 291 de la page 1010

t	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x_t	12	14	16	18	20	22	24	26	28	30
2e filtre y_t				18	20	22	24			

Table des matières

Index thématique

L'examen des résultats obtenus montre que ces deux filtres linéaires permettent de retrouver très exactement la composante tendancielle linéaire d'une chronique se ramenant à cette seule composante. L'objectif recherché est donc atteint par l'un et l'autre filtre. Pour justifier la préférence d'un filtre sur l'autre, il faut que les chroniques, auxquelles ces filtres s'appliquent, possèdent une composante aléatoire en plus de la composante tendancielle linéaire. Prenons donc une nouvelle chronique, somme de la chronique précédente $f_t = 10 + 2t$ et d'une chronique aléatoire ε_t , générée sur tableur et suivant une loi Normale de moyenne nulle et d'écart-type égal à 2. Appliquons ensuite les deux filtres linéaires retenus.

TABLEAU 294
Chronique avec composante tendancielle et composante aléatoire

t	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
f_t	12,00	14,00	16,00	18,00	20,00	22,00	24,00	26,00	28,00	30,00
ε_t	1,65	-0,04	1,62	4,19	0,66	-2,24	-1,46	1,51	0,01	-2,87
$x_t = f_t + \varepsilon_t$	13,65	13,96	17,62	22,19	20,66	19,76	22,54	27,51	28,01	27,13
1er filtre y_t	-	15,08	17,92	20,16	20,87	20,99	23,27	26,02	27,55	-
2e filtre y_t	-	-	17,62	18,84	20,55	22,53	23,70	24,99	-	-

Le second filtre donne «globalement» de meilleures estimations de la composante tendancielle, puisque la «racine carrée de la moyenne des carrés des écarts entre le second filtre et la composante tendancielle vraie»¹ est plus faible (0,91) que celle obtenue avec le premier filtre (1,23). Habituellement, comme nous l'observons ici, la qualité de l'estimation fournie par le filtre le plus long (ici $s = 5$) est la meilleure, mais on doit souligner que :

- le filtre le plus long génère la chronique la plus courte (ici 6 valeurs), ce qui peut être gênant dans une étude de tendance,
- le gain de précision apporté par un filtre long par rapport à un filtre plus court (fondé sur les mêmes hypothèses et ayant le même objectif) est d'autant plus fort que la composante aléatoire est importante par rapport à l'évolution tendancielle.

La principale difficulté rencontrée dans la prise en considération de la composante aléatoire est que l'on ne connaît concrètement que la résultante des composantes tendancielles, aléatoires et cycliques, et que la prévision suppose d'avoir préalablement décomposé la chronique en ces diverses composantes. Si l'objectif assigné à un filtre est simple à déterminer (cf. § II-1.2.1.b, page 1009), le choix des hypothèses sous-jacentes (cf. § II-1.2.1.a, page 1008) peut être biaisé par l'existence de la composante aléatoire et la prise en compte de l'impact de la composante aléatoire (cf. § II-1.2.1.c, page 1009) relève davantage de l'art du praticien de la prévision que de la science statistique, surtout lorsque les chroniques sont courtes ou si l'environnement n'est pas stable (d'un point de vue statique ou d'un point de vue dynamique). Ceci explique qu'il ne saurait y avoir de solution unique dans l'application des filtres linéaires, et qu'il n'est donc pas anormal que deux experts également compétents n'aboutissent pas à des conclusions identiques parce qu'utilisant des filtres linéaires différents ; cependant, les ordres de grandeur

1. Cet indicateur d'écart est similaire à l'écart-type résiduel d'une régression linéaire.

seront voisins si ces experts ont en main les mêmes informations tant quantitatives que qualitatives.

II-2 Les moyennes mobiles

Les moyennes mobiles empiriques (§ II-2.1) sont les plus anciennes, mais nous verrons que lorsque l'objectif poursuivi est la prévision (et non l'estimation de composante tendancielle), la performance de ces méthodes empiriques peut être améliorée, en particulier avec l'introduction récente des filtres en médianes mobiles¹ que nous n'aborderons pas ici. Nous nous contenterons ici de présenter (§ II-2.2, page 1035) les filtres optimaux au sens des moindres carrés. Dans un dernier paragraphe (§ II-2.3, page 1045), nous verrons comment combiner les prévisions effectuées sur les diverses composantes dans le cadre des procédures de décomposition, pour obtenir une prévision globale; la démarche présentée restera la même si les prévisions effectuées pour la composante tendancielle utilisent les techniques de lissage exponentiel présentées au § II-3, page 1046.

II-2.1 Les méthodes empiriques

Cette classe de filtres est la plus ancienne et la plus connue. Ces filtres sont également les plus simples, puisqu'ils se caractérisent par l'égalité des coefficients de pondération dont la somme est en outre égale à 1 ou par l'utilisation «en cascade» de filtres linéaires jouissant de ces propriétés (voir, par exemple, le § II-2.1.2.2, page 1029). La relation 394 de la page 1008 devient alors :

$$y_t = \frac{1}{s} \sum_{i=1}^s x_{t-r+i} \quad \text{relation 395}$$

formule générale dont on modifiera la présentation lorsqu'on aura spécifié le décalage temporel r , en fonction des objectifs poursuivis. Ceux-ci peuvent être :

- soit la recherche d'une estimation \hat{f}_t de la valeur tendancielle f_t , à une date donnée pour laquelle l'observation x_t est disponible, et l'on utilisera alors les techniques de moyennes centrées (§ II-2.1.1),
- soit la recherche, à une date t , d'une estimation prévisionnelle d'une valeur tendancielle f_{t+k} (§ II-2.1.2, page 1027).

On peut indiquer tout de suite que la caractéristique essentielle de ce filtre empirique est de transformer une chronique de termes constants en une autre chronique de termes constants identiques, et de transformer une chronique du type $x_t = at + b$, en une autre chronique $y_t = at + c$, l'ordonnée à l'origine pouvant dans certains cas être la même, auquel cas le filtre ne crée aucune distorsion.

II-2.1.1 Les filtres empiriques orientés vers l'estimation de la composante tendancielle (moyennes mobiles centrées)

L'utilisation de ces filtres linéaires dont l'objectif est l'estimation de la composante tendancielle ($\hat{f}_t = y_t$) repose toujours sur l'hypothèse implicite que cette composante tendancielle est linéaire ($f_t = at + b$). En l'absence de composante saisonnière, nous verrons (cf. § II-2.1.1.1) que l'on peut fixer arbitrairement la



1. Voir Velleman & Hoaglin (1980, [429]), chapitre VI.

longueur s du filtre linéaire, alors que celle-ci est imposée dans le cas contraire (cf. § II-2.1.1.2, page 1015).

II-2.1.1.1 Moyenne mobile centrée en l'absence de composante saisonnière

Cette moyenne mobile est qualifiée de **moyenne mobile centrée**, parce que le filtre linéaire y_t qui la définit se calcule à partir d'une partie de chronique composée de x_t , des n observations qui précèdent x_t , et des n observations qui suivent cette valeur x_t . Autrement dit, la longueur s du filtre est nécessairement un nombre impair (que l'on peut mettre sous la forme $s = 2n + 1$) et le décalage r est $r = n + 1$. La formule de définition du filtre «moyenne mobile centrée» est donc :

$$y_t = \frac{1}{2n+1} \sum_{i=1}^{2n+1} x_{t-n-1+i} = \frac{1}{2n+1} (x_{t-n} + x_{t-n+1} + x_{t-n+2} + \dots + x_t + x_{t+1} + \dots + x_{t+n})$$

$$y_t = \frac{1}{2n+1} \sum_{i=-n}^{i=+n} x_{t+i} \quad \text{Moyenne mobile centrée} \quad \text{relation 396}$$

Nous avons déjà utilisé ce filtre «moyenne mobile centrée» au § II-1.2.2, page 1009, pour deux longueurs de filtre $s = 3$ ($\rightarrow n = 1$) et $s = 5$ ($\rightarrow n = 2$). Ces exemples montrent :

- que la moyenne mobile centrée appliquée à une chronique se réduisant à une composante tendancielle linéaire ($x_t = f_t = at + b$) redonne sans distorsion cette même chronique,
- que lorsque s'ajoute à cette composante tendancielle linéaire une composante aléatoire ($x_t = f_t + \varepsilon_t = at + b + \varepsilon_t$), l'estimation de la composante tendancielle linéaire par le filtre ($\hat{f}_t = y_t$) est d'autant meilleure¹ que la longueur du filtre est grande, mais que ce gain de précision se paie en retour par une chronique plus courte de valeurs estimées.

On peut ajouter que, lorsque l'hypothèse d'une évolution tendancielle linéaire n'est pas vérifiée et qu'il n'y a pas de composante aléatoire, le filtre linéaire surestime toujours la composante tendancielle ($\hat{f}_t = y_t > f_t$) lorsque la croissance tendancielle s'accélère (évolution convexe)², tandis qu'il y a sous-estimation ($\hat{f}_t = y_t < f_t$) lorsqu'il y a décélération de la croissance tendancielle (évolution concave). S'il y a en outre présence d'une composante aléatoire, ces surestimations ou sous-estimations ne sont plus systématiques, mais restent les plus probables, cette probabilité étant d'autant plus forte que la longueur du filtre linéaire de la moyenne mobile est grande. Le [tableau 295 de la page 1014](#) illustre ces propriétés avec deux exemples numériques d'évolutions tendancielles convexes et concaves et un filtre en moyenne mobile centrée sur 3 périodes.

1. En toute rigueur, il vaudrait mieux dire que, pour un coefficient de confiance donné, l'intervalle de confiance du filtre linéaire, centré sur la valeur f_t , est d'autant plus restreint que la longueur du filtre est grande. Ajoutons, dans cette optique probabiliste, que nous aurions très bien pu avoir dans notre exemple numérique la performance la moins bonne (mesurée par la moyenne des carrés des écarts entre f_t et y_t) associée au filtre le plus long.

2. Mathématiquement, une fonction est convexe si: $f(x_3) - f(x_2) \geq f(x_2) - f(x_1)$ pour toutes valeurs de x_1, x_2 et x_3 telles que, $x_1 < x_2 < x_3$ et une fonction est dite concave si l'on a: $f(x_3) - f(x_2) \leq f(x_2) - f(x_1)$ pour toutes valeurs de x_1, x_2 et x_3 telles que, $x_1 < x_2 < x_3$.

TABLEAU 295
Chroniques certaines à évolutions convexes ou concaves

t	1	2	3	4	5	6
$x_t = f_t = 10 + 2t + 0,1t^2$ (évolution convexe)	12,10	14,40	16,90	19,60	22,50	25,60
$y_t = \frac{1}{3}(x_{t-1} + x_t + x_{t+1})$	-	14,47	16,97	19,67	22,57	-
$x_t = f_t = 10 + 2t - 0,1t^2$ (évolution concave)	11,90	13,60	15,10	16,40	17,50	18,40
$y_t = \frac{1}{3}(x_{t-1} + x_t + x_{t+1})$	-	13,53	15,03	16,33	17,43	-

Lorsque la composante tendancielle n'est pas linéaire, il est fréquent d'utiliser néanmoins la technique de la moyenne mobile centrée pour estimer cette composante, en faisant l'hypothèse que la distorsion introduite est faible, ce qui est le plus souvent acceptable. Cette remarque reste valable lorsque la chronique comprend une saisonnalité (éliminée par le filtre linéaire approprié).

Illustrons enfin le fait que les moyennes mobiles centrées permettent de mettre en évidence une évolution tendancielle sur le [tableau 296](#) et les graphiques de la

TABLEAU 296
Calcul des moyennes mobiles du [tableau 284 de la page 991](#)

Période	Série purement aléatoire		Série avec tendance et aléa		Période	Série purement aléatoire		Série avec tendance et aléa	
	Données	Moyennes mobiles	Données	Moyennes mobiles		données	Moyenne mobile	Données	Moyennes mobiles
1	208,4	-	210,7	-	14	207,5	174,9	243,6	208,1
2	165,9	-	170,1	-	15	135,3	169,8	167,1	205,0
3	207,5	207,4	214,7	214,8	16	189,7	168,3	229,6	168,3
4	271,9	187,9	283,2	197,0	17	156,0	175,6	194,9	175,6
5	183,6	180,9	195,0	191,9	18	153,2	186,0	194,3	186,0
6	110,9	180,3	121,9	193,8	19	243,9	207,2	299,2	258,2
7	130,6	159,4	144,4	174,7	20	187,1	221,4	237,9	277,2
8	204,8	141,8	224,5	158,3	21	295,8	203,6	365,0	259,3
9	167,2	154,6	187,4	174,0	22	227,0	186,2	289,6	242,4
10	95,4	164,8	113,2	187,2	23	64,3	201,2	104,7	262,8
11	175,0	156,0	200,6	180,3	24	157,1	-	214,7	-
12	181,7	164,0	210,3	191,5	25	261,8	-	340,2	-
13	160,5	172,0	189,8	202,3					

Table des matières

Index thématique

[figure 240](#), alors que l'analyse superficielle des graphiques de la [figure 235, page 994](#), pouvait laisser penser que l'on se trouvait dans les deux cas en présence de séries ne comportant qu'une composante aléatoire.

FIGURE 240

Moyennes mobiles (centrées sur 5 périodes) appliquées aux chroniques des colonnes 4 et 5 du tableau 283 de la page 990

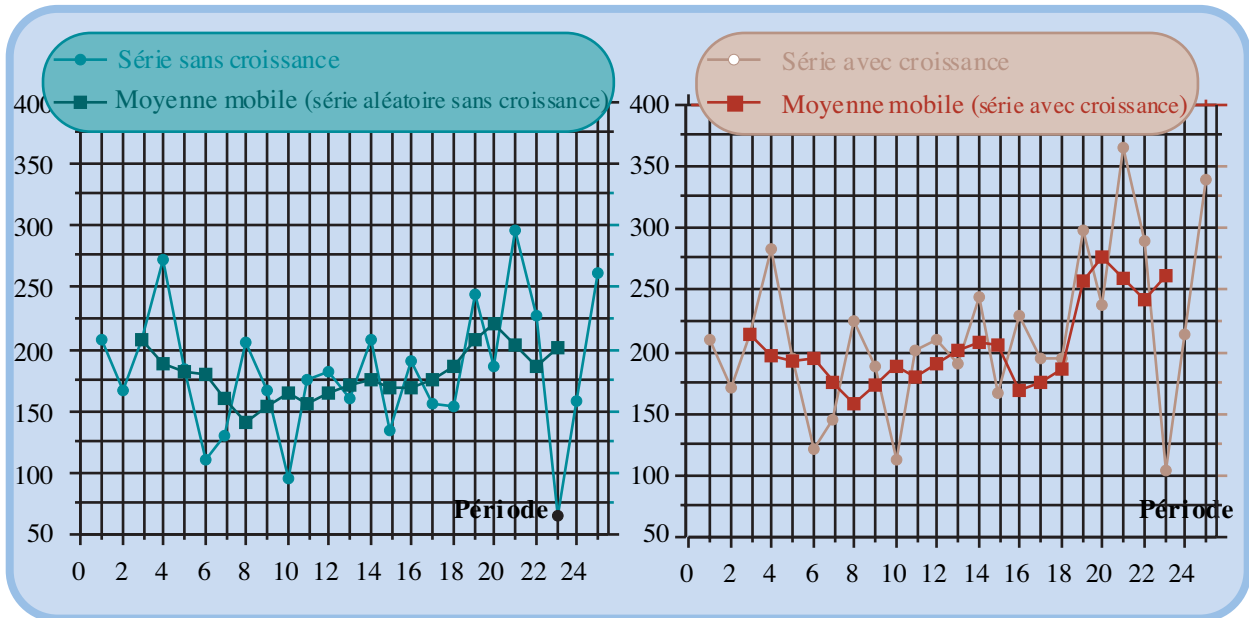


Table des matières

II-2.1.1.2 Moyenne mobile centrée dans le cas de l'existence d'une composante saisonnière

Index thématique

Lorsque la chronique étudiée, dont on cherche à estimer la composante tendancielle, comporte des fluctuations saisonnières, la longueur du filtre est imposée par le nombre de périodes que comporte l'année (dans le cas d'un cycle annuel). Nous verrons tout d'abord (§ II-2.1.12a) le cas d'un nombre impair de périodes, puis (§ II-2.1.12b) celui d'un nombre pair de périodes qui pose un problème particulier, puisque nous avons vu que la technique de la moyenne mobile centrée nécessite un nombre impair de périodes. Nous examinerons ensuite (§ II-2.1.12c) comment utiliser ce type de filtre linéaire pour estimer la composante saisonnière et obtenir une chronique désaisonnalisée. Nous verrons enfin comment trancher entre le modèle multiplicatif et le modèle additif (§ II-2.1.12d), comment résoudre le problème d'une saisonnalité accompagnant une évolution par palier de la composante tendancielle (§ II-2.1.12e) et examinerons rapidement les méthodes de décomposition automatique (§ II-2.1.12f).



II-2.1.12a) Moyenne mobile centrée dans le cas de l'existence d'une composante saisonnière comportant un nombre impair de périodes

Lorsque le nombre de périodes est impair, il convient d'utiliser une moyenne mobile centrée dont la longueur est égale au nombre de périodes constituant le cycle annuel pour retrouver exactement la composante tendancielle, si les conditions suivantes sont réunies :

- la chronique ne comporte pas de composante aléatoire (dans le cas contraire on obtient une estimation de cette composante au lieu de retrouver la valeur exacte);
- la composante tendancielle est linéaire ($f_t = at + b$);

- le modèle sous-jacent est additif, c'est-à-dire que l'on a : $x_t = f_t + c_t = at + b + c_t$, ce qui, compte tenu du fait que les fluctuations saisonnières se compensent sur une année (qui n'est autre que l'application du principe de conservation des aires de la [relation 383 de la page 995](#), valable dans le cas du modèle additif), permet l'élimination de la composante saisonnière lorsque la moyenne mobile centrée porte sur un nombre de périodes égal au nombre de périodes annuelles.

Ce cas de figure se rencontre assez souvent dans les moyennes et petites entreprises lorsque celles-ci ferment un mois par an, ce qui réduit à 11 le nombre de mois ouvrables. Illustrons ce cas par la chronique théorique du [tableau 297](#) qui ne comprend pas de composante aléatoire (pour pouvoir vérifier la propriété avancée); un filtre en moyenne mobile centrée sur 11 périodes est ici utilisé.

TABLEAU 297
Chronique avec composante tendancielle et composante cyclique

t	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
$f_t = 10 + t$	12	14	16	18	20	22	24	26	28	30	32	34	36	38	40
c_t	-2	1	1	3	-2	1	-2	0	2	-1	-1	-2	1	1	3
$x_t = f_t + c_t$	10	15	17	21	18	23	22	26	30	29	31	32	37	39	43
$y_t = \frac{1}{11} \sum_{-5}^{+5} x_{t+i}$	-	-	-	-	-	22	24	26	28	30	-	-	-	-	-

L'introduction d'une composante aléatoire ne permet plus, là encore, de retrouver exactement la composante tendancielle ($f_t = y_t$), mais seulement une estimation de celle-ci ($\hat{f}_t = y_t$).

Lorsque le modèle implicitement utilisé n'est pas du type additif, mais multiplicatif, il n'est plus possible, même en l'absence de composante aléatoire, de retrouver la composante tendancielle par la moyenne mobile centrée ($f_t \neq y_t$), mais lorsque l'évolution tendancielle n'est pas trop prononcée (ce qui est le plus souvent le cas en économie), la distorsion est faible. Cette dernière remarque, ainsi que la prise en considération de la composante aléatoire qui, en tout état de cause, ne permet de retrouver qu'une estimation, font qu'en pratique on utilise la moyenne mobile centrée pour estimer la composante tendancielle même si le modèle postulé est de type multiplicatif. Si l'évolution n'est pas linéaire, on utilise le plus souvent la moyenne mobile centrée (dont la longueur est convenablement choisie pour éliminer la saisonnalité) pour estimer la composante tendancielle, et ceci même si le modèle postulé est multiplicatif.

On peut noter enfin que la pratique, trop souvent répandue en gestion, qui consiste à faire des prévisions à partir du cumul de données observées sur plusieurs exercices budgétaires annuels, revient à effectuer des prévisions à partir de s fois moins d'observations que si le travail est conduit à partir des informations en moyennes mobiles centrées, et ne permet pas de tenir compte à temps des modifications structurelles intervenues dans la composante tendancielle.

Pour s'en convaincre, il suffit de remarquer que, dans le [tableau 297](#), on obtient le cumul des mois 1 à 11 (c'est-à-dire le premier exercice annuel) en multipliant par 11 l'estimation de la composante tendancielle du mois 6, et que le second exer-

cice annuel ne peut être obtenu de la même manière que 11 mois plus tard (à partir de l'estimation de la composante tendancielle du mois 17). Donc, à un facteur multiplicatif près, l'estimation de la composante tendancielle et l'exercice glissant (portant sur 11 périodes consécutives et donc éliminant l'incidence de la composante saisonnière) sont identiques. En restreignant l'analyse aux seuls exercices «civils», on travaille donc sur 11 fois moins d'informations qu'on ne pourrait le faire. Cela dit, cette propriété ne sera pas exactement respectée dans le cas d'une composante saisonnière comportant un nombre pair de périodes, mais la distorsion introduite peut être considérée comme négligeable.

II-2.1.12b) Moyenne mobile centrée dans le cas de l'existence d'une composante saisonnière comportant un nombre pair de périodes

Lorsque la chronique dont on cherche à estimer la composante tendancielle possède une composante saisonnière comportant un nombre pair de périodes, il n'est plus «directement» possible de centrer le filtre sur une période donnée. Si l'on prend une chronique mensuelle par exemple, une moyenne mobile centrée sur le mois t ne peut que comporter les 5 mois précédents et les 5 suivants ($s = 11$), ou les 6 mois précédents et les 6 mois suivants ($s = 13$). Dans le premier cas, un mois de l'année n'est pas représenté dans le filtre (par exemple, si $t = 8 =$ août, le filtre comprend les mois $t = 8 - 5 = 3 =$ mars, à $t = 8 + 5 = 13 =$ janvier, mais pas le mois de février), tandis que dans le second, un même mois est représenté deux fois (le mois de février dans notre exemple).

Table des matières

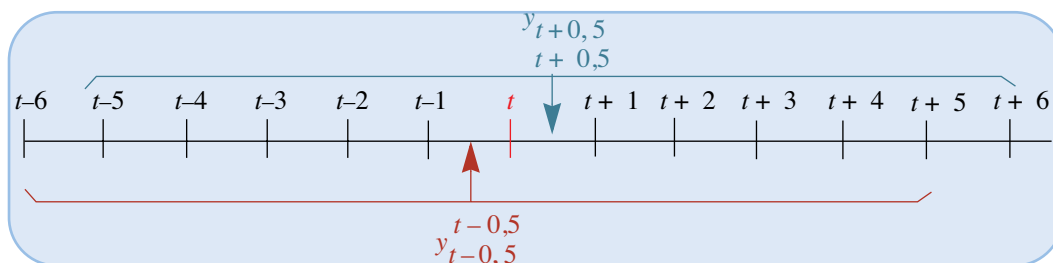
Pour que tous les mois soient représentés, on ne peut retenir qu'un filtre linéaire portant sur 13 périodes et pour que tous les mois aient le même poids, il suffit de diviser par 2 le coefficient de pondération ($1/12$) de chacune des deux observations portant sur le même mois, ce qui donne :

Index thématique

$$y_t = \frac{1}{24}(x_{t-6} + x_{t+6}) + \frac{1}{12}(x_{t-5} + x_{t-4} + \dots + x_t + \dots + x_{t+4} + x_{t+5})$$

ce qui se «condense» comme suit¹ :

1. Note de la page précédente. En réalité la relation 397 est la moyenne arithmétique des filtres en moyenne mobile centrée, définis aux dates $t - 0,5$ et $t + 0,5$ et pour une longueur $s = 12$, comme l'illustre le schéma ci-dessous :



$$y_{t-0,5} = \frac{1}{12} \sum_{i=-6}^{i=+5} x_{t+i} \text{ et } y_{t+0,5} = \frac{1}{12} \sum_{i=-5}^{i=+6} x_{t+i} \Rightarrow y_t = \frac{1}{2} \{y_{t-0,5} + y_{t+0,5}\} \text{ qui permet d'établir la}$$

relation 398 puis la relation 397. Cette relation 398 peut servir de base à un calcul récurrent; dans notre exemple numérique, on peut écrire :

$$y_{6,5} = (705 + 653 + 713 + 684 + 707 + 714 + 684 + 422 + 629 + 811 + 721 + 803)/12 = 8246/12 = 687,167$$

$$y_{7,5} = (653 + 713 + 684 + 707 + 714 + 684 + 422 + 629 + 811 + 721 + 803 + 831)/12$$

$$= (8246 - 705 + 831)/12 = 8372/12 = 697,667$$

$$y_7 = (687,167 + 697,667)/2 = 692,417$$

$$y_t = \frac{1}{24}(x_{t-6} + x_{t+6}) + \frac{1}{12} \sum_{i=-5}^{i=+5} x_{t+i} \quad \text{relation 397}$$

$$y_t = \frac{1}{2} \times \frac{1}{12} \left[\sum_{i=-6}^{i=+5} x_{t+i} + \sum_{i=-5}^{i=+6} x_{t+i} \right] \quad \text{relation 398}$$

L'application de cette [relation 397](#) à la chronique de ventes du rayon de ventes de journaux du Casimouth d'Alphaville donne le [tableau 298 de la page 1018](#), qui fournit les estimations de la composante tendancielle, qui sont reportées sur la [figure 241, page 1019](#), avec les données initiales. La nouvelle chronique obtenue, estimation de la composante tendancielle, présente le double avantage d'être désaisonnalisée et de lisser les fluctuations aléatoires (cette dernière propriété étant d'autant mieux assurée que le nombre de périodes constitutives d'une année est important).

TABLEAU 298
Moyennes mobiles centrées des ventes du rayon de ventes de journaux du Casimouth d'Alphaville

	Janvier	Février	Mars	Avril	Mai	Juin	Juillet	Août	Septembre	Octobre	Novembre	Décembre
1994	-	-	-	-	-	-	692,4	702,3	711,3	721,6	729,7	735,8
1995	742,4	748,4	757,9	761,9	758,8	752,5	741,2	731,6	725,3	716,9	706,7	692,9
1996	681,1	675,6	671,0	668,4	667,5	669,8	672,7	675,4	680,8	684,5	689,0	699,7
1997	704,5	703,0	705,0	707,8	713,3	717,8	719,8	719,0	715,2	712,2	712,0	713,0
1998	714,1	716,8	715,8	711,4	710,3	711,4	719,4	732,1	742,6	754,4	766,3	773,6
1999	780,3	788,8	795,3	803,0	807,2	805,4	797,8	783,0	764,3	746,2	727,8	709,4
2000	693,4	675,8	660,4	643,6	624,9	613,4	-	-	-	-	-	-

Table des matières

Index thématique

On peut remarquer enfin que ce filtre linéaire d'une longueur $s = 12$ restitue une chronique « amputée » de 12 valeurs, alors que dans le cas d'un nombre impair, $s = 11$ par exemple, la nouvelle chronique y_t ne perd que $s - 1 = 10$ valeurs seulement.

II-2.1.12c) Estimation de la composante saisonnière à partir de la moyenne mobile centrée

Que le nombre de périodes constitutives d'une année soit pair ou impair, il est possible d'estimer la composante saisonnière à partir de la chronique $(x_t - y_t)$, c'est-à-dire des différences entre les valeurs observées ([tableau 286 de la page 997](#)) et les filtres en moyennes mobiles centrées ([tableau 298](#)), ce qui conduit au tableau de Buys-Ballot [299](#).

Si le modèle implicitement retenu dans l'étude de la chronique est un [modèle saisonnier additif](#), c'est-à-dire que l'on a : $x_t = f_t + c_t + \varepsilon_t$. On retient comme estimation de f_t , la valeur trouvée dans le filtre en moyenne mobile centrée ($\hat{f}_t = y_t$). La différence $x_t - \hat{f}_t$, que l'on a reportée dans les 7 premières lignes du [tableau 299](#) représente donc une estimation de la somme de la composante saisonnière et



FIGURE 241
Ventes de Casimouth et moyennes mobiles centrées de ces ventes

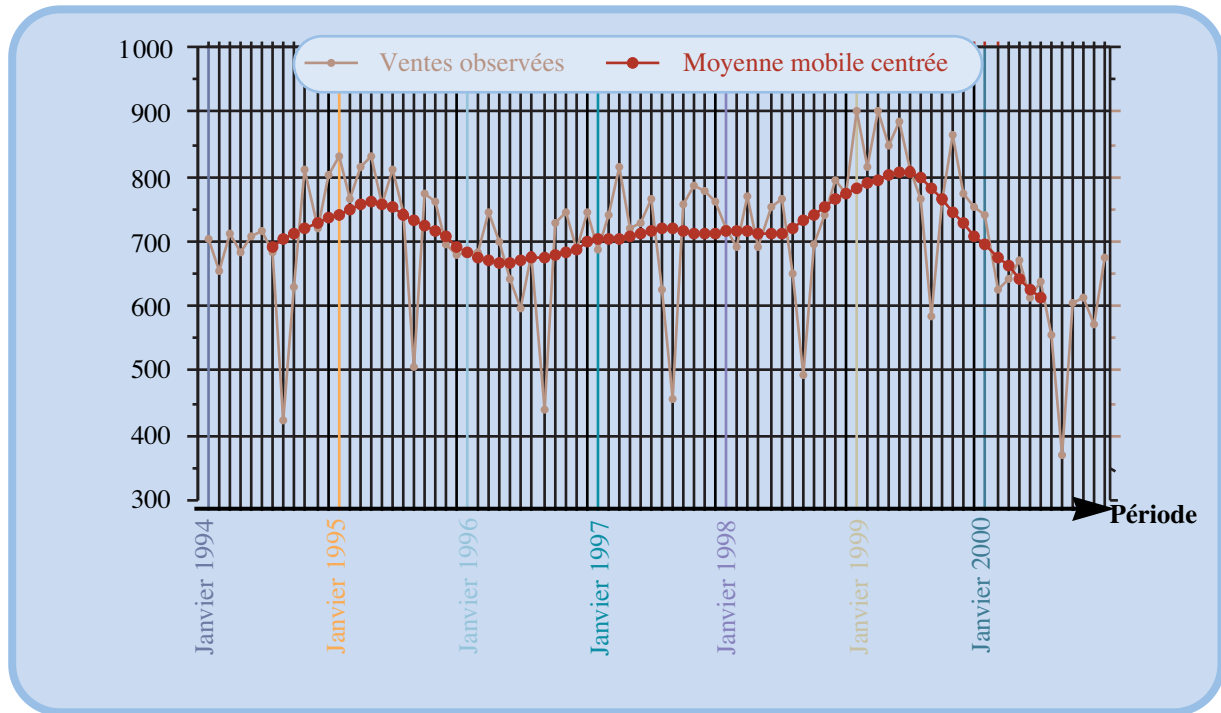


Table des matières

Index thématique

TABLEAU 299
Composantes saisonnières du modèle additif

	Janvier	Février	Mars	Avril	Mai	Juin	Juillet	Août	Septembre	Octobre	Novembre	Décembre	Total
1994	-	-	-	-	-	-	-8,4	-280,3	82,3	89,4	-8,7	67,2	-223,1
1995	88,6	16,6	57,1	68,1	-2,8	58,5	4,8	-227,6	48,7	45,1	11,7	12,9	132,5
1996	0,9	8,4	72,0	32,6	-26,5	-74,8	6,3	-236,4	47,2	61,5	-1,0	43,3	-66,4
1997	-15,5	38,0	110,0	11,2	16,8	46,2	-93,8	-263,0	41,8	73,8	66,0	49,0	80,3
1998	4,9	-24,8	55,2	-19,4	42,8	52,6	-67,4	-238,1	46,6	12,4	27,8	-0,6	-226,1
1999	120,7	26,2	104,7	43,0	75,8	5,6	-31,7	-199,0	-3,3	116,8	45,3	41,6	345,5
2000	45,6	-51,8	-20,4	28,4	-9,9	24,6	-	-	-	-	-	-	16,6
Médiane	25,3	12,5	64,6	30,5	7,0	35,4	-20,1	-237,3	19,3	67,6	13,4	42,5	60,7
Composante saisonnière	20,2	7,4	59,5	25,4	1,9	30,4	-25,1	-242,3	14,2	62,6	8,3	37,4	0,0

aléatoire: $x_t - \hat{f}_t = \hat{c}_t + \varepsilon_t$. L'espérance mathématique de la composante aléatoire étant nulle, on peut calculer une estimation de la composante saisonnière puisque les différences $x_t - \hat{f}_t$ d'une même colonne du **tableau 299** sont autant de réalisations d'une même variable aléatoire suivant une loi Normale dont l'espérance mathématique n'est autre que la composante saisonnière recherchée, puisque l'on a: $E(c_t + \varepsilon_t) = E(c_t) + E(\varepsilon_t) = c_t + 0 = c_t$.

Plusieurs techniques sont alors envisageables : on peut retenir la moyenne calculée sur les éléments de la colonne, mais cette moyenne est largement tributaire des valeurs extrêmes que l'on peut observer. Certains praticiens préconisent d'éliminer la plus forte et la plus faible valeur dans le calcul de la moyenne, afin d'éliminer ce type de distorsion. D'autres auteurs préfèrent retenir la médiane, que l'on utilise habituellement comme estimateur de la moyenne d'une loi Normale, lorsque l'échantillon est faible. C'est cette dernière technique que nous utiliserons ici tout en indiquant que les programmes de «décomposition automatique» d'une chronique en ses diverses composantes adoptent des approches beaucoup plus sophistiquées¹. Par ailleurs dans le cas d'un nombre pair d'observations dans une colonne, on retiendra la moyenne de l'intervalle médian qui se substitue normalement à celle de la médiane dans le cas d'un nombre pair d'observations ; dans notre exemple, la médiane pour le mois de janvier sera donc : $(4,9 + 45,6)/2 = 25,3$ après arrondi.

Cette étape de calcul ne permet pas, sauf cas exceptionnel, de vérifier le principe de conservation des aires (cf. [relation 383 de la page 995](#), pour les modèles saisonniers additifs). Dans notre exemple numérique, la somme arithmétique des estimations par la médiane est égale à 60,8. Il faut donc retrancher $60,8/12 = 5,1$ à chacune des estimations pour vérifier le principe de conservation des aires (pour le mois de janvier, le coefficient saisonnier sera donc $25,3 - 5,1 = 20,2$).

Maintenant que l'on est en possession d'une estimation de la composante tendancielle (obtenue à partir de la moyenne mobile centrée), et d'une estimation de la composante saisonnière (obtenue à la dernière ligne du [tableau 299 de la page 1019](#)), on peut obtenir la **série désaisonnalisée** du [tableau 300 de la page 1020](#), en retranchant à la chronique observée les composantes saisonnières (par exemple pour le mois de janvier 1994, on aura $705 - 20,2 = 684,8$). La série brute et la série désaisonnalisée sont reportées sur la [figure 242](#).

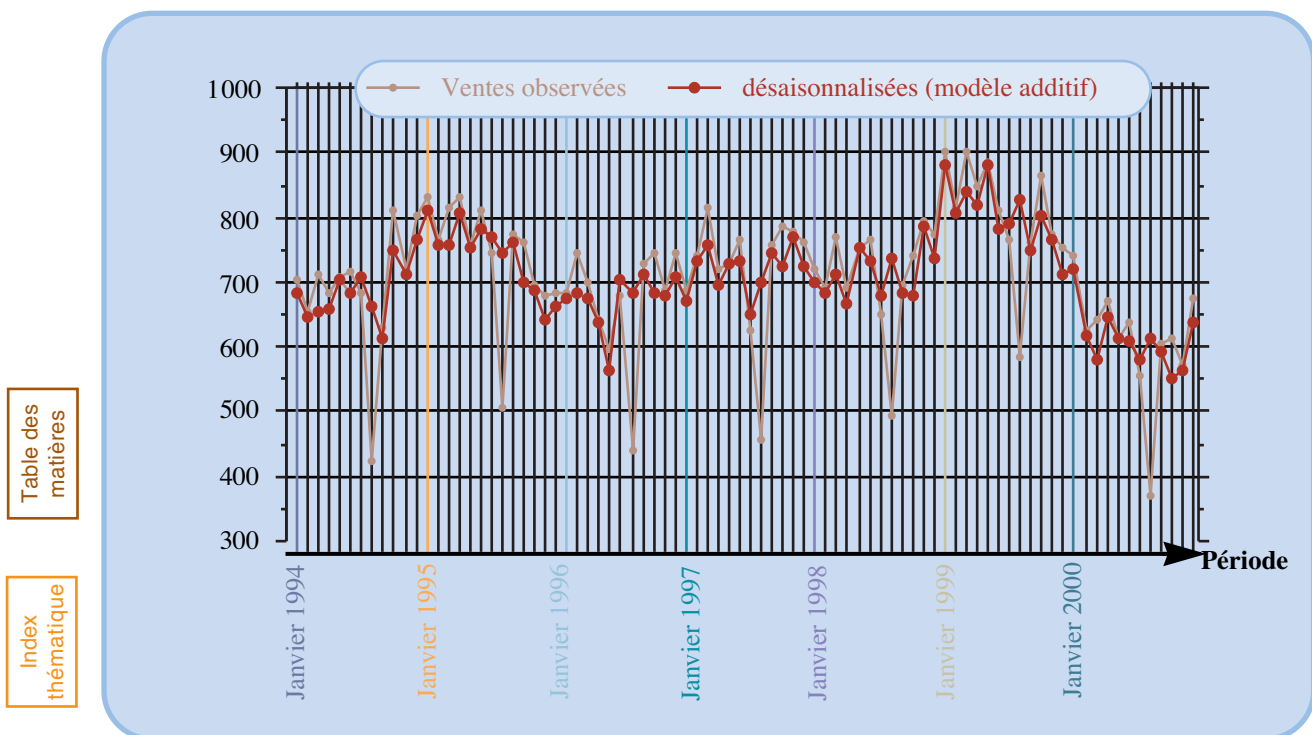
TABLEAU 300
Ventes désaisonnalisées (modèle additif)

	Janvier	Février	Mars	Avril	Mai	Juin	Juillet	Août	Septembre	Octobre	Novembre	Décembre
1994	684,8	645,6	653,5	658,6	705,1	683,6	709,1	664,3	614,8	748,4	712,7	765,6
1995	810,8	757,6	755,5	804,6	754,1	780,6	771,1	746,3	759,8	699,4	686,7	642,6
1996	661,8	676,6	683,5	675,6	639,1	564,6	704,1	681,3	713,8	683,4	679,7	705,6
1997	668,8	733,6	755,5	693,6	728,1	733,6	651,1	698,3	742,8	723,4	769,7	724,6
1998	698,8	684,6	711,5	666,6	751,1	733,6	677,1	736,3	681,8	679,4	785,7	735,6
1999	880,8	807,6	840,5	820,6	881,1	780,6	791,1	826,3	746,8	800,4	764,7	713,6
2000	718,8	616,6	580,5	646,6	613,1	607,6	580,1	614,3	590,8	552,4	564,7	636,6

1. Par exemple le programme X-11 mis au point par Shiskin pour le compte du Census Board (méthode de décomposition du Census II) et qui est d'une utilisation courante dans les grandes entreprises outre atlantique, remplace les valeurs des coefficients n'appartenant pas à un intervalle de confiance à 95% par des valeurs statistiquement plus vraisemblables (voir § II-2.1.12f, page 1026).

Toute la séquence de calculs qui a été conduite jusqu'ici reposait sur l'hypothèse d'un modèle additif. Si l'on préfère retenir celle d'un **modèle multiplicatif mixte** (introduit § I-2.4, page 994), c'est-à-dire $x_t = f_t \cdot c_t + \varepsilon_t$, une séquence de calculs légèrement différente permet d'obtenir une estimation des coefficients saisonniers. En effet, le quotient x_t/\hat{f}_t constitue une estimation de $c_t + \varepsilon_t/\hat{f}_t$, qui suit, là encore, une loi Normale centrée sur le coefficient saisonnier que l'on cherche à estimer. La table de Buys-Ballot des «rapports des observations aux moyennes mobiles centrées» est donnée au **tableau 301 de la page 1023** (par exemple pour juillet 1994, le rapport est: $684/692,4 = 0,9878$).

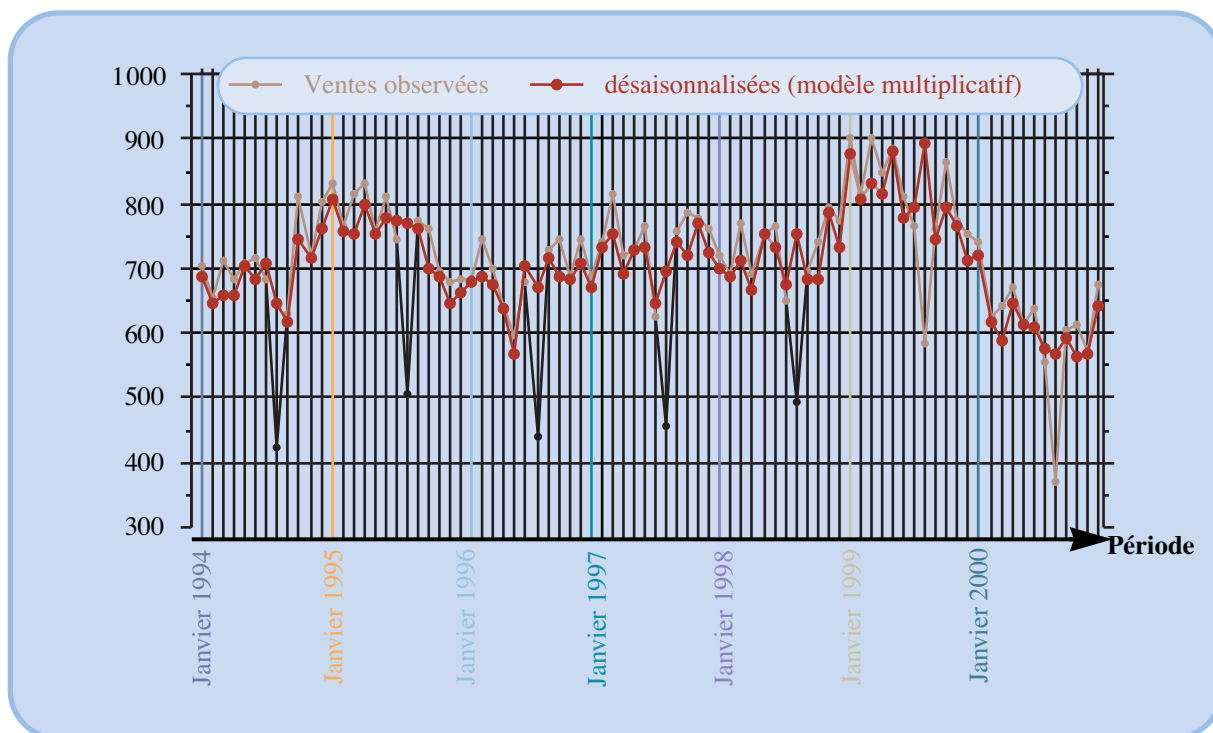
FIGURE 242
Série désaisonnalisée (modèle additif)



Dans le cas d'un modèle multiplicatif mixte, le principe de conservation des aires se traduit par la recherche d'une somme des coefficients saisonniers égale au nombre de coefficients saisonniers¹; cette somme (des estimations par les médianes) est dans notre exemple de 12,0923, ce qui revient à dire qu'il faut retrancher à chaque coefficient $0,0923/12 = 0,0077$ pour calculer la composante saisonnière multiplicative d'un mois (pour le mois de janvier, par exemple, on a $1,0363 - 0,0077 = 1,0286$). Les coefficients saisonniers du modèle multiplicatif sont calculés dans le **tableau 301 de la page 1023**. La série désaisonnalisée s'obtient ensuite en divisant chaque observation par la composante saisonnière correspondante, ce qui donne la série du **tableau 302** et la **figure 243, page 1022**. Là aussi, la nouvelle chronique s'interprète comme la combinaison de la composante tendancielle et de la composante aléatoire.



FIGURE 243
Ventes désaisonnalisées (modèle multiplicatif)



II-2.1.12d) Choix entre le modèle multiplicatif et le modèle additif

Si la composante tendancielle est correctement estimée et, en l'absence de composante aléatoire, le problème du choix entre un modèle additif et un modèle multiplicatif ne pose guère de difficulté pour les modèles de combinaison de ces composantes introduits au § I-2.4, page 994. En effet, le test d'un « mauvais modèle » conduit nécessairement à l'observation d'une tendance sur les différentes estimations des composantes saisonnières d'une même période. Illustrons ceci avec le tableau 303 de la page 1024 qui retrace les deux chroniques trimestrielles X_{1t} et X_{2t} suivantes :

Table des matières

Index thématique

1. Note de la page précédente. Voir Calot (1973, [82]) p. 355-357; on peut ajouter que l'on peut écrire la composante saisonnière c_t d'un modèle multiplicatif sous la forme $c_t = 1 + d_t$:

$$x_t = f_t \cdot c_t + \varepsilon_t = f_t(1 + d_t) + \varepsilon_t = f_t + f_t \cdot d_t + \varepsilon_t \rightarrow x_t - f_t = f_t \cdot d_t + \varepsilon_t, \text{ d'où:}$$

$$x_t - f_t = f_t \cdot d_t + \varepsilon_t \rightarrow \frac{x_t - f_t}{f_t} = d_t + \frac{\varepsilon_t}{f_t}. \text{ La valeur observée } (x_t - \hat{f}_t) / \hat{f}_t \text{ (que l'on peut mettre sous forme d'une table}$$

de Buys-Ballot comme le quotient $(x_t - \hat{f}_t) / \hat{f}_t$ est la réalisation de la variable aléatoire $(c_t + \varepsilon_t) / \hat{f}_t$ qui suit une loi Normale centrée; par exemple pour le mois 7 de 1994, cette réalisation est $(684 - 692,4) / 692,4 = -0,0122 (= 1 - 0,9878)$. L'intérêt de cette formulation est de pouvoir se ramener au modèle additif dans l'utilisation du principe de conservation des aires. En effet, si l'année comporte m périodes, on peut écrire :

$$\sum_{t=1}^m c_t = m \rightarrow \sum_{t=1}^m (1 + d_t) = m \rightarrow \sum_{t=1}^m 1 + \sum_{t=1}^m d_t = m \rightarrow m + \sum_{t=1}^m d_t = m \rightarrow \sum_{t=1}^m d_t = 0$$

ce qui fait que la somme des pourcentages d'écarts relatifs par rapport à la valeur tendancielle, de l'ensemble des périodes d'une année, est nécessairement nulle.

TABLEAU 301
Coefficients saisonniers du modèle multiplicatif

	Janvier	Février	Mars	Avril	Mai	Juin	Juillet	Août	Septembre	Octobre	Novembre	Décembre	Total
1994	-	-	-	-	-	-	0,988	0,601	0,884	1,124	0,988	1,091	5,676
1995	1,119	1,022	1,075	1,089	0,996	1,078	1,006	0,689	1,067	1,063	0,983	0,981	12,171
1996	1,001	1,012	1,107	1,049	0,960	0,888	1,009	0,650	1,069	1,090	0,999	1,062	11,898
1997	0,978	1,054	1,156	1,016	1,023	1,064	0,870	0,634	1,058	1,104	1,093	1,069	12,119
1998	1,007	0,965	1,077	0,973	1,060	1,074	0,906	0,675	0,937	0,984	1,036	0,999	11,694
1999	1,155	1,033	1,132	1,053	1,094	1,007	0,960	0,746	0,996	1,157	1,062	1,059	12,453
2000	1,066	0,923	0,969	1,044	0,984	1,040	-	-	-	-	-	-	6,027
Médiane	1,036	1,017	1,092	1,046	1,010	1,052	0,974	0,662	1,027	1,097	1,017	1,060	12,092
Composante saisonnière	1,029	1,010	1,085	1,039	1,002	1,045	0,966	0,655	1,019	1,089	1,010	1,053	12,000

TABLEAU 302
Ventes désaisonnalisées (modèle multiplicatif)

	Janvier	Février	Mars	Avril	Mai	Juin	Juillet	Août	Septembre	Octobre	Novembre	Décembre
1994	685,4	646,8	657,4	658,5	705,4	683,5	707,8	644,6	617,0	744,7	714,1	762,9
1995	807,9	757,7	751,5	799,0	754,3	776,4	772,0	769,8	759,3	699,7	688,3	646,0
1996	663,0	677,5	685,1	674,9	639,6	569,6	702,7	670,6	714,1	685,0	681,4	705,9
1997	669,8	734,0	751,5	692,2	728,4	731,4	647,8	696,5	742,6	721,7	770,5	723,9
1998	699,0	685,4	710,9	666,2	751,3	731,4	674,7	754,6	682,7	681,3	786,4	734,4
1999	875,9	807,3	829,9	814,4	881,0	776,4	792,7	892,0	746,5	792,5	765,6	713,5
2000	718,4	618,1	590,1	646,9	613,6	610,8	574,3	568,2	593,5	564,7	567,5	640,3

Table des matières

Index thématique

- $X_{1t} = 1000 + 50 \cdot t + c_i$; avec $c_1 = -150$, $c_2 = +50$, $c_3 = +120$ et $c_4 = -20$ (modèle additif)
- $X_{2t} = 1000 + 50 \cdot t + c_i$; avec $c_1 = 0,85$, $c_2 = 1,05$, $c_3 = 1,12$ et $c_4 = 0,98$ (modèle multiplicatif)

Là où les choses se compliquent, c'est lorsque la chronique étudiée comporte une composante aléatoire, sauf si l'importance de la perturbation aléatoire est très faible par rapport à l'amplitude des composantes saisonnières. Dans le cas contraire, la décomposition de la chronique est sujette à caution et doit être maniée avec prudence. En pratique, on testera les deux modèles pour y rechercher des indices permettant d'infirmar le bien-fondé de l'hypothèse analysée. Si aucun des deux modèles ne peut être rejeté, on retiendra celui qui semble le plus approprié sur la base de considérations extra statistiques.

Lorsque l'évolution tendancielle est faible, il est difficile de choisir entre les deux types de modèle. Pour «trancher», il est utile de calculer la variance rési-

TABLEAU 303
Exemple de distorsions induites par le choix d'un modèle erroné

			$X_{1t} = 1000 + 50t + c_t$ pour le trimestre				$X_{2t} = (1000 + 50t) c_t$ pour le trimestre			
			1	2	3	4	1	2	3	4
Séries	Année	1996	900	1150	1270	1180	892,5	1155,0	1288,0	1176,0
		1997	1100	1350	1470	1380	1062,5	1365,0	1512,0	1372,0
		1998	1300	1550	1670	1580	1232,5	1575,0	1736,0	1568,0
		1999	1500	1750	1870	1780	1402,5	1785,0	1960,0	1764,0
		2000	1700	1950	2070	1980	1572,5	1995,0	2184,0	1960,0
			modèle supposé (à tort) multiplicatif				modèle supposé (à tort) additif			
Détermination de la composante saisonnière	Année	1996	-	-	1,104	0,983	-	-	138,9	-20,6
		1997	0,880	1,038	1,089	0,986	-188,4	61,6	162,9	-24,6
		1998	0,897	1,033	1,077	0,988	-218,4	71,6	186,9	-28,6
		1999	0,909	1,029	1,069	0,989	-248,4	81,6	210,9	-32,6
		2000	0,919	1,026	-	-	-278,4	91,6	-	-
	médiante		0,903	1,031	1,083	0,987	-233,4	76,6	174,9	-26,6
	composante saisonnière		0,902	1,030	1,082	0,986	-231,3	78,8	177,0	-24,5

duelle de chacun des deux modèles et l'on retiendra celui dont la variance résiduelle est la plus faible¹. Pour calculer cette variance résiduelle, il suffit de calculer la moyenne des carrés des résidus (c'est-à-dire les différences entre les valeurs observées et les combinaisons des estimations des composantes tendancielle et saisonnière), puisque, par hypothèse, l'espérance mathématique des résidus est nulle et que la relation de calcul de la variance est «la moyenne des carrés moins le carré de la moyenne».

Ajoutons enfin que lorsque le problème se pose pour de très nombreuses références, il est préférable de travailler sur des données agrégées par «groupe homogène de références», pour obtenir une meilleure précision de composante saisonnière. En effet, l'incidence des composantes aléatoires est alors diminuée en vertu de la propriété statistique bien connue selon laquelle «la variance d'une somme de variables aléatoires indépendantes est égale à la somme des variances de ces variables», ce qui conduit à un coefficient de variation² plus faible. Pour agir ainsi, il faut normalement que le type d'évolution tendancielle de chacune des composantes de l'agrégat soit linéaire, mais dans le cas contraire, on peut agir de même si les évolutions tendancielle sont faibles.

Illustrons ce point par l'exemple numérique (trimestriel) suivant:

$$X_{1t} = (1000 + 50t) c_i + \varepsilon_{1t}, \text{ avec } \mathcal{L}(\varepsilon_{1t}) = \mathcal{N}(0,80)$$

$$X_{2t} = (4000 - 100t) c_i + \varepsilon_{2t}, \text{ avec } \mathcal{L}(\varepsilon_{2t}) = \mathcal{N}(0,100)$$

1. Ce raisonnement pouvant être conduit en termes d'écart-type résiduel (c'est celui qui a été tenu dans les commentaires effectués sur les résultats du [tableau 294](#), page 1011).

2. Rapport de l'écart-type à la moyenne.

$$X_{3t} = (2000 + 35t) c_i + \varepsilon_3, \text{ avec } \mathcal{L}(\varepsilon_{3t}) = \mathcal{N}(0,50)$$

avec $c_1 = 0,85$, $c_2 = 1,05$, $c_3 = 1,12$ et $c_4 = 0,98$. Ces données permettent d'établir le **tableau 304** (obtenu à partir de simulation des lois normales dans un tableur) et les moyennes mobiles qui permettent d'aboutir aux estimations des coefficients saisonniers et des erreurs relatives commises pour les estimations faites à partir des séries individuelles et de la série agrégée.

TABLEAU 304
Illustration de l'estimation « groupée » de la composante saisonnière

Période	Série 1		Série 2		Série 3		Série agrégée	
	X_1	Moyenne mobile	X_2	Moyenne mobile	X_3	Moyenne mobile	$X_1 + X_2 + X_3$	Moyenne mobile
1	965	-	3324	-	1736	-	6025	-
2	1138	-	3931	-	2109	-	7178	-
3	1256	1151,8	4195	3703,8	2465	2123,1	7916	6978,6
4	1270	1186,8	3497	3637,6	2138	2162,8	6905	6987,1
5	921	1244,6	3060	3524,0	1825	2198,6	5806	6967,3
6	1462	1274,5	3666	3418,8	2337	2226,1	7465	6919,4
7	1395	1326,6	3551	3337,6	2524	2266,3	7470	6930,5
8	1370	1376,4	3299	3222,0	2299	2296,9	6968	6895,3
9	1238	1426,5	2609	3117,0	1985	2321,0	5832	6864,5
10	1543	1494,3	3192	3002,4	2422	2340,3	7157	6836,9
11	1715	1542,1	3185	2890,3	2632	2366,8	7532	6799,1
12	1592	1594,8	2748	2787,5	2345	2403,0	6685	6785,3
13	1399	1657,5	2263	2683,5	2151	2443,0	5813	6784,0
14	1803	1717,6	2716	2593,4	2546	2478,6	7065	6789,6
15	1957	1772,3	2829	2531,5	2828	2489,4	7614	6793,1
16	1831	1812,5	2383	2463,8	2434	2508,6	6648	6784,9
17	1597	1855,9	2133	2363,8	2148	2546,1	5878	6765,8
18	1927	1914,1	2304	2270,6	2703	2582,3	6934	6767,0
19	2180	-	2441	-	2971	-	7592	-
20	2074	-	2026	-	2580	-	6680	-

Table des matières

Index thématique

TABLEAU 305
Estimations des composantes saisonnières et erreurs d'estimation

Trimestre	Série 1		Série 2		Série 3		Série agrégée	
	estimation	erreur	estimation	erreur	estimation	erreur	estimation	erreur
1	0,8535	0,41 %	0,8565	0,76 %	0,8501	0,01 %	0,8537	0,44 %
2	1,0424	-0,72 %	1,0559	0,56 %	1,0415	-0,81 %	1,0442	-0,55 %
3	1,0986	-1,91 %	1,1104	-0,86 %	1,1255	0,49 %	1,1148	-0,46 %
4	1,0055	2,60 %	0,9772	-0,29 %	0,9829	0,29 %	0,9872	0,74 %

II-2.1.12e) Composante saisonnière et variation par palier de la composante tendancielle

Nous avons évoqué à la [page 988](#), le problème de composantes tendanciennes variant par palier («campagnes» ou «saisons»). Lorsque cette évolution est annuelle, le problème de la détermination d'une saisonnalité peut se poser: par exemple, un fabricant de bouteilles sera intéressé, une fois connu le volume de Beaujolais à mettre en bouteille, par la répartition dans le temps de cette mise en bouteille par les producteurs, les coopératives et divers négociants. Les méthodes précédemment décrites ont de fortes chances de conduire à une impasse, en particulier si la stabilité des comportements saisonniers implique celle de l'importance relative des mois dans l'exercice annuel (celui-ci n'ayant aucune raison de coïncider avec l'année civile). Si cette hypothèse est fondée, il faut alors travailler sur des coefficients saisonniers correspondant à la part de la période dans l'exercice; si aucune évolution au cours du temps n'est décelable, il suffit d'adapter la démarche «classique», c'est-à-dire déterminer les médianes puis corriger ces dernières pour que la somme des coefficients soit bien égale à 100% (ce qui constitue une «transposition» du principe de conservation des aires). Il se peut fort bien qu'une tendance soit décelable pour certains coefficients saisonniers, à la suite d'une évolution des comportements (déplacement de la demande de Beaujolais vers le Beaujolais nouveau, par exemple). Dans ce cas, il faudra déterminer préalablement les valeurs prises par ces coefficients, puis corriger les médianes des seuls autres coefficients.

II-2.1.12f) Les méthodes de décomposition «automatique»

L'approche que nous venons de suivre aboutit à la détermination d'une estimation de la composante tendancielle et d'une estimation de la composante saisonnière. Elle permet donc de décomposer une chronique en ses trois composantes. Cette démarche est susceptible d'amélioration, en ce sens que l'on peut chercher à obtenir, dans le processus de décomposition, des estimations qui ne soient pas trop tributaires de valeurs de la composante aléatoire exceptionnellement fortes ou faibles.

Dans cette optique, l'INSEE procède¹ à une seconde estimation de la composante tendancielle, en repassant un filtre en moyenne mobile centrée sur la série désaisonnalisée puis recommence, avec cette nouvelle information, toute la séquence de calculs que nous venons de décrire. À l'étranger, différents organismes publics ont également mis au point leurs méthodes de décomposition, et les programmes correspondants sont largement disponibles. La méthode la plus connue est sans aucun doute celle mise au point par Shiskin² pour le compte du Census Board aux États-Unis, et son succès dans l'analyse de séries agrégées se

1. Voir Calot (1973, [82]) p. 390 et sq.

2. La version initiale, dite X-11 est décrite dans Shiskin, Young et Musgrave (1969, [384]). Madridakis, Wheelwright et Hyndman (1998, [291]) décrivent d'une façon suffisamment détaillée, l'utilisation «classique» de ce programme aux p. 113 à 121, ainsi que les extensions X-12-ARIMA de cette approche, basée sur une utilisation préalable des approches de Box et Jenkins (cf. § III-2, page 1083) pour éliminer ce qui peut être expliqué par des variables exogènes préalablement au processus de décomposition. D'autres approches empiriques sophistiquées, basées sur des décompositions automatiques sont également utilisées, notamment la méthode STL (voir Madridakis, Wheelwright et Hyndman, 1998, [291], p. 121-224). Ces programmes sont téléchargeables sur Internet (<ftp://ftp.census.gov/pub> et <http://netlib.bell-labs.com/netlib>).

justifie par ses bonnes performances. Celles-ci s'expliquent par le choix des filtres linéaires utilisés¹ qui, d'une part, s'appliquent bien à la plupart des situations rencontrées² et, d'autre part, ne nécessitent pas l'utilisation d'un historique trop long. Les résultats obtenus avec le programme X-11 sont donnés au [tableau 306 de la page 1028](#) et illustrés par la [figure 244](#).

FIGURE 244

Désaisonnalisation de la chronique des ventes par la méthode X-11 du Census Board (modèle multiplicatif)

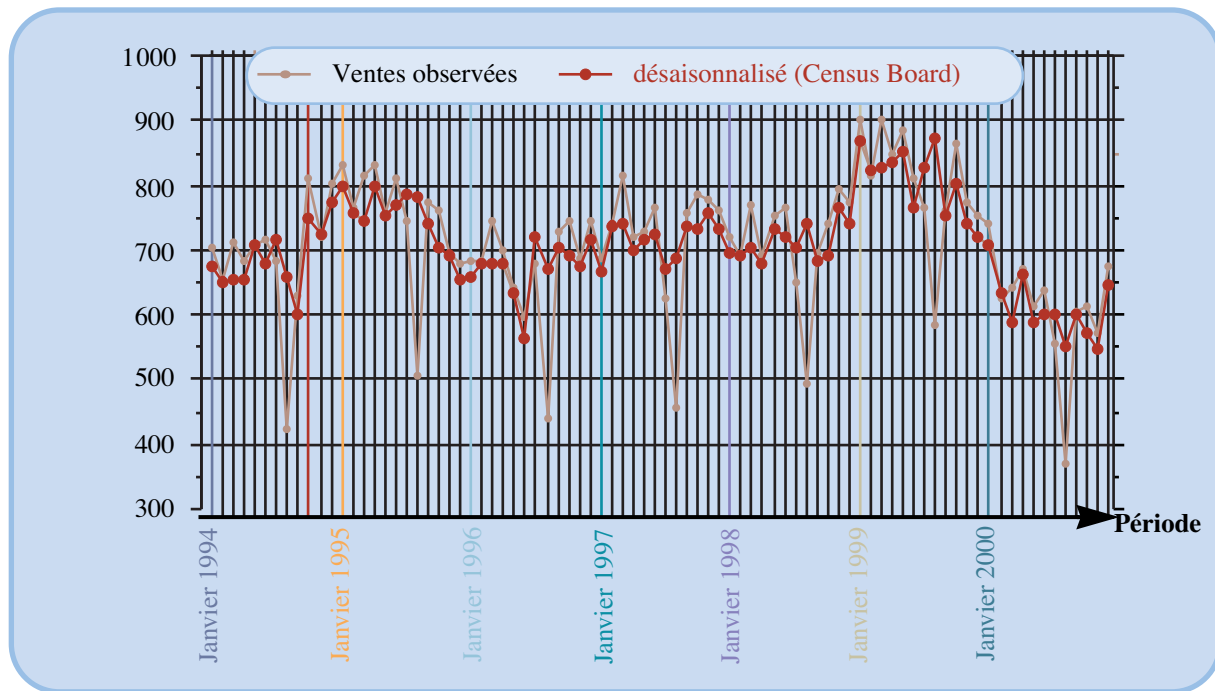


Table des matières

Table des matières

Index thématique

Index thématique

II-2.1.2 Les filtres empiriques orientés vers l'estimation prévisionnelle de la composante tendancielle

Les filtres étudiés au § II-2.1.1 visaient à obtenir, à une date t , une estimation de la valeur tendancielle à cette date, à partir d'une chronique comportant l'observation x_t , et centrée sur cette observation x_t . L'objectif poursuivi par les filtres que l'on va maintenant étudier reste celui d'une estimation prévisionnelle de la composante tendancielle à une date postérieure à celles des informations utilisées dans la définition du filtre linéaire (en règle générale à une date supérieure à celles-ci).

On distinguera ici deux cas de figure, celui d'une absence d'évolution dans la composante tendancielle (§ II-2.1.2.1), c'est-à-dire que l'on a: $f_t = b$; et celui d'une évolution tendancielle linéaire (§ II-2.1.2.2, page 1029), c'est-à-dire que

1. Note de la page précédente. En anticipant sur la suite, on peut indiquer que la méthode suivie correspond approximativement au modèle suivant (cf. Tiao et Cleveland, 1976, [420]):

$$(1-B)^2 f_t = (1+0,498-0,498^2)\varepsilon_{1t} \text{ et } (1-B)^2 c_t = (1+0,64B^{12}+0,83B^{24})\varepsilon_{2t} \text{ avec } \frac{\sigma_{2\varepsilon}^2}{\sigma_{1\varepsilon}^2} = 1,3 \text{ et } \frac{\sigma_{\varepsilon}^2}{\sigma_{1\varepsilon}^2} = 14,4 ; \text{ modèle qui}$$

s'adapte bien aux séries non stationnaires où les composantes tendancielle et saisonnière suivent une évolution linéaire dont la pente et l'ordonnée varient au cours du temps.

2. C'est-à-dire que le nombre de paramètres à estimer n'est pas grand. Dans certaines méthodes, ce nombre dépasse la cinquantaine, ce qui réduit singulièrement le nombre de degrés de liberté.

TABLEAU 306
Ventes désaisonnalisées (modèle multiplicatif X-11 du Census Board)

	Janvier	Février	Mars	Avril	Mai	Juin	Juillet	Août	Septembre	Octobre	Novembre	Décembre
1994	673	648	654	656	707	679	715	660	600	748	724	773
1995	797	759	745	799	751	769	785	783	741	705	692	655
1996	658	678	677	679	633	564	722	672	703	692	675	716
1997	666	738	742	701	715	723	671	689	738	731	756	734
1998	694	691	703	678	731	722	705	740	684	690	764	742
1999	867	821	826	834	850	765	829	873	752	802	741	719
2000	708	632	590	664	589	602	600	553	602	572	548	646

l'on a : $f_t = at + b$. Mais la logique introduite dans ce dernier cas de figure est généralisable sans difficulté à toute évolution tendancielle que l'on peut décrire par une fonction polynomiale en t . Dans un dernier paragraphe (§ II-2.1.2.3, page 1032), nous ferons quelques remarques sur l'interprétation des résultats.

Avant d'entamer l'étude de ces filtres, indiquons tout de suite qu'ils ne s'appliquent qu'à des séries non saisonnières, c'est-à-dire que la composante saisonnière n'existe pas, ou qu'elle a été préalablement éliminée à l'aide de filtres en moyennes mobiles centrées appropriés.

II-2.1.2.1 Moyenne mobile simple non centrée (cas de l'absence d'évolution tendancielle)

Lorsqu'il n'y a pas d'évolution tendancielle notable, la moyenne mobile non centrée y_t , définie à la date t et utilisée comme prévision pour la période $t + 1$ ($\hat{x}_{t+1} = y_t$) ou pour une période $t + k$ postérieure quelconque, puisque par hypothèse le phénomène ne connaît pas d'évolution ($\hat{x}_{t+k} = y_t$), n'est autre que la moyenne arithmétique des s dernières observations disponibles à la date t (c'est-à-dire x_{t-s+1} à x_t):

$$\hat{x}_{t+k} = y_t = \frac{1}{s} \sum_{i=0}^{s-1} x_{t-i}, \text{ pour } k \geq 1 \quad \text{relation 399}$$

Si ce filtre porte sur un nombre impair d'observations ($s = 2n + 1$), on va retrouver numériquement la valeur du filtre en moyenne mobile centrée que l'on aurait calculé à la date $t - n$, comme l'illustre le tableau 307, pour un filtre portant sur $s = 5$ périodes ($\rightarrow n = 2$).

TABLEAU 307
Exemple de moyenne mobile simple non centrée

Date	$t - 4$	$t - 3$	$t - 2$	$t - 1$	t
x_t	10	9	11	12	10
Moyenne mobile non centrée	-	-	-	-	10,4
Moyenne mobile centrée (utilisant la même partie de chronique)	-	-	10,4	-	-

II-2.1.2.2 Moyenne mobile double (cas d'une évolution tendancielle linéaire)

Pour comprendre la logique qui a présidé à la définition des moyennes mobiles doubles, nous partirons (cf. [tableau 308, page 1029](#)) d'un double exemple numérique d'application d'un même filtre en moyenne non centrée (avec: $s = 5$). Dans le premier exemple, la chronique de départ ne comporte qu'une composante tendancielle linéaire, à l'exclusion de toute autre composante. Dans le second exemple, la chronique sur laquelle on travaillera sera la somme de la chronique précédente et d'une composante aléatoire générée aléatoirement et suivant la loi: $\mathcal{N}(0; 1,5)$. L'interprétation de la dernière ligne du [tableau 308](#) sera fournie à la [page 1030](#).

TABLEAU 308
Exemple de moyennes mobiles doubles

t		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Exemple 1	$x_t = f_t = 10 + 2t$	12	14	16	18	20	22	24	26	28	30	32	34
	$y_t = \frac{1}{5} \sum_{i=0}^4 x_{t-i}$	-	-	-	-	16	18	20	22	24	26	28	30
Exemple 2	ε_t	0,14	-0,89	0,76	-0,46	1,28	1,44	-2,18	2,45	-0,39	0,64	-0,94	0,06
	$x_t = f_t + \varepsilon_t$	12,14	13,11	16,76	17,54	21,28	23,44	21,82	28,45	27,61	30,64	31,06	34,06
	$y_t = \frac{1}{5} \sum_{i=0}^4 x_{t-i}$	-	-	-	-	16,17	18,43	20,17	22,51	24,52	26,39	27,92	30,36
	$1,5x_t - 0,5y_t$	-	-	-	-	23,84	25,95	22,65	31,42	29,16	32,76	32,63	35,91

Table des matières

Index thématique

Dans le premier exemple, la différence entre x_t et y_t est de 4, c'est-à-dire deux fois la valeur de la pente, ce qui ne saurait étonner puisque, d'une part, nous avons souligné (à la fin du § II-2.1.2.1) que la valeur numérique prise en t par la moyenne mobile non centrée pour un filtre d'une longueur $s = 2n + 1$ est la même que celle prise par la moyenne mobile centrée à la date $t - n$, valeur identique à la composante tendancielle à cette même date $t - n$ (en l'absence de composante aléatoire) et, d'autre part, que la différence entre $x_t = at + b$ et $x_{t-n} = a(t - n) + b$ est très précisément $n \cdot a$, ce qui donne $2 \times 2 = 4$ dans notre exemple. Pour tenir compte du fait que la moyenne mobile non centrée peut porter sur un nombre pair de périodes, on montre¹, que d'une manière générale, cet écart est:

$$x_t - y_t = \frac{s-1}{2} \cdot a \tag{relation 400}$$

En restant dans le cadre du premier exemple et en supposant que l'objectif poursuivi soit la prévision à la date t , de la valeur que l'on observera à la date $t + 1$, il suffit d'ajouter à x_t la pente calculée en transformant la [relation 400](#):

1. avec $x_t = at + b$ on a:

$$y_t = \frac{1}{s} \sum_{i=0}^{s-1} x_{t-i} = \frac{1}{s} \sum_{i=0}^{s-1} \{a(t-i) + b\} = \frac{1}{s}(at + b) \sum_{i=0}^{s-1} 1 - \frac{a}{s} \sum_{i=0}^{s-1} i = \frac{s}{s}(at + b) - \frac{a}{s} \cdot \frac{s(s-1)}{2}, \text{ d'où:}$$

$$y_t = at + b - a \cdot \frac{s-1}{2} = x_t - a \cdot \frac{s-1}{2} \rightarrow x_t - y_t = a \cdot \frac{s-1}{2}$$

$$a = (x_t - y_t) \frac{2}{s-1} \quad \text{relation 401}$$

d'où l'on tire :

$$x_{t+1} = x_t + a = x_t \frac{s+1}{s-1} - y_t \frac{2}{s-1} \quad \text{relation 402}$$

ce qui donne dans notre exemple numérique ($s = 5 \rightarrow x_{t+1} = 1,5x_t - 0,5y_t$) pour une prévision faite à la date $t = 5$: $\hat{x}_6 = x_5 + (x_5 - y_5) \frac{2}{5-1} = 20 + (20 - 16) \frac{2}{4} = 22$ ou encore : $\hat{x}_6 = 1,5x_5 - 0,5y_5 = 1,5 \times 20 - 0,5 \times 16 = 22$.

Une telle démarche est admissible tant que la chronique ne comporte pas de composante aléatoire. L'introduction de cette dernière a en effet deux conséquences :

- tout d'abord au niveau de l'objectif poursuivi, on ne pourra plus prétendre calculer la valeur que prendra x_{t+1} mais seulement une estimation de la composante tendancielle en $t + 1$;
- d'autre part, dans la relation précédente, l'impact de la composante aléatoire sur x_t et y_t n'est pas du tout le même, puisque pour y_t un certain lissage de la composante aléatoire est opéré¹ ; il s'ensuit que la prévision que l'on pourrait faire en suivant cette méthode dans le second exemple (cf. dernière ligne du [tableau 308 de la page 1029](#)) serait tributaire de fluctuations d'échantillonnage de x_t , ($\sqrt{s} = 2$) $\sqrt{5}$ fois plus fortes que celles de y_t , et de surcroît affecté d'un poids relatif $(s + 1)/2 = 3$ fois plus fort que celui de y_t .

Pour pallier ce dernier inconvénient, il faut calculer la pente à partir de deux séries lissées, et pour ce faire, il suffit de calculer une moyenne mobile non centrée z_t , sur la chronique y_t , et utilisant le même nombre s de périodes. En effet, en l'absence de composante aléatoire, la chronique z_t se déduit de la chronique y_t par une translation de même amplitude que celle qui a permis d'obtenir y_t à partir de x_t , ce qui revient à dire que l'on a :

$$x_t - y_t = y_t - z_t \quad \text{relation 403}$$

Vérifions cette propriété sur le premier exemple du [tableau 309](#). Il découle de cette [relation 403](#) que l'on a, en l'absence de composante aléatoire : $x_t = y_t + (y_t - z_t) = 2y_t - z_t$, relation qui va nous servir à estimer la valeur théorique de x_t , si la composante aléatoire existe :

$$\hat{x}_t = 2y_t - z_t \quad \text{relation 404}$$

La pente, que l'on pouvait calculer sans difficulté à partir de la différence $x_t - y_t$, en l'absence de composante aléatoire, s'estime en utilisant le même raisonnement à partir de la différence $y_t - z_t$ si la composante aléatoire est présente en remplaçant tout simplement $(x_t - y_t)$ par $(y_t - z_t)$ dans les résultats obtenus précédemment (cette estimation étant faite à la date t sera indiquée par cette date) :

1. Pour être plus précis, l'indicateur que constitue la variance est, en application de la théorie de la distribution d'échantillonnage des moyennes, $s = 5$ fois plus faible pour y_t que pour x_t . Voir par exemple Giard (1995, [182]), chapitre IV, § II.1.

TABLEAU 309
Exemple d'utilisation en cascade de la moyenne mobile simple

t	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	
Exemple 1	$x_t = f_t = 10 + 2t$	12	14	16	18	20	22	24	26	28	30	32	34
	$y_t = \frac{1}{5} \sum_{i=0}^4 x_{t-i}$	-	-	-	-	16	18	20	22	24	26	28	30
	$z_t = \frac{1}{5} \sum_{i=0}^4 y_{t-i}$	-	-	-	-	-	-	-	-	20	22	24	26
Exemple 2	ε_t	0,14	-0,89	0,76	-0,46	1,28	1,44	-2,18	2,45	-0,39	0,64	-0,94	0,06
	$x_t = f_t + \varepsilon_t$	12,14	13,11	16,76	17,54	21,28	23,44	21,82	28,45	27,61	30,64	31,06	34,06
	$y_t = \frac{1}{5} \sum_{i=0}^4 x_{t-i}$	-	-	-	-	16,17	18,43	20,17	22,51	24,52	26,39	27,92	30,36
	$z_t = \frac{1}{5} \sum_{i=0}^4 y_{t-i}$	-	-	-	-	-	-	-	-	20,36	22,40	24,30	26,34
	$2y_t - z_t$									28,68	30,38	31,53	34,39
	$0,5(y_t - z_t)$									2,08	1,99	1,81	2,01
	$2,5y_t - 1,5z_t$									30,76	32,38	33,34	36,40

$$\hat{a}_t = \frac{2}{s-1}(y_t - z_t) \quad \text{relation 405}$$

Table des matières

À partir des relations 404 et 405, il est possible d'effectuer une prévision à une date $t + k$ quelconque: $\hat{x}_{t+k} = \hat{x}_t + k \cdot \hat{a}_t = (2y_t - z_t) + \left\{ k \cdot \frac{2}{s-1}(y_t - z_t) \right\}$ d'où l'on

tire:

Index thématique

$$\hat{x}_{t+k} = y_t + (y_t - z_t) \frac{s + 2k - 1}{s - 1} \quad \text{relation 406}$$

Cette relation 406 donne pour $s = 5$, une prévision effectuée en t pour la date $t + 1$: $\hat{x}_{t+1} = 2,5y_t - 1,5z_t$. Cette relation est utilisée dans la dernière ligne du tableau 309 et l'on peut constater qu'à défaut de trouver la valeur exacte de la composante tendancielle vraie, on en obtient malgré tout une estimation satisfaisante.

La technique de la moyenne mobile double peut, nous l'avons dit, s'appliquer à des chroniques désaisonnalisées. Reprenons l'exemple des ventes du rayon de ventes de journaux du Casimouth d'Alphaville: l'estimation de sa composante tendancielle à l'aide du filtre en moyenne mobile centrée montre (voir figure 241, page 1019) une évolution à la baisse assez marquée depuis le mois de juin 1999. Reprenons la technique de la moyenne mobile double basée sur l'utilisation de la moyenne mobile non centrée sur 5 périodes (tableau 310, page 1032) pour effectuer (tableau 311, page 1032) une prévision de la composante tendancielle pour les neuf mois qui suivent la dernière valeur disponible (juin 1999). L'estimation de la pente, en application de la relation 405, est $\hat{a} = -16,55$; cette variation mensuelle correspond, on le verra au § II-2.1.23a, page 1032, à une variation annuelle de -2383 .

TABLEAU 310

Moyennes mobiles doubles (5 périodes) sur les ventes du rayon de ventes de journaux du Casimouth d'Alphaville

	$t = 1$ octobre 1999	$t = 2$ novembre 1999	$t = 3$ décembre 1999	$t = 4$ janvier 2000	$t = 5$ février 2000	$t = 6$ mars 2000	$t = 7$ avril 2000	$t = 8$ mai 2000	$t = 9$ juin 2000
Estimation de la composante tendancielle des ventes de Casimouth x_t	746,17	727,75	709,38	693,38	675,75	660,42	643,58	624,92	613,38
y_t	-	-	-	-	710,48	693,33	676,50	659,61	643,61
z_t	-	-	-	-	-	-	-	-	676,71

TABLEAU 311

Prévisions de la composante tendancielle des ventes du rayon de ventes de journaux du Casimouth d'Alphaville

	$t = 10$ juillet 2000	$t = 11$ août 2000	$t = 12$ septembre 2000	$t = 13$ octobre 2000	$t = 14$ novembre 2000	$t = 15$ décembre 2000	$t = 16$ janvier 2001	$t = 17$ février 2001	$t = 18$ mars 2001
\hat{x}_t	593,96	577,41	560,86	544,31	527,76	511,22	494,67	478,12	461,57

La prévision effectuée pour le mois de janvier 2001 (premier mois qui suit la dernière information disponible, utilisée dans la moyenne mobile centrée ayant servi à estimer la composante tendancielle) a une valeur tendancielle de 494,67. On peut la combiner sans difficulté avec l'estimation de la composante saisonnière trouvée précédemment. Supposons, par exemple, que l'on estime que le modèle multiplicatif (tableau 301 de la page 1023) est le plus approprié; il convient alors de multiplier l'estimation de la composante tendancielle par celle de la composante saisonnière ($494,67 \times 1,029 =$) 509, pour obtenir une prévision pour ce mois de janvier.

Il est habituel, après avoir décomposé une chronique en ses diverses composantes, d'effectuer indépendamment des prévisions pour les composantes certaines, puis de les « combiner » pour donner une estimation prévisionnelle (ici implicitement la composante saisonnière multiplicative est supposée être stable). Il convient toutefois d'émettre des réserves sur la prévision effectuée ici, car la décroissance tendancielle observée est particulièrement forte, et son maintien sur un horizon relativement éloigné est sujet à caution.

II-2.1.2.3 Remarques

Nous terminerons la présentation des moyennes mobiles doubles par trois remarques. Les deux premières sont importantes du point de vue pratique, la dernière ne présente qu'un intérêt théorique.

II-2.1.23a) Interprétation de la pente a

Quels que soient les filtres linéaires utilisés pour effectuer une estimation prévisionnelle de la composante tendancielle, on est en mesure de calculer une estimation de la pente (celle-ci dans l'exemple précédent était $a = -16,549$, en application de la relation 405 de la page 1031). Son analyse peut donner lieu à des interprétations erronées. En effet, la variation du cumul annuel d'une année sur



l'autre n'est pas $m \times a$, si l'année comporte m périodes ($16,549 \times 12 = 198,59$ dans notre exemple), car cette valeur est représentative de la variation enregistrée au bout d'un an de la composante tendancielle définie pour la période de base servant de référence à la chronique (le mois dans notre exemple). Pour calculer cette variation, il faut distinguer le cas du nombre pair de périodes dans une année, de celui du nombre impair.

- Lorsque la moyenne mobile centrée y_t comporte un nombre impair de périodes ($s = 11$ par exemple), le produit de la moyenne mobile par le nombre de périodes s du filtre redonne la valeur observée d'un exercice annuel glissant (c'est-à-dire du cumul de s observations successives). Dans l'exemple du [tableau 297 de la page 1016](#), à la date $t = 8$, on observait la valeur $y_8 = 26$.

$$\text{Or : } 11 \cdot y_8 = 11 \cdot 26 = \sum_{i=-5}^{+5} x_{8+i} = 17+21+18+23+22+26+30+29+31+32+37 = 266 ;$$

la différence du produit par s de deux valeurs observées ou estimées de moyennes mobiles centrées séparées de s périodes, (y_8 et $y_{8+11} = y_{19}$ par exemple) correspond donc à la différence entre deux exercices annuels glissants successifs :

$$11y_8 = 26 \cdot 11 = \sum_{i=-5}^{+5} x_{8+i} ; \quad 11y_{19} = \sum_{i=-5}^{+5} x_{19+i} . \text{ D'où :}$$

$$(x_{14} + x_{15} + \dots + x_{23} + x_{24}) - (x_3 + x_4 + \dots + x_{12} + x_{13}) = 11 \cdot y_{19} - 11 \cdot y_8 = 11(y_{19} - y_8)$$

Or $y_{19} - y_8 = s \cdot a = 11 \cdot a$, l'estimation de la variation annuelle de deux exercices annuels successifs est donc¹ :

Estimation de la variation annuelle de deux exercices annuels glissants successifs: $s^2 \cdot \hat{a}$

relation 407



- Lorsque la moyenne mobile centrée y_t comporte un nombre pair de périodes ($s = 12$ par exemple), le produit de la moyenne mobile centrée par le nombre de périodes ne permet pas de retrouver le cumul de s mois consécutifs, mais on démontre² que $s = (y_{t+s} - y_t)$ reste une estimation correcte de la variation annuelle entre deux exercices annuels glissants successifs, laquelle reste égale à : $s^2 \hat{a}$. La [relation 407](#) reste donc valable dans le cas où s est pair.

1. La démonstration générale est la suivante, avec $s = 2n + 1$, et $f_t = at + b$ et $x_t = f_t + \varepsilon_t$ (série non saisonnière ou désaisonnalisée) :

$$\begin{aligned} s(y_{t+s} - y_t) &= \sum_{i=-n}^{+n} x_{t+s+i} - \sum_{i=-n}^{+n} x_{t+i} = \sum_{i=-n}^{+n} \{a(t+s+i) + b + \varepsilon_{t+s+i}\} - \sum_{i=-n}^{+n} \{a(t+i) + b + \varepsilon_{t+i}\} \\ &= \sum_{i=-n}^{+n} [\{a(t+i) + b\} + \{s \cdot a\} + \{\varepsilon_{t+s+i}\}] - \sum_{i=-n}^{+n} [\{a(t+i) + b\} + \{\varepsilon_{t+i}\}] \\ &= \sum_{i=-n}^{+n} s \cdot a + \sum_{i=-n}^{+n} (\varepsilon_{t+s+i} - \varepsilon_{t+i}) = s^2 \cdot a + \sum_{i=-n}^{+n} (\varepsilon_{t+s+i} - \varepsilon_{t-i}) \end{aligned}$$

et comme $E(\varepsilon_{t+k}) = 0$, pour une valeur quelconque de k , on a :

$$E\left(\sum_{i=-n}^{+n} x_{t+s+i} - \sum_{i=-n}^{+n} x_{t+i}\right) = s^2 \cdot a + E\left(\sum_{i=-n}^{+n} (\varepsilon_{t+s+i} - \varepsilon_{t-i})\right) = s^2 \cdot a$$

Table des matières

Index thématique

L'application de cette relation à notre exemple numérique donne une décroissance des ventes annuelles du rayon de Casimouth de: $12^2 (-16,549) = -2383$, valeur que l'on peut trouver particulièrement forte puisqu'elle correspond à 33% des ventes observées en 2000.

II-2.1.23b) Choix de la longueur du filtre

Nous avons indiqué précédemment que lorsqu'il n'y a pas de composante aléatoire et que la composante tendancielle est linéaire, la valeur de la longueur s de la moyenne mobile non centrée utilisée dans la moyenne mobile double peut être quelconque. On a ajouté que lorsqu'il y a en outre une composante aléatoire, les perturbations engendrées par la composante aléatoire sont d'autant plus faibles que s était grand. Dans la pratique, un élément complémentaire doit être pris en compte dans le choix de s : la partie de la chronique utilisée pour faire la prévision doit correspondre à une *stabilité dans le comportement de la composante tendancielle*. Dans notre exemple, la [figure 241, page 1019](#), qui retrace l'évolution de l'estimation de la composante tendancielle, semble montrer qu'entre mai 1999 et juin 2000, l'évolution tendancielle est stable. On peut donc imaginer d'utiliser jusqu'à 14 périodes pour effectuer la prévision à l'aide de la moyenne mobile double.

Pour déterminer la valeur maximale que peut prendre s , il convient de remarquer que le calcul de z_t s'effectue à partir des s dernières valeurs disponibles de la chronique y , c'est-à-dire y_{t-s+1} à y_t et que la valeur y_{t-s+1} se calcule à partir de x_{t-s+1} et des $(s-1)$ valeurs précédentes. Pour calculer z_t , il faut donc disposer d'un historique de $s + (s-1) = 2s - 1$ valeurs. Dans le cas de la prévision de la composante tendancielle, si l'on ne peut utiliser au maximum qu'un historique de 14 valeurs, la valeur maximale de s est telle que l'on ait: $2s - 1 < 14$, c'est-à-dire que la longueur maximale de la moyenne mobile non centrée est de 7 périodes.

Enfin, un dernier point mérite d'être souligné: lorsque la chronique est composée de valeurs faibles, voire souvent nulles, il faut retenir des valeurs relativement importantes de longueur de filtre si l'on veut obtenir de bonnes estimations de la composante tendancielle. Illustrons ce point par la [figure 245](#), qui reprend la chronique simulée du [tableau 278 de la page 984](#) en rappelant que l'on est en présence de 13 périodes de 20 jours ouvrables, pendant 10 ans, la demande sur 4 semaines suivant une loi de Poisson de paramètre 10. La longueur du filtre utilisé ici est de 25 périodes.

2. *Note de la page précédente.* L'utilisation de la [relation 398 de la page 1018](#), pour désaisonnaliser une chronique mensuelle, l'année comportant 12 mois, donne:

$$y_t = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{12} \left(\sum_{-6}^{+5} x_{t+i} + \sum_{-5}^{+6} x_{t+i} \right) \text{ et } y_{t+12} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{12} \left(\sum_{-6}^{+5} x_{t+12+i} + \sum_{-5}^{+6} x_{t+12+i} \right) \text{ d'où:}$$

$$12 \cdot (y_{t+12} - y_t) = \frac{1}{2} \left[\left(\sum_{-6}^{+5} x_{t+12+i} - \sum_{-5}^{+6} x_{t+i} \right) + \left(\sum_{-5}^{+6} x_{t+12+i} - \sum_{-6}^{+5} x_{t+i} \right) \right], \text{ c'est-à-dire que } s \cdot (y_{t+s} - y_t) \text{ est la moyenne arithmétique de la}$$

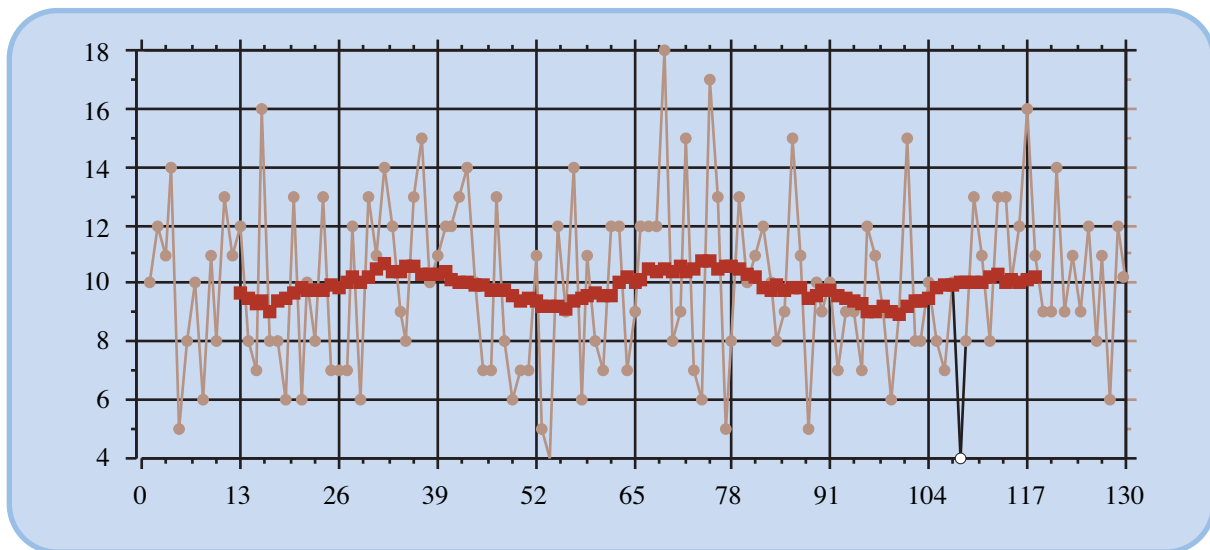
différence de deux exercices glissants consécutifs. Si l'on pose $x_t = f_t + \varepsilon_t = at + b + \varepsilon_t$, à la suite d'une démonstration analogue à celle du renvoi 1 de la [page 1033](#), on obtient:

$$12 \cdot (y_{t+12} - y_t) = \frac{1}{2} \left[\left\{ s^2 \cdot a + \sum_{-6}^{+5} (\varepsilon_{t+12+i} - \varepsilon_{t+i}) \right\} + \left\{ s^2 \cdot a + \sum_{-5}^{+6} (\varepsilon_{t+12+i} - \varepsilon_{t+i}) \right\} \right] = s^2 \cdot a + \frac{1}{2} \left[\sum_{-6}^{+5} (\varepsilon_{t+12+i} - \varepsilon_{t+i}) + \sum_{-5}^{+6} (\varepsilon_{t+12+i} - \varepsilon_{t+i}) \right]$$

d'où l'on tire, en passant en espérance mathématique: $12(y_{t+12} - y_t) = s^2 \cdot a$

FIGURE 245

Moyenne mobile centrée (25 périodes) sur la chronique simulée du tableau 279 de la page 985



II-2.1.23c) Explication du filtre linéaire utilisé avec la moyenne mobile double

Table des matières

La prévision par la moyenne mobile double correspond bien à l'utilisation d'un filtre linéaire unique, équivalent à l'utilisation successive de deux moyennes mobiles non centrées. Prenons par exemple une longueur de moyenne mobile $s = 5$.

Index thématique

$$z_t = \frac{1}{5}(y_t + y_{t-1} + y_{t-2} + y_{t-3} + y_{t-4}) = \sum_{i=0}^4 y_{t-i}; \quad y_{t-i} = \frac{1}{5} \sum_{j=0}^4 x_{t-i-j}; \quad \text{d'où :}$$

$$z_t = \frac{1}{25} \sum_{i=0}^4 \sum_{j=0}^4 x_{t-i-j} \text{ et, d'une façon générale } y_t = \frac{1}{s^2} \sum_{i=0}^{s-1} \sum_{j=0}^{s-1} x_{t-i-j}, \text{ ce qui donne}$$

ici : $z_t = \frac{1}{25}(x_t + 2x_{t-1} + 3x_{t-2} + 4x_{t-3} + 5x_{t-4} + 4x_{t-5} + 3x_{t-6} + 2x_{t-7} + x_{t-8})$. On peut remarquer que la somme des coefficients de pondération de ce filtre linéaire est bien égale à 1. La généralisation de cette démonstration est immédiate.

$$z_t = \frac{1}{s^2} \sum_{i=0}^{2(s-1)} a_i x_{t-1}, \text{ avec } a_{s-1} = s \text{ et } a_i = i + 1 \text{ si } i < s - 1 \text{ et } a_i = 2s - 1 - i, \text{ si } i > s \quad \text{relation 408}$$

II-2.2 Méthode basée sur les moindres carrés

Cette approche¹ consiste à appliquer la technique de la régression linéaire, ou de la régression polynomiale, sur s périodes consécutives comme dans le cas de la moyenne mobile. Cette régression locale permet :

- d'obtenir directement des formules de moyenne mobile correspondant à l'un quelconque des s points théoriques de la courbe de régression, et non plus du seul point «central», ainsi que des projections théoriques au-delà de ces

1. Pour l'ensemble de ces méthodes basées sur la technique des moindres carrés, voir Kendall et Stuart (1973, [261]) chapitre XLVI, et Kendall (1976, [260]) chapitre III.

- points, sans avoir à repartir des formules de base de régression linéaire ou polynomiale ;
- d'utiliser la technique de la moyenne mobile même dans le cas où l'évolution tendancielle n'est pas linéaire (ce qui permet d'éviter la surestimation ou la sous-estimation systématique dénoncée au § II-2.1.1, page 1012, pour les filtres empiriques présentés) ;
 - de réduire au minimum l'erreur résiduelle associée aux estimations ponctuelles fournies par la méthode des moyennes mobiles, et donc d'accroître leur « fiabilité ».

Revenons sur ce dernier point avant de présenter ces moyennes mobiles fondées sur la méthode des moindres carrés.

II-2.2.1 Variance des filtres linéaires

Lorsque la composante aléatoire est générée par un processus purement aléatoire (défini au § I-2.3.1, page 989), le filtre linéaire effectue une somme pondérée de s variables aléatoires indépendantes, dont on peut facilement calculer la

variance à partir du résultat classique¹ suivant: $V\left(\sum_{i=1}^n a_i \cdot X_i\right) = \sum_{i=1}^n a_i^2 V(X_i)$. La

variance d'un filtre linéaire quelconque est donc: $V(Y_t) = \sum_{i=1}^s a_i^2 V(X_{t-r+i})$ et

comme par hypothèse $V(X_t) = V(\varepsilon_t) = \sigma_\varepsilon^2$, puisque ε_t est la partie aléatoire de x_t , on a :

$$V(Y_t) = \sigma_\varepsilon^2 \sum_{i=1}^s a_i^2 \quad \text{relation 409}$$

Quelle que soit la loi suivie par la perturbation aléatoire, on a intérêt à retenir un filtre dont le système de pondération a_i minimise la variance de y_t , car c'est celui qui fournit le meilleur estimateur² de la valeur théorique recherchée f_t . Si, de surcroît, cette loi des perturbations aléatoires est normale, on peut alors juger par intervalle de confiance les valeurs données par la technique de filtrage, puisqu'une somme de variables aléatoires normales suit elle-même une loi Normale. Nous verrons au § II-5.2, page 1066, l'intérêt qu'il y a à connaître cette variance, pour fournir des prévisions par intervalle de confiance ou pour détecter des modifications de comportement des chroniques.

L'utilisation de la méthode des moindres carrés permet de minimiser cette variance de y_t , en rendant la somme $\sum a_i^2$ elle-même minimale. Examinons ce point sur le cas simple d'un trend linéaire.

II-2.2.2 Application de la méthode des moindres carrés au cas du trend linéaire

Appliquons la méthode des moindres carrés à des chroniques ne comprenant qu'une composante aléatoire et une composante tendancielle linéaire, et donc pas

1. Voir par exemple, Giard (1995, [182]), chapitre II, § I.3.

2. C'est-à-dire un estimateur efficace, voir par exemple Giard (1995, [182]), chapitre IV, § III.1.1.

de composante saisonnière (si celle-ci existe, il y a lieu d'appliquer préalablement le filtre approprié pour éliminer cette composante saisonnière). Dans un premier temps (§ II-2.2.2.1), nous rappellerons les principaux résultats de la régression linéaire, pour les transposer à la régression locale. Nous verrons ensuite (§ II-2.2.2.2, page 1038) pourquoi cette régression locale est une application particulière des filtres linéaires, avant de vérifier (§ II-2.2.2.3, page 1039) sur un exemple la supériorité du filtre linéaire optimal au sens des moindres carrés sur les filtres empiriques. On généralisera ensuite (§ II-2.2.2.4, page 1040) la démarche pour aboutir à des relations de calcul des résultats de la régression locale, spécifiques aux chroniques et orientés vers l'automatisation des prévisions. On terminera enfin (§ II-2.2.2.5, page 1042) par l'examen de techniques de calcul d'intervalle de confiance des prévisions, s'inspirant de la même logique.

II-2.2.2.1 Introduction de la régression locale à partir d'un exemple numérique

Reprenons la chronique de l'évolution tendancielle des ventes du rayon de journaux de Casimouth (voir [tableau 298, page 1018](#)), et appliquons les résultats classiques¹ de la régression linéaire sur la partie de cette chronique constituée par les cinq² dernières valeurs disponibles (c'est-à-dire pour les dates $t = 74$ à $t = 78$), après avoir modifié le repérage temporel de ces données de façon à avoir la date 0 pour la dernière observation utilisée (on notera z_j ces nouvelles dates).



TABLEAU 312
Tableau de calcul de la régression locale

colonne		1	2	3	4	5
j	date initiale	x_j	date z_j	z_j^2	$x_j z_j$	x_j^2
1	74	675,8	-4	16	-2703,2	456975,64
2	75	660,4	-3	9	-1981,2	436128,16
3	76	643,6	-2	4	-1287,2	414220,96
4	77	624,9	-1	1	-624,9	390500,01
5	78	613,4	0	0	0,0	376259,56
Σ		3218,1	-10	30	-6596,5	2073814,33
$\frac{(\Sigma)}{5}$		643,62	-2	6	-1319,3	414762,87

On en tire $\text{COV}(X, Z) = -32,06$; $a = -16,03$; $b = 611,56$; $r^2 = 0,9957$; $V(X) = 516,162$; $V(Z) = 2$; variance résiduelle observée $\sigma_r^2 = 2,240$; estimation de la variance résiduelle de la population-mère $\hat{\sigma}_\varepsilon^2 = 3,733 \Rightarrow \hat{\sigma}_\varepsilon = 1,932$. À partir de ces résultats, il est possible de calculer la valeur théorique correspondant à n'importe quel point de la droite de régression. Par exemple pour la date $t = 78 + 1 = 79$, on a: $\hat{x}_{79} = -16,03 \times (+1) + 611,56 = 595,53$.

1. Voir par exemple Giard (1995, [182]), chapitre VI qui fournit l'ensemble des relations de calcul. Nous remplaçons ici la notation classique n du nombre d'observations, par s , longueur du filtre linéaire implicitement utilisé.
2. Ce nombre 5 a été retenu pour simplifier l'illustration numérique de notre propos; ce qui a été dit au § II-2.1.23c, page 1035 reste valable et se transpose ici sans difficulté.

II-2.2.2.2 La régression locale, utilisation implicite d'un filtre linéaire

Cette application de la régression locale au calcul d'un point théorique de la droite de régression n'est rien d'autre que l'utilisation d'un filtre linéaire. En effet, on peut écrire la moyenne \bar{x} et la covariance comme des sommes pondérées des 5 observations utilisées dans la régression locale :

$$\bar{x} = \frac{1}{5}(x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5) = 0,2x_1 + 0,2x_2 + 0,2x_3 + 0,2x_4 + 0,2x_5$$

$$\begin{aligned} \text{COV}(X, Y) &= \frac{1}{5}(-4x_1 - 3x_2 - 2x_3 - 1x_4 - 0x_5) - \{\bar{x} \cdot \bar{y}\} \\ &= (-0,8x_1 - 0,6x_2 - 0,4x_3 - 0,2x_4 - 0x_5) \\ &\quad - \{(-2)(0,2x_1 + 0,2x_2 + 0,2x_3 + 0,2x_4 + 0,2x_5)\} \\ &= -0,4x_1 - 0,2x_2 + 0x_3 + 0,2x_4 + 0,4x_5 \end{aligned}$$

La pente a s'exprime alors comme une somme pondérée des 5 observations utilisées, puisque la variance de Z est une constante :

$$\begin{aligned} a &= \frac{\text{COV}(X, Z)}{V(z)} = \frac{-0,4x_1 - 0,2x_2 + 0x_3 + 0,2x_4 + 0,4x_5}{2} \\ &= -0,2x_1 - 0,1x_2 + 0x_3 + 0,1x_4 + 0,2x_5 \end{aligned}$$

L'ordonnée à l'origine b s'exprime, elle aussi, comme une somme pondérée des 5 observations utilisées dans la régression locale :

$$\begin{aligned} b &= \bar{x} - a\bar{z} = \bar{x} - a(-2) = \bar{x} + 2a \\ &= (0,2x_1 + 0,2x_2 + 0,2x_3 + 0,2x_4 + 0,2x_5) + 2(-0,2x_1 - 0,1x_2 + 0x_3 + 0,1x_4 \\ &\quad + 0,2x_5) \\ &= (-0,2x_1 + 0x_2 + 0,2x_3 + 0,4x_4 + 0,6x_5) \end{aligned}$$

Il s'ensuit que l'équation de régression s'exprime également comme une somme pondérée des 5 observations utilisées dans la régression locale :

$$\begin{aligned} \hat{x}_i &= az_i + b \\ \hat{x}_i &= (-0,2x_1 - 0,1x_2 + 0x_3 + 0,1x_4 + 0,2x_5) z_i + (-0,2x_1 + 0x_2 + 0,2x_3 + 0,4x_4 \\ &\quad + 0,6x_5) \\ &= (-0,2z_i - 0,2) x_1 - (-0,1z_i + 0) x_2 + (0z_i + 0,2) x_3 + (0,1z_i + 0,4) x_4 \\ &\quad + (0,2z_i + 0,6) x_5 \end{aligned}$$

Si l'on prend $z_i = -2$, on a donc pour $\hat{x}_{78-2} = \hat{x}_{76}$:

$$\hat{x}_{76} = (0,4 - 0,2) x_1 - (0,2 + 0) x_2 + (0 + 0,2) x_3 + (-0,2 + 0,4)x_4 + (-0,4 + 0,6)x_5$$

$$\hat{x}_{76} = 0,2x_1 + 0,2x_2 + 0,2x_3 + 0,2x_4 + 0,2x_5$$

et nous retrouvons, d'une part, la propriété classique de la droite de régression passant par son centre de gravité (défini par \bar{x} et \bar{z}) et, d'autre part la définition du filtre empirique de la moyenne mobile centrée. Cette dernière remarque implique que la moyenne mobile centrée constitue un filtre optimal au sens des moindres carrés, lorsqu'il est appliqué à une chronique constituée de la somme d'un trend

linéaire et d'une perturbation aléatoire (propriété qui ne dépend pas de la longueur du filtre en moyenne mobile centrée utilisée).

Appliquons maintenant la régression locale exprimée sous la forme d'une somme pondérée des observations utilisées, à une prévision effectuée pour $t = 79$, c'est-à-dire pour la période $z_i = +1$:

$$\hat{x}_{79} = (-0,2 - 0,2) x_1 - (-0,1 + 0) x_2 + (0 + 0,2) x_3 + (0,1 + 0,4)x_4 + (0,2 + 0,6)x_5$$

$$\hat{x}_{79} = -0,4x_1 - 0,1x_2 + 0,2x_3 + 0,5x_4 + 0,8x_5$$

ce qui, dans notre exemple numérique, donne : $\hat{x}_{79} = -0,4 \times 675,8 - 0,1 \times 660,4 + 0,2 \times 643,6 + 0,5 \times 624,9 + 0,8 \times 613,4 = 595,53$, résultat que nous avons déjà trouvé en application directe de l'équation de régression linéaire.

On peut constater, dans cet exemple, que la somme des coefficients associés aux observations est égale à 1 : $-0,4 - 0,1 + 0,2 + 0,5 + 0,8 = 1$. On peut montrer que cette propriété reste vraie non seulement quelle que soit la valeur théorique recherchée pour la droite de régression, mais aussi quel que soit le nombre d'observations utilisées dans la régression locale.

L'utilisation de la régression locale constitue donc une application particulière de la méthode générale des filtres linéaires.

II-2.2.2.3 Supériorité du filtre linéaire optimal au sens des moindres carrés sur les filtres empiriques

L'intérêt du filtre linéaire constitué par la régression locale est de minimiser la variance du filtre utilisé, et donc, comme nous l'avons déjà indiqué, de fournir un estimateur efficace de la valeur théorique recherchée. Pour illustrer ceci, reprenons notre exemple de prévision effectuée à la date t pour la date $t + 1$. Le filtre linéaire au sens des moindres carrés, que l'on notera y_{t+1} , est : $y_{t+1} = -0,4x_{t-4} - 0,1x_{t-3} + 0,2x_{t-2} + 0,5x_{t-1} + 0,8x_t$. La variance de la variable aléatoire x_{t-i} restant la même pour toutes les observations, la variance de y_{t+1} est :

$$\begin{aligned} V(y_{t+1}) &= (-0,4)^2V(x_{t-4}) + (-0,1)^2V(x_{t-3}) + (0,2)^2V(x_{t-2}) + (0,5)^2V(x_{t-1}) \\ &\quad + (0,8)^2V(x_t) \end{aligned}$$

$$= (1,16 + 1,01 + 0,04 + 0,25 + 0,64)V(X) = 1,1\sigma_\varepsilon^2$$

Cette variance du filtre linéaire ne peut être comparée à celle de la moyenne mobile double calculée avec $s = 5$, puisque celle-ci nécessite un historique de $2s - 1 = 2 \times 5 - 1 = 9$ observations. C'est aux performances d'une moyenne mobile double calculée avec $s = 3$, et donc utilisant, elle aussi, un historique de 5 observations qu'il faut comparer à celles du filtre linéaire au sens des moindres carrés. Or la prévision effectuée pour la prochaine période est, en application de la **relation 405 de la page 1031** :

$$\hat{x}_{t+1} = y_t + (y_t - z_t) \frac{3 - 1 + 2 \times 1}{3 - 1} = 3y_t - 2z_t. \text{ En y substituant } y_t (= \frac{1}{3}(x_t + x_{t-1} + x_{t-2})) \text{ et } z_t (= \frac{1}{3}(y_t + y_{t-1} + y_{t-2})), \text{ on obtient :}$$

$$\hat{x}_{t+1} = \frac{7}{9}x_t + \frac{5}{9}x_{t-1} + \frac{1}{3}x_{t-2} - \frac{4}{9}x_{t-3} - \frac{2}{9}x_{t-4}$$

La variance de ce filtre linéaire empirique (dont on remarquera en passant que la somme des coefficients est bien égale à 1) est :

$$V(\hat{x}_{i+1}) = \left\{ \left(\frac{7}{9}\right)^2 + \left(\frac{5}{9}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(-\frac{4}{9}\right)^2 + \left(-\frac{2}{9}\right)^2 \right\} \sigma_{\varepsilon}^2 = \frac{103}{81} \sigma_{\varepsilon}^2 = 1,272 \sigma_{\varepsilon}^2$$

valeur qui est bien supérieure à celle trouvée ($1,1\sigma_{\varepsilon}^2$) avec le filtre linéaire optimal au sens des moindres carrés.

II-2.2.2.4 Généralisation de la démarche

La généralisation de la démarche suivie avec notre exemple introductif est assez facile, du fait que la moyenne et la variance de la variable « temps » ne dépendent que de la longueur s du filtre linéaire, c'est-à-dire du nombre de périodes utilisées dans la régression locale.

Pour la date moyenne dans la régression locale, on a¹ :

$$\bar{z} = t - (s - 1)/2 \quad \text{relation 410}$$

Pour la variance, on obtient après quelques calculs² :

$$V(z) = \frac{s^2 - 1}{12} \quad \text{relation 411}$$

La covariance $\text{COV}(X, Z)$ est obtenue à partir de sa formule habituelle de calcul : $\text{COV}(X, Z) = \frac{1}{s} \sum_{i=0}^{s-1} x_i z_i - \bar{x} \bar{z}$ et en posant :

$$B = \sum_{i=0}^{s-1} i x_{t-i}, \text{ et } A = \sum_{i=0}^{s-1} x_{t-i} \quad \text{relation 412}$$

on obtient³

$$\text{COV}(X, Z) = -\frac{B}{s} + \frac{s-1}{2s} A = \frac{(s-1)A - 2B}{2s} \quad \text{relation 413}$$

La pente de la régression locale est donc, en application des relations 413 et 411 :

$$a = \frac{\text{COV}(X, Z)}{V(Z)} = \frac{\{(s-1)A - 2B\}/(2s)}{(s^2 - 1)/12}$$

d'où :

$$1. \bar{z} = \frac{1}{s} \{t + (t-1) + (t-2) + \dots + (t-s+1)\} = \frac{1}{s} \sum_{i=0}^{s-1} (t-i) = \frac{1}{s} \sum_{i=0}^{s-1} t + \frac{1}{s} \sum_{i=0}^{s-1} i = \frac{st}{s} + \frac{s(s-1)}{2s} = t - \frac{(s-1)}{2}$$

$$2. V(z) = \frac{1}{s} \sum_{i=0}^{s-1} \left\{ (t-i) - \left(t - \frac{s-1}{2} \right) \right\}^2 = \frac{1}{s} \sum_{i=0}^{s-1} \left(-i + \frac{s-1}{2} \right)^2$$

$$= \frac{1}{s} \sum_{i=0}^{s-1} \left(i^2 - 2i \cdot \frac{s-1}{2} + \frac{(s-1)^2}{4} \right) = \frac{1}{s} \sum_{i=0}^{s-1} i^2 - \frac{s-1}{s} \sum_{i=0}^{s-1} i + \frac{(s-1)^2}{4s} \sum_{i=0}^{s-1} 1$$

ce qui, compte tenu de résultats classiques sur les séries numériques finies, donne :

$$V(z) = \frac{1}{s} \left\{ \frac{s(s-1)(2s-1)}{6} \right\} - \frac{s-1}{s} \left\{ \frac{s(s-1)}{2} \right\} + \frac{(s-1)^2}{4s} (s) = \frac{(s-1)(2s-1)}{6} - \frac{(s-1)^2}{2} + \frac{(s-1)^2}{4}$$

$$V(z) = (s-1) \left(\frac{2s-1}{6} - \frac{s-1}{4} \right) = \frac{s-1}{2} \left\{ \frac{2s-1}{3} - \frac{s-1}{2} \right\} = \frac{s-1}{2} \left\{ \frac{2(2s-1) - 3(s-1)}{6} \right\} = \frac{(s-1)(s+1)}{12} = \frac{s^2 - 1}{12}$$

$$a = \frac{6\{(s-1)A - 2B\}}{(s-1)s(s+1)} \quad \text{relation 414}$$

Illustrons l'application de cette relation sur notre exemple numérique. On trouve dans le **tableau 312 (page 1037)**: $A = 3218,1$ en colonne 1, et $B = + 6595,5$ en colonne 4, après avoir changé le signe des z_i , pour retrouver le « i » de la formule de définition du « B ».

$$a = \frac{6\{(5-1)318,1 - 2 \cdot 6595,5\}}{4 \cdot 5 \cdot 6} = -16,03$$

La valeur estimée \hat{x}_{t+k} , à la date $t + k$, est dans ces conditions:

$$\hat{x}_{t+k} = a(t+k) + b = a(t+k) + (\bar{x} - a\bar{z})$$

$$= ak + at + \bar{x} - a\left\{t - \frac{s-1}{2}\right\} = a\left\{k - \frac{s-1}{2}\right\} + \bar{x}$$

$$= \frac{6\{(s-1)A - 2B\}}{(s-1)s(s+1)}\left\{k + \frac{s-1}{2}\right\} + \frac{A}{s}$$

$$= A\left\{\frac{6[k + (s-1)/2]}{s(s+1)} + \frac{1}{s}\right\} - B\frac{12[k + (s-1)/2]}{(s-1)s(s+1)}$$

$$\hat{x}_{t+k} = A\frac{6k + 4s - 2}{s(s+1)} - B\frac{12k + 6(s-1)}{(s-1)s(s+1)} \quad \text{relation 415}$$

L'application de cette **relation 415**, pour $k = 1$, donne dans notre exemple numérique : $\hat{x}_{t+k} = \hat{x}_{79} = 3218,1\left(\frac{6 \times 1 + 4 \times 5 - 2}{5 \times 6}\right) - 6595,5\left(\frac{12 \times 1 + 6 \times 4}{4 \times 5 \times 6}\right) = 3218,1 \times 0,8 - 6595,5 \times 0,3 = 595,53$.

La **relation 415** est sans doute la plus simple à utiliser dans le cas d'applications non répétitives. Dans le cas contraire («prévision automatique»), il est préférable d'explicitier les coefficients du filtre linéaire. Le coefficient a_i à appliquer à l'observation $t - i$, si l'on cherche à effectuer le calcul du filtre y_{t+k} d'une valeur théorique pour la période $t + k$ (on a donc $\hat{x}_{t+k} = y_{t+k}$) est, compte tenu des relations

412 et **415**: $a_i = \frac{6k + 4s - 2}{s(s+1)} - i\frac{12k + 6(s-1)}{(s-1)s(s+1)} = \frac{6(k-i) + 4s - 2}{s(s+1)} - \frac{12ki}{(s-1)s(s+1)}$.

Le filtre linéaire optimal au sens des moindres carrés e calculé sur les s dernières observations est donc donné par la **relation 416**:

3. Note de la page précédente.
$$\text{COV}(X, Y) = \frac{1}{s} \sum_{i=0}^{s-1} x_{t-1}(t-i) - \left(\frac{1}{s} \sum_{i=0}^{s-1} x_{t-1}\right) \cdot \left(t - \frac{s-1}{2}\right)$$

$$= \left(\frac{t}{s} \sum_{i=0}^{s-1} x_{t-i} - \frac{1}{s} \sum_{i=0}^{s-1} ix_{t-i}\right) + \left(-\frac{t}{s} \sum_{i=0}^{s-1} x_{t-i} + \frac{s-1}{2s} \sum_{i=0}^{s-1} x_{t-i}\right) = -\frac{1}{s} \sum_{i=0}^{s-1} ix_{t-i} + \frac{s-1}{2s} \sum_{i=0}^{s-1} x_{t-i}$$

Table des matières

Index thématique

$$\hat{x}_{t+k} = y_{t+k} = \sum_{i=0}^{s-1} a_i x_{t-i}, \text{ avec } a_i = \frac{6(k-i)+4s-2}{s(s+1)} - \frac{12ki}{(s-1)s(s+1)} \quad \text{relation 416}$$

On peut vérifier, avec $s = 5$ et $k = +1$, que l'on retrouve bien le filtre linéaire $\hat{x}_{t+1} = y_{t+1} = 0,8x_t + 0,5x_{t-1} + 0,2x_{t-2} - 0,1x_{t-3} - 0,4x_{t-4}$ obtenu à la page 1039, en utilisant la régression locale :

$$i = 0 \rightarrow a_0 = \frac{6(1-0)+4 \times 5-2}{5 \times 6} - \frac{12 \times 1 \times 0}{4 \times 5 \times 6} = 0,8$$

$$i = 1 \rightarrow a_1 = \frac{6(1-1)+4 \times 5-2}{5 \times 6} - \frac{12 \times 1 \times 1}{4 \times 5 \times 6} = 0,5$$

$$i = 2 \rightarrow a_2 = \frac{6(1-2)+4 \times 5-2}{5 \times 6} - \frac{12 \times 1 \times 2}{4 \times 5 \times 6} = 0,2$$

$$i = 3 \rightarrow a_3 = \frac{6(1-3)+4 \times 5-2}{5 \times 6} - \frac{12 \times 1 \times 3}{4 \times 5 \times 6} = -0,1$$

$$i = 4 \rightarrow a_4 = \frac{6(1-4)+4 \times 5-2}{5 \times 6} - \frac{12 \times 1 \times 4}{4 \times 5 \times 6} = -0,4$$

II-2.2.2.5 Jugement par intervalle de confiance

Les techniques classiques de régression linéaire fournissent des estimations ponctuelles des valeurs cherchées, et permettent également de juger par intervalle de confiance ces valeurs. Reprenons notre exemple numérique pour illustrer ce point, nous verrons ensuite comment adapter la technique des filtres linéaires pour « automatiser la procédure ».

Les résultats classiques que l'on utilise pour l'intervalle de confiance sont les suivants¹ :

- La loi suivie par la variable aléatoire a_s , pente observable dans un échantillon de taille s et caractéristique de la distribution d'échantillonnage de ce paramètre² est une loi de Student à $(s - 2)$ degrés de liberté :

$$\mathcal{L}(a_s) = \mathcal{A}_{s-2}(a, \hat{\sigma}_a), \text{ avec } \hat{\sigma}_a^2 = \frac{\hat{\sigma}_\varepsilon^2}{s} = \frac{\hat{\sigma}_\varepsilon^2}{s\sqrt{Z}} = \frac{12\hat{\sigma}_\varepsilon^2}{(s-1)s(s+1)}, \text{ ce qui}$$

$$\sum_{i=1}^s (z_i \cdot \bar{z})^2$$

donne dans notre exemple : 0,610982815

$$\hat{\sigma}_a^2 = \frac{1,932^2}{5 \times 2} = 0,3733 \rightarrow \hat{\sigma}_a = 0,611 \rightarrow \mathcal{L}(a_s) = \mathcal{A}_3(-16,03 ; 0,611)$$

On en déduit l'intervalle de confiance pour la pente inconnue a de la population-mère, après avoir lu $t = 3,182$ sur une table de Student pour 3 degrés de liberté et un coefficient de 95 % :

$$P(-16,03 - 3,182 \times 0,611 < \alpha < -16,03 + 3,182 \times 0,611) = 0,95$$

$$P(-17,97 < \alpha < -14,09) = 0,95$$

1. Voir par exemple Giard (1995, [182]), chapitre VI, §II.1.2.1.

2. Cette variable aléatoire a_s est équivalente à la variable aléatoire a_n , notation utilisée en référence [182], comme extension de la notation classique f_n , fréquence observable sur un échantillon de taille n , caractéristique de la distribution d'échantillonnage des fréquences.

ce qui donne, après multiplication des bornes par 12^2 (voir [relation 407, page 1033](#)), puisque cette pente s'analyse comme la variation mensuelle de la moyenne mobile centrée, un « régime de croisière » de la baisse annuelle de ventes de journaux dont l'intervalle de confiance est :

- $P(-2588 < \text{variation annuelle de ventes de journaux} < -2028) = 0,95$
- La loi suivie par la variable aléatoire \hat{x}_{t+k} , prévision effectuée pour la période $t + k$, est également une loi de Student à $(s - 2)$ degrés de liberté, centrée sur l'estimation ponctuelle ($= ak + b$, puisque l'ordonnée à l'origine est centrée sur la date t): $L(\hat{x}_{t+k}) = St_{s-2}(a \cdot k + b, \hat{\sigma}_k)$, avec :

$$\hat{\sigma}_k^2 = \hat{\sigma}_\varepsilon^2 \left\{ 1 + \frac{1}{s} + \frac{(t+k-\bar{z})^2}{\sum_{i=1}^s (z_i - \bar{z})^2} \right\} = \hat{\sigma}_\varepsilon^2 \left\{ 1 + \frac{1}{s} + \frac{[(t+k) - (t - (s-1)/2)]^2}{sV(Z)} \right\}$$

$$\hat{\sigma}_k^2 = \hat{\sigma}_\varepsilon^2 \left\{ 1 + \frac{1}{s} + \frac{12k + ((s-1)/2)^2}{(s-1)s(s+1)} \right\} \quad \text{relation 417}$$

ce qui donne dans notre exemple pour la prévision effectuée pour $t + 1 = 79$ $L(\hat{x}_{79}) = \mathcal{A}_3(-16,03 \cdot 1 + 611,56 ; \hat{\sigma}_1)$, avec

$$\hat{\sigma}_1^2 = 3,733 \left\{ 1 + \frac{1}{5} + \frac{12(1+4/2)}{(5-1)5(5+1)} \right\} = 3,733 \times 2,1 = 7,8393 \rightarrow \hat{\sigma}_1 = 2,80$$

d'où $L(\hat{x}_{79}) = St_3(595,53 ; 2,524)$ et l'intervalle de confiance de la prévision est : $P(595,53 - 3,182 \times 2,80 < x_{79} < 595,53 + 3,182 \times 2,80) = 0,95$:

$$P(586,62 < x_{79} < 604,44) = 0,95$$

Posons : $C = \sum_{i=0}^{s-1} x_{t-i}^2$ on démontre¹ alors que la variance résiduelle estimée

s'exprime comme une somme pondérée de C, A^2, B^2 et AB , ce qui permet facilement d'automatiser les prévisions par intervalle de confiance :

1. On a en effet :

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}_\varepsilon^2 &= \frac{s}{s-2}(1-\rho^2)V(X) = \frac{s}{s-2} \left(1 - \frac{\{\text{COV}(X,Z)\}^2}{V(X) \cdot V(Z)} \right) V(X) = \frac{s}{s-2} \left(V(X) - \frac{\{\text{COV}(X,Z)\}^2}{V(Z)} \right) = \frac{s}{s-2} \left\{ V(X) - \frac{\left(\frac{(s-1)A-2B}{2s} \right)^2}{(s^2-1)/12} \right\} \\ &= \frac{s}{s-2} \left\{ V(X) - \frac{3(s-1)A^2}{s^2(s+1)} - \frac{12B^2}{s^2(s-1)(s+1)} + \frac{12AB}{s^2(s+1)} \right\} \end{aligned}$$

or, $V(X) = \frac{1}{s} \sum_{i=0}^{s-1} x_{t-i}^2 - \bar{x}^2 = \frac{C}{s} - \frac{A^2}{s^2}$; on a donc :

$$\hat{\sigma}_\varepsilon^2 = \frac{s}{s-2} \left\{ \frac{C}{s} - \frac{A^2[(s+1)+3(s-1)]}{s^2(s+1)} - \frac{12B^2}{s^2(s-1)(s+1)} + \frac{12AB}{s^2(s+1)} \right\} = \frac{C}{s-2} - \frac{A^2(4s-2)}{(s-2)s(s+1)} - \frac{12B^2}{(s-2)(s-1)s(s+1)} + \frac{12AB}{(s-2)s(s+1)}$$

$$\hat{\sigma}_\varepsilon^2 = \frac{C}{s-2} - \frac{A^2(4s-2)}{(s-2)s(s+1)} - \frac{12B^2}{(s-2)(s-1)s(s+1)} + \frac{12AB}{(s-2)s(s+1)} \quad \text{relation 418}$$

cette formule permet, comme on peut le vérifier sur notre exemple numérique, de calculer rapidement l'estimation de la variance résiduelle :

$$\hat{\sigma}_\varepsilon^2 = \frac{2073814,33}{3} - \frac{3218,1^2(4 \times 5 - 2)}{3 \times 5 \times 6} - \frac{12 \times 6595,5^2}{3 \times 4 \times 5 \times 6} + \frac{12 \times 3218,1 \times 6595,5}{3 \times 5 \times 6} = 3,733$$

Si l'on désire une «prévision automatique» par intervalle de confiance à 95 % de la valeur prévisionnelle pour $t + 1$, avec un filtre linéaire optimal calculé sur 5 périodes, il suffira d'ajouter ou de retrancher à la prévision ponctuelle la quantité suivante obtenue en combinant les relations 417 et 418 :

$$\pm 3,182 \sqrt{0,7 \cdot C - 0,42A^2 - 0,07B^2 + 0,28A \cdot B}$$

ce qui donne dans notre exemple numérique :

$$\pm 3,182 \sqrt{0,2 \times 2073814,33 - 0,42 \times 3218,1^2 - 0,07 \times 6595,5^2 + 0,28 \times 3218,1 \times 6595,5} = \pm 8,91$$

II-2.2.3 Moyenne mobile à utiliser dans le cas d'évolution tendancielle non linéaire

Les principes exposés au § II-2.2.2, page 1036, sont transposables sans difficulté au cas d'une évolution tendancielle caractérisée par une équation polynomiale en t de degré supérieur à 1. On trouvera dans l'ouvrage de Kendall (1970, [260]) un exemple de détermination de moyenne mobile correspondant à une évolution caractérisée par un polynôme du troisième degré. Le principe en est toujours le même, aussi nous contenterons-nous de donner le système de pondération à utiliser pour définir :

- d'une part le point moyen d'une moyenne mobile sur s périodes, c'est-à-dire pour la période $t - (s - 1)/2$, la chronique s'étendant de $t - (s + 1)$ à t , pour les polynômes du second et du troisième degré (on montre que les coefficients sont identiques),

TABLEAU 313

Moyenne mobile centrée pour tendance caractérisée par un polynôme en t de degré 2 ou 3

s	t	t-1	t-2	t-3	t-4	t-5	t-6	t-7	t-8	t-9	t-10	t-11	t-12
5	-3/35	12/35	17/35	-3/35	0	0	0	0	0	0	0	0	0
7	-2/21	3/21	6/21	7/21	6/21	3/21	-2/21	0	0	0	0	0	0
9	-21/231	14/231	39/231	54/231	59/231	54/231	39/231	14/231	-21/231	0	0	0	0
11	-36/429	9/429	44/429	69/429	84/429	89/429	84/429	69/429	44/429	9/429	-36/429	0	0
13	-11/143	0	9/143	16/143	21/143	24/143	25/143	24/143	21/143	16/143	9/143	0	-11/143

- d'autre part la projection théorique pour la période $t + 1$, mais cette fois-ci les coefficients ne sont plus les mêmes pour les polynômes du second et du troisième degré.

Prenons le cas de 2 chroniques ne comprenant que la composante tendancielle, pour vérifier la propriété des filtres introduits dans ce paragraphe :

Tableau 314
*Prévision en $t + 1$ pour tendance caractérisée par un polynôme en t ,
 de degré 2 ou 3*

	t	$t - 1$	$t - 2$	$t - 3$	$t - 4$	$t - 5$	$t - 6$	$t - 7$	$t - 8$	$t - 9$	$t - 10$	$t - 11$	$t - 12$	t
polynôme du 2° degré	5	9/5	0	-4/5	-3/5	3/5	0	0	0	0	0	0	0	0
	7	9/7	3/7	-1/7	-3/7	-3/7	-1/7	3/7	0	0	0	0	0	0
	9	1	21/42	5/42	-6/42	-12/42	-13/42	-9/42	0	14/42	0	0	0	0
	11	135/165	81/165	37/165	3/165	-21/165	-35/165	-39/165	-33/165	-17/165	9/165	45/165	0	0
	13	99/143	66/143	38/143	15/143	-3/143	-16/143	-24/143	-27/143	-25/143	-18/143	-6/143	11/143	33/143
polynôme du 3° degré	5	16/5	-14/5	-4/5	11/5	-4/5	0	0	0	0	0	0	0	0
	7	16/7	-4/7	-8/7	-3/7	4/7	6/7	-4/7	0	0	0	0	0	0
	9	224/126	14/126	-76/126	-81/126	-36/126	24/126	64/126	49/126	-55/126	0	0	0	0
	11	96/66	24/66	-16/66	-31/66	-28/66	-14/66	4/66	19/66	24/66	12/66	-24/66	0	0
	13	176/143	66/143	-4/143	-41/143	-52/143	-44/143	-24/143	1/143	24/143	38/143	36/143	11/143	-44/143

- $x_t = f_t = 10 + 2t + 0,5t^2$, ce qui donne pour $t = 5$ à 10 , les valeurs suivantes: $x_5 = 32,5$; $x_6 = 40$; $x_7 = 48,5$; $x_8 = 58$; $x_9 = 68,5$; $x_{10} = 80$;

• estimation de la composante tendancielle en $t = 7$:

$$y_7 = -\frac{3}{35} \times 68,5 + \frac{12}{35} \times 58 + \frac{17}{35} \times 48,5 + \frac{12}{35} \times 40 - \frac{3}{35} \times 35,5 = 48,5$$

• prévision en $t = 9$, de la composante tendancielle observable en $t = 10$:

$$y_9 = \frac{9}{5} \times 68,5 + 0 \times 58 - \frac{4}{5} \times 48,5 - \frac{3}{5} \times 40 + \frac{3}{5} \times 35,5 = 80$$

- $x_t = f_t = 10 + 2t + 0,5t^2 - 0,01t^3$, ce qui donne pour $t = 5$ à 10 , les valeurs suivantes: $x_5 = 31,25$; $x_6 = 37,84$; $x_7 = 45,07$; $x_8 = 52,88$; $x_9 = 61,21$; $x_{10} = 70$;

• estimation de la composante tendancielle en $t = 7$:

$$y_7 = -\frac{3}{35} \times 61,21 + \frac{12}{35} \times 52,88 + \frac{17}{35} \times 45,07 + \frac{12}{35} \times 37,84 - \frac{3}{35} \times 31,25 = 45,07$$

• prévision en $t = 9$, de la composante tendancielle observable en $t = 10$:

$$y_9 = \frac{16}{5} \times 61,21 - \frac{14}{5} \times 52,88 - \frac{4}{5} \times 45,07 + \frac{11}{35} \times 37,84 - \frac{4}{5} \times 31,25 = 70$$

Table des matières

Index thématique

II-2.3 Prévisions globales obtenues par combinaison des prévisions effectuées sur les composantes tendancielle et saisonnière

Nous avons vu au § II-2.1.1.2, page 1015, comment obtenir des estimations de la composante saisonnière; par exemple, dans l'étude des ventes de journaux de Casimouth, on a établi (tableau 299 de la page 1019) que la composante saisonnière de janvier est + 20,2. Par ailleurs, nous avons vu comment obtenir une prévision de la composante tendancielle à partir de l'estimation de cette composante fournie par des moyennes mobiles centrées (et nous verrons au § II-3, d'autres techniques utilisables). L'utilisation d'une régression locale, calculée 5 dernières estimations de la composante tendancielle (sans faire justification de ce choix), pour janvier 2001, c'est-à-dire pour $t = 7$, conduit à une prévision de cette composante tendancielle de 499,35. La combinaison de ces deux informations conduit à une prévision de 519,55 pour janvier 2000.

II-3 Les techniques de lissage exponentiel

On a vu que, parmi les filtres en moyenne mobile, certains ont pour vocation d'estimer l'une des composantes de la chronique (pour des dates où x_t a déjà été observé), tandis que d'autres avaient pour but d'effectuer une estimation prévisionnelle (pour des dates où x_t n'est normalement pas disponible) de la chronique ou de l'une de ses composantes. L'objectif poursuivi avec les techniques de lissage exponentiel est, dans la pratique, exclusivement celui de la prévision, même si elles permettent de procéder à une décomposition de la dernière observation x_t , en ses différentes composantes.

Ce qui caractérise fondamentalement les filtres du lissage exponentiel, c'est que leurs coefficients sont en croissance géométrique (d'où le qualificatif «exponentiel») et portent implicitement sur l'intégralité de l'historique possédé. Les techniques de lissage diffèrent selon que l'on traite une chronique sans trend ni saisonnalité (§ II-3.1), une chronique avec trend, mais sans saisonnalité (§ II-3.2, page 1050), et enfin une chronique avec trend et saisonnalité (§ II-3.3, page 1056). Les deux premières techniques sont dues à Brown, la dernière procédure¹ est la plus souvent connue sous le nom du modèle de Winters, ou de Holt-Winters, en hommage à Holt qui est à l'origine (1958) de l'approche du lissage exponentiel.

II-3.1 Lissage exponentiel simple (absence d'évolution tendancielle et de saisonnalité)

Le filtre linéaire du lissage exponentiel simple (y_t) s'applique à des chroniques dépourvues d'évolution tendancielle significative ($f_t = b = \text{constante}$) et de saisonnalité. Il a pour vocation d'effectuer à la date t une prévision $\hat{x}_{t+k} = y_t$ pour une date $t + k$ pour des chroniques du type $x_t = f_t + \varepsilon_t = b + \varepsilon_t$. De ce point de vue, le lissage exponentiel simple est comparable à la moyenne mobile simple non centrée. Le fait que le filtre y_t permette une prévision pour une date postérieure quelconque ($\hat{x}_{t+k} = y_t$, quelle que soit la valeur de k) s'explique, là encore, par le fait que la chronique ne connaît pas d'évolution tendancielle.

Pour une chronique de $t + 1$ termes, repérés par des indices variant de 0 à t (x_0, x_1, \dots, x_t), le filtre linéaire exponentiel définit la valeur y_t suivante:

$$y_t = \alpha x_t + \alpha(1 - \alpha)x_{t-1} + \alpha(1 - \alpha)^2 x_{t-2} + \alpha(1 - \alpha)^3 x_{t-3} + \dots \\ + \alpha(1 - \alpha)^{t-1} x_1 + (1 - \alpha)^t x_0$$

que l'on peut résumer de la façon suivante:

$$y_t = \alpha \sum_{i=0}^{t-1} (1 - \alpha)^i x_{t-i} + (1 - \alpha)^t x_0 \quad \text{relation 419}$$

Sous cette forme de définition, le lissage exponentiel est difficile à utiliser (et à justifier économiquement). Avant de présenter des formules plus opérationnelles tirées de cette relation de définition, présentons quelques propriétés importantes du lissage exponentiel qui découlent de sa définition.

- Tout d'abord le lissage exponentiel affecte l'intégralité de la chronique possédée: si celle-ci s'accroît d'une observation, passant de $t + 1$ périodes à

1. Voir Brown (1959, [69]) et (1963, [70]); voir également Winters (1960, [449]). Une présentation synthétique de l'état actuel de la question peut être trouvée dans Johnson et Montgomery (1976, [246]), chapitres III à IX.

$t + 2$ périodes, les coefficients des $t + 1$ premières variables sont modifiés et la nouvelle observation intervient dans le calcul de y_t . Sur ce point, le lissage exponentiel est un filtre qui diffère sensiblement de ceux présentés précédemment car ils portaient tous sur un nombre fixe de périodes.

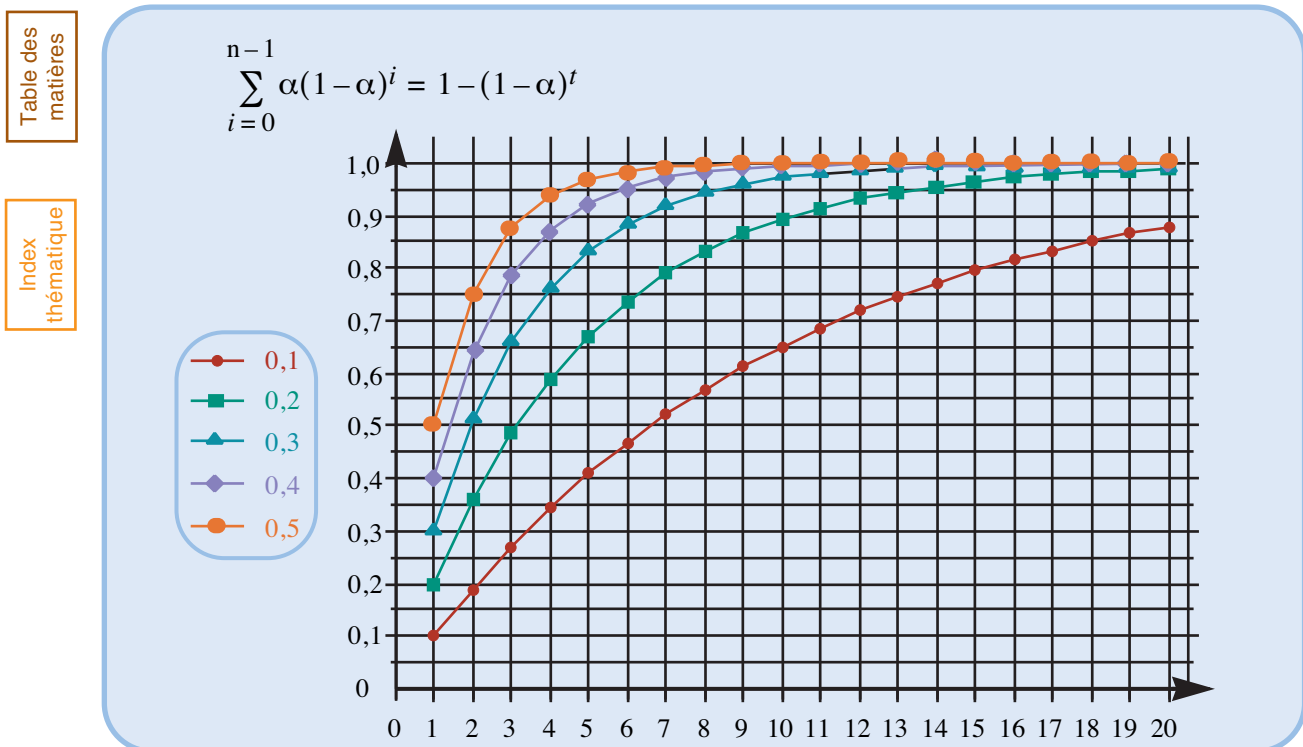
- La somme des coefficients de pondération est bien égale à 1, puisque l'on sait (résultat classique de la somme d'une série en croissance géométrique) que :

$$\sum_{i=0}^{t-1} (1-\alpha)^i = \frac{1-(1-\alpha)^t}{1-(1-\alpha)} = \frac{1-(1-\alpha)^t}{\alpha} \Rightarrow \alpha \sum_{i=0}^{t-1} (1-\alpha)^i + (1-\alpha)^t = 1$$

- Le poids d'une information dans le calcul de y_t est d'autant plus faible que l'information est ancienne. C'est du reste l'un des buts recherchés par cette technique que de privilégier les informations les plus récentes au détriment des informations les plus anciennes, alors que la technique de la moyenne mobile centrée accorde le même poids à toutes les informations.
- Le poids du passé est d'autant plus fort que le coefficient α est faible. Pour illustrer ce point, le [tableau 315, page 1048](#), (illustré par la [figure 246](#)) donne le cumul des coefficients de pondération pour 3, 6, 9, 12, 15 et 18 périodes, pour plusieurs valeurs de α , en supposant l'historique suffisamment long.

FIGURE 246

Poids du passé dans le lissage exponentiel simple



Toute modification de loi suivie par le phénomène étudié sera d'autant plus rapidement prise en compte que le coefficient α sera élevé.

- Dans la mesure où dans le lissage exponentiel, le nombre d'observations qui «pèsent» sur la prévision se détermine sans difficulté en retenant arbitrairement celles dont le cumul des coefficients de pondération est inférieur à 90 ou 95 %, on peut dire qu'il n'y a pas de différence fondamentale entre le choix d'un coefficient de lissage exponentiel et celui de la longueur s du filtre

TABLEAU 315
Poids du passé dans le lissage exponentiel simple

		Nombre de périodes prises en compte					
		3	6	9	12	15	18
α	0,1	0,2710	0,4686	0,6126	0,7176	0,7941	0,8499
	0,2	0,4880	0,7379 [†]	0,8658	0,9313	0,9648	0,9820
	0,3	0,6570	0,8824	0,9596	0,9862	0,9953	0,9984
	0,4	0,7840	0,9533	0,9899	0,9978	0,9995	0,9999
	0,5	0,8750	0,9844	0,9980	0,9998	1,0000	1,0000

$$\dagger. 0,7379 = 0,2 \sum_{i=0}^{6-1} (1-0,2)^i = 0,2 \{1 + (1-0,2) + (1-0,2)^2 + (1-0,2)^3 + (1-0,2)^4 + (1-0,2)^5\}$$

en moyenne mobile, car, dans un cas comme dans l'autre, on définit implicitement l'importance de la fraction récente de la chronique sur laquelle on désire travailler pour effectuer des prévisions. Les remarques qui ont été faites sur le choix de s (§ II-2.1.23b, page 1034) se transposent sans difficulté au cas du lissage exponentiel (simple et double). La différence entre les deux approches, une fois définie la fraction de chronique que l'on a décidé de privilégier, réside dans la différence des coefficients de pondération. Il découle de ces observations que des systèmes de prévision «automatiques», basés sur le lissage exponentiel et traitant de la même façon de très nombreuses références, ont toutes chances de donner de mauvaises prévisions. Cela dit, l'une des raisons de l'accueil réservé aux techniques de lissage exponentiel dans les années soixante-dix est qu'elles nécessitent la mémorisation d'un nombre très limité d'informations (deux pour le lissage exponentiel simple, comme on le verra avec la relation 420, page 1048) pour des performances voisines de celles des techniques de moyennes mobiles.

La formule opérationnelle du lissage exponentiel découle de ce que l'introduction d'une observation supplémentaire modifie les coefficients des $(t+1)$ observations prises en compte jusqu'alors en les multipliant tous par $(1-\alpha)$.

$$\begin{aligned} y_{t+1} &= \alpha x_{t+1} + \alpha(1-\alpha)x_t + \alpha(1-\alpha)^2 x_{t-1} + \alpha(1-\alpha)^3 x_{t-2} + \dots + (1-\alpha)^{t+1} x_0 \\ &= \alpha x_{t+1} + (1-\alpha) \left\{ \alpha \sum_{i=0}^{t-1} (1-\alpha)^i x_{t-i} + (1-\alpha)^t x_0 \right\} = \alpha x_{t+1} + (1-\alpha) y_t \end{aligned}$$

que l'on peut encore écrire en décalant d'une période :

$$\hat{x}_{t+k} = \hat{x}_{t+1} = y_t = \alpha x_t + (1-\alpha) y_{t-1} \quad \text{relation 420}$$

C'est sous cette forme qu'il convient d'utiliser le lissage exponentiel. En effet, sous cette forme récurrente, l'un des avantages du lissage exponentiel apparaît : celui de l'économie du nombre d'informations nécessaires pour effectuer une prévision, puisqu'il suffit de l'information de la période en cours (x_t) et de la prévision effectuée pour cette même période ($\hat{x}_t = y_{t-1}$). Ces deux informations sont équivalentes, dans la technique du lissage exponentiel, à l'intégralité de la chronique passée. Avant d'illustrer par un exemple cette technique, donnons une dernière forme que l'on rencontre pour le lissage exponentiel, et qui est fondée sur

le fait que la prévision \hat{x}_t effectuée pour la période t n'étant autre que y_{t-1} , ($x_t - y_{t-1}$) s'analyse comme une erreur de prévision :

$$y_t = \alpha x_t + (1 - \alpha)\hat{x}_t = \alpha(x_t - \hat{x}_t) + \hat{x}_t$$

$$\hat{x}_{t+1} = y_t = \alpha(x_t - \hat{x}_t) + \hat{x}_t \quad \text{relation 421}$$

Autrement dit, la prévision effectuée pour la période $t + 1$ sera égale à la valeur calculée pour la période présente t , à laquelle on ajoute une fraction (α) de l'erreur de prévision commise pour la période présente.

La mise en œuvre du lissage exponentiel ne pose pas de problème particulier, tout au plus doit-on revenir à la définition de départ pour initialiser le processus récurrent à compter de la période 2, en utilisant y_1 qui est égal à : $y_1 = \alpha x_1 + (1 - \alpha)x_0$, ce qui revient à dire que $y_0 = x_0$, c'est-à-dire que la prévision effectuée à la période 0 est égale à la réalisation de x pour cette période, ce qui est, somme toute, assez logique. Le **tableau 316** illustre l'application de ces relations du lissage exponentiel simple pour $\alpha = 0,3$; la prévision effectuée à la fin de la période 6 pour les périodes suivantes est donc $\hat{x}_7 = \hat{x}_8 = \hat{x}_9 = \dots = 9,48$.

TABLEAU 316
Application du lissage exponentiel simple



t	x_t	$(1 - \alpha)y_{t-1}$	αx_t	y_t
0	10	-	-	10,000
1	9	7,000	2,700	9,700
2	11	6,790	3,300	10,090
3	12	7,063	3,600	10,663
4	9	7,464	2,700	10,164
5	10	7,115	3,000	10,115
6	8	7,080	2,400	9,480
...

Table des matières

Index thématique

Ajoutons enfin que l'on démontre¹, dans le cas où la perturbation aléatoire est du type bruit blanc (voir définition au § I-2.3.1, page 989), que la variance de la prévision, \hat{x}_{t+k} ($= y_t$), pour une date $t + k$, est, quel que soit $k > 0$:

$$V(\hat{x}_{t+k}) = \sigma_\varepsilon^2 \left\{ \sum_{i=0}^{t-1} [\alpha(1 - \alpha)^i]^2 + (1 - \alpha)^{2t} \right\} = \sigma_\varepsilon^2 \frac{\alpha^2 - 2\alpha(1 - \alpha)^{2t+1}}{1 - (1 - \alpha)^2} \quad \text{relation 422}$$

expression qui tend rapidement vers :

$$V(\hat{x}_{t+k}) = V(y_t) = \sigma_\varepsilon^2 \frac{\alpha}{2 - \alpha} \quad \text{relation 423}$$

Son application donne dans l'exemple précédent :

$$V(y_t) = \sigma_\varepsilon^2 \frac{0,3}{2 - 0,3} = 0,1765 \sigma_\varepsilon^2$$

1. Voir Brown (1959, [69]), p. 155.



II-3.2 Lissage exponentiel double (évolution tendancielle linéaire et absence de saisonnalité)

Les objectifs et les conditions d'utilisation du lissage exponentiel double sont exactement les mêmes que ceux de la moyenne mobile double, c'est-à-dire qu'il s'agit de prévision pour des chroniques caractérisées par une évolution tendancielle linéaire ($f_t = at + b$) et une absence de saisonnalité (celle-ci ayant pu être éliminée par un filtre approprié). La chronique à laquelle on s'intéresse est donc du type: $x_t = f_t + \varepsilon_t = at + b + \varepsilon_t$. Pour mettre en évidence la logique de la démarche suivie, ainsi que les propriétés de ce filtre linéaire, nous procéderons comme nous l'avons fait dans la moyenne mobile double, c'est-à-dire en appliquant d'abord ces techniques à des chroniques dans lesquelles la composante aléatoire est absente.

L'application du lissage exponentiel simple à une chronique linéaire x_t non perturbée par une composante aléatoire ($x_t = at + b$) génère une nouvelle chronique y_t décalée par rapport à x_t . À la différence de ce qui se passait en des circonstances analogues avec la moyenne mobile non centrée, *cet écart n'est pas stable*, il s'accroît progressivement pour tendre assez rapidement (plus ou moins selon la valeur du coefficient de lissage α) vers une valeur limite qui est égale à $a \cdot (1 - \alpha) / \alpha$. Examinons ce point sur l'exemple [tableau 317 de la page 1051](#) où la chronique étudiée est $x_t = 10 + 2t$, c'est-à-dire ne comporte pas de composante aléatoire. Pour l'instant, seules les cinq premières colonnes nous intéressent; on peut vérifier, colonne 5, que l'écart entre x_t et y_t tend bien vers: $2(1 - 0,3) / 0,3 = 4,67$

La détermination analytique de cet écart $x_t - y_t$ est aisée. Remplaçons x_t par sa valeur théorique ($= at + b$) dans la formule de définition du lissage exponentiel:

$$\begin{aligned} y_t &= \alpha \sum_{i=0}^{t-1} (1-\alpha)^i x_{t-i} + (1-\alpha)^t x_0 \\ &= \alpha \sum_{i=0}^{t-1} (1-\alpha)^i \{a(t-i) + b\} + (1-\alpha)^t \{a \cdot 0 + b\} \\ &= \left[\alpha \sum_{i=0}^{t-1} (1-\alpha)^i \right] (at + b) - \left[a\alpha \sum_{i=0}^{t-1} i(1-\alpha)^i - b(1-\alpha)^t \right] \end{aligned}$$

$$y_t = (at + b) - \left\{ a\alpha \sum_{i=1}^{t-1} i(1-\alpha)^i - at(1-\alpha)^t \right\} \quad \text{relation 424}$$

On démontre que l'expression entre crochets a une valeur¹ qui tend rapidement avec t , vers $a(1 - \alpha) / \alpha$, ce que l'on a pu vérifier sur notre exemple.

$$1. \sum_{i=0}^{t-1} i(1-\alpha)^i = \sum_{i=1}^{t-1} i(1-\alpha)^i = \frac{1-\alpha}{\alpha} \left\{ (t-1)(1-\alpha)^{t-1} - \frac{(1-\alpha)^{t-1} - 1}{\alpha} \right\}$$

$$\text{car } \sum_{i=1}^n i \cdot x^i = \sum_{i=0}^{n-1} x^i \sum_{j=1}^{n-i} x^j = \sum_{i=0}^{n-1} x^i \left(\frac{x^{n-i} - 1}{x-1} \right) = \frac{x}{x-1} \sum_{i=0}^{n-1} (x^{n-i} - x^i) = \frac{x}{x-1} \left(nx^n - \frac{x^n - 1}{x-1} \right)$$

$$\text{d'où } \sum_{i=0}^{\infty} i(1-\alpha)^i = \frac{1-\alpha}{\alpha^2}, \text{ et } \alpha \sum_{i=0}^{\infty} i(1-\alpha)^i = \frac{1-\alpha}{\alpha}$$

TABLEAU 317
Application du lissage exponentiel double

	t	x_t	y_t	$x_t - y_t$	z_t	\hat{x}_t	\hat{a}
Chronique utilisée	1	12	12,00	-	-	-	-
	2	14	12,60	1,40	12,60	12,60	
	3	16	13,62	2,38	12,91	14,33	0,31
	4	18	14,93	3,07	13,51	16,35	0,61
	5	20	16,45	3,55	14,40	18,51	0,88
	6	22	18,12	3,88	15,51	20,72	1,12
	7	24	19,88	4,12	16,82	22,94	1,31
	8	26	21,72	4,28	18,29	25,14	1,47
	9	28	23,60	4,40	19,88	27,32	1,59
	10	30	25,52	4,48	21,58	29,47	1,69
	11	32	27,47	4,53	23,34	31,59	1,77
	12	34	29,43	4,57	25,17	33,68	1,82
	13	36	31,40	4,60	27,04	35,76	1,87
	14	38	33,38	4,62	28,94	37,82	1,90
	15	40	35,36	4,64	30,87	39,86	1,93
	16	42	37,36	4,64	32,81	41,90	1,95
	17	44	39,35	4,65	34,77	43,92	1,96
	18	46	41,34	4,66	36,75	45,94	1,97
	19	48	43,34	4,66	38,72	47,96	1,98
	20	50	45,34	4,66	40,71	49,97	1,98
Prévisions faites en $t = 20$	21	51,95					
	22	53,94					
	23	55,92					
	24	57,91					
	25	59,89					

Table des matières

Index thématique

Il suffit d'appliquer au cas du lissage exponentiel la méthode correctrice utilisée pour les moyennes mobiles doubles :

- Définissons tout d'abord une nouvelle variable z_t , qui correspond à un lissage exponentiel de y_t (de même que nous avons défini une moyenne mobile z_t de la moyenne mobile y_t), cette double opération de lissage est à l'origine de l'appellation lissage exponentiel double :

$$z_t = \alpha y_t + (1 - \alpha)z_{t-1}$$

- L'écart entre y_t et z_t est le même que celui qui existe entre x_t et y_t :

$$y_t - z_t = x_t - y_t = a \frac{1 - \alpha}{\alpha}$$

d'où l'on tire une estimation à la date t de la pente a (relation 425), analogue à celle que l'on avait obtenue dans la technique de la moyenne mobile double (relation 401 de la page 1030) :

$$\hat{a} = (y_t - z_t) \frac{\alpha}{1 - \alpha}$$

relation 425

cette relation est appliquée à la dernière colonne du [tableau 317 de la page 1051](#).

- Pour retrouver la valeur théorique \hat{x}_t , il suffit donc, comme dans le cas des moyennes mobiles doubles, d'ajouter à y_t l'écart entre y_t et z_t , ce qui découle du reste directement des équations que l'on vient de donner.

$$\hat{x}_t = y_t + (y_t - z_t) = 2y_t - z_t \text{ (identique à la relation 404 de la page 1030)}$$

l'application de cette relation est faite en avant-dernière colonne du [tableau 317 de la page 1051](#).

- Pour retrouver la valeur théorique \hat{x}_{t+k} , il suffit d'ajouter $k \cdot \hat{a}$ à \hat{x}_t :

$$\hat{x}_{t+k} = \hat{x}_t + k \cdot \hat{a} = y_t + (y_t - z_t) \left(1 + k \frac{\alpha}{1 - \alpha} \right) \quad \text{relation 426}$$

Cette [relation 426](#) est appliquée dans les 5 dernières lignes du [tableau 317 de la page 1051](#), pour un décalage k dans la prévision allant de 1 à 5

Cet exemple montre, lorsque la chronique se réduit à une composante tendancielle linéaire, que la prévision n'est qu'« asymptotiquement parfaite ». Si \hat{x}_{t+k} est l'estimation prévisionnelle de x_{t+k} faite (à la date t pour la date postérieure) en application de la [relation 426](#), l'erreur relative $(x_{t+k} - \hat{x}_{t+k}) / x_{t+k}$ est du même signe que la pente, c'est-à-dire qu'il y a sous-estimation si la composante tendancielle est croissante, et surestimation si la composante tendancielle est décroissante. On peut montrer que cet écart relatif est d'autant plus faible que l'historique utilisé est long, que la pente (exprimée en un pourcentage d'accroissement de l'ordonnée à l'origine) est faible, et que le coefficient de lissage utilisé est grand. Le [tableau 318](#) illustre ce point. Reprenons l'exemple ci-dessus : pour une chronique de $s = 15$ termes, un coefficient $\alpha = 0,3$, une ordonnée à l'origine 10 et un pourcentage d'accroissement $p = 20\%$ (on a en effet $x_t = 10 + 2t \rightarrow p = 2/10$), la prévision faite en $t = 15$ pour la date $t + 1 = 16$ est : 41,79 ; l'erreur relative de cette prévision est donc : $(42 - 41,79)/42 = 0,005$, soit 0,5%, valeur que nous retrouvons directement dans le [tableau 318](#).

Le calcul de cette erreur relative ne dépend que de α , s , k et p . En effet, si l'on prend un historique de s observations, la valeur réelle x_{t+k} est, en l'absence de composante aléatoire : $x_{t+k} = a(s+k) + b$, à condition de choisir correctement l'ordonnée à l'origine (c'est-à-dire $b = x_{t-s}$). On peut encore écrire, pour $b \neq 0$, en posant $a = pb$: $x_{t+k} = a(s+k) + b = bp(s+k) + b = b\{p(s+k) + 1\}$. On a vu par ailleurs ([relation 424, page 1050](#)) que les valeurs y_t obtenues par lissage exponentiel simple peuvent s'écrire comme des combinaisons linéaires de a et b , les coefficients de pondération ne dépendant que du coefficient de lissage et de la longueur de l'historique utilisé. En effectuant à nouveau un lissage exponentiel de y_t , pour obtenir z_t , on obtient donc encore une combinaison linéaire de a et b . Le calcul de \hat{x}_{t+k} est lui-même une combinaison linéaire de y_t et z_t , il en sera donc de même de la différence $x_{t+k} - \hat{x}_{t+k}$, que l'on peut donc écrire sous la forme : $x_{t+k} - \hat{x}_{t+k} = ga + hb = gbp + hb = b(pg + h)$. L'erreur relative peut donc s'écrire : $(x_{t+k} - \hat{x}_{t+k}) / x_{t+k} = (pg + h) / \{p(s+k) + 1\}$. Les coefficients g et h ont une formulation analytique complexe, mais qui ne fait intervenir que a et s . L'erreur relative ne dépend donc que de p , k , s et a .

TABLEAU 318
Analyse de sensibilité des erreurs de prévision du lissage exponentiel double

		a /b = 0,005		a /b = 0,010		a /b = 0,025		a /b = 0,050		a /b = 0,100		a /b = 0,150		a /b = 0,200		
a	s	k = 1	k = 10	k = 1	k = 10	k = 1	k = 10	k = 1	k = 10	k = 1	k = 10	k = 1	k = 10	k = 1	k = 10	
Croissance (a > 0)	0,1	5	1,6	5,4	3,2	10,2	7,3	21,2	12,9	33,4	21,0	46,7	26,5	53,9	30,5	58,4
	0,1	10	1,9	4,8	3,5	8,8	7,7	17,6	12,6	26,5	18,7	35,3	22,2	39,7	24,5	42,3
	0,1	15	1,6	3,7	3,0	6,7	6,2	13,0	9,6	18,7	13,3	24,1	15,3	26,6	16,5	28,1
	0,1	20	1,2	2,7	2,2	4,8	4,5	8,9	6,6	12,5	8,8	15,6	9,8	17,1	10,4	17,9
	0,1	25	0,9	1,9	1,6	3,3	3,0	5,9	4,4	8,1	5,6	9,9	6,1	10,7	6,5	11,1
	0,2	5	1,0	4,2	2,0	7,8	4,7	16,3	8,3	25,6	13,4	35,9	17,0	41,4	19,5	44,9
	0,2	10	0,7	2,2	1,2	4,0	2,7	8,0	4,4	12,0	6,6	16,1	7,8	18,1	8,6	19,3
	0,2	15	0,3	1,0	0,6	1,8	1,2	3,4	1,9	4,9	2,6	6,3	3,0	6,9	3,2	7,3
	0,2	20	0,1	0,4	0,2	0,7	0,5	1,3	0,7	1,8	0,9	2,3	1,1	2,5	1,1	2,6
	0,2	25	0,1	0,2	0,1	0,3	0,2	0,5	0,3	0,7	0,3	0,8	0,4	0,9	0,4	0,9
	0,3	5	1,9	19,3	2,5	20,4	3,9	23,0	5,8	25,8	8,6	28,9	10,5	30,6	11,8	31,7
	0,3	10	2,0	9,2	2,1	9,0	2,2	8,5	2,3	8,1	2,5	7,6	2,6	7,4	2,6	7,2
	0,3	15	0,6	2,5	0,6	2,4	0,6	2,1	0,5	1,8	0,5	1,6	0,5	1,5	0,5	1,4
	0,3	20	0,1	0,6	0,1	0,5	0,1	0,4	0,1	0,4	0,1	0,3	0,1	0,3	0,1	0,3
	0,3	25	0,0	0,1	0,0	0,1	0,0	0,1	0,0	0,1	0,0	0,1	0,0	0,1	0,0	0,0
	0,4	5	0,4	1,9	0,7	3,5	1,6	7,4	2,8	11,7	4,6	16,3	5,8	18,8	6,7	20,4
	0,4	10	0,1	0,2	0,1	0,5	0,2	0,9	0,3	1,4	0,5	1,8	0,6	2,1	0,7	2,2
	0,4	15	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,1	0,0	0,1	0,0	0,2	0,1	0,2	0,1	0,2
	0,4	20	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
	0,4	25	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
0,5	5	0,2	1,1	0,4	2,0	0,8	4,3	1,4	6,7	2,3	9,4	3,0	10,8	3,4	11,7	
0,5	10	0,0	0,1	0,0	0,1	0,0	0,2	0,1	0,3	0,1	0,4	0,1	0,5	0,1	0,5	
0,5	15	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	
0,5	20	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	
0,5	25	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	
Décroissance (a < 0)	0,1	5	-1,7	-6,3	-3,6	-13,7	-9,9	-46,7	-24,0	-234	-83,8	233,7	-503	140,2	335,3	116,9
	0,1	10	-2,1	-5,9	-4,4	-13,2	-13,5	-52,9	-43,5	†	391,7	105,8	90,4	79,4	65,3	70,5
	0,1	15	-1,9	-4,8	-4,1	-11,2	-14,4	-56,1	-86,4	168,4	57,6	56,1	37,0	45,9	31,4	42,1
	0,1	20	-1,5	-3,7	-3,4	-8,9	-14,3	-62,6	271,7	62,6	24,7	31,3	19,0	26,8	17,0	25,0
	0,1	25	-1,2	-2,7	-2,7	-6,8	-14,3	-89,0	33,4	29,7	12,5	17,8	10,4	15,7	9,5	14,8
	0,2	5	-1,1	-4,8	-2,3	-10,6	-6,3	-35,9	-15,4	-179,4	-53,8	179,4	-322,6	107,6	215,0	89,7
	0,2	10	-0,7	-2,7	-1,5	-6,0	-4,7	-24,1	-15,3		137,6	48,2	31,7	36,1	22,9	32,1
	0,2	15	-0,4	-1,3	-0,8	-2,9	-2,8	-14,6	-16,8	43,9	11,2	14,6	7,2	12,0	6,1	11,0
	0,2	20	-0,2	-0,5	-0,4	-1,3	-1,5	-9,2	29,2	9,2	2,7	4,6	2,0	3,9	1,8	3,7
	0,2	25	-0,1	-0,2	-0,2	-0,6	-0,9	-7,4	2,0	2,5	0,7	1,5	0,6	1,3	0,6	1,2
	0,3	5	-0,7	-3,4	-1,4	-7,5	-3,8	-25,3	-9,3	-127	-32,6	126,7	-195,5	76,0	130,3	63,4
	0,3	10	-0,2	-1,0	-0,5	-2,3	-1,5	-9,1	-4,7		42,1	18,1	9,7	13,6	7,0	12,1
	0,3	15	-0,1	-0,2	-0,1	-0,6	-0,4	-2,9	-2,6	8,6	1,7	2,9	1,1	2,3	1,0	2,1
	0,3	20	0,0	-0,1	0,0	-0,1	-0,1	-0,9	2,3	0,9	0,2	0,5	0,2	0,4	0,1	0,4
	0,3	25	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	-0,4	0,1	0,1	0,0	0,1	0,0	0,1	0,0	0,1
	0,4	5	-0,4	-2,2	-0,8	-4,8	-2,2	-16,3	-5,2	-81,6	-18,4	81,6	-110,2	48,9	73,4	40,8
	0,4	10	-0,1	-0,3	-0,1	-0,7	-0,4	-2,7	-1,2		10,7	5,5	2,5	4,1	1,8	3,7
	0,4	15	0,0	0,0	0,0	-0,1	-0,1	-0,4	-0,3	1,2	0,2	0,4	0,1	0,3	0,1	0,3
	0,4	20	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	-0,1	0,1	0,1	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
	0,4	25	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
0,5	5	-0,2	-1,3	-0,4	-2,8	-1,1	-9,4	-2,7	-46,9	-9,4	46,9	-56,3	28,1	37,5	23,4	
0,5	10	0,0	-0,1	0,0	-0,2	-0,1	-0,6	-0,2		2,1	1,3	0,5	1,0	0,4	0,8	
0,5	15	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,1	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	
0,5	20	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	
0,5	25	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	

Table des matières

Index thématique

†. non calculable (valeur théorique nulle entraînant une division par 0)

Appliquons maintenant la technique du lissage exponentiel double à la chronique de l'estimation de la composante tendancielle du **tableau 298 de la page 1018**. Le problème de la longueur de l'historique utilisé ne se pose pas dans les mêmes termes que dans le cas de la moyenne mobile double. Que l'on commence à appliquer le lissage exponentiel double dès le début de la chronique ou qu'on le fasse à partir d'une date ultérieure, ce qui importe avant tout, c'est la valeur retenue pour le coefficient de lissage. L'arbitrage doit être implicitement effectué entre le lissage des fluctuations aléatoires (→ valeur faible pour α) et la prise en compte rapide d'une modification de la composante tendancielle (→ valeur plus élevée de α). Ce choix est guidé par le **tableau 315 de la page 1048**. Dans la mesure où la chronique utilisée est déjà lissée des perturbations aléatoires, on retiendra de préférence une valeur assez élevée de α , par exemple $\alpha = 0,2$. Il suffit, avec ce coefficient, d'une chronique d'une quinzaine d'observations pour avoir une somme des coefficients de pondération du filtre linéaire, proche de 1. Par ailleurs, la pente n'est pas assez importante pour qu'en utilisant une chronique d'une quinzaine de termes la surestimation signalée plus haut soit négligeable. Les tests effectués montrent que les résultats sont pratiquement les mêmes si l'on amorce le calcul à une date inférieure à 65, mais ici, pour illustrer le comportement du lissage exponentiel double, on partira de la date $t = 40$. Les prévisions ont été calculées en $t = 78$, pour les 9 mois suivants (**tableau 319**).

Ajoutons enfin que l'on démontre¹, dans le cas où la perturbation aléatoire suit un processus purement aléatoire, que les variances des coefficients de régression sont :

$$V(a) = \frac{2\alpha^3}{(2-\alpha)^3} \sigma_\varepsilon^2 \text{ et } V(b) = \frac{\alpha(5\alpha^2 - 14\alpha + 10)}{(2-\alpha)^3} \sigma_\varepsilon^2 \quad \text{relation 427}$$

ce qui donne dans notre exemple numérique: $V(a) = \frac{2 \times 0,2^3}{(2-0,2)^3} \sigma_\varepsilon^2 = 0,00274 \sigma_\varepsilon^2$

$$\text{et } V(b) = \frac{0,2(5 \times 0,2^2 - 14 \times 0,2 + 10)}{(2-0,2)^3} \sigma_\varepsilon^2 = 0,25377 \sigma_\varepsilon^2.$$

On montre² par ailleurs que, toujours dans le cas où la perturbation aléatoire est du type «bruit blanc», la variance de la prévision pour la période $t + k$ est :

$$V(\hat{x}_{t+k}) = \frac{\alpha}{(2-\alpha)^3} \{5\alpha^2 - 14\alpha + 10 + 2\alpha(4 - 3\alpha)k + 2\alpha^2 k^2\} \sigma_\varepsilon^2 \quad \text{relation 428}$$

ce qui donne dans notre exemple, pour $k = 1$:

$$V(\hat{x}_{t+1}) = \frac{0,2 \times \{5 \times 0,2^2 - 14 \times 0,2 \times 10 + 2 \times 0,2[4 - 3 \times 0,2]1 + 2 \times 0,2^2 \times 1^2\}}{(2-0,2)^3} \sigma_\varepsilon^2$$

$$= 0,303 \sigma_\varepsilon^2$$

Le **tableau 320** fournit, pour la plage usuelle de valeurs de α , le coefficient par lequel il faut multiplier l'écart type (et non la variance) σ_ε pour avoir l'écart type associé à la prévision \hat{x}_{t+k} , et ce pour $k = 1$ à 10.

1. Voir Brown (1963, [70]), p. 156 et 229.

2. Voir Brown (1963, [70]), p. 235.

TABLEAU 319

Prévision de la composante tendancielle des ventes du rayon de ventes de journaux du Casimouth d'Alphaville par lissage exponentiel double ($\alpha = 0,2$)



t	x_t	y_t	z_t	t	x_t	y_t	z_t
40	707,83	707,83		64	803,04	773,44	748,86
41	713,25	708,92	708,92	65	807,21	780,19	755,13
42	717,79	710,69	709,27	66	805,42	785,24	761,15
43	719,83	712,52	709,92	67	797,75	787,74	766,47
44	719,04	713,82	710,70	68	783,04	786,80	770,53
45	715,17	714,09	711,38	69	764,25	782,29	772,89
46	712,21	713,72	711,85	70	746,17	775,07	773,32
47	712,04	713,38	712,15	71	727,75	765,60	771,78
48	713,00	713,30	712,38	72	709,38	754,36	768,29
49	714,08	713,46	712,60	73	693,38	742,16	763,07
50	716,75	714,12	712,90	74	675,75	728,88	756,23
51	715,79	714,45	713,21	75	660,42	715,19	748,02
52	711,42	713,85	713,34	76	643,58	700,87	738,59
53	710,25	713,13	713,30	77	624,92	685,68	728,01
54	711,38	712,78	713,19	78	613,38	671,22	716,65
55	719,42	714,10	713,38	79	614,42		
56	732,13	717,71	714,24	80	603,07		
57	742,63	722,69	715,93	81	591,71		
58	754,42	729,04	718,55	82	580,35		
59	766,25	736,48	722,14	83	568,99		
60	773,63	743,91	726,49	84	557,63		
61	780,33	751,19	731,43	85	546,28		
62	788,83	758,72	736,89	86	534,92		
63	795,29	766,04	742,72	87	523,56		

Table des matières

Index thématique

TABLEAU 320

Éléments de calcul de l'écart-type des prévisions par lissage exponentiel double

	$\alpha = 0,05$	$\alpha = 0,1$	$\alpha = 0,15$	$\alpha = 0,2$	$\alpha = 0,25$	$\alpha = 0,3$	$\alpha = 0,35$	$\alpha = 0,4$	$\alpha = 0,45$	$\alpha = 0,5$
k = 1	0,256	0,370	0,465	0,551 [†]	0,632	0,711	0,791	0,871	0,952	1,036
k = 2	0,261	0,386	0,495	0,598	0,702	0,808	0,918	1,035	1,158	1,291
k = 3	0,266	0,401	0,525	0,647	0,773	0,906	1,049	1,202	1,369	1,552
k = 4	0,272	0,417	0,555	0,696	0,845	1,006	1,181	1,372	1,583	1,816
k = 5	0,277	0,433	0,585	0,745	0,918	1,106	1,314	1,544	1,798	2,082
k = 6	0,282	0,449	0,616	0,795	0,991	1,208	1,448	1,716	2,015	2,349
k = 7	0,287	0,465	0,647	0,845	1,065	1,310	1,583	1,890	2,233	2,618
k = 8	0,293	0,481	0,678	0,896	1,139	1,412	1,719	2,063	2,451	2,887
k = 9	0,298	0,497	0,709	0,946	1,213	1,515	1,855	2,238	2,670	3,156
k = 10	0,304	0,513	0,741	0,997	1,288	1,618	1,991	2,413	2,889	3,426

[†]: $0,551^2 = 0,303$ trouvé dans l'exemple numérique.



II-3.3 Lissage exponentiel avec évolution tendancielle et saisonnalité (Modèle de Holt et Winters)

On supposera, pour faciliter la compréhension de cette démarche, que la saisonnalité est annuelle et que l'étude porte sur des données mensuelles. La transposition à d'autres rythmes saisonniers s'effectue sans difficulté: il suffit alors de remplacer 12 (retenu ici comme nombre de périodes constitutives de l'année) par le nombre de périodes, constitutives du cycle retenu.

Dans cette méthode, chaque nouvelle observation provoque une mise à jour du trend, ainsi que des coefficients saisonniers. L'avantage de cette méthode est de nécessiter un historique restreint (minimum de $2 \times 12 = 24$ valeurs) et d'utiliser une procédure de calcul simple, pour des résultats prévisionnels assez bons pour des phénomènes dont le comportement saisonnier et tendanciel est assez stable. Pour ces raisons, cette procédure, connue sous le nom de modèle de Winters, ou de Holt-Winters¹, est largement utilisée dans certaines grandes entreprises pour des prévisions automatiques dans le cas de traitement de très nombreuses références d'articles.

Désignons par:

- m_t , l'estimation au mois t , de la moyenne locale; cette moyenne locale n'inclut pas l'influence saisonnière et correspond au terme constant implicitement présent dans le modèle du lissage exponentiel simple;
- r_t , l'estimation au mois t de l'accroissement mensuel de la moyenne. En l'absence de variations saisonnières, la prévision effectuée à la fin du mois t pour le mois $t + h$ suivant, serait $\hat{x}_{t+h} = m_t + hr_t$
- c_t , l'estimation du facteur saisonnier du mois t . Si t est supérieur à 12, il faut diminuer t du plus grand multiple entier de 12, laissant t positif, pour trouver le mois correspondant (exemple $t = 27 \rightarrow c_{27}$, correspond au facteur saisonnier du mois $27 - 2 \times 12 = 3$, c'est-à-dire du mois de mars si la chronique débutait en janvier). Ce facteur saisonnier peut jouer de façon additive ou multiplicative, la prévision pour le mois $t + h$ (avec $h \leq 12$) devenant: x_t

$$\hat{x}_{t+h} = m_t + h \cdot r_t + c_{t+h} \quad (\text{modèle additif})$$

$$\hat{x}_{t+h} = (m_t + h \cdot r_t) \cdot c_{t+h} \quad (\text{modèle multiplicatif})$$

relation 429

Chaque nouvelle observation entraîne une mise à jour de ces 3 termes m_t , r_t et c_t , à l'aide de 3 coefficients différents: α , β et γ .

$$m_t \begin{cases} = \alpha(x_t - c_{t-12}) + (1-\alpha)(m_{t-1} + r_{t-1}), \text{ si le modèle est } \textit{additif} \\ = \alpha(x_t/c_{t-12}) + (1-\alpha)(m_{t-1} + r_{t-1}), \text{ si le modèle est } \textit{multiplicatif} \end{cases}$$

$$c_t \begin{cases} = \beta(x_t - m_t) + (1-\beta)c_{t-12}, \text{ si le modèle est } \textit{additif} \\ = \beta(x_t/m_t) + (1-\beta)c_{t-12}, \text{ si le modèle est } \textit{multiplicatif} \end{cases}$$

$$r_t = \gamma(m_t - m_{t-1}) + (1-\gamma)r_{t-1}, \text{ quel que soit le modèle}$$

relations 430

1. Le modèle de Holt (1957) est identique à celui présenté ici, à condition de supprimer la composante saisonnière; voir Chatfield (1996, [91]) p. 87-89, et bien sûr Winters (1960, [449]).

Ces différentes relations¹ s'utilisent sans problème «en régime de croisière», mais se pose le problème de l'initialisation. Pour appliquer la méthode, il faut disposer d'un historique d'au moins un cycle, c'est-à-dire d'au moins un an. Pour vérifier la bonne compréhension des principes exposés, on s'appuiera sur l'exemple de la chronique des ventes du rayon de ventes de journaux du Casimouth d'Alphaville. Les valeurs sont toutes à initialiser au dernier mois de la première année, c'est-à-dire $t = 12$, car il faut au moins un historique d'un an pour calculer les facteurs saisonniers, c'est-à-dire que la prévision ne pourra débuter en tout état de cause avant $t = 13$. Toutefois, comme nous allons le voir, un historique de 2 ans est nécessaire pour calculer l'accroissement moyen mensuel r_{12} , la prévision des mois $t = 13$ à $t = 24$ revêtira un caractère «rétrospectif».

II-3.3.1 Initialisation de l'accroissement moyen mensuel (r_{12})

Le r_{12} terme sera calculé comme l'accroissement moyen mensuel sur les 2 premières années. Pour éliminer l'influence des fluctuations saisonnières, que l'on suppose se compenser dans l'année (c'est-à-dire qu'implicitement le schéma additif est retenu, au moins comme approximation), l'accroissement moyen mensuel sera calculé comme le douzième de l'accroissement annuel des deux

premières années: $r_{12} = \frac{1}{12} \left[\sum_{t=13}^{24} x_t - \sum_{t=1}^{12} x_t \right]$, ce qui donne numériquement pour

notre exemple de ventes du rayon de ventes de journaux du Casimouth d'Alphaville: $r_{12} = \frac{1}{12}(8969 - 8246) = \frac{723}{12} = 60,25$.

Table des matières

II-3.3.2 Initialisation de la valeur moyenne locale (m_{12})

Elle sera prise comme égale à la moyenne mensuelle de la première année (ce qui revient à la sous-estimer, en cas de croissance tendancielle et à la surestimer, en cas de décroissance tendancielle). L'application de ce principe donne

numériquement: $m_{12} = \frac{1}{12} \sum_{t=1}^{12} x_t = \frac{8246}{12} = 687,167$.

Index thématique

II-3.3.3 Initialisation des facteurs saisonniers (c_j)

Deux solutions sont possibles:

- On peut calculer les facteurs saisonniers comme la différence $x_t - m_{12}$, c'est-à-dire la différence entre l'observation pour le mois t de la première année, et la moyenne mensuelle de cette première année. Si le modèle postulé fait intervenir multiplicativement l'influence saisonnière, on prendra le quotient

1. Ces formules en dépit des apparences sont proches de celles du lissage exponentiel double. En effet, si l'on remplace \hat{a} , par r_t dans la relation 425 de la page 1051, on a: $\hat{a} = r_t = (y_t - z_t) \frac{\alpha}{1 - \alpha}$ d'où l'on tire $(y_t - z_t) = r_t \frac{(1 - \alpha)}{\alpha}$. La relation 404 de la page 1030 ($\hat{x}_t = y_t + (y_t - z_t)$) peut s'écrire $\hat{x}_t = m_t + r_t \frac{(1 - \alpha)}{\alpha}$ et la relation 426 de la page 1052 ($\hat{x}_{t+k} = \hat{x}_t + k \cdot \hat{a} = y_t + (y_t - z_t) \left(1 + k \frac{\alpha}{1 - \alpha}\right)$) est identique à celle du

modèle additif de la relation 429: $\hat{x}_{t+k} = m_t + hr_t = y_t + r_t \left\{ \frac{(1 - \alpha)}{\alpha} + h \right\}$.

Par ailleurs, on montre que la récurrence de la chronique z_t est équivalente à celle fournie dans la relation 430, en remplaçant γ par α et en tenant compte du fait que $m_t - m_{t-1} = y_t - y_{t-1}$, la constante d'écart s'annulant dans la différenciation: $r_t = \alpha(y_t - y_{t-1}) + (1 - \alpha)r_{t-1}$. Cette deuxième formulation du lissage exponentiel double est dite lissage exponentiel, corrigé pour le trend (exponential smoothing, corrected for trend). On peut ajouter qu'une troisième formulation existe.

au lieu de la différence. L'inconvénient de cette méthode est d'inclure une partie du trend aux facteurs saisonniers, ce qui se traduit en cas de trend ascendant par une surestimation des facteurs saisonniers du premier semestre, et une sous-estimation pour le dernier semestre. Mais cet inconvénient ne joue réellement que si le trend est assez prononcé. Il faut cependant noter que si la prévision ne débute effectivement qu'au début de la troisième année ($t = 25$), puisqu'un historique de 2 ans est nécessaire pour l'initialisation, la séquence de calcul itératif débute en $t = 13$, ce qui fait qu'une première correction des facteurs saisonniers s'effectue par lissage exponentiel de $t = 13$ à $t = 24$, c'est-à-dire avant la première prévision opérationnelle.

TABLEAU 321
Exemple d'initialisation des composantes saisonnières du modèle de Holt & Winters

Modèle	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
additif: $c_j = x_j - 687,17$	17,83	-34,17	25,83	-3,17	19,83	26,83	-3,17	-265,17	-58,17	123,83	33,83	115,83
multiplicatif: $c_i = \frac{x_i}{687,17}$	1,026	0,950	1,038	0,995	1,029	1,039	0,995	0,614	0,915	1,180	1,049	1,169

- On peut calculer les facteurs saisonniers comme la différence (ou le quotient si la saisonnalité est multiplicative) des x_i par rapport aux points théoriques correspondants situés sur la droite de trend passant par les points moyens mensuels de l'année 1 (de coordonnées $\bar{t} = 6,5$, et $\bar{x} = 687,167$) et de l'année 2 (il suffit en fait de prendre le point moyen de l'année 1, et la pente théorique $r_{12}=60,25$). L'équation de la droite théorique est: $\hat{x}_i = m_{12} - r_{12}(6,5 - i)$, pour i variant de 1 à 12; d'où le calcul des facteurs saisonniers:

$$c_i = x_i - \{687,16 - (6,5 - i).60,25\}, \text{ pour le modèle additif,}$$

$$c_i = x_i / \{687,16 - (6,5 - i).60,25\}, \text{ pour le modèle multiplicatif.}$$

Cette seconde méthode est, a priori, meilleure que la première, à condition que le phénomène étudié connaisse une évolution tendancielle stable, ce qui n'est pas le cas de la chronique de ventes étudiée. Examinons néanmoins au [tableau 322](#) comment calculer quelques coefficients.

TABLEAU 322
Exemple d'initialisation des composantes saisonnières de Holt & Winters (seconde méthode)

i	c_i	Modèle additif	Modèle multiplicatif
1	c_1	$705 - (687,17 - 5,5 \times 60,25) = 349$	$705 / (687,17 - 5,5 \times 60,25) = 1,981$
3	c_3	$713 - (687,17 - 3,5 \times 60,25) = 237$	$713 / (687,17 - 3,5 \times 60,25) = 1,497$
6	c_6	$714 - (687,17 - 0,5 \times 60,25) = 57$	$714 / (687,17 - 0,5 \times 60,25) = 1,087$
8	c_{10}	$422 - (687,17 + 1,5 \times 60,25) = -356$	$422 / (687,17 + 1,5 \times 60,25) = 0,543$
12	c_{12}	$803 - (687,17 + 5,5 \times 60,25) = -216$	$803 / (687,17 + 5,5 \times 60,25) = 1,268$

II-3.3.4 Calculs récurrents

L'initialisation terminée, on peut alors utiliser «en régime de croisière», les relations 430; supposons que les coefficients de lissage soient $\alpha = 0,6$; $\beta = 0,5$ et $\gamma = 0,2$, on a alors, pour le modèle additif (les valeurs c_i , m_{12} , r_{12} sont celles du tableau 321, du § II-3.3.1 et du § II-3.3.2).

- $t = 13$:
 - $m_{13} = 0,6 \{831 - (17,83)\} + (1 - 0,6) (687,17 + 60,25) = 786,87$
 - $c_{13} = 0,5 (831 - 786,87) + (1 - 0,5) (17,83) = 30,98 \rightarrow c_1$ (nouvelle composante saisonnière du mois de janvier)
 - $r_{13} = 0,2 (786,87 - 687,17) + (1 - 0,2) 60,25 = 68,14$
 - $\hat{x}_{14} = 786,87 + 68,14 + (-34,17) = 820,84$
- $t = 14$:
 - $m_{14} = 0,6 \{765 - (-34,17)\} + (1 - 0,6) (786,87 + 68,14) = 821,50$
 - $c_{14} = 0,5 (765 - 821,50) + (1 - 0,5) (-34,17) = -45,34 \rightarrow c_2$ (nouvelle composante saisonnière du mois de février)
 - $r_{14} = 0,2 (821,50 - 786,87) + (1 - 0,2) 68,14 = 61,44$
 - $\hat{x}_{15} = 821,5 + 61,44 + 25,84 = 908,78$

Le tableau 323 donne les résultats du modèle de Holt-Winters appliqué à cette chronique de ventes du rayon de Casimouth. La qualité des deux modèles est voisine puisque l'écart-type résiduel associé aux erreurs de prévision pour la période suivante est de 68,57 pour l'additif et de 71,90 pour le multiplicatif.

Table des matières

Index thématique

TABLEAU 323
Application des modèles de Holt - Winters

Mois i	Période t	Observé x_t	Modèle additif				Modèle multiplicatif			
			r_t	m_t	c_i	\hat{x}_t	r_t	m_t	c_i	\hat{x}_t
1	13	831	68,14	786,87	30,98		67,76	784,95	1,046	
2	14	765	61,44	821,50	-45,33	820,84	62,04	824,10	0,937	810,31
3	15	815	50,19	826,68	7,08	908,78	49,96	825,74	1,007	919,45
4	16	830	44,94	850,65	-11,91	873,70	44,93	850,58	0,984	871,66
5	17	756	25,81	799,94	-12,05	915,42	25,65	799,08	0,979	921,36
6	18	811	20,82	800,80	18,52	852,58	20,34	798,20	1,025	856,93
7	19	746	12,13	778,15	-17,66	818,45	12,05	777,09	0,974	814,77
8	20	504	9,59	777,61	-269,39	525,11	15,84	808,07	0,620	484,62
9	21	774	14,99	814,18	-49,17	729,04	18,44	836,91	0,921	754,17
10	22	762	-7,93	714,57	85,63	953,01	-6,73	729,53	1,099	1009,49
11	23	695	-13,39	679,36	24,74	740,47	-13,98	686,55	1,027	758,39
12	24	680	-25,60	604,89	95,47	781,80	-24,86	618,18	1,127	785,95
1	25	682	-17,00	622,32	45,33	610,27	-17,78	628,69	1,069	620,36
2	26	684	-2,11	679,73	-20,53	559,99	-3,50	682,32	0,976	572,47
3	27	743	4,88	712,60	18,74	684,70	3,56	714,12	1,027	683,73
4	28	701	4,33	714,74	-12,82	705,58	2,96	714,67	0,982	705,94
5	29	641	-3,59	679,46	-25,25	707,02	-4,60	679,82	0,957	702,70
6	30	595	-15,52	616,24	-1,36	694,39	-15,99	618,30	0,987	692,26

TABLEAU 323
Application des modèles de Holt - Winters

Mois i	Période t	Observé x_t	Modèle additif				Modèle multiplicatif			
			r_t	m_t	c_i	\hat{x}_t	r_t	m_t	c_i	\hat{x}_t
7	31	679	-4,00	658,28	1,53	583,06	-4,62	659,14	1,008	586,74
8	32	439	2,49	686,75	-258,57	384,89	1,82	686,73	0,632	405,71
9	33	728	13,04	742,00	-31,59	640,06	14,04	749,67	0,951	634,19
10	34	746	1,68	698,24	66,70	840,67	3,87	712,84	1,067	839,16
11	35	688	-2,72	677,92	17,41	724,66	-1,75	688,60	1,010	736,12
12	36	743	-6,04	658,60	89,94	770,68	-5,09	670,15	1,116	774,38
1	37	689	-7,11	647,23	43,55	697,89	-7,56	652,70	1,061	711,02
2	38	741	7,46	712,97	3,75	619,59	6,10	713,44	1,014	629,86
3	39	815	16,56	765,93	33,90	739,17	14,97	763,89	1,051	739,08
4	40	719	10,48	752,09	-22,96	769,67	9,37	750,86	0,967	764,82
5	41	730	9,60	758,18	-26,72	737,32	9,64	761,57	0,958	727,85
6	42	764	9,31	766,33	-1,85	766,43	9,93	772,69	0,988	761,56
7	43	626	-8,83	684,94	-28,71	777,17	-9,44	685,76	0,951	788,69
8	44	456	-4,21	699,19	-250,88	417,55	-3,95	703,78	0,641	427,10
9	45	757	7,02	751,14	-12,86	663,39	7,59	757,50	0,980	665,59
10	46	786	2,36	734,85	58,93	824,86	4,14	747,84	1,058	816,67
11	47	778	5,16	751,24	22,09	754,61	6,31	762,83	1,016	759,73
12	48	762	-4,96	705,80	73,07	846,34	-4,07	717,26	1,084	858,51
1	49	719	-8,00	685,61	38,47	744,39	-8,33	691,87	1,048	756,70
2	50	692	-6,73	683,99	5,88	681,35	-8,44	683,00	1,013	692,90
3	51	771	0,45	713,16	45,87	711,17	-1,36	709,97	1,072	708,97
4	52	692	0,61	714,42	-22,69	690,66	-0,55	712,67	0,970	685,47
5	53	753	8,38	753,84	-13,78	688,32	8,31	756,41	0,981	682,28
6	54	764	8,81	764,40	-1,12	760,38	9,31	769,74	0,991	755,73
7	55	652	-2,29	717,71	-47,21	744,50	-1,88	723,06	0,921	740,73
8	56	494	1,25	733,09	-244,98	464,54	4,00	750,62	0,651	462,53
9	57	696	-1,81	719,05	-17,96	721,47	-1,33	727,96	0,966	739,55
10	58	742	-5,91	696,74	52,09	776,17	-4,33	711,61	1,049	768,47
11	59	794	3,82	739,48	38,30	712,92	4,57	751,78	1,040	718,63
12	60	773	-1,39	717,28	64,40	816,37	-0,61	730,44	1,069	819,81
1	61	901	16,21	803,87	67,80	754,37	14,98	807,80	1,088	764,81
2	62	815	14,90	813,51	3,69	825,96	12,76	811,66	1,008	833,80
3	63	900	17,98	843,84	51,02	874,27	14,58	833,51	1,077	883,75
4	64	846	18,81	865,94	-21,31	839,13	17,52	862,78	0,976	822,24
5	65	883	20,25	891,97	-11,37	870,97	19,94	892,44	0,986	863,16
6	66	811	8,24	852,16	-21,14	911,10	8,68	856,06	0,965	904,01
7	67	766	2,58	832,08	-56,64	813,19	4,68	844,73	0,913	796,73
8	68	584	1,89	831,25	-246,12	589,67	10,33	877,66	0,660	553,32
9	69	761	-4,61	800,63	-28,80	815,19	-1,66	828,03	0,938	857,51
10	70	863	-2,82	804,96	55,07	848,12	-2,07	824,32	1,048	866,57
11	71	773	-10,91	761,67	24,81	840,44	-11,56	774,81	1,015	855,23
12	72	751	-18,61	712,27	51,56	815,15	-18,81	727,00	1,047	815,55
1	73	739	-21,31	680,18	63,31	761,45	-22,32	690,67	1,077	770,80
2	74	624	-25,93	635,74	-4,03	662,56	-28,22	638,83	0,989	673,58

TABLEAU 323
Application des modèles de Holt - Winters

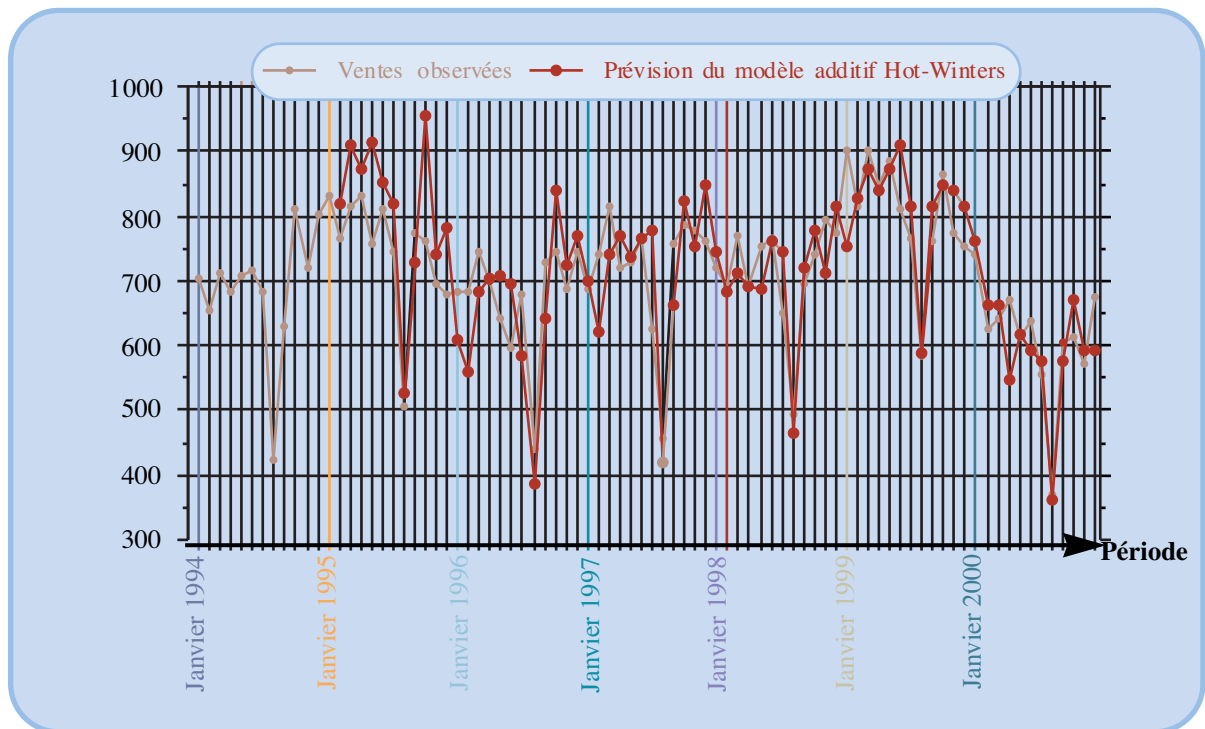
Mois <i>i</i>	Période <i>t</i>	Observé x_t	Modèle additif				Modèle multiplicatif			
			r_t	m_t	c_i	\hat{x}_t	r_t	m_t	c_i	\hat{x}_t
3	75	640	-28,43	597,31	46,85	660,82	-30,16	600,91	1,070	657,42
4	76	672	-13,50	643,54	3,57	547,56	-16,04	641,35	1,019	557,13
5	77	615	-13,94	627,84	-12,11	618,66	-16,22	624,42	0,985	616,48
6	78	638	-8,51	641,04	-12,09	592,76	-9,84	640,07	0,984	586,76
7	79	555	-11,02	620,00	-60,82	575,89	-12,49	616,97	0,905	575,16
8	80	372	-9,92	614,46	-244,29	362,86	-17,38	580,07	0,649	398,84
9	81	605	-6,41	622,09	-22,95	575,75	-7,48	612,19	0,968	527,64
10	82	615	-13,10	582,23	43,92	670,75	-9,60	594,12	1,040	633,51
11	83	573	-15,61	556,56	20,63	593,95	-11,97	572,65	1,006	593,08
12	84	674	-5,84	589,84	67,86	592,51	-2,02	610,44	1,081	587,15

La détermination des coefficients de lissage n'est pas complètement arbitraire. On peut procéder de deux façons : fixer a priori la mémoire du processus de lissage (voir [tableau 315, page 1048](#)), ou chercher par tâtonnements sur un historique donné le ou les coefficients de lissage qui minimisent la variance résiduelle. C'est cette seconde méthode qui a été utilisée ici ; cette optimisation des coefficients coûte cher (archivage de l'historique, recherche combinatoire) ; aussi doit-elle être réservée à un nombre limité de chroniques et la réactualisation des coefficients ne doit-elle être que périodique.

Table des matières

FIGURE 247
Prévision du modèle de Holt & Winters additif.

Index thématique



II-4 Les filtres «différence»

Alors que les filtres de moyenne mobile ont pour but d'éliminer des perturbations accidentelles pour retrouver une valeur tendancielle théorique, le filtre différence vise au contraire à éliminer les régularités tendanciennes et saisonnières, en utilisant le minimum de données de la chronique étudiée. Ce filtre sera utilisé dans les approches de Box et Jenkins (cf. § III-2, page 1083).

Le filtre «différence première» que l'on note Δx_t est tel que : $\Delta x_t = x_t - x_{t-1}$ qui présente bien le caractère d'un filtre puisqu'il associe à des termes consécutifs un système de pondération (+ 1 pour x_t et - 1 pour x_{t-1}), dont la somme est égale à zéro et non à un, comme dans le cas de la moyenne mobile ou du lissage exponentiel.

On peut encore écrire ce filtre (illustré par l'exemple numérique ci-après) en introduisant un opérateur, noté B (B pour *Backward Shift* c'est-à-dire décalage arrière) qui est tel que : $x_{t-1} = Bx_t$, d'où :

$$\Delta x_t = x_t - x_{t-1} = (1 - B)x_t \quad \text{relation 431}$$

L'intérêt de cette seconde formulation apparaît dès que l'on aborde le filtre différence seconde (utilisé dans l'exemple numérique ci-après) noté $\Delta^2 x_t$, qui n'est autre que la différence première de la nouvelle chronique constituée en utilisant une première fois le filtre différence première. Autrement dit, on a :

$$\Delta^2 x_t = \Delta x_t - \Delta x_{t-1} = (x_t - x_{t-1}) - (x_{t-1} - x_{t-2}) = x_t - 2x_{t-1} + x_{t-2}$$

Mais on peut encore en écrire la formulation en utilisant l'opérateur B, et en le traitant comme une constante quelconque :

$\Delta^2 x_t = (1 - B)x_t - (1 - B)x_{t-1} = (1 - B)x_t - (1 - B)Bx_t = x_t - 2Bx_t + B^2x_t = (1 - B)^2x_t$
Autrement dit, en traitant l'opération décalage comme une puissance, c'est-à-dire en convenant que :

$$B^i x_t = x_{t-i} \quad \text{relation 432}$$

on peut exprimer le filtre différence seconde comme une puissance seconde du filtre différence première, et d'une façon générale le filtre différence $n^{\text{ième}}$ comme la puissance $n^{\text{ième}}$ du filtre différence première, ce que l'on peut facilement vérifier pour $n = 3$ par exemple :

$$\Delta^3 x_t = \Delta^2 x_t - \Delta^2 x_{t-1} = (x_t - 2x_{t-1} - x_{t-2}) - (x_{t-1} - 2x_{t-2} - x_{t-3}) = x_t - 3x_{t-1} + 3x_{t-2} + x_{t-3}$$

$$\Delta^3 x_t = x_t - 3Bx_t + 3B^2x_t + B^3x_t = (1 - B)^3x_t$$

On a donc, d'une façon générale :

$$\Delta^n x_t = 1 - B^n x_t, \text{ avec } B^i x_t = x_{t-i} \quad \text{relation 433}$$

L'exemple numérique du [tableau 324](#) qui utilise 4 chroniques définies comme : $x_{1t} = 100$; $x_{2t} = 100 + 2t$; $x_{3t} = 100 + 2t + 0,1t^2$; $x_{4t} = 100 + 2t + 0,1t^2 + c_t$; avec $c_1 = c_5 = c_9 = 5$, $c_2 = c_6 = c_{10} = -2$, $c_3 = c_7 = c_{11} = -4$, $c_4 = c_8 = c_{12} = +1$ (chronique trimestrielle) illustre la propriété fondamentale de ce filtre différence d'ordre n : *ils transforment en une chronique de termes constants toute chronique correspondant à une évolution définie par un polynôme en t de degré inférieur ou égal à n .*

Cette propriété se démontre sans difficulté, par exemple pour $n = 2$, on a :

$$\Delta^2 x_t = x_t - 2x_{t-1} + x_{t-2}$$

TABLEAU 324
Illustration des propriétés des filtres « différences »

date	x_1				$\Delta x_1 = (1-B)x_t$				$\Delta^2 x_1 = (1-B)^2 x_t$			$\Delta^3 x_1 = (1-B)^3 x_t$	
	1	2	3	4	1	2	3	4	1 & 2	3	4	1, 2 & 3	4
1	100	102	102,1	107,1	-	-	-	-	-	-	-	-	-
2	100	104	104,4	102,4	0	2	2,3	-4,7	-	-	-	-	-
3	100	106	106,9	102,9	0	2	2,5	0,5	0	0,2	5,2	-	-
4	100	108	109,6	110,6	0	2	2,7	7,7	0	0,2	7,2	0	2
5	100	110	112,5	117,5	0	2	2,9	6,9	0	0,2	-0,8	0	-8
6	100	112	115,6	113,6	0	2	3,1	-3,9	0	0,2	-10,8	0	-10
7	100	114	118,9	114,9	0	2	3,3	1,3	0	0,2	5,2	0	16
8	100	116	122,4	123,4	0	2	3,5	8,5	0	0,2	7,2	0	2
9	100	118	126,1	131,1	0	2	3,7	7,7	0	0,2	-0,8	0	-8
10	100	120	130,0	128,0	0	2	3,9	-3,1	0	0,2	-10,8	0	-10
11	100	122	134,1	130,1	0	2	4,1	2,1	0	0,2	5,2	0	16
12	100	124	138,4	139,4	0	2	4,3	9,3	0	0,2	7,2	0	2

$$\begin{aligned}
 &= \{at^2 + bt + c\} - 2\{a(t-1)^2 + b(t-1) + c\} + \{a(t-2)^2 + b(t-2) + c\} \\
 &= \{at^2 - 2at^2 + at^2 + 4at - 4at - 2a + 4a\} + \{bt - 2bt + bt\} + \{c - 2c + c\} \\
 &= 2a
 \end{aligned}$$

Table des matières

La généralisation de l'opérateur B, $B^i \cdot x_t = x_{t-i}$, permet de définir d'autres classes de filtres différence, qui peuvent servir notamment à éliminer les fluctuations saisonnières. Si les données sont mensuelles et le cycle annuel, on utilisera :

$$x_t - x_{t-12} = (1 - B^{12})x_t$$

Index thématique

Dans l'exemple numérique du [tableau 324](#), les données étaient trimestrielles, et le cycle annuel; on doit donc utiliser comme filtre pour éliminer les fluctuations saisonnières (stables au cours du temps) le filtre suivant: $x_t - x_{t-4} = (1 - B^4)x_t$. L'application de ce filtre à la chronique x_4 préalablement transformée par le filtre d'ordre 2 redonne bien une chronique nulle. Mais on aurait pu tout aussi bien (voir [tableau 325, page 1064](#)) appliquer ce filtre à la chronique 4 préalablement à l'application du filtre différence d'ordre 2, car :

$$(1 - B)^2(1 - B^4)x_t = (1 - B^4)(1 - B)^2x_t = x_t - 2x_{t-1} + x_{t-2} + x_{t-4} - 2x_{t-5} + x_{t-6}$$

Ajoutons que lorsque les facteurs saisonniers suivent eux-mêmes une évolution tendancielle représentable par un polynôme en t de degré $m - 1$, on peut en appliquant à la chronique le filtre $(1 - B^4)^m x_t$ éliminer totalement l'effet saisonnier. L'élimination simultanée du trend et de la saisonnalité passera alors par le filtre $(1 - B^4)^m(1 - B)^n x_t$. Le [tableau 326 de la page 1064](#) illustre l'élimination de la saisonnalité et d'une tendance supposée linéaire dans notre exemple des ventes du rayon de Casimouth; le corrélogramme qui en résulte ([figure 248, page 1065](#)) montre que cette transformation semble avoir éliminé le trend et la saisonnalité.

II-5 Remarques générales sur l'utilisation des filtres

Deux points importants méritent d'être soulignés :

TABLEAU 325
Illustration de la commutativité des filtres « différence »

t	x_t	$(1-B^4)x_t$	$(1-B)^2(1-B^4)x_t$
1	107,1	-	-
2	102,4	-	-
3	102,9	-	-
4	110,6	-	-
5	117,5	10,4	-
6	113,6	11,2	-
7	114,9	12,0	0
8	123,4	12,8	0
9	131,1	13,6	0
10	128,0	14,4	0
11	130,1	15,2	0
12	139,4	16,0	0

TABLEAU 326
Application successive des filtres $(1-B^{12})$ et $(1-B)$ à la chronique des ventes de Casimouth (tableau 286 de la page 997)

t	x_t	$(1-B^{12})x_t$	$(1-B^{12})(1-B)x_t$	t	x_t	$(1-B^{12})x_t$	$(1-B^{12})(1-B)x_t$	t	x_t	$(1-B^{12})x_t$	$(1-B^{12})(1-B)x_t$	t	x_t	$(1-B^{12})x_t$	$(1-B^{12})(1-B)x_t$
1	705	-	-	22	762	-49	-194	43	626	-53	-222	64	846	154	25
2	653	-	-	23	695	-26	23	44	456	17	70	65	883	130	-24
3	713	-	-	24	680	-123	-97	45	757	29	12	66	811	47	-83
4	684	-	-	25	682	-149	-26	46	786	40	11	67	766	114	67
5	707	-	-	26	684	-81	68	47	778	90	50	68	584	90	-24
6	714	-	-	27	743	-72	9	48	762	19	-71	69	761	65	-25
7	684	-	-	28	701	-129	-57	49	719	30	11	70	863	121	56
8	422	-	-	29	641	-115	14	50	692	-49	-79	71	773	-21	-142
9	629	-	-	30	595	-216	-101	51	771	-44	5	72	751	-22	-1
10	811	-	-	31	679	-67	149	52	692	-27	17	73	739	-162	-140
11	721	-	-	32	439	-65	2	53	753	23	50	74	624	-191	-29
12	803	-	-	33	728	-46	19	54	764	0	-23	75	640	-260	-69
13	831	126	-	34	746	-16	30	55	652	26	26	76	672	-174	86
14	765	112	-14	35	688	-7	9	56	494	38	12	77	615	-268	-94
15	815	102	-10	36	743	63	70	57	696	-61	-99	78	638	-173	95
16	830	146	44	37	689	7	-56	58	742	-44	17	79	555	-211	-38
17	756	49	-97	38	741	57	50	59	794	16	60	80	372	-212	-1
18	811	97	48	39	815	72	15	60	773	11	-5	81	605	-156	56
19	746	62	-35	40	719	18	-54	61	901	182	171	82	615	-248	-92
20	504	82	20	41	730	89	71	62	815	123	-59	83	573	-200	48
21	774	145	63	42	764	169	80	63	900	129	6	84	674	-77	123

Table des matières

Index thématique

- tout d'abord l'utilisation des filtres linéaires (ou non linéaires) a pour conséquence inéluctable, et non voulue, de générer des oscillations systématiques; ce phénomène est connu sous le nom de l'**effet Slutzky-Yule**,
- le second point est la possibilité de juger par intervalle de confiance les résultats des filtres moyenne mobile, ou ceux du lissage exponentiel, si l'on peut raisonnablement postuler que les aléas suivent une loi donnée (la loi Normale étant bien sûr la loi «privilegiée»).

Le jugement par intervalle de confiance qui en découle permet d'une part de relativiser les prévisions, d'autre part, de détecter rapidement des changements de comportement.

FIGURE 248

Corrélogramme de la chronique des ventes de Casimouth après application successive des filtres $(1-B^{12})$ et $(1-B)$

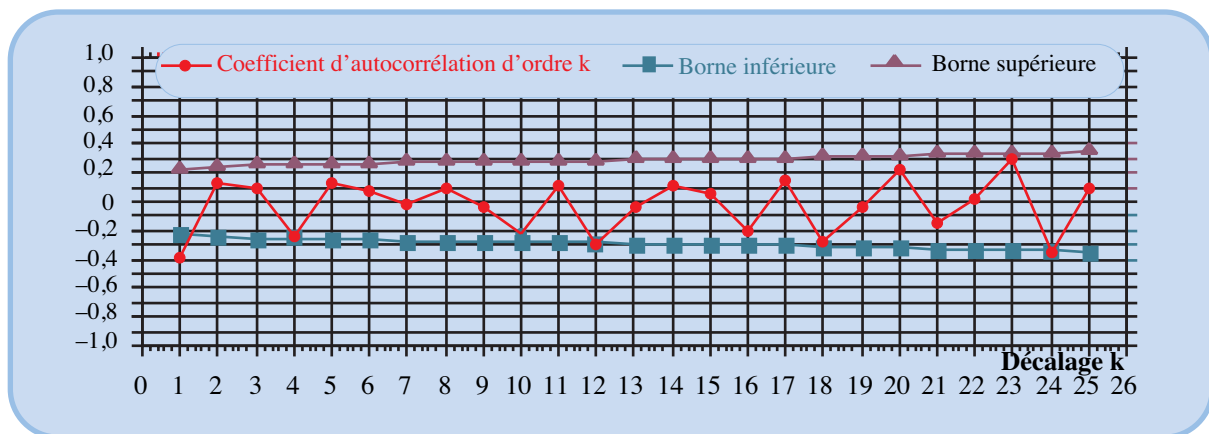


Table des matières

Index thématique

II-5.1 L'effet Slutzky-Yule

Les filtres génèrent des oscillations systématiques, ce que l'on met facilement en évidence en calculant le corrélogramme de la série filtrée. Prenons par exemple une chronique de type bruit blanc ($x_t = \varepsilon_t$). Compte tenu de la définition d'un filtre

linéaire $y_t = \sum_{i=1}^s a_i x_{t-r+i}$, (relation 394, page 1008) et des règles classiques de

calcul de la variance et covariance d'une somme pondérée de variables aléatoires indépendantes, on montre¹ aisément que :

$$\rho_j = \frac{\sum_{i=1}^{s-k} a_i \cdot a_{i+j}}{\sum_{i=1}^s a_i^2}, \text{ pour les chroniques type «bruit blanc»} \quad \text{relation 434}$$

Le corrélogramme théorique d'un filtre «moyenne mobile empirique sur 5 périodes» est ($a_i = 1/5$, pour tout i)

1. Voir par exemple Kendall (1973, [260]) p. 40-41.

$$\rho_1 = \frac{a_1 \cdot a_2 + a_2 \cdot a_3 + a_3 \cdot a_4 + a_4 \cdot a_5}{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 + a_5^2} = \frac{4/25}{5/25} = 0,8$$

$$\rho_2 = \frac{a_1 \cdot a_3 + a_2 \cdot a_4 + a_3 \cdot a_5}{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 + a_5^2} = \frac{3/25}{5/25} = 0,6$$

$$\rho_3 = \frac{a_1 \cdot a_4 + a_2 \cdot a_5}{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 + a_5^2} = \frac{2/25}{5/25} = 0,4$$

$$\rho_4 = \frac{a_1 \cdot a_5}{5/25} = 0,2$$

Illustrons numériquement cet effet Slutsky-Yule en calculant le corrélogramme de la chronique des moyennes mobiles centrées (sur 5 périodes) du [tableau 296 de la page 1014](#), calculées sur une simulation aléatoire d'une loi Normale de moyenne 167 et d'écart-type 50 (colonne 4 du [tableau 284 de la page 991](#)). Ce corrélogramme (voir [figure 249, page 1066](#), qui reprend aussi le graphique de gauche de la [figure 240 de la page 1015](#)) est assez éloigné du corrélogramme théorique établi à la page précédente. Ceci s'explique par le faible nombre de valeurs constituant l'échantillon et ce n'est que lorsque cet échantillon est très important que les estimations des coefficients d'autocorrélation ont des chances importantes d'être proches des valeurs théoriques. Cet exemple montre la grande difficulté qu'il y a à se faire une idée de l'impact concret de l'effet Slutsky-Yule.

FIGURE 249

Moyenne mobile de la chronique du [tableau 296](#) et corrélogramme de cette moyenne mobile

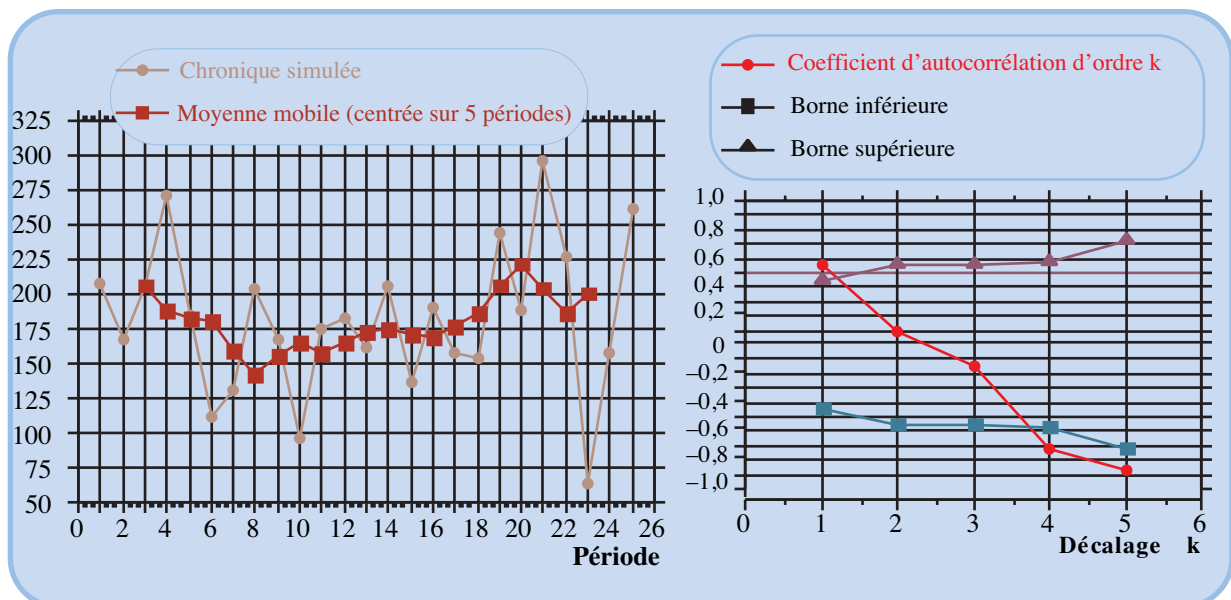


Table des matières

Index thématique

II-5.2 Le jugement par intervalle de confiance

Si l'on fait l'hypothèse, souvent vérifiée en pratique, que le terme résiduel est non seulement de type bruit blanc, mais également suit une loi Normale de moyenne nulle et d'écart type σ_ε on peut alors, d'une part, utiliser les résultats classiques de calcul de la variance d'une somme pondérée de variables aléatoires

indépendantes pour fournir un intervalle de confiance associé à une prévision ou à un paramètre quelconque et, d'autre part, juger de la stabilité des lois qui semblent régir l'évolution de la chronique.

II-5.2.1 Intervalle de confiance d'une prévision

Il n'est pas inutile, du moins lorsque la prévision porte sur une donnée importante, de compléter l'estimation ponctuelle fournie par le filtre linéaire, par un jugement sur la qualité de cette prévision, jugement s'appuyant sur un intervalle de confiance défini pour un coefficient de confiance judicieusement choisi.

Nous avons déjà illustré au § II-2.2.2.5, page 1042, l'utilisation des techniques d'intervalle de confiance d'une prévision et des paramètres d'une évolution tendancielle linéaire, aussi ne reviendrons-nous pas en détail sur ce point, car ces techniques se transposent sans difficulté lorsque le filtre utilisé n'est pas celui d'une moyenne mobile optimale au sens des moindres carrés (à ceci près que l'on utilisera la loi Normale à la place de la loi de Student, compte tenu de la difficulté de déterminer le nombre de degrés de liberté).

Quand on utilise un filtre empirique en moyenne mobile, on peut toujours, en partant de la [relation 409 de la page 1036](#) et d'une estimation de la variance de la composante aléatoire σ_ε^2 (qui correspond à la variance résiduelle dans la régression locale), calculer la variance du filtre y_t , et donc de la prévision qui lui est associée, ce qui permet de déterminer l'intervalle de confiance recherché. Si le filtre utilisé est du type lissage exponentiel, il suffit de partir des relations établies pour le lissage exponentiel simple ([relation 423 de la page 1049](#)) ou double ([relation 428 de la page 1054](#)) et d'une estimation de σ_ε^2 , variance de la composante aléatoire, pour pouvoir calculer un intervalle de confiance associé à une prévision, ou à un paramètre de la composante tendancielle linéaire.

Table des
matières

Index
thématique

Le seul problème pratique qui reste à résoudre est donc celui de l'estimation de σ_ε^2 . Deux techniques peuvent être utilisées, qui toutes deux partent de la différence entre la valeur observée et l'estimation à cette date des composantes certaines (tendancielle et cyclique).

II-5.2.1.1 Calcul direct.

La première solution est celle du calcul direct de cette variance résiduelle, mais, d'un point de vue opérationnel, cette méthode nécessite à la fois un stockage de données plus conséquent, et des calculs plus importants.

Reprenons l'exemple du lissage exponentiel simple du [tableau 316 \(page 1049\)](#). Le calcul direct de l'estimation de la variance résiduelle σ_ε^2 est effectué dans les 5 premières colonnes du [tableau 327](#).

L'estimation empirique que l'on retiendra de la variance résiduelle¹ est, puisque par hypothèse la composante aléatoire est d'espérance mathématique nulle : $13,60/6 = 2,27$, ce qui correspond à un écart-type de 1,50. La prévision ponctuelle faite à la période 6 pour la période 7 est $y_6 = 9,48$; l'intervalle de confiance à 95 % de cette prévision est donc $9,48 \pm 1,96 \times 1,50$, ce qui conduit à la fourchette

1. Rappelons que, sous sa forme usuelle de calcul, on définit la variance comme «la moyenne des carrés moins le carré de la moyenne» ; si la moyenne est nulle, le carré de la moyenne l'est aussi et la variance est alors égale à la moyenne des carrés.

TABLEAU 327
Calcul de la variance résiduelle dans l'utilisation de la technique de lissage exponentiel simple

t	x_t	\hat{x}_t	$(x_t - \hat{x}_t)$	$(x_t - \hat{x}_t)^2$	$ x_t - \hat{x}_t $	$0,3 x_t - \hat{x}_t $	$0,7\hat{\delta}_{t-1}$	$\hat{\delta}_t$
1	9	10,00	-1,00	1,00	1,00			1,00
2	11	9,70	1,30	1,69	1,30	0,39	0,70	1,09
3	12	10,09	1,91	3,65	1,91	0,57	0,76	1,34
4	9	10,67	-1,66	2,77	1,66	0,50	0,94	1,43
5	10	10,16	-0,16	0,03	0,16	0,05	1,00	1,05
6	8	10,11	-2,11	4,47	2,11	0,63	0,74	1,37
Σ				13,60	8,15			
$(\Sigma)/6$				2,27	1,36			

suivante: [6,53 – 12,43]. Ce choix, à titre d'illustration, d'un coefficient de confiance à 95 %, ne doit pas être généralisé automatiquement car bien souvent les conséquences économiques ne sont pas les mêmes dans le cas d'une sous-estimation et d'une surestimation, ce qui milite en faveur d'intervalles de confiance non symétriques par rapport à la prévision ponctuelle.

II-5.2.1.2 Utilisation de la moyenne des écarts absolus

Pour éviter d'effectuer des élévations aux carrés et de calculer une racine carrée, on peut partir de la moyenne $\bar{\delta}$ des écarts absolus $\delta_t = |x_t - \hat{x}_t|$, et utiliser le résultat analytique suivant, valable¹ pour la loi Normale:

$$\bar{\delta} = E(|X - \bar{x}|) = \sigma \sqrt{\frac{2}{\pi}} \rightarrow \sigma \cong 1,2533\bar{\delta} \quad \text{relation 435}$$

Le calcul de la moyenne des écarts absolus est effectué dans la colonne 6 du [tableau 327](#), d'où l'on tire: $\bar{\delta} = 1,36$ et $\sigma_\varepsilon = 1,70$. La valeur fournie par ce nouvel estimateur est légèrement différente de celle trouvée par le calcul direct, mais cette différence n'a rien de choquant car l'emploi de ces deux estimateurs ne donne de résultats identiques qu'asymptotiquement (c'est-à-dire, en pratique, sur de grands échantillons).

Lorsque le filtre linéaire utilisé est le lissage exponentiel, l'usage², non justifié sur le plan théorique, veut que l'on utilise également cette technique pour calculer l'estimation $\bar{\delta}$ faite à la date t de la moyenne des écarts absolus $\bar{\delta}$:

$$\bar{\delta}_t = \alpha(|x_t - \hat{x}_t|) + (1 - \alpha)\bar{\delta}_{t-1} \quad \text{relation 436}$$

Cette technique permet de bénéficier pleinement de l'un des avantages du lissage exponentiel, celui de l'économie de stockage de l'historique passé. Son application à notre exemple numérique (3 dernières colonnes du [tableau 327](#), [page 1068](#)) donne, à la date 6, une valeur de la moyenne lissée des écarts absolus égale

1. Voir Brown (1963, [70]), chapitre XX.

2. Voir Brown (1963, [70]), chapitre XX.

à 1,37, d'où l'on tire comme estimation de l'écart-type résiduel $\sigma_\varepsilon = 1,2533 \times 1,37 = 1,72$.

II-5.2.2 Modification de comportement d'une chronique

Le jugement par intervalle de confiance permet en particulier de décider, lorsqu'une (ou plusieurs) observation(s) consécutive(s) «sorte(nt)» de l'intervalle de confiance prévu, que le phénomène étudié n'obéit plus aux mêmes lois d'évolution. Lorsque l'étude du phénomène s'effectue par lissage exponentiel, il importe alors d'accroître les constantes de lissage afin de diminuer notablement, et pendant un certain nombre de périodes, le poids du passé; on parle alors de **technique de filtrage adaptatif**. L'appel à cette technique est hautement souhaitable lorsque l'on désire gérer automatiquement un très grand nombre de références¹.

Différentes techniques de détection de l'instabilité existent et se sont développées depuis les premiers travaux de Brown en la matière². La méthode proposée par Trigg et Leach³, caractéristique de cette approche, est l'une des plus utilisées du fait de sa simplicité (sans être pour autant l'une des plus efficaces du point de vue de la prévision). C'est pourquoi nous allons la présenter succinctement en partant du lissage exponentiel simple. Notons $e_t = (x_t - \hat{x}_t) = (x_t - y_{t-1})$ l'erreur de prévision faite pour la période t , et α_t le coefficient de lissage utilisé à la période t (ce coefficient peut varier au cours du temps, d'où l'indexation de α par la date t). Le filtre linéaire par la [relation 420 de la page 1048](#), s'écrit alors :

$$y_t = \alpha_t \cdot x_t + (1 - \alpha_t)y_{t-1} = y_{t-1} + \alpha_t \cdot e_t \quad \text{relation 437}$$

Introduisons maintenant :

- un coefficient de lissage β qui, lui, ne varie pas au cours du temps et prend habituellement une valeur assez basse (0,1 ou 0,2),
- l'erreur lissée $E_t = \beta \cdot e_t + (1 - \beta)E_{t-1}$ qui correspond à l'application du lissage exponentiel simple sur la chronique des erreurs de prévision,
- l'erreur absolue lissée: $A_t = \beta \cdot |e_t| + (1 - \beta)A_{t-1}$ qui correspond à l'application du lissage exponentiel simple sur la chronique des valeurs absolues d'erreurs de prévision.

Le signal d'alerte (*tracking signal*) est par définition le quotient E_t/A_t , dont la valeur est nécessairement comprise entre - 1 et + 1 (ces bornes ne sont atteintes que si les erreurs ont toujours été de même signe). Trigg et Leach proposent de retenir comme coefficient de lissage pour la période t , la valeur absolue du signal d'alerte, on aura donc :

$$\alpha_t = \frac{|E_t|}{A_t} \quad \text{relation 438}$$

Lorsqu'il y a des écarts systématiques consécutifs, cette technique conduit à un coefficient de lissage proche de l'unité, et donc à prendre comme prévision la

1. Voir l'article de Everette et Gardner (1983, [141]).

2. Voir Brown (1963, [70]), chapitre XX; Johnson et Montgomery (1976, [246]) chapitre VIII; Makridakis et Wheelwright (1978, [290]) chapitre III, et Lewandowski (1979, [281]) p. 191-209.

3. Voir Trigg et Leach (1967, [423]). Cet article présente également une technique de filtrage adaptatif pour le cas du lissage exponentiel double.

dernière valeur observée. S’il y a compensation entre écarts positifs et négatifs récents, on aura tendance à prendre comme prévision une valeur proche de la dernière prévision effectuée. Cette technique pourra être utilisée chaque fois que l’on voudra modifier automatiquement la constante de lissage d’un modèle auto-projectif.

Les prévisions que l’on effectue à partir de la dernière observation x_t sont les suivantes, pour le modèle constant.

$$\hat{x}_{t+k} = \hat{x}_{t+1} = y_t = \alpha_t x_t + (1 - \alpha_t) y_{t-1} = \alpha_t x_t + (1 - \alpha_t) \hat{x}_t$$

$$y_t = \alpha_t x_t + (1 - \alpha_t) y_{t-1} \quad ; \quad e_t = x_t - \hat{x}_t$$

$$\alpha_t = \frac{|E_t|}{A_t} ; E_t = \beta e_t + (1 - \beta) E_{t-1} ; A_t = \beta |e_t| + (1 - \beta) A_{t-1}$$

relations 439

L’utilisation du modèle adaptatif est illustrée par l’exemple du **tableau 328**.

TABLEAU 328
Exemple de lissage exponentiel simple adaptatif (Trigg & Leach)

	x_t	y_{t-1}	$e_t = x_t - y_{t-1}$	$E_t = 0,2e_t + 0,8e_{t-1}$	$A_t = 0,2 e_t + 0,8e_{t-1}$	$\alpha_t = E_t /A_t$	y_t
Jan 1997	55	0,00	0,00	0,00	0,00	0,20	55,00
Fév 1997	54	55,00	- 1,00	- 1,00	1,00	0,20	54,80
Mar 1997	55	54,80	0,20	- 0,76	0,84	0,20	54,84
Avr 1997	50	54,84	- 4,84	- 1,58	1,64	0,96	50,19
Mai 1997	51	50,19	0,81	- 1,10	1,47	0,75	50,79
Jun 1997	49	50,79	- 1,79	- 1,24	1,54	0,80	49,35
Jul 1997	49	49,35	- 0,35	- 1,06	1,30	0,82	49,06
Août 1997	49	49,06	- 0,06	- 0,86	1,05	0,82	49,01
Sep 1997	58	49,01	8,99	1,11	2,64	0,42	52,79
Oct 1997	41	52,79	- 11,79	- 1,47	4,47	0,33	48,91
Nov 1997	56	48,91	7,09	0,24	4,99	0,05	49,25
Déc 1997	45	49,25	- 4,25	- 0,66	4,85	0,14	48,68
Jan 1998	42	48,68	- 6,68	- 1,86	5,21	0,36	46,29
Fév 1998	42	46,29	- 4,29	- 2,35	5,03	0,47	44,29
Mar 1998	45	44,29	0,71	- 1,74	4,16	0,42	44,59
Avr 1998	49	44,59	4,41	- 0,51	4,21	0,12	45,11
Mai 1998	40	45,11	- 5,11	- 1,43	4,39	0,32	43,45
Jun 1998	42	43,45	- 1,45	- 1,43	3,81	0,38	42,91
Jul 1998	48	42,91	5,09	- 0,13	4,06	0,03	43,07
Août 1998	41	43,07	- 2,07	- 0,52	3,66	0,14	42,78
Sep 1998	41	42,78	- 1,78	- 0,77	3,29	0,23	42,36
Oct 1998	54	42,36	11,64	1,71	4,96	0,35	46,39
Nov 1998	38	46,39	- 8,39	- 0,31	5,64	0,05	45,93
Déc 1998	40	45,93	- 5,93	- 1,43	5,70	0,25	44,44
Jan 1999	43	44,44	- 1,44	- 1,43	4,85	0,30	44,02
Fév 1999	47	44,02	2,98	- 0,55	4,48	0,12	44,38
Mar 1999	33	44,38	- 11,38	- 2,72	5,86	0,46	39,10
Avr 1999	43	39,10	3,90	- 1,39	5,46	0,26	40,10
Mai 1999	45	40,10	4,90	- 0,13	5,35	0,03	40,22
Jun 1999	30	40,22	- 10,22	- 2,15	6,33	0,34	36,74
Jul 1999	29	36,74	- 7,74	- 3,27	6,61	0,49	32,91

Table des matières

Index thématique

TABLEAU 328
Exemple de lissage exponentiel simple adaptatif (Trigg & Leach)

	x_t	y_{t-1}	$e_t = x_t - y_{t-1}$	$E_t = 0,2e_t + 0,8e_{t-1}$	$A_t = 0,2 e_t + 0,8e_{t-1}$	$\alpha_t = E_t /A_t$	y_t
Août 1999	37	32,91	4,09	- 1,80	6,11	0,29	34,12
Sep 1999	33	34,12	- 1,12	- 1,66	5,11	0,33	33,75
Oct 1999	34	33,75	0,25	- 1,28	4,14	0,31	33,83
Nov 1999	32	33,83	- 1,83	- 1,39	3,67	0,38	33,14
Déc 1999	27	33,14	- 6,14	- 2,34	4,17	0,56	29,69
Jan 2000	33	29,69	3,31	- 1,21	4,00	0,30	30,69
Fév 2000	29	30,69	- 1,69	- 1,31	3,53	0,37	30,07
Mar 2000	32	30,07	1,93	- 0,66	3,21	0,20	30,46
Avr 2000	53	30,46	22,54	3,98	7,08	0,56	43,14
Mai 2000	37	43,14	- 6,14	1,96	6,89	0,28	41,39
Jun 2000	34	41,39	- 7,39	0,09	6,99	0,01	41,30
Jul 2000	27	41,30	- 14,30	- 2,79	8,45	0,33	36,58
Août 2000	33	36,58	- 3,58	- 2,95	7,48	0,39	35,17
Sep 2000	31	35,17	- 4,17	- 3,19	6,82	0,47	33,22
Oct 2000	26	33,22	- 7,22	- 4,00	6,90	0,58	29,03
Nov 2000	26	29,03	- 3,03	- 3,80	6,12	0,62	27,15

SECTION III LA PRÉVISION À PARTIR DE L'HISTORIQUE COMPLET

Table des matières

On examinera successivement les approches fondées sur la méthode des moindres carrés qui « marchent bien » si la composante aléatoire suit un processus purement aléatoire (§ III-1), puis les méthodes « type Box et Jenkins » qui permettent de traiter les chroniques dont la composante aléatoire suit un processus stationnaire, mais ne permettent pas d'apprécier la composante cyclique (§ III-2, page 1083). Dans un dernier paragraphe (§ III-3, page 1101), on abordera une généralisation des deux approches précédentes.

Index thématique

III-1 Les techniques de prévision basées sur les moindres carrés

Deux familles d'approche sont envisageables : dans la première, on estime simultanément les composantes tendancielle et cycliques, et la seconde est une extension des techniques de régression multiple aux processus autorégressifs.

III-1.1 Estimation simultanée du trend et des facteurs saisonniers par la méthode des moindres carrés

Deux approches donnant des résultats identiques, parce que fondées sur la même démarche méthodologique, celle des moindres carrés, sont disponibles :

- La première présente l'avantage de pouvoir faire l'objet d'un traitement manuel, parce qu'elle utilise des résultats analytiques relativement simples. Mais cette simplicité est due à une restriction sur le type de chronique traitée : celle-ci doit comporter nécessairement le même nombre d'observations pour chaque période constitutive d'un cycle, c'est-à-dire si le cycle est annuel, et les observations mensuelles, il devra y avoir pour chaque mois le même nombre d'années d'observation (par exemple si la chronique débute en mars 1994, la dernière observation devra porter sur un mois de février d'une



année postérieure à 1994). L'usage veut que de telles chroniques soient présentées dans des tableaux de Buys-Ballot (définis page 996); on reprendra l'exemple de la chronique des ventes du rayon « journaux » du Casimouth d'Alphaville (voir tableau de Buys-Ballot page 997). On qualifiera cette première technique d'« estimation simultanée du trend et des facteurs saisonniers à partir des moindres carrés sur les tables de Buys-Ballot ».

- La seconde approche consiste à utiliser des programmes de régression multiple en faisant appel à des variables indicatrices pour mesurer la saisonnalité. L'inconvénient de cette technique est de nécessiter l'emploi de programmes de régression linéaire multiple, mais ceux-ci sont maintenant largement disponibles, y compris sur tableur¹. Cette approche présente l'avantage de permettre de juger par intervalle de confiance les paramètres d'évolution tendancielle et les facteurs saisonniers, à partir de renseignements classiquement fournis par tous ces programmes de régression multiple. Les programmes spécialisés calculent en outre la statistique de Durbin-Watson (voir page 1079) qui permet de juger si l'hypothèse d'indépendance des résidus est acceptable ou non. Rappelons dans ce dernier cas que les estimations calculées pour les différents paramètres sont biaisées et qu'en conséquence on ne peut se fier aux résultats obtenus.

Avant de présenter ces techniques, introduisons les hypothèses sous-jacentes de ces modèles.

- a) Tout d'abord, il y a implicitement unicité des lois d'évolution (tant tendancielle que saisonnières) du phénomène étudié; toute prévision basée sur les paramètres obtenus repose également sur cette hypothèse. Sur ce point, cette approche diffère fondamentalement des approches du modèle Holt-Winters (cf. § II-3.3, page 1056) qui s'adaptent sans problème à des modifications de ces caractéristiques structurelles.
- b) L'évolution tendancielle est linéaire ($x_t = a_t + b$), mais en réalité on peut substituer à x_t toute transformation monotone, la plus usitée étant la transformation logarithmique, qui permet d'étudier les phénomènes à évolution exponentielle.
- c) Le mouvement saisonnier c_t est rigoureusement périodique, aussi le notera-t-on c_j , j variant de 1 à m , m étant le nombre de périodes dans un cycle (par exemple $m = 12$ si le cycle est annuel et les observations mensuelles).
- d) Le phénomène étudié subit en outre une perturbation aléatoire et dont la nature est de type bruit blanc (voir page 990).
- e) Les trois composantes jouent additivement (voir § I-2.4, page 994), ce qui conduit au modèle de base :

$$x_t = (a_t + b) + c_j + \varepsilon_t \quad (\text{modèle additif}) \quad \text{relation 440}$$

qui peut être équivalent à un modèle multiplicatif après transformation logarithmique² de certaines variables puisque la liaison linéaire porte sur les paramètres et non sur les variables: $\text{Log}(x_t) = a_t + b + C_j + \varepsilon_t$, avec $a = \text{Log}(1$

1. Sous Excel, par exemple, ce programme se trouve dans « Utilitaire d'analyse » du menu de l'option « Outils » de la barre de menu.

2. Voir, par exemple, Giard (1995, [182]), chapitre VI, tableau de synthèse du § I.3.

+ r), où r est un taux de croissance instantané¹; $b = \text{Log}(x_0)$; $C_j = \text{Log}(c_j)$, c'est-à-dire que c_j est un coefficient multiplicatif saisonnier; et enfin ε_t , la perturbation aléatoire de type bruit blanc pouvant encore s'écrire $\text{Log}(\eta_t)$, le modèle multiplicatif devient:

$$x_t = x_0(1+r)^t \cdot c_j \cdot \eta_t \quad (\text{modèle multiplicatif}) \quad \text{relation 441}$$

- f) Une hypothèse supplémentaire relative aux facteurs saisonniers est indispensable dans l'approche des moindres carrés sur les tables de Buys-Ballot, sans être nécessaire dans l'approche par régression multiple. Elle expliquera une différence de résultats numériques obtenus par les 2 techniques, mais ces résultats sont parfaitement équivalents, comme on le montrera. Cette hypothèse relève de l'application du principe de conservation des aires décrit par les relations 383 et 384 de la page 995. On peut justifier maintenant la relation 384 qui est en fait une application de la relation 383 après transformation

$$\text{logarithmique: } \sum_{j=1}^m C_j = \sum_{j=1}^m \text{Log} c_j = 0 \rightarrow \prod_{j=1}^m c_j = e^0 = 1.$$

III-1.1.1 Estimation simultanée du trend et de la composante saisonnière par les moindres carrés sur table de Buys-Ballot

Si l'on note:

- n le nombre de cycles possédés dans la chronique (= nombre d'années par exemple),
- m, le nombre de périodes constitutives du cycle (m = 12 mois si les observations sont mensuelles et le cycle annuel),
- i, l'indice repérant le cycle,
- j, l'indice repérant la période dans le cycle,

La date t la date correspondant au mois j de l'année i peut encore s'écrire:

$$t = m(i-1) + j$$

et la valeur théorique correspondant à x_t sera:

$$\hat{x}_t = a + b + c_j = a\{m(i-1) + j\} + b + c_j$$

que l'on peut encore écrire en posant $b_j = b + c_j$:

$$\hat{x}_t = a\{m(i-1) + j\} + b_j, \text{ avec } b_j = b + c_j \quad \text{relation 442}$$

L'application de la méthode des moindres carrés consiste à chercher les valeurs des m facteurs saisonniers b_j , ainsi que celle de l'accroissement moyen mensuel a, qui soit tel que la variance résiduelle soit minimale, c'est-à-dire que l'on ait:

$$\sum_t (x_t - \hat{x}_t)^2 = \sum_t \sum_j \{x_{ij} - a(m(i-1) + j) + b_j\}^2 \text{ minimum}$$

Après quelques calculs², on trouve la solution analytique de la relation 443, page 1074:

1. Voir, par exemple, Giard (1995, [182]), chapitre VI, § I.3.11.

2. Voir Calot (1973, [82]), p. 359-363.



$$\begin{aligned}
 a &= \frac{12}{nm(n^2-1)} \left[\frac{1}{m} \sum_{i=1}^n i \sum_{j=1}^m x_{ij} - \frac{n+1}{2m} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m x_{ij} \right] \\
 b &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \frac{x_{ij}}{nm} - a \frac{nm+1}{2} \\
 c_j &= \sum_{i=1}^n \frac{x_{ij}}{n} - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \frac{x_{ij}}{nm} - a \left(j - \frac{m+1}{2} \right)
 \end{aligned}$$

relations 443

L'application de ces relations 443 à la chronique des ventes du rayon de ventes de journaux du Casimouth d'Alphaville donne les résultats suivants pour le modèle additif:

$$\begin{aligned}
 \sum_{i=1}^7 \sum_{j=1}^{12} x_{ij} &= 5942; \quad \sum_{i=1}^7 x_{i1} = 5266; \quad \sum_{i=1}^7 x_{i2} = 4974; \dots; \\
 \sum_{i=1}^{12} x_{1j} &= 8246; \quad \sum_{i=1}^{12} x_{2j} = 8969; \dots; \\
 \frac{\sum_{i=1}^7 i \sum_{j=1}^{12} x_{ij}}{12} &= \frac{1 \times 8246 + 2 \times 8969 + 3 \times 8069 + 4 \times 8623 + 5 \times 8542 + 6 \times 9654 + 7 \times 7322}{12} \\
 &= 19730,92
 \end{aligned}$$

Table des matières

Index thématique

D'où:

$$\begin{aligned}
 a &= \frac{12}{7 \times 12(7 \times 7 - 1)} \left(19731 - \frac{7+1}{2 \times 12} 59425 \right) = -0,23041, \\
 b &= \frac{59425}{7 \times 12} - \left(-0,23041 \frac{7 \times 12 + 1}{2} \right) = 717,23, \\
 c_1 &= \frac{5266}{7} - \frac{59425}{7 \times 12} - (-0,23041) \left(1 - \frac{12+1}{2} \right) = 43,578, \text{ etc. (voir tableau 329)}
 \end{aligned}$$

TABLEAU 329
Composantes saisonnières

Modèle	Janvier	Février	Mars	Avril	Mai	Juin	Juillet	Août	Septembre	Octobre	Novembre	Décembre
additif	43,58	2,09	62,75	26,84	18,64	20,59	- 34,75	- 239,81	0,28	54,08	11,03	34,68
multiplicatif†	0,06643	0,01096	0,09165	0,04523	0,03196	0,03488	- 0,04305	- 0,41075	0,00893	0,08176	0,02306	0,05903

†. Coefficients saisonniers sur les données logarithmiques



TABLEAU 330
Ventes estimées par le modèle additif des moindres carrés.

	Janvier	Février	Mars	Avril	Mai	Juin	Juillet	Août	Septembre	Octobre	Novembre	Décembre
1994	761	719	779	743	735	736	681	476	715	769	726	749
1995	758	716	777	740	732	734	678	473	713	766	723	746
1996	755	713	774	738	729	731	675	470	710	763	720	744
1997	752	711	771	735	726	728	673	467	707	761	717	741
1998	750	708	768	732	724	725	670	465	704	758	715	738
1999	747	705	765	729	721	723	667	462	702	755	712	735
2000	744	702	763	727	718	720	664	459	699	752	709	733

TABLEAU 331
Résidus $\hat{x}_t - x_t$ du modèle additif des moindres carrés

	Janvier	Février	Mars	Avril	Mai	Juin	Juillet	Août	Septembre	Octobre	Novembre	Décembre
1994	55,6	65,9	66,3	59,2	27,7	22,4	- 3,1	53,6	86,4	- 42,0	4,7	- 53,8
1995	- 73,2	- 48,9	- 38,5	- 89,6	- 24,0	- 77,3	- 67,9	- 31,2	- 61,3	4,2	28,0	66,4
1996	73,1	29,3	30,8	36,6	88,2	135,9	- 3,7	31,1	- 18,1	17,5	32,2	0,6
1997	63,3	- 30,4	- 44,0	15,9	- 3,6	- 35,9	46,6	11,3	- 49,9	- 25,3	- 60,6	- 21,1
1998	30,5	15,8	- 2,8	40,1	- 29,3	- 38,6	17,8	- 29,5	8,4	15,9	- 79,3	- 34,9
1999	- 154,2	- 110,0	- 134,5	- 116,7	- 162,1	- 88,4	- 99,0	- 122,2	- 59,4	- 107,8	- 61,1	- 15,7
2000	5,0	78,3	122,7	54,6	103,1	81,8	109,3	87,0	93,8	137,4	136,1	58,6

Table des matières

Index thématique

TABLEAU 332
Ventes estimées par le modèle multiplicatif des moindres carrés

	Janvier	Février	Mars	Avril	Mai	Juin	Juillet	Août	Septembre	Octobre	Novembre	Décembre
1994	55,6	65,9	66,3	59,2	27,7	22,4	- 3,1	53,6	86,4	- 42,0	4,7	- 53,8
1995	- 73,2	- 48,9	- 38,5	- 89,6	- 24,0	- 77,3	- 67,9	- 31,2	- 61,3	4,2	28,0	66,4
1996	73,1	29,3	30,8	36,6	88,2	135,9	- 3,7	31,1	- 18,1	17,5	32,2	0,6
1997	63,3	- 30,4	- 44,0	15,9	- 3,6	- 35,9	46,6	11,3	- 49,9	- 25,3	- 60,6	- 21,1
1998	30,5	15,8	- 2,8	40,1	- 29,3	- 38,6	17,8	- 29,5	8,4	15,9	- 79,3	- 34,9
1999	- 154,2	- 110,0	- 134,5	- 116,7	- 162,1	- 88,4	- 99,0	- 122,2	- 59,4	- 107,8	- 61,1	- 15,7
2000	5,0	78,3	122,7	54,6	103,1	81,8	109,3	87,0	93,8	137,4	136,1	58,6

Les tableaux 330 et 332 fournissent les valeurs estimées par les deux modèles et les figures 250 et 251 comparent les ventes observées et estimées. On remarque que les modèles additifs et multiplicatifs donnent des résultats très voisins, ce qui

ne saurait surprendre compte tenu de la faiblesse du trend (écarts-types résiduels respectivement égaux à 68,64 et 68,75). Un certain nombre de coefficients sont vraisemblablement non significatifs, ce que l'on ne pourra vérifier qu'avec d'autres méthodes (cf. § III-1.1.2, page 1076, et § III-3, page 1101) Indiquons dès maintenant que l'examen des corrélogrammes de la chronique des résidus du modèle additif et du modèle multiplicatif indique que les résidus sont autocorrélés (voir figures 252 et 253, page 1079). L'hypothèse d de la page 1072 n'est donc pas satisfaite, et les estimations trouvées sont biaisées. Nous verrons avec le modèle Armax (§ III-3, page 1101) comment résoudre correctement ce délicat problème.

FIGURE 250

Ventes estimées par le modèle additif des moindres carrés

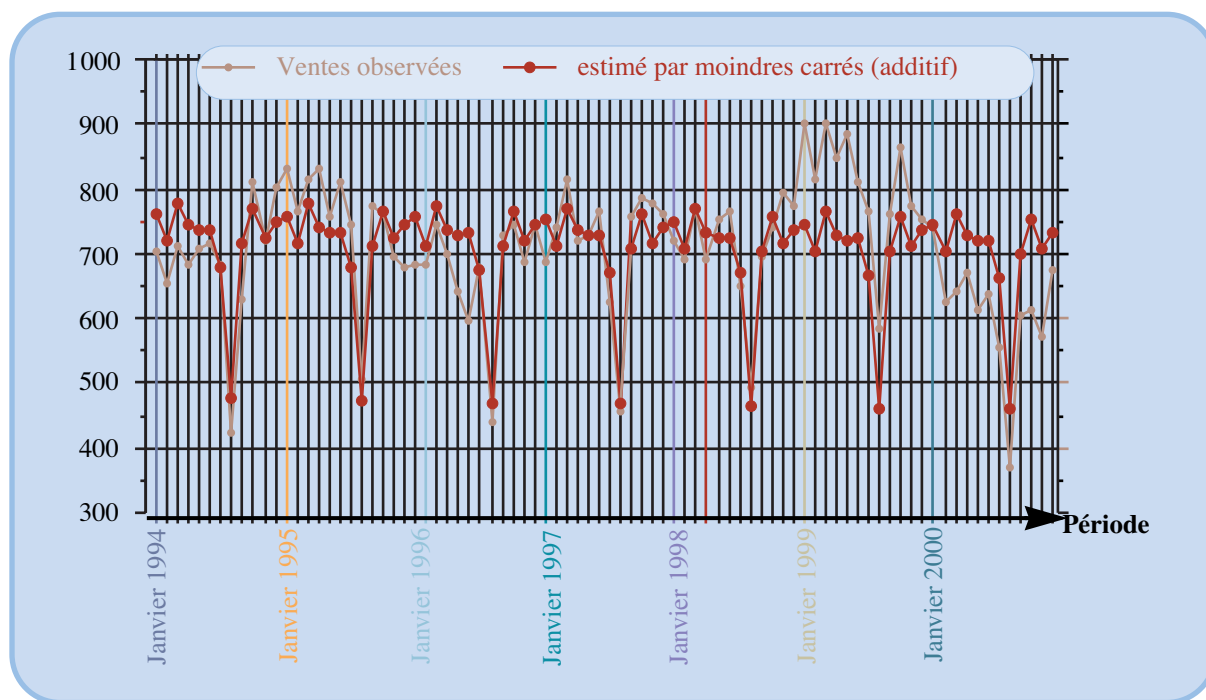


Table des matières

Index thématique

III-1.1.2 Estimation simultanée du trend et de la composante saisonnière par la régression multiple

L'utilisation d'un programme de régression nécessite la définition de 11 variables indicatrices d_j , j variant de 1 à 11, si la saisonnalité est annuelle pour une chronique mensuelle, et d'une façon générale on aura $m - 1$ variables indicatrices si le cycle étudié comporte m périodes. Ces variables indicatrices¹ ne peuvent prendre que les valeurs 0 ou 1, et l'on n'aura jamais à la fois pour une période t donnée plus d'une variable indicatrice à ne pas être nulle. On conviendra d'avoir $d_1 = 1$ uniquement lorsque la période t correspond à un mois de janvier, d'avoir $d_2 = 1$ uniquement lorsque la période t correspond à un mois de février, etc. Lorsque la période t correspond à un mois de décembre, tous les d_j sont nuls. Si l'on prend l'exemple de la chronique des ventes du rayon de Casimouth, les

1. On peut utiliser les variables indicatrices pour éliminer des perturbations exceptionnelles (grève prolongée) en créant autant de variables indicatrices que de perturbations à éliminer, chaque variable ne valant 1 que pour les seules périodes où la perturbation existe, et 0 dans les autres cas. Ajoutons que l'utilisation simultanée de variables quantitatives et de variables indicatrices en variables explicatives de régression multiple est connue sous le nom d'analyse de la covariance.

FIGURE 251
Ventes estimées par le modèle multiplicatif des moindres carrés

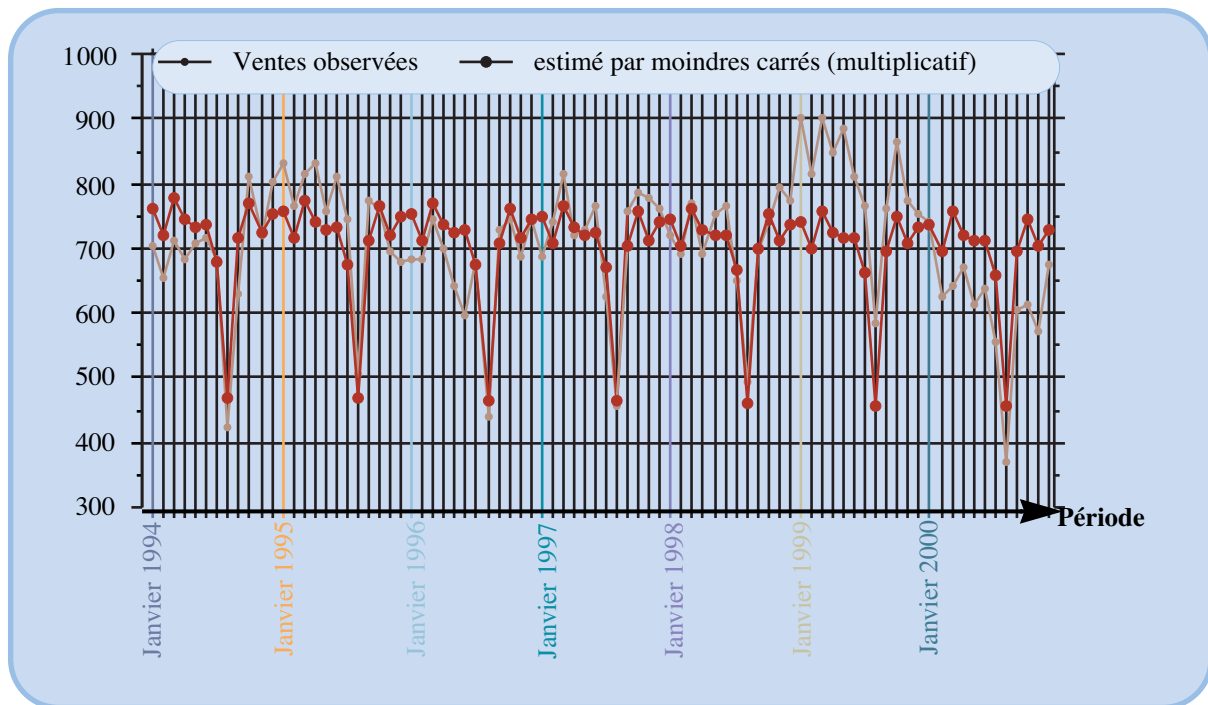


Table des matières

données à utiliser sont celles du [tableau 333 de la page 1078](#) (qui se limite aux 25 premières observations).

L'équation de régression est la suivante :

$$x_t = at + b + c_1d_1 + c_2d_2 + c_3d_3 + c_4d_4 + c_5d_5 + c_6d_6 + c_7d_7 + c_8d_8 + c_9d_9 + c_{10}d_{10} + c_{11}d_{11}$$

Index thématique

Pour une période t qui est un multiple entier de 12, tous les d_j sont nuls, et donc la constante b s'interprète comme la *constante de trend classique modulée par la composante saisonnière du mois de décembre*. Pour les autres périodes t , un seul d_j n'est pas nul, le coefficient c_j viendra donc moduler b , c'est-à-dire le terme du mois de décembre. Comme vous pouvez le constater, la référence implicite au mois de décembre a rendu inutile l'utilisation du principe de conservation des aires. Cependant, si l'on avait introduit dans l'équation de régression un $c_{12}d_{12}$, une telle hypothèse aurait été rendue nécessaire pour avoir une constante de référence et pouvoir calculer les c_j , b prenant immédiatement la valeur de cette constante. L'introduction de ce $c_{12}d_{12}$ n'amènerait donc rien, bien au contraire parce que l'indétermination qui en résulterait (problème de la constante de référence) se traduirait mathématiquement par la liaison linéaire suivante: $\sum_{j=1}^{12} d_j = 1$, liaison qui ne permet pas d'utiliser la régression multiple (car elle rend singulière la matrice des variances-covariances).

Les résultats trouvés sont donnés dans le [tableau 334](#). Il faut y ajouter: $b = 751,92$ et $\hat{p}^2 = 0,481$ ($\hat{p} = 0,694$).

TABLEAU 333
Données de la régression multiple « saisonnière »

Variable expliquée x_t	Variables explicatives											
	t	d_1	d_2	d_3	d_4	d_5	d_6	d_7	d_8	d_9	d_{10}	d_{11}
705	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
653	2	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
713	3	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
684	4	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
707	5	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0
714	6	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
684	7	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0
422	8	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0
629	9	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0
811	10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0
721	11	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
803	12	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
831	13	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
765	14	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
815	15	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
830	16	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
756	17	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0
811	18	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
746	19	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0
504	20	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0
774	21	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0
762	22	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0
695	23	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
680	24	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
682	25	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
...

Table des matières

Index thématique

Ces résultats sont compatibles avec ceux trouvés au § III-1.1.1, page 1073. Par exemple, pour le mois de janvier, on trouvait comme ordonnée à l'origine (pour la même pente): $b + c_1 = 717,23 + 43,578 = 760,81$, qui est bien égal à ce que l'on vient d'obtenir: $b + c_1 = 751,92 + 8,894 = 760,81$

L'intérêt de l'utilisation de programme standard de régression multiple apparaît dans la dernière colonne du tableau 334 de la page 1080, à condition toutefois que l'hypothèse que les perturbations aléatoires soient du type bruit blanc soit fondée. Il semblerait que seul le coefficient saisonnier du mois d'août soit nettement significatif, et sans doute celui du mois de juillet. Aucun des autres coefficients, y compris celui du trend, ne semble significatif.

L'analyse des corrélogrammes des résidus (voir figures 252 et 253) montre que l'hypothèse de résidus purement aléatoires est peu plausible. Le test de Durbin-Watson¹ de l'indépendance des résidus successifs est asymptotiquement équivalent² à un test sur le coefficient d'autocorrélation d'ordre 1.

FIGURE 252
Corrélogramme des résidus du modèle additif des moindres carrés

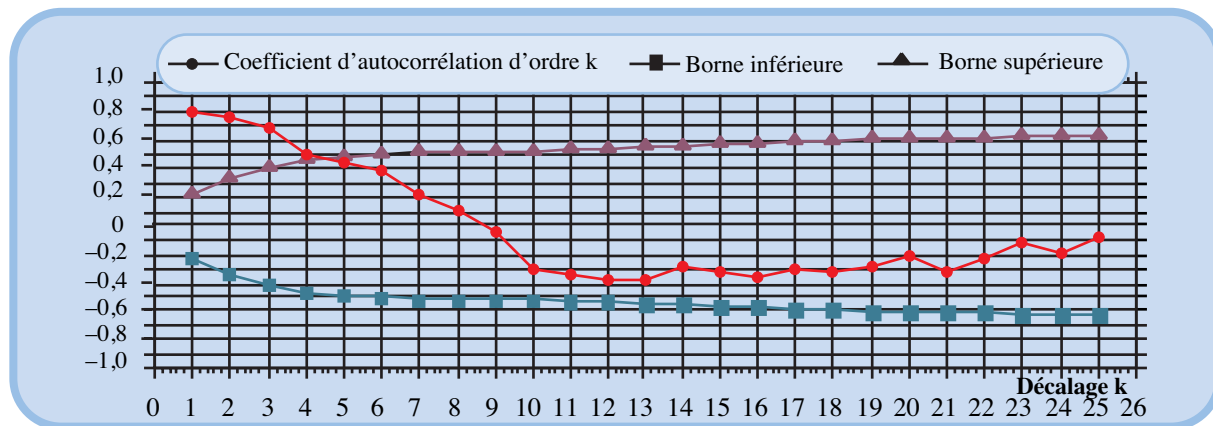


FIGURE 253
Corrélogramme des résidus du modèle multiplicatif des moindres carrés

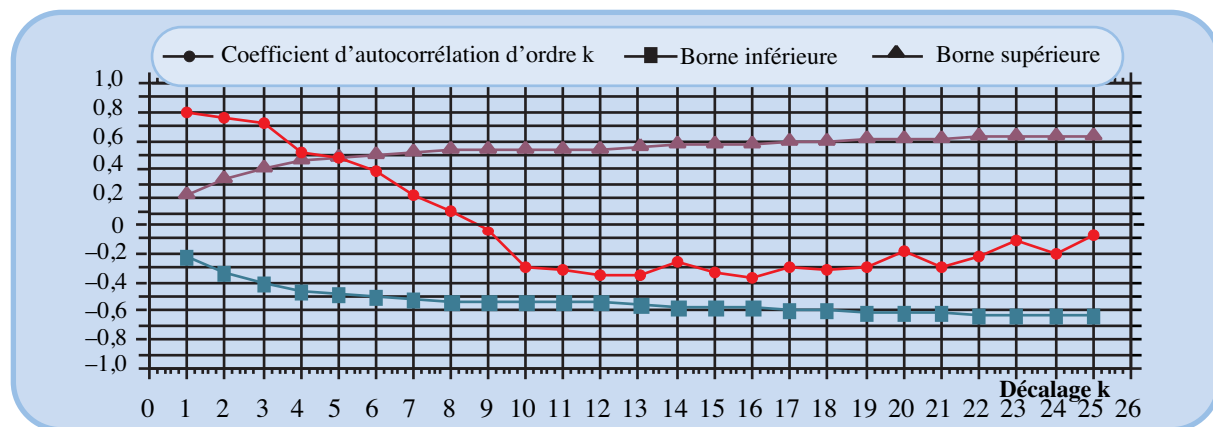


Table des matières

Index thématique

Dans ce test, qui suppose que les variables explicatives sont certaines, on calcule à partir des n résidus e_t de la régression multiple, l'indicateur statistique

suivant (noté souvent DW): $d = \left(\sum_{t=2}^n (e_t - e_{t-1})^2 \right) / \left(\sum_{t=1}^n e_t^2 \right)$ que l'on compare alors

à des valeurs d_{inf} et d_{sup} (voir [tableau 335, page 1081](#)¹) pour accepter ou rejeter l'hypothèse d'indépendance en utilisant le schéma de principe de la [figure 254, page 1080](#), où les zones hachurées correspondent à des plages de valeurs où l'on ne peut raisonnablement conclure. La valeur calculée pour cet indicateur statistique de Durbin-Waston est dans notre exemple: $d = 0,50923$. Mais, malheureusement les tables n'existent pas pour un nombre de variables explicatives supérieur à 5, or, dans notre exemple, c'est à 12 variables explicatives que l'on fait appel (le

1. Note de la page précédente. Voir Chatfield (1996, [91]), p. 77-78 où il aborde également d'autres tests.

2. Note de la page précédente. $d = \left(\sum_{t=2}^n e_t^2 + \sum_{t=2}^n e_{t-1}^2 - 2 \sum_{t=1}^n e_t \cdot e_{t-1} \right) / \left(\sum_{t=1}^n e_t^2 \right) \approx 2(1 - \rho_1)$

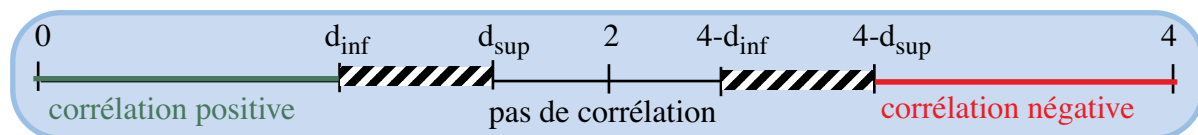
1. La table de Durbin-Watson, au risque de 1% peut être trouvée dans Giard (1995, [182]).

TABLEAU 334
Résultats de la régression saisonnière

Variabes	Coefficient	Écart-type du coefficient	Coefficient/écart-type
t	-0,23041	0,34429	-0,67885
d_1	8,89410	40,65712	0,22191
d_2	-32,58977	40,62649	0,81372
d_3	28,06918	40,59877	0,70133
d_4	-7,84325	40,57394	-0,19609
d_5	-16,04141	40,55202	-0,40127
d_6	-14,09673	40,53302	-0,35279
d_7	-69,43774	40,51693	-1,73846
d_8	-274,49292	40,50376	-6,87449
d_9	-34,40550	40,49352	-0,86188
d_{10}	19,39632	40,48520	0,48598
d_{11}	-23,65897	40,48181	-0,59284

temps + 11 variables indicatrices). Des approximations existent¹, mais leur mise en œuvre sans être aussi compliquée que le calcul des tables de Durbin-Watson, nécessite de nombreux calculs.

FIGURE 254
Principe d'utilisation du test de Durbin Watson



On se contentera donc ici d'utiliser un test sur le coefficient d'autocorrélation d'ordre 1, bien que ce test soit moins puissant que celui de Durbin et Watson². Les corrélogrammes de la page précédente donnent une estimation $\hat{\rho}_1$ de l'ordre de 0,8, ce qui est très nettement extérieure à l'intervalle de confiance (au coefficient de confiance de 95%), permettant de rejeter l'hypothèse d'indépendance des résidus.

Dès lors, les conclusions formulées sur le caractère non significatif de la plupart des coefficients de régression ne sont peut-être pas fondées, à cause des biais introduits dans les différentes estimations par le non-respect de perturbations aléatoires du type bruit blanc. On verra ce qu'il en est au § III-3, page 1101.

1. Voir Fuller (1976, [163]), p. 400-402 pour une approximation par une loi de Student et Seber (1976, [378]) p. 166-169 pour une approximation par une loi Bêta.

2. On a vu en effet que $V(r_{j_n}) \approx 1/n$, mais cette valeur peut être nettement moins forte dans la réalité, surtout si le décalage j est faible (voir Chatfield (1996, [91]) p. 78.

TABLEAU 335
Table de Durbin - Watson au risque de rejet à tort de 5%
(régression à k variables explicatives et n observations)

n	k = 1		k = 2		k = 3		k = 4		k = 5	
	d _{inf}	d _{sup}	d _{inf}	d _{sup}	d _{inf}	d _{sup}	d _{inf}	d _{sup}	d _{inf}	d _{sup}
15	1,08	1,36	0,95	1,54	0,82	1,75	0,69	1,97	0,56	2,21
16	1,10	1,37	0,98	1,54	0,86	1,73	0,74	1,93	0,62	2,15
17	1,13	1,38	1,02	1,54	0,90	1,71	0,78	1,90	0,67	2,10
18	1,16	1,39	1,05	1,53	0,93	1,69	0,82	1,87	0,71	2,06
19	1,18	1,40	1,08	1,53	0,97	1,68	0,86	1,85	0,75	2,02
20	1,20	1,41	1,10	1,54	1,00	1,68	0,90	1,83	0,79	1,99
21	1,22	1,42	1,13	1,54	1,03	1,67	0,93	1,81	0,83	1,96
22	1,24	1,43	1,15	1,54	1,05	1,66	0,96	1,80	0,86	1,94
23	1,26	1,44	1,17	1,54	1,08	1,66	0,99	1,79	0,90	1,92
24	1,27	1,45	1,19	1,55	1,10	1,66	1,01	1,78	0,93	1,90
25	1,29	1,45	1,21	1,55	1,12	1,66	1,04	1,77	0,95	1,89
26	1,30	1,46	1,22	1,55	1,14	1,65	1,06	1,76	0,98	1,88
27	1,32	1,47	1,24	1,56	1,16	1,65	1,08	1,76	1,01	1,86
28	1,33	1,48	1,26	1,56	1,18	1,65	1,10	1,75	1,03	1,85
29	1,34	1,48	1,27	1,56	1,20	1,65	1,12	1,74	1,05	1,84
30	1,35	1,49	1,28	1,57	1,21	1,65	1,14	1,74	1,07	1,83
31	1,36	1,50	1,30	1,57	1,23	1,65	1,16	1,74	1,09	1,83
32	1,37	1,50	1,31	1,57	1,24	1,65	1,18	1,73	1,11	1,82
33	1,38	1,51	1,32	1,58	1,26	1,65	1,19	1,73	1,13	1,81
34	1,39	1,51	1,33	1,58	1,27	1,65	1,21	1,73	1,15	1,81
35	1,40	1,52	1,34	1,58	1,28	1,65	1,22	1,73	1,16	1,80
36	1,41	1,52	1,35	1,59	1,29	1,65	1,24	1,73	1,18	1,80
37	1,42	1,53	1,36	1,59	1,31	1,66	1,25	1,72	1,19	1,80
38	1,43	1,54	1,37	1,59	1,32	1,66	1,26	1,72	1,21	1,79
39	1,43	1,54	1,38	1,60	1,33	1,66	1,27	1,72	1,22	1,79
40	1,44	1,54	1,39	1,60	1,34	1,66	1,29	1,72	1,23	1,79
45	1,48	1,57	1,43	1,62	1,38	1,67	1,34	1,72	1,29	1,78
50	1,50	1,59	1,46	1,63	1,42	1,67	1,38	1,72	1,34	1,77
55	1,53	1,60	1,49	1,64	1,45	1,68	1,41	1,72	1,38	1,77
60	1,55	1,62	1,51	1,65	1,48	1,69	1,44	1,73	1,41	1,77
65	1,57	1,63	1,54	1,66	1,50	1,70	1,47	1,73	1,44	1,77
70	1,58	1,64	1,55	1,67	1,52	1,70	1,49	1,74	1,46	1,77
75	1,60	1,65	1,57	1,68	1,54	1,71	1,51	1,74	1,49	1,77
80	1,61	1,66	1,59	1,69	1,56	1,72	1,53	1,74	1,51	1,77
85	1,62	1,67	1,60	1,70	1,57	1,72	1,55	1,75	1,52	1,77
90	1,63	1,68	1,61	1,70	1,59	1,73	1,57	1,75	1,54	1,78
95	1,64	1,69	1,62	1,71	1,60	1,73	1,58	1,75	1,56	1,78
100	1,65	1,69	1,63	1,72	1,61	1,74	1,59	1,76	1,57	1,78

Table des matières

Index thématique

III-1.1.3 Prévision

L'application des modèles des moindres carrés donne les résultats du [tableau 336 de la page 1082](#), que l'on peut comparer avec les valeurs effectivement observées au cours de cette année 2001¹. Ces prévisions surestiment d'environ 3% les réalisations faites en 2001.

TABLEAU 336
Prévisions obtenues par régression saisonnière

		Janvier	Février	Mars	Avril	Mai	Jun	Juillet	Août	Septem	Octobre	Novembre	Décembre	
Observations x_t		654	632	705	756	724	773	647	422	727	728	704	639	
Modèles	additif	\hat{x}_t	741,2	699,5	759,9	723,8	715,4	717,1	661,5	456,2	696,1	749,7	706,4	729,8
		$x_t - \hat{x}_t$	-87,2	-67,5	-54,9	32,2	8,6	55,9	-14,5	-34,2	30,9	-21,7	-2,4	-90,8
	multiplicatif	\hat{x}_t	733,0	693,1	751,0	716,7	706,9	708,7	655,2	453,4	689,6	741,4	698,8	724,1
		$x_t - \hat{x}_t$	-79,0	-61,1	-46,0	39,3	17,1	64,3	-8,2	-31,4	37,4	-13,4	5,2	-85,1

III-1.2 Auto-régression multiple optimale

La seconde approche, suggérée par Kendall¹, est l'utilisation de la régression multiple avec sélection automatique de variables exogènes parmi un ensemble de k variables, qui ne sont autres que les variables x_{t-j} , j variant de 1 à k . On peut alors utiliser des programmes de *stepwise*, mais ceux-ci, on le sait, ne garantissent pas la solution optimale, laquelle passe par l'utilisation d'un programme de régression optimale². Signalons que le test de Durbin-Watson n'est alors plus utilisable, les variables exogènes étant aléatoires. L'application de cette méthode dans notre exemple numérique donne les solutions optimales suivantes (on a porté en dessous des coefficients de régression le quotient du coefficient par son écart-type).

- 1 variable exogène: $x_t = 0,700 \cdot x_{t-24} + 208,25$ ($\hat{\rho}^2 = 0,349$)
(5,71)

- 2 variables exogènes:
 $x_t = 0,40618 \cdot x_{t-1} + 0,62406 \cdot x_{t-24} - 23,80$ ($\hat{\rho}^2 = 0,504$)
(4,37) (5,76)

- 3 variables exogènes:
 $x_t = 0,74426 \cdot x_{t-1} + 0,68112 \cdot x_{t-12} - 0,66516 \cdot x_{t-13} + 168,75$
(8,73) (7,22) (-6,64) ($\hat{\rho}^2 = 0,642$)

- 4 variables exogènes:
 $x_t = 0,65865 \cdot x_{t-1} + 0,47169 \cdot x_{t-12} - 0,56757 \cdot x_{t-13} + 0,30669 \cdot x_{t-24}$
(7,52) (3,91) (-5,54) (2,61)
+ 93,68
($\hat{\rho}^2 = 0,676$)

1. Note de la page précédente. Cette chronique étant une chronique réelle d'une grande entreprise, observée il y a quelques années.

1. Voir Kendall (1973, [260]) chapitre XI.

2. Celui que l'on a utilisé est basé sur l'algorithme de Kendall, Beale et Mann (1967, [262]). Sur les différentes techniques de sélection d'une régression de k variables prises parmi n variables, voir en particulier le chapitre XII de Seber (1976, [378]).

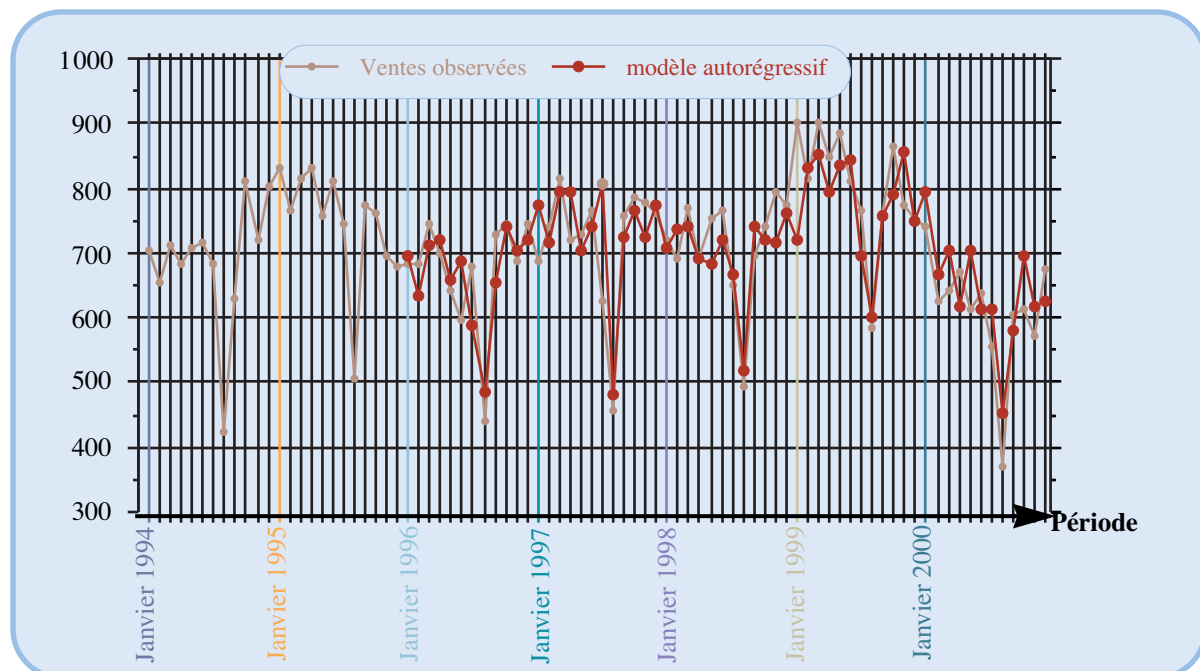
- 5 variables exogènes :

$$x_t = \underset{(7, 63)}{0,66523} \cdot x_{t-1} - \underset{(-1, 32)}{0,11131} \cdot x_{t-9} + \underset{(4, 14)}{0,51050} \cdot x_{t-12} - \underset{(-5, 68)}{0,57972} \cdot x_{t-13} \\ + \underset{(2, 26)}{0,27134} \cdot x_{t-24} + 175,18 \quad (\hat{\rho}^2 = 0,680)$$

Cette dernière régression a une estimation du coefficient de détermination en légère amélioration par rapport à la régression précédente, mais elle présente un coefficient douteux (celui de x_{t-9}) et est d'interprétation moins facile que la régression à 4 variables exogènes, où la saisonnalité est prise en compte explicitement par les variables de décalage 12 et 24, et la tendance, par la variable t et la variable de décalage 13. On peut ajouter en outre que cette régression est nettement meilleure que celle obtenue en régression multiple saisonnière (§ III-1.1.2) où l'estimation du coefficient de détermination n'est que de 0,481. On trouvera à la [figure 255](#), les résultats de cette régression optimale à 4 variables exogènes. Il faut cependant noter que les prévisions obtenues par ce modèle pour les 6 premiers mois de 2001 (674, 736, 703, 781, 793 et 829) sont trop optimistes par rapport aux réalisations (654, 632, 705, 756, 724 et 773), tandis que l'utilisation de la régression multiple optimale à 3 variables exogènes fournit au contraire une sous-estimation systématique. Les performances prévisionnelles de cette technique, pour notre exemple, sont donc médiocres.

FIGURE 255

Prévisions du modèle autorégressif



III-2 Les approches de «Box et Jenkins»

Les approches de «Box et Jenkins» consistent à éliminer dans une chronique les fluctuations qui ne sont pas dues à des perturbations aléatoires du type «bruit blanc»¹.

On supposera tout d'abord que la série étudiée est exempte de mouvements tendanciels et saisonniers. Dans un second temps, on verra comment se ramener au cas précédent à l'aide du filtre «différence» (introduit au § II-4, page 1062), lorsqu'il y a tendance et saisonnalité.

III-2.1 Traitement de chroniques non tendanciennes et non saisonnières

Le trend est une fonction explicite de t , et la saisonnalité est une fonction d'une (ou plusieurs) périodicité(s) temporelle(s), éventuellement sujette(s) elle(s) même(s) à une évolution temporelle. Lorsque les mouvements tendanciels ou saisonniers d'une chronique n'existent pas, ou ont été correctement éliminés, on ne peut plus chercher dans la variable «temps» proprement dite une explication de l'évolution de x_t . C'est dans les valeurs prises par la chronique qu'il faut chercher l'explication (ou au moins une partie de l'explication) de son évolution.

Cette recherche s'effectue en faisant appel à des modèles de référence que l'on présentera succinctement, renvoyant le lecteur à la littérature spécialisée pour toutes les démonstrations des propriétés avancées, avant d'en illustrer l'utilisation sur la chronique résiduelle de la série des ventes du rayon de journaux du Casimouth d'Alphaville, obtenue par l'utilisation de la méthode des moindres carrés (cf. § III-1.1, page 1071), pour le schéma saisonnier additif.

III-2.1.1 Les modèles de référence

Ces modèles de référence appartiennent à la classe des processus stationnaires (définis au § I-2.3.3, page 994). Fondamentalement ces modèles de référence font dépendre la valeur x_t d'une combinaison linéaire d'observations passées (x_{t-i}) et l'on parle alors de processus auto-régressif, ou d'une combinaison d'écarts résiduels passés (ε_{t-i}), et l'on parle alors de processus en moyenne mobile, ou de processus mixte fonction à la fois des observations passées et des écarts résiduels passés.

La reconnaissance du processus s'effectue principalement en comparant les coefficients d'autocorrélation d'ordre j de la chronique – ou les coefficients d'autocorrélation partiels – à des valeurs théoriques correspondantes de ces différents processus dont l'évolution, en fonction du décalage j , est caractéristique et en facilite l'identification. Ceci explique l'importance accordée dans la présentation de ces modèles de référence à l'étude des coefficients d'autocorrélation (introduits au § I-3.1.1, page 999) et des coefficients d'autocorrélation partiels (que l'on définira au § III-2.1.1c, page 1088)¹.

1. *Note de la page précédente.* Voir tout d'abord Chatfield (1996; [91]) chapitres III à VI pour une première prise de contact. Le dernier ouvrage de Chatfield (2001, [92]) présente une bonne synthèse intelligible des avancées récentes dans les techniques de prévision. L'ouvrage de Johnson et Montgomery (1976, [246]), ou celui de Nelson (1973, [315]) fournissent une présentation plus complète de la méthode. L'ouvrage d'Anderson (1976, [15]) est un condensé des principaux résultats de l'ouvrage de base de Box et Jenkins (1970, [65]) et peut donc constituer une introduction à la méthode. La dernière édition de l'ouvrage de Makridakis *et al.* (1998, [291]) a une bonne introduction de ces approches dans les chapitres VII et VIII; il comporte en outre une analyse des logiciels de prévision disponibles. Le livre de Box et Jenkins (1970, [65]) est celui dans lequel le lecteur a intérêt à se plonger après une bonne sensibilisation à cette problématique (éventuellement fournie par ces quelques pages!), celui écrit avec Reinsel en 1994, [66], est assez voisin mais inclut quelques résultats nouveaux.

III-2.1.1.1 Processus auto-régressif

III-2.1.1.1a) Définition

On n'examinera en détail que le processus auto-régressif d'ordre 1, que l'on appelle ainsi parce qu'il fait dépendre x_t d'une seule autre valeur précédente x_{t-1} de la chronique passée; les résultats analytiques relatifs aux autres processus autorégressifs seront donnés dans le tableau de synthèse 339, page 1094. Ce processus, connu encore sous le nom de **processus de Markov**, se définit comme :

$$x_t = \delta + \varepsilon_t + \phi_1 x_{t-1} \quad [AR(1)] \quad \text{relation 444}$$

Autrement dit, la valeur de x_t dépend de trois termes : une constante δ , un terme résiduel ε_t de type bruit blanc (ce qui implique que son espérance mathématique soit nulle et que sa variance σ_ε^2 soit constante) et la valeur observée à la période précédente x_{t-1} .

D'une façon générale, le **processus auto-régressif d'ordre p**, noté symboliquement $AR(p)$, se définit comme :

$$x_t = \delta + \varepsilon_t + \sum_{i=1}^p \phi_i x_{t-i} \quad [AR(p)] \quad \text{relation 445}$$

ou encore en utilisant l'opérateur B^j introduit au § II-4, page 1062 ($B^j x_t = x_{t-j}$) :

$$x_t = \delta + \varepsilon_t + \sum_{i=1}^p \phi_i B^i x_t \quad \text{relation 446}$$

ou, en posant $\phi_0 = -1$:

$$-\sum_{i=1}^p \phi_i B^i x_t = \delta + \varepsilon_t \quad \text{relation 447}$$

Le processus auto-régressif d'ordre 2 est connu encore sous le nom de **processus de Yule**. Les principaux résultats le concernant seront mentionnés dans le tableau de synthèse 339 de la page 1094.

Les règles classiques¹ de calcul de l'espérance mathématique et de la variance d'une somme de variables aléatoires permettent de calculer l'espérance mathématique et la variance de x_t

$$\begin{aligned} E(x_t) &= E(\delta) + E(\varepsilon_t) + \phi_1 E(x_{t-1}) = \delta + \phi_1 E(x_{t-1}) \\ &= \delta + \phi_1 \{ \delta + \phi_1 E(x_{t-2}) \} = \delta + \phi_1 \delta + \phi_1^2 \{ \delta + \phi_1 E(x_{t-3}) \} \\ &= \delta + \phi_1 \delta + \phi_1^2 \delta + \phi_1^3 \delta + \dots = \delta \sum_{i=0}^{n-1} \phi_1^i + \delta \phi_1^n E(x_{t-n}) \end{aligned}$$

d'où, pour une chronique de n termes :

1. Ajoutons qu'un appel complémentaire au spectre de la série peut être fait (cf. Box et Jenkins, 1970, [65] chapitre III). En effet son comportement est très caractéristique lorsque la série correspond à l'un des modèles simples de référence. Ce moyen d'identification complémentaire ne sera cependant pas présenté ici, pour éviter d'avoir à introduire la problématique de l'analyse spectrale, pour des raisons déjà invoquées.

1. Voir par exemple Giard (1995, [182]), chapitre II, § I.3.

$$E(x_t) = \delta \left\{ \frac{1 - \phi_1^n}{1 - \phi_1} + \phi_1^n E(x_{t-n}) \right\} \quad \text{relation 448}$$

et pour une chronique infinie (ou en approximation pour n suffisamment grand), à condition que $|\phi_1|$ soit inférieur à 1 (faute de quoi le processus ne pourrait être stationnaire, l'espérance mathématique tendant alors vers l'infini, au lieu de converger vers une valeur finie):

$$E(x_t) \cong \frac{\delta}{1 - \phi_1} \quad \text{relation 449}$$

Par ailleurs:

$$\begin{aligned} V(x_t) &= V(\delta) + V(\varepsilon_t) + \phi_1^2 V(x_{t-1}) = \sigma_\varepsilon^2 + \phi_1^2 V(x_{t-1}) = \dots \\ &= \sigma_\varepsilon^2 + \phi_1^2 \{ \sigma_\varepsilon^2 + \phi_1^2 V(x_{t-2}) \} = \dots \\ &= \sigma_\varepsilon^2 + \phi_1^2 \sigma_\varepsilon^2 + (\phi_1^2)^2 \sigma_\varepsilon^2 + (\phi_1^2)^3 \sigma_\varepsilon^2 + \dots \approx \sigma_\varepsilon^2 \sum_{i=0}^n \phi_1^{2i} \end{aligned}$$

d'où pour une chronique de n termes

$$V(x_t) = \sigma_\varepsilon^2 \frac{1 - \phi_1^{2n}}{1 - \phi_1^2} \quad \text{relation 450}$$

et pour une chronique infinie, ou en approximation pour n suffisamment grand:

$$V(x_t) = \frac{\sigma_\varepsilon^2}{1 - \phi_1^2} \quad \text{relation 451}$$

Il s'ensuit que l'on pourra estimer δ et σ_ε^2 dans l'échantillon d'une chronique de n observations tirées d'une population mère caractérisée par un même processus auto-régressif d'ordre 1 respectivement par:

$$\hat{\delta} = \bar{x}(1 - \hat{\phi}_1) \text{ et } \hat{\sigma}_\varepsilon^2 = V(x)(1 - \hat{\phi}_1^2) \quad \text{relation 452}$$

III-2.1.11b) Fonction d'autocorrélation

La fonction d'autocorrélation n'est autre que la fonction mathématique (lorsqu'elle existe) définissant le corrélogramme, c'est-à-dire permettant de calculer le coefficient d'autocorrélation d'ordre j pour un décalage donné de j périodes.

On montre¹ que dans le cas d'un processus auto-régressif d'ordre 1 on a:

$$\rho_1 = \phi_1, \rho_2 = \phi_1^2, \rho_3 = \phi_1^3, \dots, \rho_n = \phi_1^n \quad \text{relation 453}$$

ce qui indique que la corrélation entre observations décroît exponentiellement, en valeur absolue, avec le nombre de périodes les séparant. On trouvera dans le [tableau 337, page 1093](#), quelques corrélogrammes caractéristiques correspondant à des données numériques décrites au [tableau 338 de la page 1094](#).

On montre² que les processus autorégressifs ont des fonctions d'autocorrélation qui sont toujours monotones décroissantes, avec la possibilité d'avoir des mouve-

1. Voir Kendall (1976, [260]), p. 71 ou Chatfield (6) p. 99.

2. Voir Box et Jenkins (1970, [65]) p. 55.

ments sinusoïdaux s'amortissant progressivement (voir corrélogrammes du [tableau 337, page 1093](#)).

L'égalité entre le coefficient d'autocorrélation d'ordre 1 (ρ_1) et le paramètre ϕ_1 fait que l'on retient comme estimation de ϕ_1 à partir des observations de l'échantillon constitué par une chronique observée, le coefficient d'autocorrélation d'ordre 1 observé r_1 . Cette égalité implique que $|\phi_1| < 1$ (tout comme ρ_1) et l'on parle de condition de stationnarité pesant sur ϕ_1 .

$$\hat{\phi}_1 = r_1 \tag{relation 454}$$

En réalité, l'estimation fournie par l'échantillon est biaisée. On montre¹ que :

$$E(r_{1_n}) = \rho_1 - \frac{1 + 3\rho_1}{n-1} \text{ et } E(r_{j_n}) = \rho_j - \frac{1}{n-j} \left\{ \frac{1 + \rho_1}{1 - \rho_1} (1 - \rho_j^j) + 2\rho_j^j \right\}, \text{ pour } j > 1$$

relation 455

toutefois c'est cette valeur que l'on « rentre » comme valeur d'initialisation dans les programmes « Box et Jenkins » car le biais n'est que de l'ordre de $1/n$. Notons qu'il existe² une méthode pour faire passer ce biais de l'ordre de $1/n$ à l'ordre de $1/n^2$, et qui en définitive est la plus simple à employer.

On a vu à [relation 391 de la page 1004](#) que la variance de la distribution d'échantillonnage d'un coefficient d'autocorrélation r_{j_n} dépend de tous les coefficients d'autocorrélation ρ_j , et que la formulation approchée que l'on utilise en général est (en supposant que ρ_j et les coefficients d'autocorrélation d'ordre supérieur soient faibles) celle de la [relation 392 de la page 1004](#)

($V(r_{j_n}) \cong \frac{1}{n} \left(1 + 2 \sum_{i=1}^{\infty} \rho_i^2 \right)$, approximation de la formule de Barlett), ce qui donne

pour le processus autorégressif d'ordre 1, où $\rho_i = \rho_1^i$:

$$V(r_{j_n}) \cong \frac{1}{n} \left(\frac{1 + \rho_1^2}{1 - \rho_1^2} \right) \tag{relation 456}$$

Par exemple pour $\rho_1 = 0,3$, la variance de la distribution d'échantillonnage d'un coefficient d'autocorrélation d'ordre j quelconque est pour $n = 84$:

$$V(r_{j_n}) \cong \frac{1}{84} \left(\frac{1 + 0,3^2}{1 - 0,3^2} \right) = 0,0143, \text{ d'où un écart-type de } 0,119. \text{ On peut noter que,}$$

dans l'approximation qui est faite, cette variance est d'autant plus sous-estimée que l'ordre du coefficient d'autocorrélation est faible, mais cette distorsion est négligeable³ (pour le coefficient d'autocorrélation d'ordre 2 par exemple, le calcul complet conduit à une variance de 0,0153, et donc un écart type de 0,124).

1. Voir Kendall (1976, [260]) , p. 93.

2. C'est la méthode de Quenouille (voir Kendall (1976, [260]) p. 93), présentée [page 1001](#).

3. L'application de la formule de Barlett ([relation 391 de la page 1004](#)) donne en effet: $V(r_{j_n}) = \frac{1 + 2\rho_1^j - 3\rho_1^{2j}}{n} \sum_{i=-\infty}^{j+\infty} \rho_i^{2i}$, la sous-estimation étant donc pour la variance de la distribution d'échantillonnage des coefficients d'autocorrélation d'ordre j : $\frac{2\rho_1^j - 3\rho_1^{2j}}{n} \cdot \frac{1 + \rho_1^2}{1 - \rho_1^2}$

Table des matières

Index thématique

III-2.1.11c) Fonction d'autocorrélation partielle

On peut étendre l'idée d'autocorrélation qui mesure la corrélation de termes de la série séparés par un même nombre de termes, à celle de corrélation où la dépendance qui porte sur les termes intermédiaires a été retirée. Dans le processus autorégressif d'ordre 1 par exemple, le terme x_t est corrélé au terme x_{t-2} , le coefficient d'autocorrélation d'ordre 2 s'élevant à ρ_1^2 (cf. [relation 453](#), [page 1086](#)). Mais x_t dépend également de x_{t-1} , et l'on peut se poser la question de savoir si x_t est corrélé à x_{t-2} seulement en vertu du fait que x_t et x_{t-2} sont tous deux corrélés à x_{t-1} .

L'instrument de mesure de cette liaison en cas d'indépendance est le **coefficient de corrélation partiel** $\rho_{13,2}$ qui mesure la liaison entre la variable 1 et la variable 3, abstraction faite de la liaison entre 1 et 2 et entre 3 et 2, à partir des coefficients ρ_{ij} de corrélation entre les variables i et j , i et j variant de 1 à 3. D'une manière générale, ce coefficient se définit comme :

$$\rho_{13,2} = \frac{\rho_{13} - \rho_{12}\rho_{32}}{\sqrt{(1 - \rho_{12}^2)(1 - \rho_{32}^2)}} \quad \text{coefficient de corrélation partielle} \quad \text{relation 457}$$

La transposition au cas de séries temporelles de ce concept est aisée, puisque seul importe alors le décalage (ρ_{12} étant alors égal à ρ_{32}). On notera alors ψ_2 le coefficient de corrélation partiel de décalage 2, lequel est de toute évidence égal à :

$$\psi_2 = \frac{\rho_2 + \rho_1^2}{1 - \rho_1^2} \quad \text{relation 458}$$

Par définition ψ_1 est égal à ρ_1 . Pour le calcul des coefficients d'autocorrélation partiels d'ordre supérieur à 2, il faut alors passer¹ par un quotient de déterminants de matrices de coefficients de corrélation, mais la finalité du coefficient d'autocorrélation partiel est alors la même.

L'application de cette formule au processus auto-régressif d'ordre 1 donne :

$$\Psi_1 = \phi_1 \text{ et } \Psi_j = 0 \text{ pour } j \geq 2 \quad \text{relations 459}$$

Un processus auto-régressif d'ordre 1 a donc ses coefficients d'autocorrélation partiels d'ordre supérieur à 1, tous égaux à zéro. On montre² d'une façon générale que les coefficients d'autocorrélation partiels d'ordre supérieur à p dans un processus auto-régressif d'ordre p sont tous nuls. Cette propriété facilite l'identification de l'ordre d'un processus auto-régressif, car on a vu que les fonctions d'autocorrélation sont toutes monotones décroissantes (en valeur absolue) avec ou sans mouvements sinusoïdaux, ce qui fait que l'on ne peut être assuré, au vu du seul corrélogramme d'un processus auto-régressif, d'en avoir détecté l'ordre correct. Mais, là encore, les problèmes classiques de distribution d'échantillonnage se posent, et l'on n'observera qu'exceptionnellement des coefficients d'autocorrélation partiels nuls. On montre³ que le coefficient d'autocorrélation partiel observable Ψ_{j_n} suit approximativement la loi Normale $\mathcal{N}(0, \sqrt{n})$: on décidera à tort dans 5% seulement des cas que le coefficient d'autocorrélation partiel n'est

1. Voir Box et Jenkins (1970, [\[65\]](#)), p. 64-65.

2. Voir Box et Jenkins (1970, [\[65\]](#)), p. 65.

3. Voir Box et Jenkins (1970, [\[65\]](#)), p. 65.

pas significativement différent de zéro si la valeur observée dans l'échantillon est comprise entre $-2\sqrt{n}$ et $+2\sqrt{n}$.

III-2.1.1.2 Processus en moyenne mobile

III-2.1.12a) Définition

Un **processus en moyenne mobile** d'ordre q , que l'on note¹ MA(q), fait dépendre x_t de l'aléa ε_t de type bruit blanc de la période t , d'une constante μ , et d'une combinaison linéaire des q derniers aléas :

$$x_t = \mu + \varepsilon_t + \sum_{i=1}^q \theta_i \varepsilon_{t-i} = \mu + \sum_{i=0}^q \theta_i B^i \varepsilon_t, \text{ avec } \theta_0 = 1 \quad [MA(q)] \quad \text{relation 460}$$

Le processus en moyenne mobile est fort utile en économie : certaines grandeurs sont affectées par de multiples événements aléatoires comme des grèves, décisions gouvernementales, fluctuations boursières, etc., chacun de ces événements pouvant avoir des répercussions sur plusieurs périodes. Nous n'étudierons en détail ici que le processus en moyenne mobile d'ordre 1 :

$$x_t = \mu + \varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1} \quad [MA(1)] \quad \text{relation 461}$$

Le calcul de l'espérance mathématique et de la variance de x_t est plus simple que dans le cas auto-régressif :

$$E(x_t) = E(\mu + \varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1}) = E(\mu) + E(\varepsilon_t) + \theta_1 E(\varepsilon_{t-1}) = \mu$$

$$V(x_t) = V(\mu + \varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1}) = V(\varepsilon_t) + \theta_1^2 V(\varepsilon_{t-1}) = (1 + \theta_1^2) \sigma_\varepsilon^2$$

$$E(x_t) = \mu \text{ et } V(x_t) = (1 + \theta_1^2) \sigma_\varepsilon^2 \quad \text{relations 462}$$

Il existe une relation entre le processus auto-régressif d'ordre 1 et la moyenne mobile. En effet, si on développe le processus auto-régressif d'ordre 1, en fonction des données des périodes antérieures, on a :

$$\begin{aligned} x_t &= \delta + \varepsilon_t + \phi_1 (\delta + \varepsilon_{t-1} + \phi_1 x_{t-2}) \\ &= \delta + \varepsilon_t + \phi_1 \delta + \phi_1 \varepsilon_{t-1} + \phi_1^2 (\delta + \varepsilon_{t-2} + \phi_1 x_{t-3}) \\ &= \delta (1 + \phi_1 + \phi_1^2) + \varepsilon_t + \phi_1 \varepsilon_{t-1} + \phi_1^2 \varepsilon_{t-2} + \phi_1^3 x_{t-3} = \dots \\ &= \delta \sum_0^\infty \phi_1^i + \sum_{i=0}^\infty \phi_1^i \varepsilon_{t-1} = \frac{\delta}{1 - \phi_1} + \sum_{i=0}^\infty \phi_1^i \varepsilon_{t-1} \end{aligned}$$

Le processus auto-régressif d'ordre 1 est donc équivalent à un processus en moyenne mobile infini tel que : $\mu = \delta / (1 - \phi_1)$, et $\theta_i = \phi_1^i$. Cette dualité entre un processus auto-régressif et un processus en moyenne mobile est générale : on montre², sous des conditions (dites d'**invertibilité**) restreignant le domaine des valeurs possibles prises par les paramètres θ_i , qu'un processus en moyenne mobile d'ordre q est équivalent à un processus autorégressif d'ordre infini, et qu'un processus autorégressif d'ordre p est équivalent à un processus en moyenne

1. M.A. pour *moving average*, c'est-à-dire moyenne mobile.

2. Voir Box et Jenkins (1970, [65]), p. 67-68. On trouvera également un éclairage intéressant de l'incidence de l'invertibilité sur la possibilité de définir un processus en moyenne mobile à partir de sa seule fonction d'auto-corrélation, ce qui ne serait pas le cas sans ces restrictions.

mobile d'ordre infini. Ceci laisse, dans un certain nombre de cas de figures rencontrés en pratique, la possibilité d'utiliser le processus nécessitant le minimum de paramètres à estimer.

III-2.1.12b) Fonction d'autocorrélation.

On montre¹ que, dans le cas d'un processus en moyenne mobile d'ordre 1, le coefficient d'autocorrélation d'ordre 1 est :

$$\rho_1 = \frac{\theta_1}{1 + \theta_1^2} \quad \text{relation 463}$$

et que les coefficients d'autocorrélation d'ordre supérieur à 1 sont tous nuls, c'est-à-dire que le processus MA(1) a une « mémoire » se limitant à une seule période. Un test de la nullité de ces coefficients d'autocorrélation peut se faire en utilisant la relation 392 de la page 1004 ($V(\rho_{j_n}) = \frac{1}{n}(1 + 2\hat{\rho}_1^2) = \frac{1}{n}(1 + 2r_1^2)$), mais il y a intérêt à compléter ce diagnostic par intervalle de confiance, par l'étude des coefficients d'autocorrélation partiels.

Les problèmes d'estimation sont plus difficiles à résoudre dans le cas de processus en moyenne mobile que dans le cas de processus autorégressif, parce qu'il n'existe pas d'estimateur efficace (au sens des moindres carrés) sous une forme explicite². La recherche de la solution s'effectue informatiquement à l'aide d'algorithmes itératifs qui convergent vers la solution optimale à condition que des valeurs initiales correctement choisies aient été préalablement données. Dans le cas d'un processus de type MA(1), on utilise comme valeur initiale $\hat{\theta}_1^*$ celle qui découle de la formulation du coefficient d'autocorrélation d'ordre 1, bien que l'estimateur qu'elle fournit soit biaisé³ :

$$r_1 = \hat{\theta}_1^*/(1 + \hat{\theta}_1^{*2}) \rightarrow \hat{\theta}_1^* = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4r_1^2}}{2r_1}, \text{ tel que } |\hat{\theta}_1^*| < 1 \quad \text{relation 464}$$

Par exemple pour $r_1 = 0,3$, on trouve $\theta_1 = 1,667 \pm 1,337 = 0,333$ ou 3 ; il convient donc de retenir 0,333 pour respecter la contrainte obligeant θ_1 à être inférieur en valeur absolue à 1 (et qui correspond aux conditions d'invertibilité signalées ci-dessus).

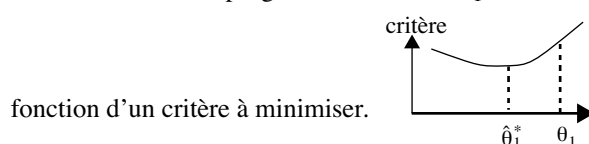
III-2.1.12c) Fonction d'autocorrélation partielle

On montre⁴ que :

1. Voir Box et Jenkins (1970, [65]), p. 62.

2. Voir Chatfield (1996, [91]) p. 70, voir également Nelson (1973, [315]) p. 32 et sq., qui est plus complet sur ce point.

3. On fournit donc au programme la valeur $\hat{\theta}_1^*$ et celui-ci recherche par tâtonnement la valeur optimale à $\hat{\theta}_1$ en



4. Voir Box et Jenkins (1970, [65]), p. 70.

$$\Psi_1 = \rho_1 = \frac{\theta_1}{1 + \theta_1^2}; \Psi_2 = \frac{\rho_2 - \rho_1^2}{1 - \rho_1^2} = \frac{-\theta_1^2}{\theta_1^4 + \theta_1^2 + 1}; \Psi_j = \frac{(-1)^{j-1} \theta_1^j (1 - \theta_1^2)}{1 - \theta_1^{2(j+1)}}$$

relations 465

ce qui implique que la fonction d'autocorrélation partielle est négative, monotone et décroissante si θ_1 est négatif, et connaît des mouvements sinusoïdaux s'amortissant lorsque j croît si θ_1 est positif. Elle n'est donc pas tronquée, contrairement à la fonction d'autocorrélation. L'examen simultané du corrélogramme et du corrélogramme partiel permet, là encore, de déceler si l'on a ou non affaire à un processus en moyenne mobile. On notera en particulier le comportement «symétrique» des processus autorégressif et en moyenne mobile, en ce qui concerne le corrélogramme et le corrélogramme partiel.

III-2.1.1.3 Les processus mixtes

III-2.1.13a) Définition

Les processus mixtes sont des combinaisons de processus autorégressifs AR(p) d'ordre p et de processus en moyenne mobile MA(q) d'ordre q; ils sont habituellement notés sous le sigle ARMA(p, q) et se définissent comme :

$$x_t = \delta + \varepsilon_t + \sum_{i=1}^q \theta_i \varepsilon_{t-i} + \sum_{i=1}^p \phi_i x_{t-i} \quad [ARMA(p, q)] \quad \text{relation 466}$$

que l'on note encore :

$$x_t - \sum_{i=1}^p \phi_i x_{t-i} = \delta + \varepsilon_t + \sum_{i=1}^q \theta_i \varepsilon_{t-i} \quad \text{relation 467}$$

ou encore, en utilisant la puissance zéro et en posant $-\phi_0 = \theta_0 = 1$:

$$-\sum_{i=0}^p \phi_i x_{t-i} = \delta + \varepsilon_t + \sum_{i=0}^q \theta_i \varepsilon_{t-i}, \text{ d'où la formulation:}$$

$$-\sum_{i=0}^p \phi_i B^i x_t = \delta + \sum_{i=0}^q \theta_i B^i \varepsilon_t \quad \text{relation 468}$$

On ne s'intéressera ici qu'au processus ARMA(1,1):

$$x_t = \delta + \varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1} + \phi_1 x_{t-1} \quad \text{relation 469}$$

On montre que θ_1 comme ϕ_1 doivent être inférieurs, en valeur absolue, à 1 pour que le processus soit «viable»¹, tout comme c'était le cas pour les processus MA(1), et AR(1) et que par ailleurs :

$$E(x_t) = \frac{\delta}{1 - \phi_1}; V(x_t) = \sigma_\varepsilon^2 \frac{\theta_1^2 + 2\phi_1\theta_1 + 1}{1 - \phi_1^2} \quad \text{relations 470}$$

Les estimations initiales $\hat{\delta}^*$, $\hat{\theta}_1^*$ et $\hat{\phi}_1^*$ sont données au [tableau 339 \(page 1094\)](#).

Table des matières

Index thématique

1. C'est-à-dire pour être rigoureux: stationnaire et invertible; voir Anderson (1976, [15]), p. 44.

III-2.1.13b) Fonctions d'autocorrélation et d'autocorrélation partielle

La fonction d'autocorrélation d'un processus ARMA(1,1) tend exponentiellement vers 0 avec le décalage j (avec une alternance de signe si $\phi_1 < 0$), puisque ¹:

$$\rho_1 = \frac{(1 + \phi_1 \cdot \theta_1)(\phi_1 + \theta_1)}{1 + \theta_1^2 + 2\phi_1 \cdot \theta_1} \text{ et } \rho_j = \rho_1 \cdot \phi_1^{j-1} \text{ pour } j > 1 \quad \text{relations 471}$$

La fonction d'autocorrélation partielle tend elle aussi continuellement vers zéro lorsque j croît, avec ou sans alternance. Il n'y a donc pas, comme dans les processus purs autorégressifs ou en moyenne mobile, l'une des deux fonctions qui est tronquée au-delà de l'ordre du processus. Ceci permet également d'aider à l'identification du processus. La fonction d'autocorrélation partielle décroît avec éventuellement une alternance de signe, comme on peut le constater sur le graphique théorique du [tableau 337, page 1093](#).

III-2.1.14 Résumé des principales caractéristiques des modèles stationnaires les plus usuels

Le [tableau 337 de la page 1093](#) résume les principales caractéristiques des modèles autorégressifs d'ordre 1 et 2, des modèles en moyenne mobile d'ordre 1 et 2, et du modèle mixte ARMA(1,1). Dans la rubrique «intervalle de confiance des paramètres et prévisions» sont portées les variances de la distribution d'échantillonnage du paramètre étudié, ou de la prévision effectuée par le modèle (voir infra), et que l'on utilise en formulant la très classique hypothèse de la normalité des aléas ε_t . Le [tableau 337](#) est consacré à une représentation graphique des corrélogrammes de ces mêmes modèles, pour diverses combinaisons de valeurs des paramètres de ces modèles (les données correspondantes figurent au [tableau 338 de la page 1094](#)). On ne doit toutefois pas oublier que les corrélogrammes observés peuvent s'écarter sensiblement des corrélogrammes théoriques pour des raisons liées aux fluctuations d'échantillonnage.

III-2.1.2 Prévision

L'utilisation de ces modèles stationnaires en mode prévisionnel s'effectue sans difficulté. La valeur prévisionnelle attribuée à l'aléa inconnu ε_{t+k} , à la date $t+k$, d'une prévision effectuée à la date t , ne peut guère être que son espérance mathématique $E(\varepsilon_{t+k})$ laquelle, on l'a déjà vue, est nulle. On s'appuiera ici sur des exemples existants qui seront introduits dans le paragraphe suivant ou sur des exemples inventés de toutes pièces. Il ne s'agit ici que d'illustrer un mécanisme de calcul.

$$\text{- AR(1): } \hat{x}_{t+1} = \delta + \phi_1 x_t, \hat{x}_{t+2} = \delta + \phi_1 \hat{x}_{t+1}, \dots, \hat{x}_{t+k} = \delta + \phi_1 \hat{x}_{t+k-1}$$

Exemple d'application : $x_t = 0 + 0,752x_{t-1} + \varepsilon_t$, d'où:

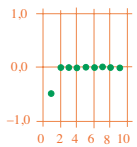
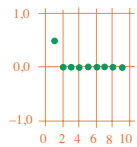
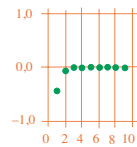
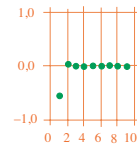
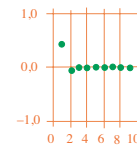
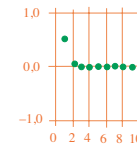
$$x_{84} = 58,56,$$

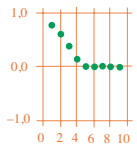
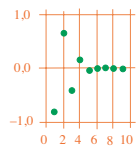
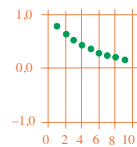
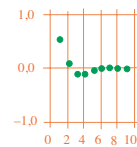
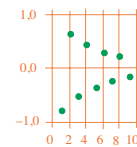
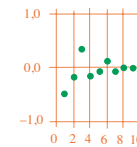
$$x_{85} = 0,752 \times 58,56 = 44,04,$$

$$x_{86} = 0,752 \times 44,04 = 33,12, \text{ etc.}$$

1. Voir Box et Jenkins (1970, [65]), p. 50.

TABLEAU 337
Exemples de corrélogrammes théoriques des processus stationnaires les plus utilisés[†]

Processus en moyenne mobile d'ordre q: MA(q)					
MA(1): $x_t = \mu + \varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1}$		MA(2): $x_t = \mu + \varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1} + \theta_2 \varepsilon_{t-2}$			
$\theta_1 < 0$	$\theta_1 > 0$	$\theta_1 < 0$		$\theta_1 > 0$	
		$\theta_2 < 0$	$\theta_2 > 0$	$\theta_2 < 0$	$\theta_2 > 0$
					

Processus autorégressif d'ordre p: AR(p)					
AR(1): $x_t = \delta + \varepsilon_t + \phi_1 x_{t-1}$		AR(2): $x_t = \delta + \varepsilon_t + \phi_1 x_{t-1} + \phi_2 x_{t-2}$			
$\phi_1 > 0$	$\phi_1 < 0$	$\phi_1 > 0$		$\phi_1 < 0$	
		$\phi_2 > 0$	$\phi_2 < 0$	$\phi_2 > 0$	$\phi_2 < 0$
					

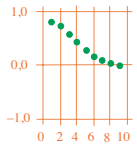
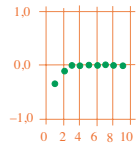
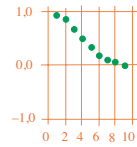
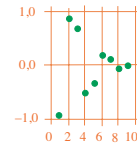
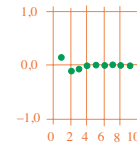
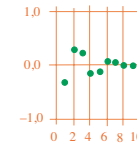
Processus mixte en moyenne mobile d'ordre q = 1 et autorégressif d'ordre p = 1 ARMA(1,1)					
$x_t = \delta + \varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1} + \phi_1 x_{t-1}$					
$\phi_1 > -\theta_1 > 0$	$-\theta_1 > \phi_1 > 0$	$\phi_1 > 0 > -\theta_1$	$-\theta_1 > 0 > \phi_1$	$0 > \phi_1 > -\theta_1$	$0 > -\theta_1 > \phi_1$
					

Table des matières

Index thématique

†. L'attention du lecteur est attirée sur le fait que les fonctions d'autocorrélation empiriquement observées sur un échantillon diffèrent de ces fonctions d'autocorrélation théoriques pour des raisons que l'on rencontre classiquement dans la théorie de la distribution d'échantillonnage.

- AR(2): $\hat{x}_{t+1} = \delta + \phi_1 x_t + \phi_2 x_{t-1}$;
 $\hat{x}_{t+2} = \delta + \phi_1 \hat{x}_{t+1} + \phi_2 x_t$;
 $\hat{x}_{t+3} = \delta + \phi_1 \hat{x}_{t+2} + \phi_2 \hat{x}_{t+1} ; \dots$;
 $\hat{x}_{t+k} = \delta + \phi_1 \hat{x}_{t+k-1} + \phi_2 \hat{x}_{t+k-2}$;

Exemple d'application: $x_t = 2 + 1,8x_{t-1} - 0,8x_{t-2}$, avec $x_{10} = 12$ et $x_9 = 13$:

$\hat{x}_{11} = 2 + 1,8 \times 12 - 0,8 \times 13 = 13,20$; $\hat{x}_{12} = 2 + 1,8 \times 13,2 - 0,8 \times 12 = 16,16$, etc.

- MA(1): $\hat{x}_{t+1} = \mu + \theta_1 \varepsilon_t$, $\hat{x}_{t+2} = \mu$, $\hat{x}_{t+k} = \mu$ pour $k > 1$;

TABLEAU 338
Exemples numériques de corrélogramme théoriques de processus AR(p), MA(q) et ARMA(1,1)

k	AR(1)		AR(2)				MA(1)		MA(2)				ARMA(1,1)																				
	$\theta_1 = -0,8$	$\theta_1 = 0,8$	$\theta_1 = -0,8$	$\theta_2 = -0,1$	$\theta_1 = -0,8$	$\theta_2 = 0,1$	$\theta_1 = 0,8$	$\theta_2 = -0,1$	$\theta_1 = 0,8$	$\theta_2 = 0,1$	$\phi_1 = 0,7$	$\phi_2 = 0,1$	$\phi_1 = 0,7$	$\phi_2 = -0,2$	$\phi_1 = -0,7$	$\phi_2 = 0,1$	$\phi_1 = -0,7$	$\phi_2 = -0,2$	$\phi_1 = 0,9$	$\theta_1 = -0,2$	$\phi_1 = 0,3$	$\theta_1 = -0,9$	$\theta_2 = 0,3$	$\phi_1 = -0,9$	$\theta_1 = -0,2$	$\phi_1 = -0,7$	$\theta_1 = 0,9$	$\theta_2 = -0,9$	$\phi_1 = -0,9$	$\theta_1 = 0,7$			
1	-0,49	0,49	-0,44	-0,53	0,44	0,53	0,80	-0,80	0,78	0,54	-0,78	-0,47	0,80	-0,34	0,93	-0,93	0,13	-0,32															
2	0,00	0,00	-0,06	0,06	-0,06	0,06	0,64	0,64	0,64	0,08	0,64	-0,17	0,72	-0,10	0,84	0,84	-0,09	0,29															
3	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,41	-0,41	0,53	-0,11	-0,53	0,35	0,58	-0,01	0,68	0,68	-0,05	0,23															
4	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,17	0,17	0,43	-0,10	0,43	-0,16	0,42	0,00	0,50	-0,50	0,02	-0,17															
5	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,03	-0,03	0,36	-0,04	-0,36	-0,06	0,28	0,00	0,33	-0,33	0,00	-0,11															
6	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,29	0,00	0,29	0,13	0,16	0,00	0,19	0,19	0,00	0,07															
7	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,24	0,01	-0,24	-0,06	0,09	0,00	0,10	0,10	0,00	0,04															
8	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,20	0,01	0,20	-0,02	0,04	0,00	0,05	-0,05	0,00	-0,02															
9	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,16	0,00	-0,16	0,04	0,02	0,00	0,02	-0,02	0,00	-0,01															
10	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,13	0,00	0,13	-0,02	0,01	0,00	0,01	0,01	0,00	0,00															

TABLEAU 339
Caractéristiques des principaux processus stationnaires

Processus	Moyenne mobile: MA(q) $x_t = \mu + \varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1}$		Autorégressif: AR(p) $x_t = \delta + \varepsilon_t + \sum_{i=1}^p \phi_i x_{t-i}$		Mixte: ARMA(p, q) $x_t = \delta + \varepsilon_t + \sum_{i=1}^q \theta_i \varepsilon_{t-i} + \sum_{i=1}^p \phi_i x_{t-i}$	
	$q = 1 \rightarrow MA(1)$	$q = 2 \rightarrow MA(2)$	$p=1 \rightarrow AR(1)$	$p = 2 \rightarrow AR(2)$	$p=1, q=1 \rightarrow ARMA(1, 1)$	
Définition $x_t =$	$\mu + \varepsilon_t + \theta_1 \cdot \varepsilon_{t-1}$	$\mu + \varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1} + \theta_2 \varepsilon_{t-2}$	(processus de Markov) $\delta + \varepsilon_t + \phi_1 x_{t-1}$	(processus de Yule) $\delta + \varepsilon_t + \phi_1 x_{t-1} + \phi_2 x_{t-2}$	$\delta + \varepsilon_t + \phi_1 (x_{t-1} + \theta_1 \varepsilon_{t-1})$	
Restriction sur les paramètres	$ \theta_1 < 1$	$-\theta_2 \pm \theta_1 < 1$ et $\theta_2 < 1$	$ \phi_1 < 1$	$\phi_2 \pm \phi_1 < 1$ et $ \phi_2 < 1$	$ \phi_1 < 1$ et $ \theta_1 < 1$	
$E(x_t) =$	μ	μ	$\frac{\delta}{1 - \phi_1}$	$\frac{\delta}{1 - \phi_1 - \phi_2}$	$\frac{\delta}{1 - \phi_1}$	
$V(x_t) =$	$\sigma_\varepsilon^2 (1 + \theta_1^2)$	$\sigma_\varepsilon^2 (1 + \theta_1^2 + \theta_2^2)$	$\frac{\sigma_\varepsilon^2}{(1 - \phi_1^2)}$	$\frac{\sigma_\varepsilon^2}{1 - \frac{\phi_1^2}{1 - \phi_2} - \phi_2 (\frac{\phi_1^2}{1 - \phi_2} + \phi_2)}$	$\sigma_\varepsilon^2 \frac{1 + 2\phi_1 \theta_1 + \theta_1^2}{1 - \phi_1^2}$	
Fonction d'auto-corrélation théorique	$\rho_1 =$	$\frac{\theta_1}{1 + \theta_1^2}$	$\frac{\theta_1(\theta_2 + 1)}{1 + \theta_1^2 + \theta_2^2}$	ϕ_1	$\frac{\phi_1}{1 - \phi_2}$	$\frac{(1 + \phi_1 \theta_1)(\phi_1 + \theta_1)}{1 + 2\phi_1 \theta_1 + \theta_1^2}$
	$\rho_2 =$	0	$\frac{\theta_2}{1 + \theta_1^2 + \theta_2^2}$	ϕ_1^2	$\frac{\phi_1^2}{1 - \phi_2} + \phi_2$	$\rho_1 \phi_1$
	$j > 2,$ $\rho_j =$	0	0	ϕ_1^j	$\phi_1 \rho_{j-1} + \phi_2 \rho_{j-2}$	$\rho_1 \phi_1^{j-1}$
	Domaine possible	$-0,5 < \rho_1 < 0,5$	$-1/\sqrt{2} < \rho_1 < 1/\sqrt{2}$ et $-0,5 < \rho_2 < 0,5$	$-1 < \rho_1 < 1$	$-1 < \rho_1$ et $\rho_2 < 1$ $\rho_1^2 < (\rho_2 + 1)/2$	$2\rho_1^2 - \rho_1 < \rho_2 < \rho_1 $

Table des matières

Index thématique

TABLEAU 339
Caractéristiques des principaux processus stationnaires (Suite)

Fonction d'auto-corrélation partielle théorique	$\psi_1 = \frac{\theta_1}{1+\theta_1^2} = \rho_1$	(formulation compliquée)	ϕ_1	$\frac{\phi_1}{1-\phi_2}$	ρ_1
	$\psi_2 = \frac{\theta_1}{\theta_1^2 + \theta_1^2 + 1}$	(formulation compliquée)	0	ϕ_2	(formulation compliquée)
	$j > 2, \psi_j = \frac{(-1)^{j-1} \theta_1^j (1-\theta_1^2)}{1-\theta_1^{2(j+1)}}$	(formulation compliquée)	0	0	0
Estimation initiales	$\hat{\theta}_1^* = \frac{1 \pm \sqrt{1-4r_1^2}}{2r_1}$ avec $ \hat{\theta}_1^* < 1$ $\hat{\mu}^* = \bar{x}$	Voir abaque dans Box et Jenkins ([57], p. 579) $\hat{\mu}^* = \bar{x}$	$\hat{\phi}_1^* = r_1$ $\hat{\delta}^* = \bar{x}(1-r_1)$	$\hat{\phi}_1^* = \frac{r_1(1-r_2)}{1-r_1^2}$ $\hat{\phi}_1^* = \frac{r_2-r_1^2}{1-r_1^2}$ $\hat{\delta}^* = \bar{x}(1-\hat{\phi}_1^*-\hat{\phi}_2^*)$	$\hat{\phi}_1^* = r_2/r_1$ $\hat{\theta}_1^* = \frac{b \pm \sqrt{b^2-4}}{2}$, tel que $ \hat{\theta}_1^* < 1$, avec $b = \frac{1-2r_2+[r_2/r_1]^2}{r_1-r_2/r_1}$ $\hat{\delta}^* = \bar{x}(1-\phi_1)$
Identification	$\mathcal{L}(r_2)$	$\mathcal{N}\left(\hat{0}, \sqrt{\frac{1+2r_1^2}{n}}\right)$	-	-	-
	$\mathcal{L}(r_j), j > 2$	$\mathcal{N}\left(\hat{0}, \sqrt{\frac{1+2r_1^2}{n}}\right)$	$\mathcal{N}\left(\hat{0}, \sqrt{\frac{1+2[r_1^2+r_2^2]}{n}}\right)$	-	-
	$\mathcal{L}(\psi_2)$	-	-	$\mathcal{N}\left(0, \frac{1}{\sqrt{n}}\right)$	-
	$\mathcal{L}(\psi_j), j > 2$	-	-	$\mathcal{N}\left(0, \frac{1}{\sqrt{n}}\right)$	$\mathcal{N}\left(0, \frac{1}{\sqrt{n}}\right)$
Intervalle de confiance des paramètres et prévision	avec $s^2 =$ variance observée	$V(\hat{\theta}_1) \approx \frac{1-\theta_1^2}{n}$ $V(\bar{x}) \approx \frac{s^2(1+2r_1)}{n}$	$V(\hat{\theta}_1) \approx \frac{1-\theta_2^2}{n}$ $V(\bar{x}) \approx \frac{s^2(1+2r_1+2r_2)}{n}$	$V(\phi_1) \approx \frac{1-\phi_1^2}{n}$ $V(\phi_2) \approx \frac{1-\phi_2^2}{n}$ $V(\bar{x}) \approx \frac{s^2(1+r_1)(1-2r_1^2+r_2)}{n(1-r_1)(1-r_2)}$	$V(\phi_1) \approx \frac{(1-\phi_1^2)(1+\phi_1\theta_1)^2}{n(\phi_1+\theta_1)^2}$ $V(\theta_1) \approx \frac{(1-\theta_1^2)(1+\phi_1\theta_1)^2}{n(\phi_1+\theta_1)^2}$ $V(\bar{x}) = \frac{s^2}{n} \left(1 + \frac{2r_2^2}{r_1-r_2}\right)$
	$V(x_{t+k})$	(**)	(**)	formulation récurrente (Box et Jenkins, [57], chap II)	$\hat{\sigma}_\varepsilon^2 \left\{ \mathbb{H}(\phi_1\theta_1)^2 \left(\frac{1-\phi_1^{2 \cdot k^2}}{1-\phi_1^2} \right) \right\}$
	$\hat{\sigma}_\varepsilon^2$	$\frac{s^2}{1+\hat{\sigma}_1^2}$	$\frac{s^2}{1+\hat{\sigma}_1^2+\hat{\sigma}_2^2}$	$s^2(1-\phi_1r_1)$	$s^2(1-\phi_1r_1-\phi_2r_2)$

Table des matières

Index thématique

Exemple d'application: $x_t = -8,66 + \varepsilon_t - 0,321\varepsilon_{t-1}$; l'application du modèle conduit au résidu suivant $\varepsilon_{84} = 143,47$ pour la dernière période; on en déduit : $\hat{x}_{85} = -8,66 - 0,321 \times 143,47 = -54,71$, $\hat{x}_{86} = -8,66$, $\hat{x}_{87} = -8,66$, etc.

- MA(2): $\hat{x}_{t+1} = \mu + \theta_1(\varepsilon_t + \theta_2\varepsilon_{t-1})$,
 $\hat{x}_{t+2} = \mu + \theta_2\varepsilon_{t-1}$,
 $\hat{x}_{t+k} = \mu$ pour $k > 2$;

Exemple d'application: $x_t = -5 + 1,3\varepsilon_{t-1} - 1,5\varepsilon_{t-2}$;

$$\varepsilon_{10} = 2; \varepsilon_{10} = 2\varepsilon_9 = -1 : \hat{x}_{11} = -5 + 1,3 \times 2 - 1,5(-1) = -0,9;$$

$$\hat{x}_{12} = -5 - 1,5 \times 2 = -8; \hat{x}_{13} = -5, \dots$$

$$\text{- ARMA}(1,1): \hat{x}_{t+k} = \delta + \theta_1 \varepsilon_t + \phi_1 x_t,$$

$$\hat{x}_{t+2} = \delta + \phi_1 \hat{x}_{t+1},$$

$$\hat{x}_{t+k} = \delta + \phi_1 \hat{x}_{t+k-1}, \text{ pour } k > 2;$$

Exemple d'application : $x_t = 0 + 0,903x_{t-1} + 0,334\varepsilon_{t-1}$ avec $\varepsilon_{84} = 53,32$ et $x_{84} = 58,56$; on en déduit $\hat{x}_{85} = 0 + 0,903 \times 58,56 + 0,334 \times 53,32 = 71,22$; $\hat{x}_{86} = 0,903 \times 71,22 = 64,31$, etc.

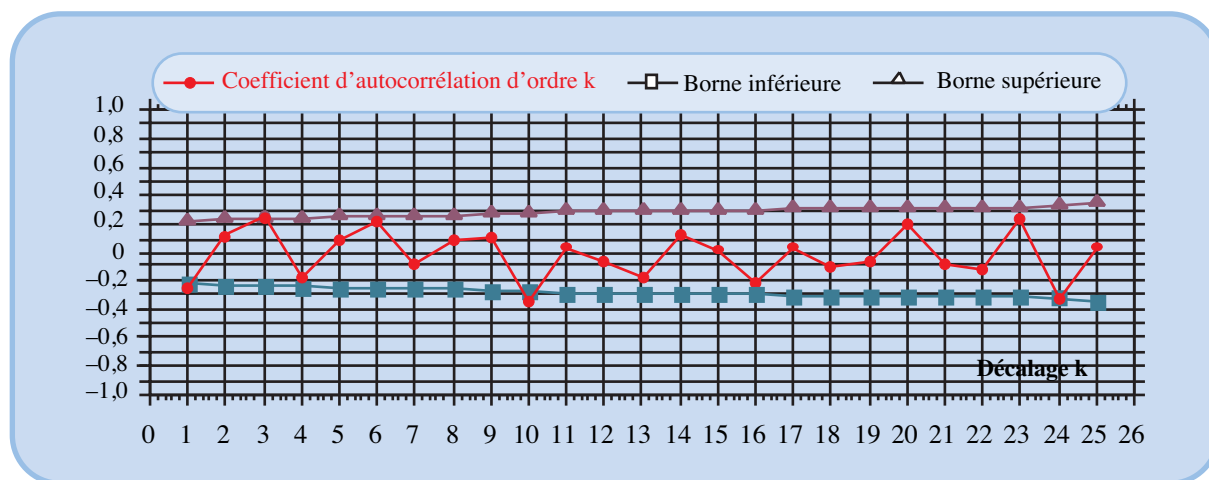
III-2.1.3 Exemple d'application

Reprenons la chronique des *résidus* (considérée comme la série x_t sur laquelle on travaille maintenant) obtenue en appliquant la méthode des moindres carrés (voir le [tableau 331, page 1075](#), et le corrélogramme correspondant à la [page 1079](#)) et dans laquelle les composantes tendancielle et saisonnière sont censées être correctement éliminées (ce qui n'est pas vrai si le modèle additif sous-jacent ne correspond pas à la réalité, ou si les résidus ne sont pas du type « bruit blanc »).

L'examen du corrélogramme de la [page 1079](#) suggère un ajustement à un processus autorégressif d'ordre 1. Les estimations initiales à fournir au programme sont le coefficient empirique d'autocorrélation d'ordre 1 ($\hat{\phi}_1^* = r_1 = 0,796$) et la moyenne observée pour la série, laquelle est nulle (puisqu'il s'agit d'une chronique de résidus obtenus par la méthode des moindres carrés). On obtient alors¹ la relation suivante : $x_t = 0 + \varepsilon_t + 0,75176x_{t-1}$ ($\rho^2 = 0,54$; écart type résiduel : 45,82), les résidus de la [figure 256 de la page 1097](#) et le corrélogramme de ces résidus de la [figure 257, page 1096](#).

FIGURE 257

Corrélogramme de la chronique des résidus du modèle AR(1) utilisé sur la chronique des résidus de la régression saisonnière (modèle additif) du tableau 331 de la page 1075



1. Comme pour le modèle MA qu'il « intègre », on estime par rétro-projection, ε_1 en même temps que les paramètres du modèle (ici $\hat{\varepsilon}_1 = -15,26$).

FIGURE 256

Résidus du modèle AR(1) utilisé sur la chronique des résidus de la régression saisonnière (modèle additif) du tableau 331 de la page 1075

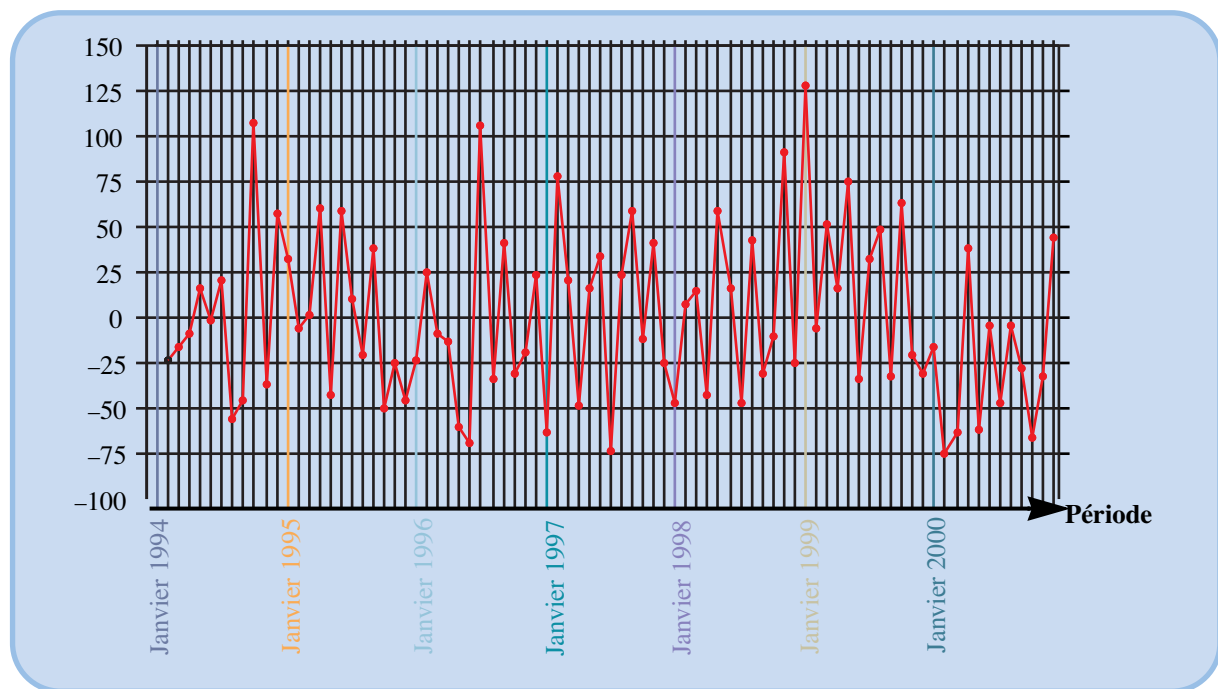


Table des matières

L'examen de ce corrélogramme suggère la présence complémentaire d'un processus en moyenne mobile, aussi essaye-t-on un processus ARMA(1,1) en fournissant comme estimation initiale des paramètres (voir formules dans le tableau 339 de la page 1094) : $\hat{\delta}^* = 0$; $b = \frac{1 - 2(0,760) + (0,760/0,796)^2}{0,796 - 0,760/0,796} =$

Index thématique

$-2,466$; $\hat{\phi}_1^* = 0,760/0,796 = 0,955$; $\hat{\theta}_1^* = \frac{-2,466 \pm \sqrt{(-2,466)^2 - 4}}{2}$ tel que $|\hat{\theta}_1^*| < 1 \rightarrow \hat{\theta}_1^* = 0,512$

Le modèle obtenu est légèrement meilleur que le précédent (le coefficient de détermination passant de 0,54 à 0,58) et correspond à l'équation suivante : $x_t = 0 + 0,34351\varepsilon_{t-1} + 0,90268x_{t-1}$ ($\hat{\rho}^2 = 0,54$). Les résidus de ce modèle sont donnés dans la figure 258 ; le corrélogramme correspondant est donné à la figure 259, page 1098. Les prévisions pour les périodes 85 (janvier 2001) et 86 (février 2001) sont celles fournies dans les exemples de la page 1096.

III-2.2 Traitement de chroniques tendancielles et saisonnières

Lorsque la composante aléatoire, qui s'ajoute à une chronique comportant un trend et des mouvements saisonniers, est un processus stationnaire, on peut, dans un grand nombre de cas, se ramener au problème précédent (étudié au § III-2.1.) en faisant appel préalablement à la technique du filtre différence (étudié au § II-4, page 1062). On a vu en effet que ce filtre permet d'éliminer un trend correctement approximé par une équation polynomiale, et que les fluctuations saisonnières peuvent « s'effacer » en faisant appel à des filtres du type : $(1 - B^{12})$, dans le cas de modèles saisonniers additifs.

FIGURE 258

Résidus du modèle ARMA(1,1) utilisé sur la chronique des résidus de la régression saisonnière (modèle additif) du tableau 331 de la page 1075

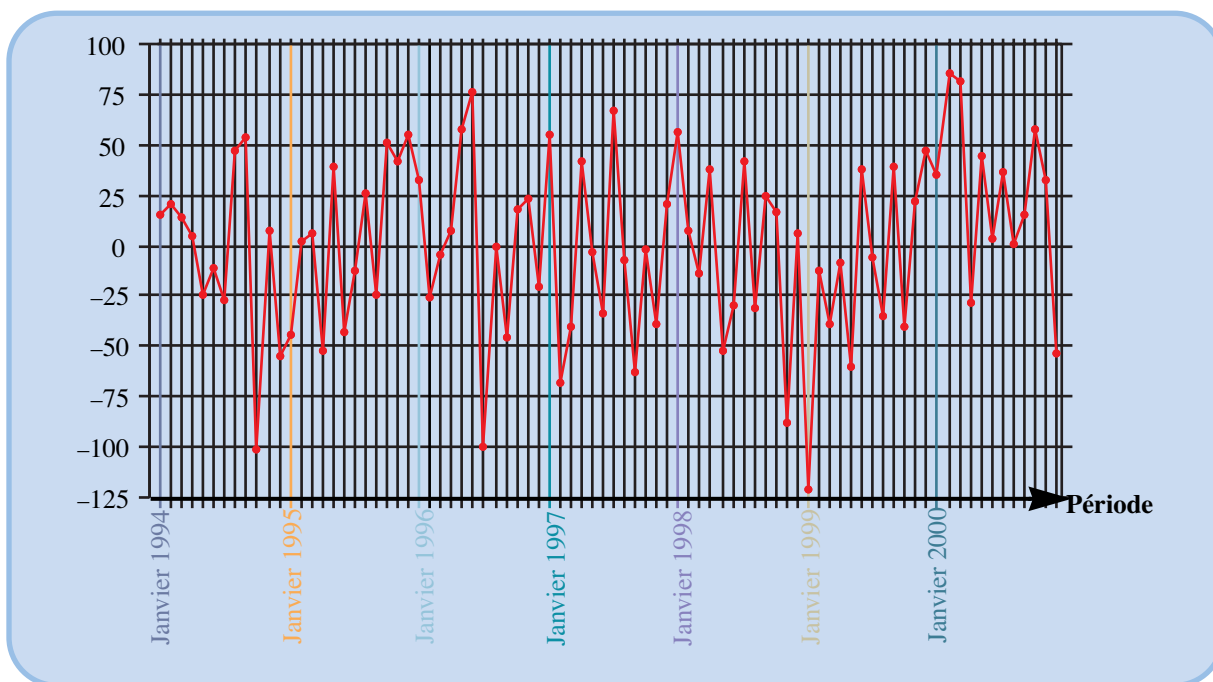


FIGURE 259

Corrélogramme des résidus du modèle ARMA(1,1) utilisé sur la chronique des résidus de la régression saisonnière (modèle additif) du tableau 331 de la page 1075

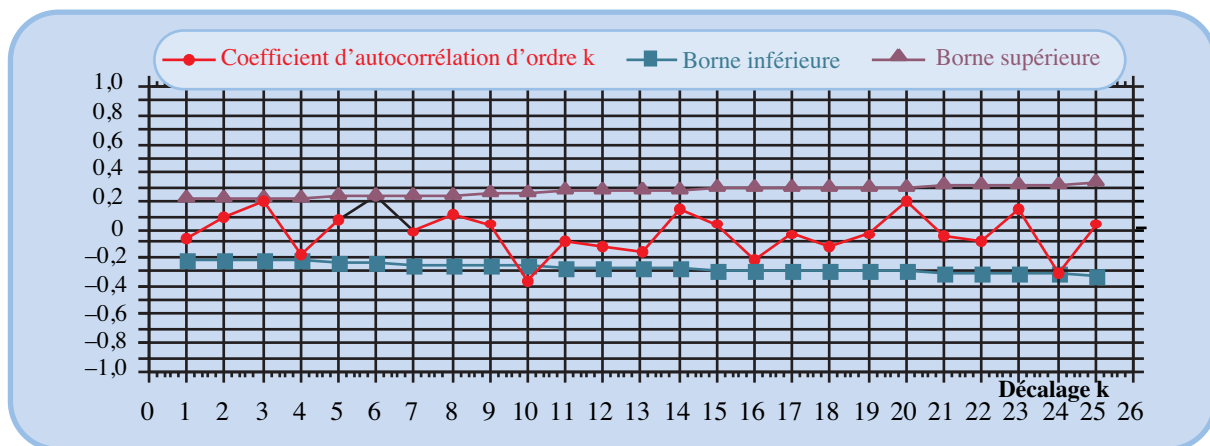


Table des matières

Index thématique

Cette classe de modèles est connue sous le nom de ARIMA, le I qui s’intercale entre AR(pour *Auto-Regressive*) et le MA(pour *Moving Average*) signifie *integrated*, c’est-à-dire sommation (sous-entendu de processus ARMA). Les raisons de cette appellation nous mèneraient trop loin¹, et nous nous contenterons ici de considérer le modèle ARIMA comme un modèle ARMA appliqué à une chronique qui s’obtient à partir de la chronique initiale par différenciation, où l’un des deux processus (AR ou MA) peut éventuellement ne pas intervenir (l’ordre de ce processus est alors nul).

1. Voir Box et Jenkins(1970, [65]), p. 89.

Reprenons par exemple la chronique z_t du [tableau 326 de la page 1064](#), qui est obtenue en appliquant à la chronique des ventes du rayon de ventes de journaux du Casimouth d'Alphaville, le filtre de différenciation $(1 - B)(1 - B^{12})$; l'examen de son corrélogramme ([figure 248, page 1065](#)) suggère l'application d'un modèle en moyenne mobile d'ordre 1. La valeur initiale du paramètre θ_1

est : $\hat{\theta}_1^* = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4(-0,39)^2}}{2(-0,39)}$ tel que $|\hat{\theta}_1^*| < 1$, ce qui donne $\hat{\theta}_1^* = -0,45$; par

ailleurs la valeur initiale du paramètre, μ est égale à la moyenne observée \bar{z} : $\hat{\mu}^* = -4,13$. Le modèle que l'on obtient¹ alors est :

$$z_t = -8,6591 + \varepsilon_t - 0,32088\varepsilon_{t-1} \quad (\rho^2 = 0,09, \text{écart-type résiduel} = 67,5).$$

L'application de ce modèle donne une chronique de résidus retracée à la [figure 260, page 1100](#), et dont le corrélogramme est donné à la [figure 261, page 1100](#). Les prévisions pour les périodes $t > 84$ s'effectuent en utilisant les résultats trouvés pour le modèle MA(1), en tenant compte de ce que ε_{84} , qui correspond à la perturbation aléatoire du mois de décembre 2000 (l'origine des temps étant janvier 1994), est égale à 143,47 : $\hat{z}_{85} = -8,6591 - 0,32088 \times 143,67 = -54,70$; $\hat{z}_t = -8,6591$, pour $t > 85$. Mais la prévision qui nous intéresse est celle qui porte sur la chronique initiale x_t . Or, par définition, on a : $z_t = (y_t - y_{t-1})$ et $y_t = x_t - x_{t-12}$. On peut alors écrire : $z_t = (x_t - x_{t-12}) - (x_{t-1} - x_{t-13})$, d'où :

$$x_t = z_t + x_{t-12} + x_{t-1} - x_{t-13}$$

$$x_t = (\mu + \varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1}) + x_{t-12} + x_{t-1} - x_{t-13}$$

$$x_t = -8,6591 + \varepsilon_t - 0,32088\varepsilon_{t-1} + x_{t-12} + x_{t-1} - x_{t-13}$$

$$x_{85} = \hat{z}_{85} + x_{73} + x_{84} - x_{72} = -54,70 + 739 + 674 - 751 = 607,30$$

$$x_{86} = \hat{z}_{86} + x_{74} + x_{85} - x_{73} = -8,66 + 624 + 607,3 - 739 = 483,64, \text{ etc.}$$

Trois remarques complémentaires doivent être faites avant d'en terminer sur ce point :

- Tout d'abord, il faut se rappeler que l'utilisation des filtres différences pour «stationnariser» une chronique induit nécessairement des oscillations cycliques non voulues sur la composante aléatoire (c'est l'effet Slutski-Yule, étudié au [§ II-5.1, page 1065](#)).
- Ensuite, Box et Jenkins² ont mis au point des techniques plus affinées pour ces chroniques tendancielle et saisonnières, permettant en particulier la prise en compte de modèles saisonniers de type multiplicatif. Ces modèles requièrent une assez grande expérience pour être mis en œuvre efficacement, et leur présentation dépasse nettement le propos introductif que nous nous sommes assignés ici
- On peut remarquer enfin que l'écart-type résiduel est du même ordre de grandeur que celui obtenu dans l'estimation simultanée du trend et des compo-

1. Comme pour le modèle MA «qu'il intègre», on estime par rétro-projection, ε_1 en même temps que les paramètres du modèle (ici $\hat{\varepsilon}_1 = -5,06$).

2. Box et Jenkins (1970, [65]), chapitre IX.

FIGURE 260

Résidus du modèle MA(1) utilisé sur la chronique obtenue par application successive des filtres $(1-B^{12})$ et $(1-B)$ à la chronique des ventes de Casimouth

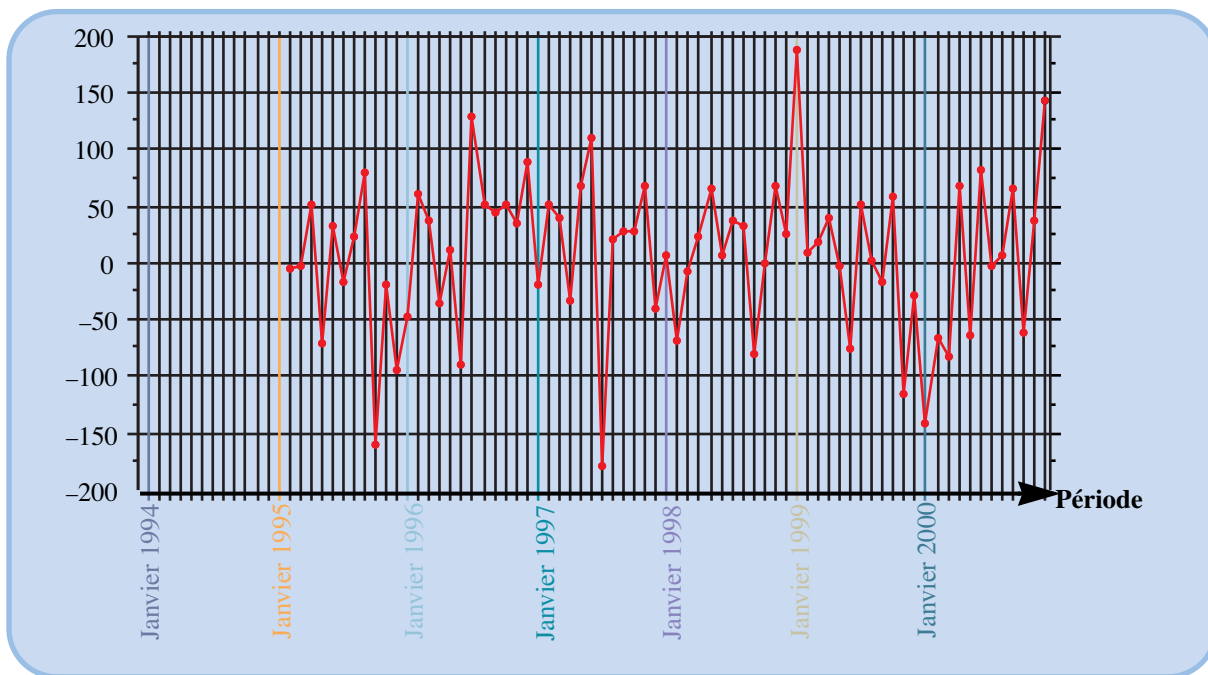


FIGURE 261

Corrélogramme des résidus du modèle MA(1) utilisé sur la chronique obtenue par application successive des filtres $(1-B^{12})$ et $(1-B)$ à la chronique des ventes de Casimouth

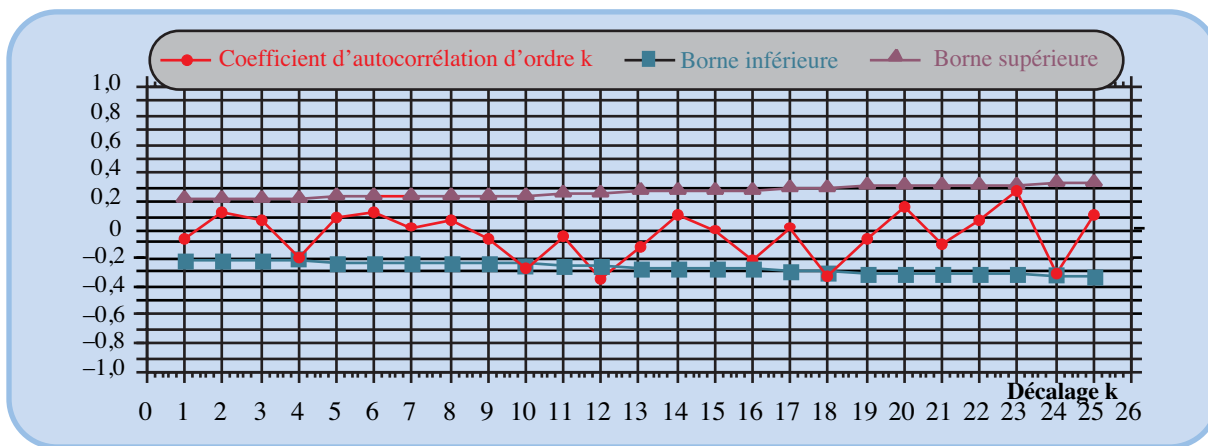


Table des matières

Index thématique

santes saisonnières par la méthode des moindres carrés, écart-type que l'on a pu ultérieurement sensiblement réduire en appliquant un modèle AR(1) ou un modèle ARMA(1,1) à cette chronique résiduelle. Cette comparaison n'est cependant pas tout à fait correcte: la méthode des moindres carrés peut avoir pour effet d'intégrer à la composante saisonnière d'une chronique, des fluctuations d'origine aléatoire (comme l'analyse de l'exemple numérique de la page 996 le laisse pressentir), et donc de diminuer arbitrairement la variance résiduelle du modèle des moindres carrés. D'un autre côté, rien ne garantit que l'application du filtre $(1 - B) (1 - B^{12})$ a correctement stationnarisé la

série, accroissant artificiellement ainsi la variance résiduelle du modèle étudié ici. Comme on le voit sur cet exemple, l'étude des chroniques à l'aide des outils relativement sophistiqués dont on dispose, requiert, outre une certaine technicité, de l'expérience et un doigté certain qui sont un obstacle à une large diffusion de ces méthodes.

III-3 Une utilisation simultanée de la régression multiple et des approches type «Box et Jenkins»: le modèle ARMAX

Lorsque les écarts résiduels ne sont pas du type «bruit blanc», les estimations fournies par les estimateurs classiques utilisés dans les programmes de régression multiple sont biaisées. Si ces aléas suivent un processus stationnaire, il est possible de résoudre ce problème, en utilisant des estimateurs des moindres carrés généralisés¹ (au lieu de ceux dits des moindres carrés ordinaires) qui permettent de mélanger les modèles ARMA et la régression multiple. Cette généralisation, désignée par ARMAX, présente les avantages suivants :

- par rapport aux programmes de régression multiple, de pouvoir fournir des valeurs fiables (parce que non biaisées) de la composante saisonnière d'une chronique, en utilisant l'approche du § III-1.1.2, page 1076, pour les composantes tendancielles et cycliques, et celle du § III-2.1, page 1084, pour la composante aléatoire;
- en deuxième lieu, par rapport aux approches de Box et Jenkins décrites au § III-2.2, de pouvoir fournir la composante saisonnière, ce qui pour le «gestionnaire de base» est directement intelligible (à la différence du filtre $(1 - B)(1 - B^{12})$ par exemple!);
- enfin, cette approche permet d'utiliser des modèles mixtes en ce sens qu'ils sont à la fois explicatifs parce qu'ils comportent des variables explicatives (nous avons écarté du champ de cette présentation les modèles explicatifs), et autoprojectifs (s'appuyant donc sur l'historique observé).

Le modèle se décompose comme suit: $x_t = y_t + \varepsilon_t$, où y_t est la partie non aléatoire de la chronique, c'est-à-dire le trend f_t et la composante saisonnière c_t (auxquels peuvent s'ajouter le cas échéant des variables explicatives de x_t) et ε_t est la partie aléatoire, qui est supposée correspondre à un modèle stationnaire. On peut décomposer à son tour cette chronique et à l'aide du modèle ARMA quelconque, de façon à retrouver une chronique résiduelle η_t de type bruit blanc:

$$\varepsilon_t = \text{partie expliquée} + \eta_t$$

L'application du modèle ARMAX nécessite le choix préalable d'un modèle à tester, et la fourniture d'estimations initiales des différents paramètres. On a retenu ici de «juxtaper»:

- le modèle additif étudié à la page 1080, et dont on sait que les estimations sont biaisées par l'autocorrélation des résidus),

1. Pour une présentation «opérationnelle» de ces approches, voir Makridakis, Wheelwright et Hyndman (1998, [291]), chapitre VIII. De nombreux auteurs anglo-saxons utilisent l'expression «regression with ARIMA errors» et non ARMAX retenu ici en raison des travaux et programmes de David (1975, [122]), exploités dans cette partie. Une discussion méthodologique rigoureuse et intelligible du problème des moindres carrés généralisé peut être trouvée dans Seber (1976, [378]), p. 60- 64.

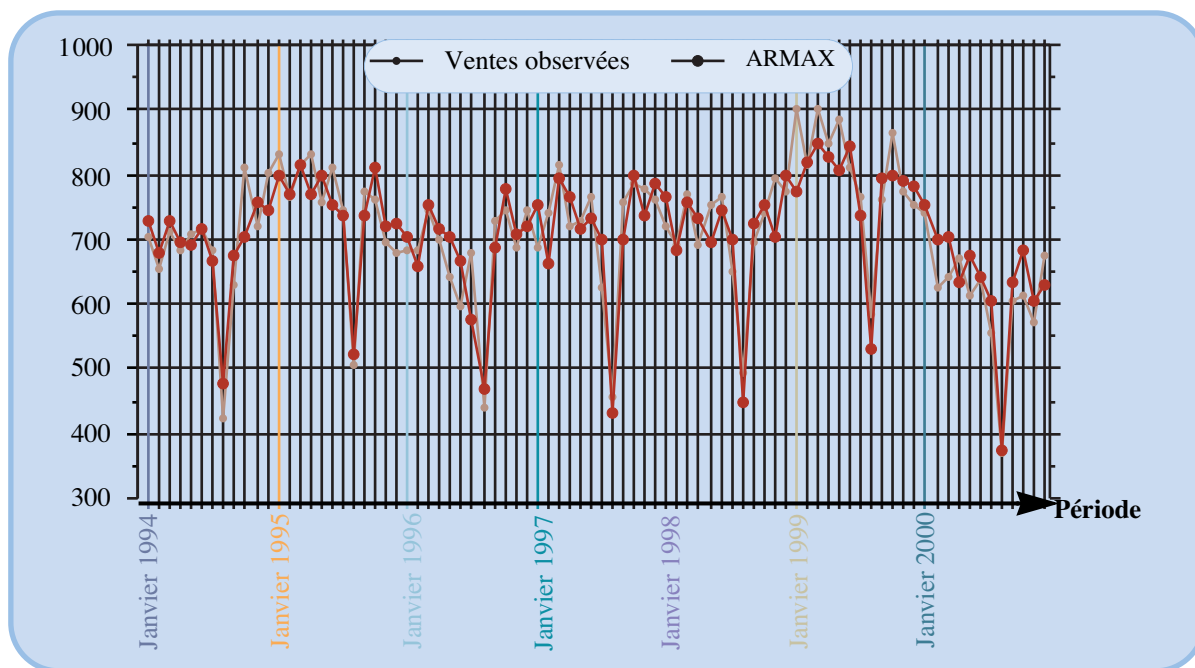
- le modèle autorégressif d'ordre 1 obtenu sur la chronique résiduelle du précédent modèle (donnés dans le [tableau 331 de la page 1075](#)) et étudié en exemple au [§ III-2.1.1.1, page 1085](#) (le paramètre autorégressif se modifiera dans le modèle ARMAX, puisque celui-ci modifiera la chronique des résidus).

Plusieurs approches de résolution numériques sont disponibles¹, Les valeurs trouvées dans ces deux modèles sont utilisées comme valeurs initiales² dans le processus de recherche d'une solution optimale pour le modèle ARMAX. Le modèle optimal trouvé ($\rho^2 = 0,76$) est le suivant:

$x_t = y_t + \varepsilon_t$, avec: $\varepsilon_t = 0,7449\varepsilon_{t-1} + \eta_t$, où η_t est une chronique de type bruit blanc et $y_t = 717,23 - 0,2688t + 43,57d_1 + 2,09d_2 + 62,75d_3 + 26,84d_4 + 18,64d_5 + 20,59d_6 - 35,28d_7 - 240,32d_8 + 54,08d_{10} + 10,84d_{11} + 34,68d_{12}$, où d_j est une variable indicatrice³ qui vaut 1 si la période t correspond au mois j , et 0 dans le cas contraire:

$$x_t = 717,23 - 0,2688t + 43,57d_1 + 2,09d_2 + 62,75d_3 + 26,84d_4 + 18,64d_5 + 20,59d_6 - 35,28d_7 - 240,32d_8 + 54,08d_{10} + 10,84d_{11} + 34,68d_{12} + 0,7449\varepsilon_{t-1} + \eta_t$$

FIGURE 262
Ventes estimées par le modèle ARMAX



1. Plusieurs approches sont disponibles. Nous avons utilisé ici les programmes de David (1975, [122]) lors de la première édition de cet ouvrage en 1981. Depuis plusieurs logiciels largement diffusés comme SAS et SPSS traitent cette classe de problème.

2. Comme pour le modèle MA «qu'il intègre», on estime par rétro-projection, ε_1 en même temps que les paramètres du modèle (ici $\hat{\varepsilon}_1 = -55,53$).

3. Le choix du mois de septembre comme mois pour lequel une variable indicatrice n'est pas créée (il n'y a pas d_9) s'explique par la valeur nulle prise par la composante saisonnière de ce mois, calculée sur la table de Buys Ballot (voir [tableau 329, page 1074](#)), c'est-à-dire en utilisant implicitement le principe de conservation des aires. L'interprétation plus directe des résultats de cette approche a conduit à ne pas reprendre «à l'identique» l'application des techniques classiques de régression multiple vues au [§ III-1.1.2, page 1076](#), dans lesquelles c'est la dernière période (décembre) qui arbitrairement ne fait pas l'objet d'une variable indicatrice.

Si l'on considère comme négligeable, parce que de l'ordre de l'unité, la modification de la composante saisonnière additive des mois de juillet, août, novembre, les seules modifications apportées par la détermination simultanée de tous les paramètres sont une augmentation de la décroissance tendancielle de la chronique qui passe de $-0,23$ à $-0,27$, qui est «balancée» par une faible diminution du paramètre autorégressif de la chronique résiduelle qui passe de $0,752$ à $0,745$. L'examen du corrélogramme des résidus de la [figure 263](#) montre que l'hypothèse d'une chronique résiduelle du type «bruit blanc» semble respectée.

FIGURE 263

Corrélogramme des résidus de l'application du modèle ARMAX à la chronique des ventes de Casimouth

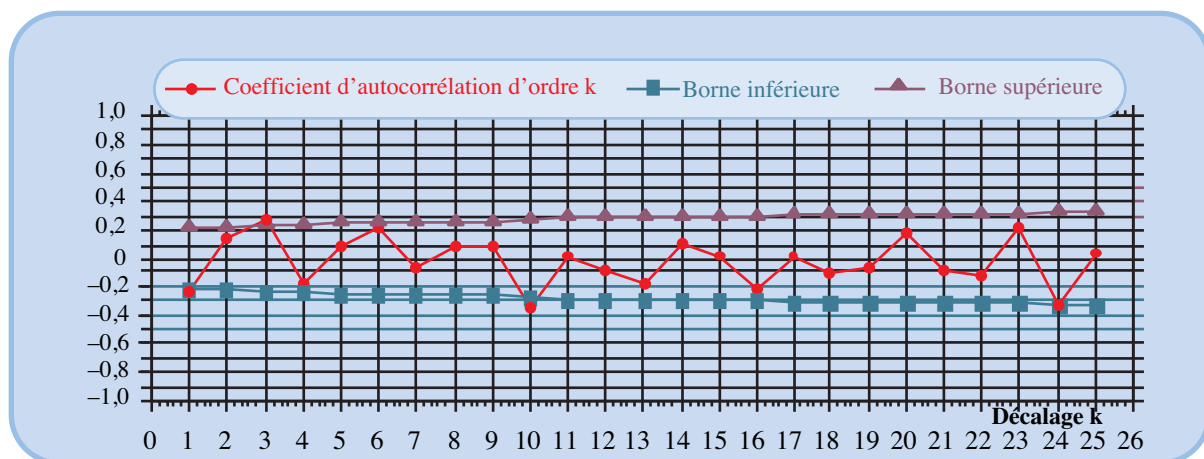


Table des matières

Index thématique

Les prévisions fournies par le modèle pour les 6 premiers mois de 2001 sont alors, si l'on tient compte du fait que $\hat{x}_t = \hat{y}_t + \hat{\varepsilon}_t = \hat{y}_t + (0,7449\varepsilon_{t-1} + \hat{\eta}_t) = \hat{y}_t + 0,7449\varepsilon_{t-1}$, du fait que $E(\eta_t) = 0$:

$$\begin{aligned}\hat{x}_{85} &= 717,23 - 0,2688 \times 85 + 43,57 + 0,7449\varepsilon_{84} = 737,95 + 0,7449(-55,33) \\ &= 696,72\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\hat{x}_{86} &= 717,23 - 0,2688 \times 86 + 2,09 + 0,7449\hat{\varepsilon}_{85} \\ &= 696,20 + 0,7449\{0,7449(-55,33) + 0\} = 696,20 + 0,7449^2(-55,33) \\ &= 665,49\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\hat{x}_{87} &= 717,23 - 0,2688 \times 87 + 62,75 + 0,7449\hat{\varepsilon}_{86} \\ &= 756,59 + 0,7449\{0,7449^2(-55,33) + 0\} = 756,59 + 0,7449^3(-55,33) \\ &= 733,69\end{aligned}$$

En définitive, le modèle ARMAX s'avère très performant dans l'étude de chroniques relatives à des données de gestion agrégées. Comme pour les approches de type Box & Jenkins, elle reste une technique applicable à des séries longues et nécessitant l'intervention de spécialistes longuement formés. Cette double restriction en limite la portée.

Chapitre XVI

PROGRAMMATION LINÉAIRE

La programmation linéaire¹ est une branche de la programmation mathématique qui s'occupe de problèmes d'optimisations sous contraintes. Cette discipline a longtemps fait l'objet de communications dont les apports se situaient essentiellement au niveau de la performance des algorithmes proposés. Depuis la fin des années quatre-vingt, des approches innovantes d'utilisation de ces techniques sont disponibles et, combinées aux progrès spectaculaires réalisés en micro-informatique, rendent accessibles ces approches au traitement de problèmes complexes, dans des conditions raisonnables de temps et de coût de traitement. On commencera par une présentation des techniques de base de la programmation linéaire (section I) avant d'examiner (section II, page 1132) quelques extensions de ces approches qui permettent de traiter des problèmes réalistes complexes et de tirer pleinement parti des nouveaux outils disponibles.

Table des
matières

SECTION I PRÉSENTATION DES BASES TECHNIQUES DE LA PROGRAMMATION LINÉAIRE

Index
thématique

Seul le cas des variables continues sera étudié dans cette section. On commencera par exposer les fondements de la programmation linéaire qui sont simples et non susceptibles d'améliorations (§ I-1). On examinera ensuite l'interprétation économique des résultats, ce qui est important pour l'usage de cette technique en gestion (§ I-2, page 1109), avant d'aborder (§ I-3, page 1111) l'analyse post-optimale intégrée dans les programmes de traitement informatique des problèmes de programmation linéaire. Cet exposé rapide des fondements de l'analyse post-optimale est nécessaire car, en gestion, les paramètres utilisés sont connus avec une certaine plage d'incertitude et toute présentation de solution ponctuelle a intérêt à être relativisée par une étude de sensibilité. On présentera enfin (§ I-4, page 1117) la méthode du simplexe utilisée pour résoudre numériquement le problème d'optimisation linéaire faisant intervenir des variables continues; de nos jours, son intérêt est plus de faciliter la compréhension des résultats et celle des analyses de sensibilité que strictement opérationnel car, comme on le verra, les tableurs sont dotés de fonctionnalités permettant de traiter facilement des problèmes de dimension modeste.

1. L'ouvrage, un peu ancien, de Wagner [435] reste l'un des plus clairs et complet (voir chapitres II à V) dans ce domaine (l'exemple numérique de la première section de ce chapitre est tiré de cet ouvrage). La lecture de ce texte peut être complétée, notamment en ce qui concerne les outils actuellement disponibles, par l'ouvrage d'Eric Jacquet-Lagrèze [241].

I-1 Les fondements de la programmation linéaire

Nous rappellerons successivement la formulation du problème (§ I-1.1) et sa solution analytique (§ I-1.2, page 1106).

I-1.1 Formulation du problème

Sur le plan mathématique, le problème posé peut toujours se ramener à celui de l'optimisation d'une fonction de forme linéaire, en respectant un ensemble de contraintes linéaires, fonctions des mêmes variables, lesquelles doivent être positives ou nulles.

Dans cette **forme**, dite **canonique**, le problème s'écrit, s'il s'agit d'un problème de maximisation :

- $\text{Max } \sum_{j=1}^n c_j x_j$
- sous m contraintes¹ : $\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i$, pour $i = 1, \dots, m$
- avec $x_j \geq 0$, pour $j = 1, \dots, n$

Si le problème posé est un problème de minimisation, on se ramène au cas précédent en maximisant $\sum_{j=1}^n (-c_j x_j)$.

Le problème peut être posé également sous une **forme** dite **standard** qui ne diffère de la forme canonique que par la transformation des inégalités en égalités. Ceci n'est possible qu'au prix de la création d'une variable d'écart x_{n+i} , par contrainte i . Le coefficient a_{ij} affecté à cette variable d'écart est nul dans toutes les contraintes, sauf celle concernée par cette variable, et, dans ce dernier cas, est égal à $+1$ si l'inégalité est du type « inférieur ou égal », et à -1 dans le cas contraire.

Au problème posé, appelé **problème primal** correspond un **problème** dit **dual** dans lequel :

- la fonction à minimiser (si le problème primal est un problème de maximum) est une combinaison linéaire des b_i ,
- cet optimum est lié à un ensemble de contraintes qui sont aussi des fonctions linéaires des a_{ij} , mais bornées cette fois par les c_j .

L'intérêt de l'examen simultané des problèmes dual et primal réside dans le fait que des relations caractéristiques unissent leurs solutions et, en particulier, que la valeur optimale prise par les deux fonctions à optimiser est la même. Ces deux problèmes peuvent être présentés dans le tableau synoptique de la page 1107, ces diverses notations y seront illustrées par un exemple numérique.

I-1.2 Solution analytique du problème

L'examen de la formulation standard du problème primal montre que les contraintes se traduisent par un système comportant m équations et $m + n$ incon-

1. Cette formulation «classique» est restrictive car il suffit qu'une seule de ces m contraintes soit du type \leq ou $=$ pour que le problème de maximisation sous contrainte puisse être posé.

TABLEAU 340
Formulations du problème

		Problème primal		Problème dual	
		Notation		notation	
		matricielle	en sommation	en sommation	matricielle
Forme canonique	fonction à optimiser	Max x_0 , avec: $x_0 = cx$	Max x_0 , avec: $x_0 = \sum_{j=1}^n c_j x_j$	Min y_0 , avec: $y_0 = \sum_{i=1}^m b_i y_i$	Min y_0 , avec: $y_0 = yb$
	sous contraintes	<ul style="list-style-type: none"> $x \geq 0$ $Ax \leq b$ avec: A; x; b (m, n) (n, 1) (m, 1) 	<ul style="list-style-type: none"> $x_j \geq 0$, pour $j = 1, \dots, n$ $\sum_{j=1}^n x_j a_{ij} \leq b_i$, pour $i = 1, \dots, m$ 	<ul style="list-style-type: none"> $y_i \geq 0$, pour $i = 1, \dots, m$ $\sum_{i=1}^m y_i a_{ij} \leq c_j$, pour $j = 1, \dots, n$ 	<ul style="list-style-type: none"> $y \geq 0$ $yA \leq c$ avec: y; A; b (1, m) (m, n) (1, n)
Forme standard	fonction à optimiser	Max x_0 avec $x_0 = cx$ et c ; x (1, n+m) (n+m, 1)	Max x_0 , avec: $x_0 = \sum_{j=1}^{n+m} c_j x_j$ $c_j = 0, \forall j$ tel que $n+1 \leq j \leq n+m$	Min y_0 , avec: $y_0 = \sum_{i=1}^{n+m} b_i y_i$ $b_i = 0, \forall i$ tel que $1 \leq i \leq n$	Min y_0 avec $y_0 = yb$ et y ; b (1, m+n) (m+n, 1)
	Sous contraintes	<ul style="list-style-type: none"> $x \geq 0$ $Dx = b$, avec: D = [A, I] et I (m, n+m) (m, m) 	<ul style="list-style-type: none"> $x_j \geq 0$ $\sum_{j=1}^{n+m} d_{ij} x_j = b_i$ avec: $i = 1, \dots, m$ $j = 1, \dots, n+m$ et: * $d_{ij} = a_{ij}$, pour $\forall i$ et $j = 1, \dots, n$ * $d_{ij} = 1$, pour $\forall i$ et $j = n+i$ * $d_{ij} = 0$, pour $\forall i$ et $j \neq n+i > n$ 	<ul style="list-style-type: none"> $y_i \geq 0$ $\sum_{i=1}^{n+m} g_{ij} y_i = c_j$ avec: $i = 1, \dots, m+n$ $j = 1, \dots, n$ et: * $g_{ij} = a_{hj}$, pour $\forall j$ et $\begin{cases} i = n+h \\ h = 1, \dots, m \end{cases}$ * $g_{ij} = -1$, pour $\forall j$ et $i = j \leq n$ * $g_{ij} = 0$, pour $\forall j$ et $i \neq j > n$ 	<ul style="list-style-type: none"> $y \geq 0$ $yG = c$, avec: G = $\begin{bmatrix} -I \\ A \end{bmatrix}$ et I (m, n+m) (m, m)
	Remarque		Les x_j tels que $j = n+1, \dots, n+m$ sont les variables d'écart du primal	Les y_i tels que $i = 1, \dots, n$ sont les variables d'écart du dual	

Table des matières

Index thématique

nues. Le système peut toujours être satisfait avec n variables nulles, les m restantes étant normalement non nulles, ce dernier ensemble constituant une base. Il est intuitivement évident que x_0 sera optimal pour une combinaison de variables non nulles comportant le moins de variables possibles, c'est-à-dire m. Si nous permutoons alors les colonnes de la matrice D, de façon qu'aux m premières, correspondent les variables constitutives de l'une des bases possibles et désignons par B

cette sous-matrice de D , et N la sous-matrice résiduelle, l'équation matricielle devient alors, en indiquant en conséquence x par B et par N ($\Rightarrow x_B$ et x_N):

$$Dx = [B, N] \begin{bmatrix} x_B \\ x_N \end{bmatrix} = Bx_B + Nx_N = b \quad \text{relation 472}$$

Comme x_N est nul, il en résulte que la solution du système est:

$$x_B = B^{-1}b \quad \text{relation 473}$$

La valeur prise par la fonction-objectif est alors $c_B B^{-1}b$, mais nous ignorons si cette valeur de la fonction-objectif constitue l'optimum recherché (lequel, soulignons-le, peut être obtenu pour plusieurs bases différentes). Pour répondre à cette question, il faudrait, a priori, rechercher la valeur prise par la fonction-objectif pour chacune des $\frac{(n+m)!}{m!n!}$ bases possibles (= combinaisons de m éléments pris parmi $m+n$).

Pour éviter d'explorer l'ensemble des combinaisons possibles, ce qui devient rapidement impossible lorsque n et m dépassent quelques dizaines, divers algorithmes ont été mis au point. Le plus général, proposé dans les années cinquante par Dantzig, est connu sous le nom de la méthode du simplexe et n'est rien d'autre que l'utilisation de la méthode d'élimination de Gauss pour la résolution d'un système d'équations, combinée avec l'utilisation d'un critère de sélection de bases et d'un indicateur permettant de dire si l'optimum est atteint. L'algorithme, qui sera présenté brièvement au § I-4, page 1117, calcule simultanément les solutions des problèmes primal et dual (si elles existent), puisque le critère utilisé nécessite¹ le calcul de la solution du problème dual (sous sa forme standard), que l'on démontre être:

$$y = [c_B B^{-1}A - c, c_B B^{-1}] \quad \text{relation 474}$$

et qui, à l'optimum², doit être positif ou nul. L'optimum n'est atteint que si $y \geq 0$.

Le premier bloc de ce vecteur ligne (noté y_c) correspond aux valeurs prises par les variables d'écart dans le problème dual, tandis que le second bloc (noté y_e) correspond aux valeurs prises par les variables qui n'interviennent que dans la

1. Le tableau de simplexe du départ se présente matriciellement: $\begin{bmatrix} 0_{11} & -c & 0_{1m} \\ b & A & I_m \end{bmatrix}$, où 0_{pq} est une matrice de 0 à p

lignes et q colonnes et I_m une matrice unité de rang m . À n'importe quelle itération (et donc pour n'importe quelle base), le tableau du simplexe s'obtient en prémultipliant la matrice précédente par $\begin{bmatrix} 1 & -c_B \\ 0_{m1} & B \end{bmatrix}^{-1}$, ce qui

donne $\begin{bmatrix} c_B B^{-1}b & c_B B^{-1}A - c & c_B B^{-1} \\ B^{-1}b & B^{-1}A & B^{-1} \end{bmatrix}$. La méthode du simplexe fournit donc simultanément une solution optimale au problème primal (en donnant les seules valeurs non nulles de ce problème) et une solution au problème dual (en fournissant toutes les valeurs des variables).

2. On peut remplacer A par N ou D , ce qui, à une permutation près (pour N) ou quelques zéros supplémentaires (pour D), fournit les mêmes conditions mais ne correspond plus immédiatement à y tel que nous l'avons défini.

formulation canonique du problème, en conséquence de quoi, la valeur prise par y_0 est, pour une solution optimale y_0^* :

$$y_0^* = y^*b = c_B B^{-1}b = x_0^* \quad \text{relation 475}$$

Nous vérifions donc ici la propriété énoncée plus haut et selon laquelle les fonctions à optimiser des deux problèmes dual et primal ont à l'optimum la même valeur.

Le grand intérêt de la méthode du simplexe est l'interprétation immédiate donnée à ce vecteur y , dont chaque composante y_i indique de combien diminue la valeur optimale x_0^* lorsque l'on accroît d'une unité¹ la variable correspondante x_i ou, ce qui revient au même, de combien s'accroît x_0^* lorsque l'on diminue d'une unité la variable correspondante. Or, une propriété importante lie les problèmes dual et primal : à l'optimum, lorsqu'une variable d'écart est positive, la variable duale correspondante est nulle, et réciproquement. Autrement dit, à la marge, le resserrement d'une contrainte non saturée n'a aucune incidence sur x_0 tandis que celui d'une contrainte saturée diminue (comme intuitivement on pouvait s'y attendre) la valeur optimale de x_0 . L'introduction d'une unité d'une variable hors base x_i diminue aussi cette valeur optimale x_0^* de y_i (on a alors $m + 1$ valeurs de variables supérieures à zéro). L'analyse post-optimale (cf. § I-3, page 1111) permet de pousser plus loin cette étude. Les tableaux 341 à 343 fournissent une illustration numérique des différents points évoqués jusqu'ici.

I-2 Interprétation économique des résultats

Dans une première catégorie de problèmes économiques, le vecteur x est un vecteur de production, le vecteur c un vecteur de profit unitaire et le vecteur b un vecteur de contraintes portant sur des ressources limitées. La matrice A est une matrice de coefficients techniques dans laquelle l'élément a_{ij} indique la quantité de ressources i , nécessaire à la production d'une unité du produit j .

La signification prise par x_0 est donc une valorisation de quantités. À l'optimum, on a $x_0^* = y_0^*$, autrement dit, y_0^* s'analyse aussi comme une valorisation de quantités. Cette dernière expression correspond au produit scalaire yb dans lequel le vecteur b s'analyse déjà comme un vecteur de quantités. Il s'ensuit que y est nécessairement un vecteur de prix ou de coûts pour que y_0 conserve la signification d'une valorisation de quantités.

Compte tenu de l'interprétation mathématique de y dans la variation de la valeur prise par x_0 au voisinage de l'optimum, c'est plutôt à une notion de coût que l'on fait appel et, compte tenu de leur caractère fictif, l'usage veut qu'on les appelle **coûts-fantômes**. Les variables duales correspondant aux contraintes du problème primal sont appelées aussi **prix-fantômes**.

D'autres problèmes économiques cherchent à satisfaire un ensemble de demandes définies par des seuils minimaux représentés par un vecteur b , à l'aide de facteurs productifs en quantité x (à déterminer) dont le coût est c , et tel que l'utilisation d'une unité de facteur productif permet de satisfaire a_{ij} de la demande i . Le problème est alors un problème de minimisation du coût global de production et s'écrit :

1. En toute rigueur, il s'agit de la dérivée de la fonction-objectif, par rapport à la contrainte.

TABLEAU 343
Résultat du simplexe et interprétation des résultats

Résultats du simplexe

• Tableau numérique initial

0	1	2	3	4	5	6	7
0	-4	-5	-9	-11	0	0	0
15	1	1	1	1	1	0	0
120	7	5	3	2	0	1	0
100	3	5	10	15	0	0	1

Tableau analytique correspondant

0_{11}	$-c$	0_{1m}
b	A	I_m

• Tableau numérique final

0	1	2	3	4	5	6	7
$\frac{695}{7}$	0	$\frac{3}{7}$	0	$\frac{11}{7}$	$\frac{13}{7}$	0	$\frac{5}{7}$
$\frac{50}{7}$	$\leftarrow \textcircled{1}$	$\frac{5}{7}$	0	$-\frac{5}{7}$	$\frac{10}{7}$	0	$-\frac{1}{7}$
$\frac{325}{7}$	0	$-\frac{6}{7}$	0	$\frac{13}{7}$	$-\frac{61}{7}$	$\leftarrow \textcircled{1}$	$\frac{4}{7}$
$\frac{55}{7}$	0	$\frac{2}{7}$	$\leftarrow \textcircled{1}$	$\frac{12}{7}$	$-\frac{3}{7}$	0	$\frac{1}{7}$

Tableau analytique correspondant

$c_B B^{-1}b$	$c_B B^{-1}A - c$	$c_B B^{-1}$	=	$x_0^* = y_0^*$	y_c^*	y_e^*
$B^{-1}b$	$B^{-1}A$	B^{-1}		x_B^*	$B^{-1}A$	B^{-1}

• Tableau numérique initial après permutation des colonnes pour «isoler» la base (l'ordre retenu pour les variables rentrant dans la base doit être tel que l'on ait $B^{-1}B = I$)

0	2	4	5	7	1	6	3
0	-5	-11	0	0	-4	0	9
15	1	1	1	0	1	0	1
120	5	2	0	0	7	1	3
100	3	15	0	1	3	0	10

tableau analytique correspondant

0_{11}	$-c_N$	$-c_B$
b	N	B

Interprétation des résultats pour le problème primal

— À l'optimum on a

- Fonction à maximiser: $x_0 = 4(50/7) + 9(55/7) = 695/7$
- Contrainte 1: $1(50/7) + 1(55/7) = 15$ (saturation)
- Contrainte 2: $7(50/7) + 3(55/7) = 515/7$ (non saturation, reste $325/7$)
- Contrainte 3: $3(50/7) + 10(55/7) = 100$ (saturation)

— Interprétation mathématique des variables duales

- Introduction supplémentaire d'une variable hors base dans la solution: exemple $1x_2$
 - $x_1 \rightarrow 50/7 - 5/7 = 45/7$; $x_6 \rightarrow 325/7 + 6/7 = 331/7$; $x_3 \rightarrow 55/7 - 2/7 = 53/7$
 - contrainte 1: $1(45/7) + 1(1) + 1(53/7) = 15$ (saturation)
 - contrainte 2: $7(45/7) + 5(1) + 3(53/7) = 509/7$ (non saturation, reste $331/7$)
 - contrainte 3: $3(45/7) + 5(1) + 10(53/7) = 100$ (saturation)
 - fonction-objectif: $4(45/7) + 5(1) + 9(53/7) = 692/7$ (soit une perte de $3/7$)
- Resserrement d'une contrainte saturée: exemple $b_1 \rightarrow 14$
 - $x_1 \rightarrow 50/7 - 10/7 = 40/7$; $x_6 \rightarrow 325/7 + 61/7 = 386/7$; $x_3 \rightarrow 55/7 + 3/7 = 58/7$
 - contrainte 1: $1(40/7) + 1(58/7) = 14$ (saturation)
 - contrainte 2: $7(40/7) + 3(58/7) = 424/7$ (non saturation, reste $386/7$)
 - contrainte 3: $3(40/7) + 10(58/7) = 100$ (saturation)
 - fonction-objectif: $4(40/7) + 9(58/7) = 682/7$ (soit une perte de $13/7$)

TABLEAU 341
Formulation du problème

		PRIMAL	DUAL		
		Formulation matricielle	Formulation explicite		
Fonction à optimiser		Max $x_0 (=cx)$, avec $c = \begin{bmatrix} 4 & 5 & 9 & 11 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ $x' = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \end{bmatrix}$ Dans la formulation { ... canonique ... standard	Max x_0 , avec $x_0 = 4x_1 + 5x_2 + 9x_3 + 11x_4$	Min y_0 , avec $y_0 = 15y_5 + 120y_6 + 100y_7$	Min $y_0 (=yb)$, avec $y = \begin{bmatrix} y_1 & y_2 & y_3 & y_4 & y_5 & y_6 & y_7 \end{bmatrix}$ Dans la formulation { ... canonique ... standard
	Sous contraintes	Forme canonique $Ax \leq b$, avec $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 7 & 5 & 3 & 2 \\ 3 & 5 & 10 & 15 \end{bmatrix}$ $b = \begin{bmatrix} 15 \\ 120 \\ 100 \end{bmatrix}$	$1x_1 + 1x_2 + 1x_3 + 1x_4 \leq 15$ $7x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 2x_4 \leq 120$ $3x_1 + 5x_2 + 10x_3 + 15x_4 \leq 100$ $x_1 \geq 0 ; x_2 \geq 0 ; x_3 \geq 0 ; x_4 \geq 0$	$1y_5 + 7y_6 + 3y_7 \geq 4$ $1y_5 + 5y_6 + 5y_7 \geq 5$ $1y_5 + 3y_6 + 10y_7 \geq 9$ $1y_5 + 2y_6 + 15y_7 \geq 11$ $y_5 \geq 0 ; y_6 \geq 0 ; y_7 \geq 0$	$yA \geq c$
	Forme standard $Dx = b$, avec $D = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 7 & 5 & 3 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 5 & 10 & 15 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ $b = \begin{bmatrix} 15 \\ 120 \\ 100 \end{bmatrix}$	(1) $1x_1 + 1x_2 + 1x_3 + 1x_4 + x_5 = 15$ (2) $7x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 2x_4 + x_6 = 120$ (3) $3x_1 + 5x_2 + 10x_3 + 15x_4 + x_7 = 100$ $x_j \geq 0, \forall j$	(1') $1y_5 + 7y_6 + 3y_7 - y_1 = 4$ (2') $1y_5 + 5y_6 + 5y_7 - y_2 = 5$ (3') $1y_5 + 3y_6 + 10y_7 - y_3 = 9$ (4') $1y_5 + 2y_6 + 15y_7 - y_4 = 11$ $y_i \geq 0, \forall i$	$yG = c$; avec: $G = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 7 & 5 & 3 & 2 \\ 3 & 5 & 10 & 15 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -I \\ A \end{bmatrix}$	

Table des matières

Index thématique

Min cx
sous contraintes $Ax \geq b$ et $x \geq 0$

Les variables duales associées aux contraintes productives s'analysent comme un système de prix correspondant à une tarification au coût marginal puisque chaque y_i représente l'accroissement du coût global résultant d'une extension d'une unité de la $i^{\text{ème}}$ contrainte, c'est-à-dire de la satisfaction d'une unité supplémentaire de demande de i^1 . Ce système de prix en outre est tel qu'il assure juste la couverture des coûts de production, propriété qui résulte de l'égalité à l'optimum, des deux fonctions-objectifs.

I-3 Introduction à l'analyse post-optimale

L'analyse post-optimale consiste en une étude de sensibilité des résultats ponctuels fournis par la résolution du programme linéaire, lorsque l'on fait varier une ou plusieurs valeurs des paramètres de c , b ou A . En pratique, on réserve le terme d'analyse post-optimale à la recherche des domaines de variation de ces paramètres qui n'entraînent pas de remise en cause de la base retenue dans la solu-

1. Notons que si la demande à satisfaire pour certains produits est faible et que, dans le processus productif, il est inévitable de les produire en assez grande quantité (productions dites fatales), les contraintes correspondantes ont de fortes chances de ne pas être saturées, les variables duales associées sont alors nulles, et de ce fait les tarifs correspondants le sont aussi, ce qui, commercialement parlant, peut poser quelques problèmes.

TABLEAU 342
Présentation de la solution

Primal	Dual																											
<p>Solution: $x_B = B^{-1}b; x_N = 0;$ $x_0 = c_B B^{-1}b$</p> <p>$x_B^* = \begin{matrix} x_1^* & x_6^* & x_3^* \\ \hline \frac{50}{7} & \frac{325}{7} & \frac{55}{7} \end{matrix}$</p> <p>$B = \begin{matrix} 1 & 0 & 1 \\ 7 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & 10 \end{matrix}$</p> <p>$c_B = \begin{matrix} 4 & 0 & 9 \end{matrix}$</p> <p>$x_N^* = \begin{matrix} x_2^* & x_4^* & x_5^* & x_7^* \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix}$</p> <p>$N = \begin{matrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 5 & 2 & 0 & 0 \\ 5 & 15 & 0 & 1 \end{matrix}$</p> <p>$c_N = \begin{matrix} 5 & 11 & 0 & 0 \end{matrix}$</p> <p>Solution optimale si <i>.ou</i> $c_B B^{-1}D - c \geq 0$ <i>et</i> $c_B B^{-1} \geq 0$ (formulation standard) <i>.ou</i> $c_B B^{-1}A - c \geq 0$ <i>et</i> $c_B B^{-1} \geq 0$ (formulation canonique) <i>.ou</i> $c_B B^{-1}N - c_B \geq 0$ <i>et</i> $c_B B^{-1} \geq 0$ avec</p> <p>$c_B B^{-1}D - c = \begin{matrix} 0 & \frac{3}{7} & 0 & \frac{11}{7} & 0 & 0 & 0 \end{matrix}$</p> <p>$c_B B^{-1}A - c = \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline 0 & \frac{3}{7} & 0 & \frac{11}{7} \end{matrix}$</p> <p>$c_B B^{-1} = \begin{matrix} 1 & 6 & 3 \\ \hline \frac{13}{7} & 0 & \frac{5}{7} \end{matrix}$</p> <p>$c_B B^{-1}N - c_B = \begin{matrix} 2 & 4 & 5 & 7 \\ \hline \frac{3}{7} & \frac{11}{7} & 0 & 0 \end{matrix}$</p>	<p>Solution optimale des problèmes primal et dual</p> <table border="1" style="margin-left: auto; margin-right: auto;"> <tr> <td>h</td> <td>0</td> <td>1</td> <td>2</td> <td>3</td> <td>4</td> <td>5</td> <td>6</td> <td>7</td> </tr> <tr> <td>x_h^*</td> <td>$\frac{695}{7}$</td> <td>$\frac{50}{7}$</td> <td>0</td> <td>$\frac{55}{7}$</td> <td>0</td> <td>0</td> <td>$\frac{325}{7}$</td> <td>0</td> </tr> <tr> <td>y_h^*</td> <td>$\frac{695}{7}$</td> <td>0</td> <td>$\frac{3}{7}$</td> <td>0</td> <td>$\frac{11}{7}$</td> <td>$\frac{13}{7}$</td> <td>0</td> <td>$\frac{5}{7}$</td> </tr> </table> <p><i>Variable d'écart du dual</i> (pointing to cell 4,5)</p> <p><i>Variable d'écart du primal</i> (pointing to cell 4,5)</p> <p><i>Lorsqu'une variable d'écart est nulle, la variable duale correspondante est positive et réciproquement</i></p> <p>La solution du problème dual exprimé avec les résultats du primal est:</p> <p>$y^* = \begin{matrix} c_B B^{-1}A - c & c_B B^{-1} \\ \hline \text{Variables d'écart du dual} & \text{Variables canoniques du dual} \end{matrix}$</p> <p>soit ici:</p> <p>$y^* = \begin{matrix} y_1^* & y_2^* & y_3^* & y_4^* & y_5^* & y_6^* & y_7^* \\ \hline 0 & \frac{3}{7} & 0 & \frac{11}{7} & \frac{13}{7} & 0 & \frac{5}{7} \end{matrix}$</p> <p><i>prix-fantômes du primal</i> (underlined)</p> <p><i>coûts-fantômes du primal</i> (bracketed)</p>	h	0	1	2	3	4	5	6	7	x_h^*	$\frac{695}{7}$	$\frac{50}{7}$	0	$\frac{55}{7}$	0	0	$\frac{325}{7}$	0	y_h^*	$\frac{695}{7}$	0	$\frac{3}{7}$	0	$\frac{11}{7}$	$\frac{13}{7}$	0	$\frac{5}{7}$
h	0	1	2	3	4	5	6	7																				
x_h^*	$\frac{695}{7}$	$\frac{50}{7}$	0	$\frac{55}{7}$	0	0	$\frac{325}{7}$	0																				
y_h^*	$\frac{695}{7}$	0	$\frac{3}{7}$	0	$\frac{11}{7}$	$\frac{13}{7}$	0	$\frac{5}{7}$																				

Table des matières

Index thématique

tion ponctuelle de départ, les valeurs prises dans la base pouvant changer. Le terme d'**analyse paramétrée** est utilisé pour les analyses de sensibilité qui acceptent de remettre en cause les solutions de départ. On ne s'attardera ici que sur les analyses portant sur les vecteurs c et b , d'une part parce que ce sont celles qui nous intéressent au premier chef et, d'autre part, parce que l'analyse post-optimale portant sur les coefficients de la matrice A , simple dans ses fondements, nécessite dans sa présentation de longs développements de calcul matriciel.

I-3.1 Modification de coefficients de la fonction-objectif

La solution du programme linéaire est, nous l'avons vu, $B^{-1}b$, expression qui est indépendante des coefficients de la fonction-objectif et pour laquelle on est assuré que les contraintes sont satisfaites. Mais cette modification du vecteur c qui devient $c + \Delta c$ ne permet plus d'affirmer que la solution reste optimale et donc inchangée. Pour qu'il en soit ainsi, il faut que les conditions d'optimalité ($c_B B^{-1}A - c \geq 0$ et $c_B B^{-1} \geq 0$) restent satisfaites avec le nouveau vecteur $c + \Delta c$, c'est-à-dire que l'on ait (en désignant par y_c^* et y_e^* les valeurs optimales de y^* correspondant respectivement aux variables canoniques et aux variables d'écart du problème primal):

$$(c_B + \Delta c_B)B^{-1}A - (c + \Delta c) = \{c_B B^{-1}A - c\} + \Delta c_B B^{-1}A - \Delta c$$

$$(c_B + \Delta c_B)B^{-1}A - (c + \Delta c) = y_c^* - \Delta c + \Delta c_B B^{-1}A \geq 0 \quad \text{relation 476}$$

$$(c_B + \Delta c_B)B^{-1} = c_B B^{-1} + \Delta c_B B^{-1} = y_e^* + \Delta c_B B^{-1} \geq 0 \quad \text{relation 477}$$

La lecture du tableau du simplexe nous indique que:

$$y_c^* = \{c_B B^{-1}A - c\} = [0, 3/7, 0, 11/7]; y_e^* = c_B B^{-1} = [13/7, 0, 5/7]$$

$$B^{-1}A = \begin{bmatrix} 1 & 5/7 & 0 & -5/7 \\ 0 & -6/7 & 0 & 13/7 \\ 0 & 2/7 & 1 & 12/7 \end{bmatrix}; B^{-1} = \begin{bmatrix} 10/7 & 0 & -1/7 \\ -61/7 & 1 & 4/7 \\ -3/7 & 0 & 1/7 \end{bmatrix}$$

Table des
matières

Index
thématique

L'examen de ces conditions nous mène à dissocier le cas des coefficients de variables de la base, de celles qui ne sont pas dans la base. Nous examinerons successivement ces 2 cas lorsqu'un seul coefficient peut varier. Nous aborderons ensuite le cas général avec l'étude des implications de la variation simultanée de deux coefficients.

I-3.1.1 Modification d'un coefficient d'une variable hors base

Comme Δc_B est nul par hypothèse, les conditions se simplifient: la seconde condition (relation 477) est toujours satisfaite, tandis que la première (relation 476) devient: $y_c^* - \Delta c \geq 0$, d'où $\Delta c \leq y_c^*$.

Autrement dit, les coefficients des variables «hors base» peuvent varier sans remettre en cause l'optimalité de la solution de départ, à condition que cette variation soit au plus égale à la valeur optimale duale correspondante s'il s'agit d'un accroissement, et sans limitation si cette variation est négative.

Exemple: La variable x_2 de notre exemple numérique est hors base, son coefficient peut varier sans remettre en cause l'optimum $(x_1^* = \frac{50}{7}; x_6^* = \frac{325}{7}; x_3^* = \frac{55}{7})$, si $c_2 \leq (5 + \frac{3}{7})$ ou, ce qui revient au même, si $\Delta c_2 \leq \frac{3}{7}$.

I-3.1.2 Modification d'un coefficient d'une variable de la base

Dans ce cas, la valeur prise par l'optimum x_0 change du fait de la variation des c_B puisque $x_0 = c_B B^{-1}b$, sans que l'on ait pour autant de modification des valeurs prises par la base (comme nous l'avons vu ci-dessus). Si un seul coefficient c_j

change, on a autant d'inéquations à une seule variable (Δc_j) qu'il y a de variables duales, l'intersection des domaines de validité fournit alors la réponse souhaitée.

Exemple: Supposons que le coefficient c_1 seul varie pour devenir $c_1 = 4 + \Delta c_1$, on a alors $\Delta c = [\Delta c_1, \Delta c_2 = 0, \Delta c_3 = 0, \Delta c_4 = 0] = [\Delta c_1, 0, 0, 0]$ et

$\Delta c_B = [\Delta c_1, \Delta c_6 = 0, \Delta c_3 = 0] = [\Delta c_1, 0, 0]$ et l'on peut écrire:

$$(c_B B^{-1} A - c) - \Delta c = y_c^* - \Delta c = [0, 3/7, 0, 11/7] - [\Delta c_1, 0, 0, 0] = [-\Delta c_1, 3/7, 0, 11/7]$$

les conditions d'optimalité sont donc:

- $\Delta c_B B^{-1} A + y_c^* - \Delta c \geq 0$

$$[\Delta c_1, 0, 0] \cdot \begin{bmatrix} 1 & 5/7 & 0 & -5/7 \\ 0 & -6/7 & 0 & 13/7 \\ 0 & 2/7 & 1 & 12/7 \end{bmatrix} + \left[-\Delta c_1, \frac{3}{7}, 0, \frac{11}{7} \right] \geq 0$$

c'est-à-dire: $\frac{3}{7} + \frac{5}{7}\Delta c_1 \geq 0$; $\frac{11}{7} - \frac{5}{7}\Delta c_1 \geq 0$

- $\Delta c_B B^{-1} + y_e^* \geq 0$

$$[\Delta c_1, 0, 0] \cdot \begin{bmatrix} 10/7 & 0 & -1/7 \\ -61/7 & 1 & 4/7 \\ -3/7 & 0 & 1/7 \end{bmatrix} + \left[\frac{13}{7}, 0, \frac{5}{7} \right] \geq 0$$

c'est-à-dire: $\frac{13}{7} + \frac{10}{7}\Delta c_1 \geq 0$; $\frac{5}{7} - \frac{1}{7}\Delta c_1 \geq 0$

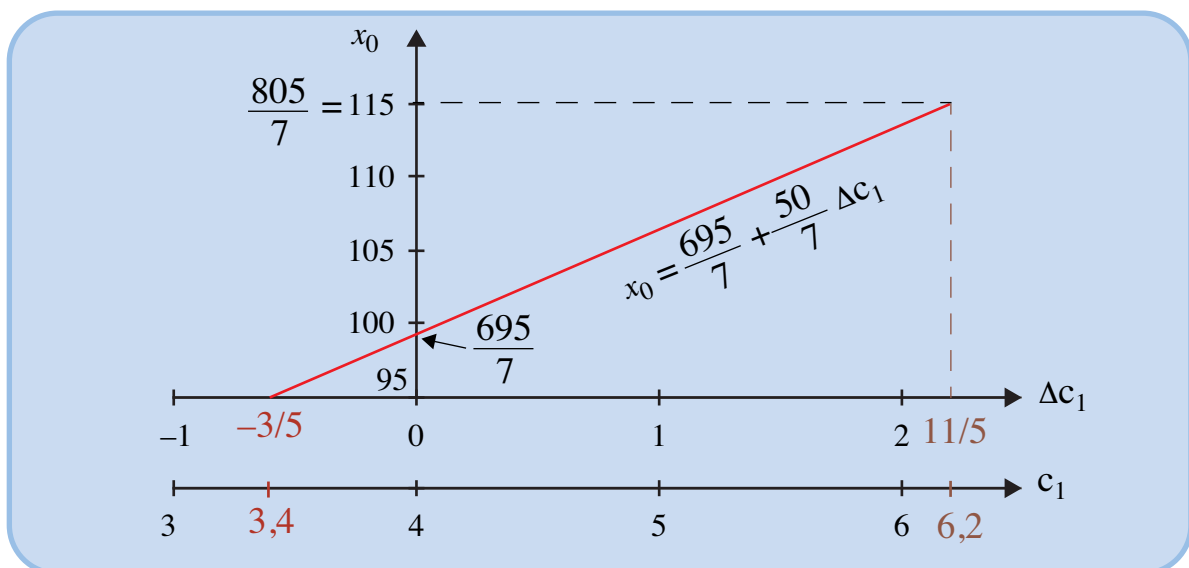
La réunion de ces conditions permet de définir le domaine suivant:

$$-3/5 \leq \Delta c_1 \leq 11/5$$

La valeur optimale varie dans cet intervalle de définition comme, $x_1^* \Delta c_1$ puisque x_1^* n'est pas affecté; c'est-à-dire que l'on a (voir *figure 264*): $x_0 = x_0^* + \frac{50}{7} \Delta c_1 = \frac{695}{7} + \frac{50}{7} \Delta c_1$

FIGURE 264

Modification d'un coefficient d'une variable de la base



I-3.1.3 Modification de plusieurs coefficients de la fonction-objectif

Que la variation porte sur un ou plusieurs coefficients, les conditions d'optimalité doivent rester satisfaites avec le nouveau vecteur $c + \Delta c$, c'est-à-dire que l'on doit avoir: $y_c^* - \Delta c + \Delta c_B B^{-1} A \geq 0$ et $y_e^* + \Delta c_B B^{-1} \geq 0$.

Supposons que l'on admette une variation simultanée des coefficients c_1 et c_3 (qui tous deux appartiennent à la base, mais le raisonnement général resterait le même s'il n'en était pas ainsi); on a donc:

$$\Delta c = [\Delta c_1, \Delta c_2 = 0, \Delta c_3, \Delta c_4 = 0] = [\Delta c_1, 0, \Delta c_3, 0] \quad \text{relation 478}$$

$$\Delta c_B = [\Delta c_1, \Delta c_6 = 0, \Delta c_3] = [\Delta c_1, 0, \Delta c_3] \quad \text{relation 479}$$

Dans notre *exemple*, la première des deux conditions d'optimalité implique donc:

$$[0, 3/7, 0, 11/7] - [\Delta c_1, 0, \Delta c_3, 0] + [\Delta c_1, 0, \Delta c_3] \begin{bmatrix} 1 & 5/7 & 0 & -5/7 \\ 0 & -6/7 & 0 & 13/7 \\ 0 & 2/7 & 1 & 12/7 \end{bmatrix} \geq 0$$

$$[-\Delta c_1, 3/7, -\Delta c_3, 11/7] + [\Delta c_1, (5\Delta c_1 + 2\Delta c_3)/7, \Delta c_3, (-5\Delta c_1 + 12\Delta c_3)/7] \geq 0$$

$$[0, (3 + 5\Delta c_1 + 2\Delta c_3)/7, 0, (11 - 5\Delta c_1 + 12\Delta c_3)/7] \geq 0,$$

ce qui conduit au premier système de contraintes:
$$\begin{cases} 3 + 5\Delta c_1 + 2\Delta c_3 \geq 0 \\ 11 - 5\Delta c_1 + 12\Delta c_3 \geq 0 \end{cases}$$

La seconde des deux conditions d'optimalité implique que l'on ait:

$$[13/7, 0, 5/7] + [\Delta c_1, 0, \Delta c_3] \begin{bmatrix} 10/7 & 0 & -1/7 \\ -61/7 & 1 & 4/7 \\ -3/7 & 0 & 1/7 \end{bmatrix} \geq 0$$

$$[13/7, 0, 5/7] + [(10\Delta c_1 - 3\Delta c_3)/7, 0, (-\Delta c_1 + \Delta c_3)/7] \geq 0$$

$$[(13 + 10\Delta c_1 - 3\Delta c_3)/7, 0, (5 - \Delta c_1 + \Delta c_3)/7] \geq 0,$$

ce qui conduit au second système de contraintes:
$$\begin{cases} 13 + 10\Delta c_1 - 3\Delta c_3 \geq 0 \\ 5 - \Delta c_1 + \Delta c_3 \geq 0 \end{cases}$$

Ces systèmes de contraintes se traduisent graphiquement par le domaine de validité défini par la zone en bleu pâle de la [figure 265, page 1116](#).

Les valeurs de x_1 et de x_3 restant inchangées, la valeur prise par la fonction-objectif est: $x_0 = x_0^* + \frac{50}{7}\Delta c_1 + \frac{55}{7}\Delta c_3 = \frac{695}{7} + \frac{50}{7}\Delta c_1 + \frac{55}{7}\Delta c_3$. Ajoutons, pour en terminer sur ce point, que la généralisation à plus de deux coefficients, ne pose qu'un problème de «visualisation» du domaine de validité des variations simultanées de ces coefficients.

I-3.2 Modification du second membre d'une contrainte

On remarque tout d'abord que cette analyse peut être effectuée à partir du problème dual puisque les constantes des seconds membres des contraintes sont aussi les coefficients de la fonction-objectif du dual. On peut toutefois faire sans difficulté l'analyse directe de ce cas. En effet, les conditions d'optimalité (= coûts-fantômes y^*) ne font pas intervenir le vecteur b , on est donc assuré que la solution est optimale, mais rien ne garantit alors que cette solution (= $B^{-1}b$) reste faisable, c'est-à-dire que toutes les composantes du vecteur x restent positives. On doit donc avoir:

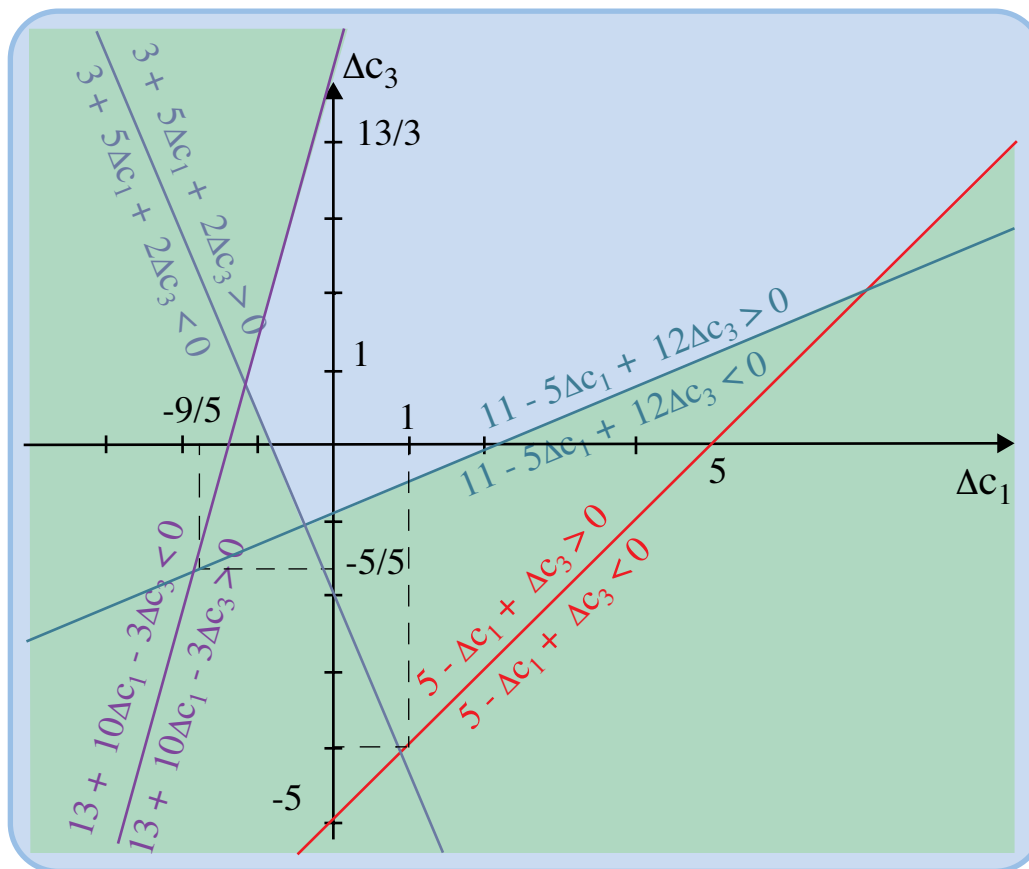
$$B^{-1}(b + \Delta b) = x_B^* + B^{-1}\Delta b \geq 0 \quad \text{relation 480}$$

Table des matières

Index thématique

FIGURE 265

Modification simultanée de plusieurs coefficients de la fonction-objectif



I-3.2.1 Cas d'une contrainte non saturée

Un raisonnement direct fournit la réponse au problème posé, mais on peut aussi utiliser l'inéquation matricielle 480.

- **Raisonnement direct.** La base de la solution optimale de départ intègre les variables d'écart correspondant à ces contraintes. Pour qu'une variable d'écart reste dans la base, il est donc nécessaire que la diminution du seuil, dans le cas présenté de contraintes de type $<$ (ou de leur accroissement dans le cas contraire), ne soit pas supérieure à la valeur optimale d'origine de la variable d'écart, puisqu'au mieux la contrainte est saturée. Par contre, on pourra toujours desserrer une contrainte déjà non saturée. Il est évident que la variation d'une variable d'écart est sans incidence sur l'optimum, puisque le coefficient qui lui est associé dans la fonction-objectif est nul.

Exemple: La variable x_6 de notre exemple numérique appartient à la base et sa valeur à l'optimum est $x_6 = 325/7$. Le seuil b_2 de la contrainte correspondante peut donc varier de telle sorte que: $\Delta b_2 \leq 325/7$. La solution optimale reste donc inchangée tant que l'on a: $b_2 \leq 515/7$.

- **Application de la condition formulée.** Si une seule contrainte non saturée k varie, les autres inéquations sont satisfaites car l'écart Δb_i correspondant est nul, il ne reste donc plus qu'à voir si l'inéquation correspondante k est satisfaite. On peut montrer d'après l'algorithme du simplexe que l'élément de la $k^{\text{ème}}$ ligne et de la $k^{\text{ème}}$ colonne de la matrice B^{-1} est forcément égal à 1, il s'ensuit que l'inéquation qui nous intéresse a pour formulation: $x_k^* + \Delta b_k \geq 0$

Exemple: En reprenant notre exemple, on peut écrire:

$$x_B^* + B^{-1}\Delta b = \begin{bmatrix} 50/7 \\ 325/7 \\ 55/7 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 10/7 & 0 & -1/7 \\ -61/7 & 1 & 4/7 \\ -3/7 & 0 & 1/7 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ \Delta b_2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 50/7 \\ 325/7 + \Delta b_2 \\ 55/7 \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

ce qui entraîne: $\Delta b_2 \leq 325/7$.

I-3.2.2 Cas de contrainte saturée

Supposons là encore qu'une seule contrainte varie. L'application de la condition formulée entraîne une série de m inéquations à une inconnue, d'où la définition d'un domaine de validité, et une nouvelle valeur de l'optimum qui devient: $x_0^* + c_B B^{-1} \Delta b$.

Exemple: Examinons le cas de la première contrainte de notre exemple numérique dont le seuil devient $15 + \Delta b_1$. La solution reste optimale si:

$$x_B^* + B^{-1}\Delta b = \begin{bmatrix} 50/7 \\ 325/7 \\ 55/7 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 10/7 & 0 & -1/7 \\ -61/7 & 1 & 4/7 \\ -3/7 & 0 & 1/7 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Delta b_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 50/7 + \Delta b_1(10/7) \\ 325/7 + \Delta b_1(-61/7) \\ 55/7 + \Delta b_1(-3/7) \end{bmatrix} \geq 0$$

Le domaine de variation de Δb_1 , qui permet à la solution d'être faisable, est donc: $-5 \leq \Delta b_1 \leq 325/61$. On peut vérifier que, si l'on se situe immédiatement en dessous de la borne inférieure, x_1 devient négatif et que, si l'on se situe au-dessus de la borne supérieure, c'est x_6 qui devient négatif. L'optimum, qui est une fonction de Δb_1 , a pour expression:

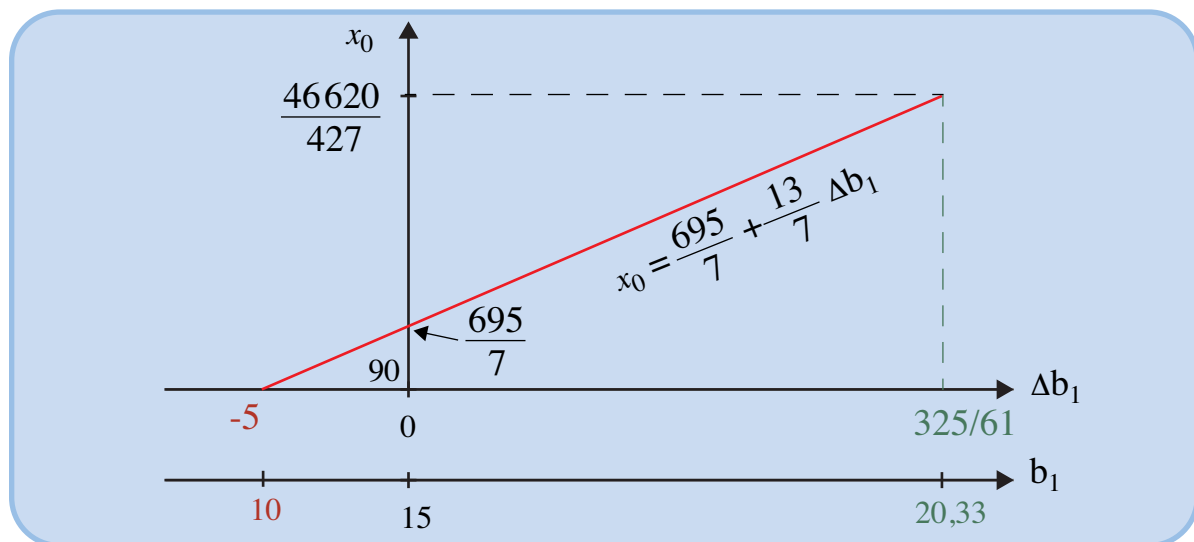
$$x_0 = x_0^* + c_B B^{-1} \Delta b = 625 + [4, 0, 9] \cdot \begin{bmatrix} 10/7 & 0 & -1/7 \\ -61/7 & 1 & 4/7 \\ -3/7 & 0 & 1/7 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Delta b_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ d'où: } x_0 = \frac{695}{7} + \frac{13}{7} \Delta b_1.$$

Table des matières

Index thématique

FIGURE 266

Analyse post-optimale d'une contrainte saturée



I-4 Résolution d'un programme linéaire par l'algorithme du simplexe

L'algorithme du simplexe, mis au point par Dantzig, est l'algorithme qui s'avère être le plus efficace pour résoudre les problèmes généraux d'optimisation sous contraintes dans lesquels:

- la fonction à optimiser, et que l'on appelle également fonction-objectif, comporte plusieurs variables x_j et est linéaire, c'est-à-dire est de la forme

$$\sum_j c_j x_j;$$

- toutes les variables x_j sont continues et ne peuvent prendre que des valeurs positives ou nulles;
- toutes les contraintes (repérées par l'indice i) sont également linéaires, c'est-à-dire de la forme $\sum_j a_{ij} x_j \leq b_i$, le signe \leq pouvant être remplacé par \geq ou $=$ pour n'importe laquelle de ces contraintes.

Cette classe de problèmes d'optimisation sous contraintes est qualifiée habituellement de programme linéaire, mais on parle encore de programmation linéaire¹. L'algorithme que l'on va présenter peut ne pas être le plus efficace si le problème à résoudre revêt une structure particulière. Ce point sera évoqué au § I-4.3, page 1128.

Nous examinerons tout d'abord (§ I-4.1) comment résoudre par l'algorithme du simplexe un problème de maximisation dans lequel les contraintes sont toutes du type «inférieur ou égal», puis nous verrons (§ I-4.2, page 1122) comment traiter les autres cas de figure. Avant de commencer, il faut souligner que l'objectif poursuivi ici est la *description* d'une méthode et non sa *justification*.

I-4.1 Problème de maximisation avec contraintes du type \leq

Nous illustrerons la démarche en nous appuyant sur l'exemple numérique suivant:

- maximiser x_0 , avec $x_0 = 4x_1 + 5x_2 + 9x_3 + 11x_4$ (qui correspond à la fonction-objectif),
- sous contraintes:

$$1x_1 + 1x_2 + 1x_3 + 1x_4 \leq 15$$

$$7x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 2x_4 \leq 120$$

$$3x_1 + 5x_2 + 10x_3 + 15x_4 \leq 100$$

$$x_1 \geq 0 ; x_2 \geq 0 ; x_3 \geq 0 ; x_4 \geq 0$$

Cette formulation retenue ici est la formulation canonique (voir page 1106). L'utilisation de l'algorithme du simplexe nécessite une transformation préalable des inégalités en égalités, par l'introduction de variables d'écart (elles-mêmes positives ou nulles). L'introduction de la variable d'écart x_5 dans la première contrainte, par exemple, conduit à la formulation équivalente suivante:

$$1x_1 + 1x_2 + 1x_3 + 1x_4 + 1x_5 = 15$$

1. Lorsque les variables x_j , au lieu d'être toutes continues, ne peuvent prendre que des valeurs entières positives ou nulles, on parle alors de programme linéaire en nombres entiers (ou de programmation linéaire en nombres entiers). Lorsque certaines variables sont continues et que les autres variables ne peuvent prendre que des valeurs entières positives ou nulles, le problème posé est alors habituellement qualifié de programme linéaire mixte.

Par exemple, si chacune des 4 premières variables prend la valeur 2, la variable x_5 prendra la valeur 7 pour que l'égalité soit satisfaite. Cette variable d'écart ne sera nulle que si la contrainte est juste saturée.

Lorsque, dans le problème posé, les contraintes sont toutes des égalités, la formulation du problème est qualifiée de forme standard. Notons que certaines contraintes du problème initial (forme canonique) peuvent déjà être des égalités, auquel cas il n'y a pas lieu de créer de variables d'écart, mais des variables artificielles comme nous le verrons à la [page 1126](#). La forme standard du problème de notre exemple introductif est donc :

$$\begin{aligned} - \text{ maximiser } x_0, \text{ avec } x_0 &= 4x_1 + 5x_2 + 9x_3 + 11x_4 + 0x_5 + 0x_6 + 0x_7 \\ &= 4x_1 + 5x_2 + 9x_3 + 11x_4 \end{aligned}$$

- sous contraintes :

$$1x_1 + 1x_2 + 1x_3 + 1x_4 + 1x_5 = 15$$

$$7x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 2x_4 + 1x_6 = 120$$

$$3x_1 + 5x_2 + 10x_3 + 15x_4 + 1x_7 = 100$$

$$x_j \geq 0 \text{ pour } j \text{ variant de } 1 \text{ à } 7.$$

Les 3 contraintes constituent un système de 3 équations à 7 inconnues dont on lève l'indétermination en rendant nulles 4 des 7 variables, ce que l'on a intérêt à faire car il est intuitivement évident que la fonction-objectif prendra la valeur la plus forte possible pour une solution qui comportera le moins de variables positives possibles (cette intuition peut être explicitée, comme on le verra ultérieurement, à partir des taux marginaux de substitution et du taux de rentabilité marginale, associés à toute variable candidate à entrée dans la base). On peut ajouter que l'on ne peut rendre nulles a priori plus de 4 variables, faute de risquer de se trouver en présence d'un système d'équations dont la solution est impossible. Notre problème se ramène donc à celui de la sélection de l'ensemble de 3 variables non nulles a priori, que l'on qualifie de variables de base, prises dans un ensemble initial de 7 variables (il y a donc $C_7^3 = 7!/(3!4!) = 45$ solutions-candidates possibles que l'on appelle encore base) et dont les valeurs, d'une part sont une solution du système d'équations (si l'on tient compte du fait que les valeurs prises par les variables non retenues, qualifiées de variables hors-base, sont nécessairement nulles), et, d'autre part, maximisent la valeur de x_0 (notons qu'il n'est pas rare que l'optimum recherché soit obtenu par plusieurs-bases).

L'algorithme du simplexe permet, en un nombre limité d'itérations, de trouver une solution optimale. La démarche est simple : elle consiste à partir de l'une quelconque des 45 bases possibles, prise comme solution initiale, et à améliorer progressivement cette solution au cours d'une procédure itérative. Au cours d'une itération quelconque, on remplace l'une des variables de la dernière base retenue, qualifiée de variable sortante, par l'une des variables hors-base, qualifiée de variable entrante ; chaque itération conduit donc à l'étude d'une nouvelle base. La sélection de ces deux variables (ou l'arrêt de la recherche, l'optimum étant atteint) s'effectue à l'aide de critères faciles à mettre en œuvre.

Le choix d'une solution initiale ne pose guère de difficulté pour les problèmes de ce § I-4.1, il suffit, en effet, de rendre nulles toutes les variables qui ne sont pas des variables d'écart, la fonction-objectif prenant alors la valeur 0. On a donc comme variables de base: $x_5 = 15$, $x_6 = 120$, $x_7 = 100$ et comme variables hors-base: $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$ et $x_4 = 0$.

Une fois trouvée cette solution initiale, la recherche progressive de la solution optimale s'effectue en travaillant sur un tableau de calculs, appelé tableau du simplexe, lequel est progressivement transformé en totalité au cours de chaque itération qui comporte trois étapes de calcul. Le tableau initial du simplexe ne fait que reprendre sous une forme tabulaire les coefficients du problème standard dont l'indice est supérieur à zéro, après permutation des premiers et seconds membres des contraintes, et après avoir regroupé dans un même membre les termes définissant la fonction-objectif¹. On part donc du problème suivant:

$$\begin{aligned} 0 &= -4x_1 - 5x_2 - 9x_3 - 11x_4 - 0x_5 - 0x_6 - 0x_7 + x_0 \\ 15 &= +1x_1 + 1x_2 + 1x_3 + 1x_4 + 1x_5 + 0x_6 + 0x_7 \\ 120 &= +7x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 2x_4 + 0x_5 + 1x_6 + 0x_7 \\ 100 &= +3x_1 + 5x_2 + 10x_3 + 15x_4 + 0x_5 + 0x_6 + 1x_7 \end{aligned}$$

pour aboutir au tableau initial du simplexe suivant:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
0	-4	-5	-9	-11	0	0	0
15	1	1	1	1	1	0	0
120	7	5	3	2	0	1	0
100	3	5	10	15	0	0	1

Le repérage des variables de base s'effectue au cours d'une itération quelconque en cerclant le nombre 1 de la colonne de ces variables de base repérées en tête de colonne (les autres éléments de ces colonnes étant toujours nuls). La valeur prise par des variables de base se lit directement en tête de ligne, ce qui reste vrai pour n'importe quelle itération. Rappelons, par ailleurs, que la valeur prise par une variable hors-base est nécessairement nulle.

La valeur prise par l'élément de la première colonne de la première ligne du tableau (ici 0) correspond à la valeur prise par la fonction-objectif pour la base retenue (ici $x_4 = 15$, $x_6 = 120$ et $x_7 = 100$). Cette interprétation reste valable quelle que soit l'itération. Les valeurs suivantes de cette ligne s'analysent comme la variation de la valeur prise par x_0 (c'est-à-dire, ici, la diminution puisque ces valeurs sont négatives), du fait de la non-introduction de la variable correspondante (repérée en tête de colonne) au détriment, bien sûr, des variables précédem-

1. D'autres conventions sont également utilisées. Par rapport à celle retenue ici, elles placent en dernière ligne les données de la première ligne et/ou en dernière colonne celles de la première colonne. L'adaptation de la méthode présentée ici à ces conventions ne présente aucune difficulté.

ment retenues dans la base. En toute rigueur, ce raisonnement doit être tenu pour des variations infiniment petites dx_j , c'est-à-dire que le produit de cette valeur pour la variable j par une variation infinitésimale dx_j correspond à la variation infinitésimale dx_0 consécutive à la non-introduction de dx_j . Ceci confère à ces valeurs la signification de dérivées partielles de la fonction-objectif par rapport aux variables, en un point défini par les valeurs des variables actuellement retenues. Il faut souligner que ces interprétations restent valables au début de n'importe quelle itération. Dès lors, le critère de sélection de la variable entrante, utilisé à la **première étape** de calcul d'une itération de la méthode du simplexe, s'interprète parfaitement : il consiste à « sélectionner la variable hors base à laquelle est associée la plus faible valeur dans la première ligne du tableau, à condition que celle-ci soit négative » (la variable entrante de la première itération sera donc ici x_4). Si au début d'une itération quelconque on ne trouve plus de valeur négative, c'est qu'il n'existe plus de possibilité d'accroître la valeur prise par la fonction-objectif et que l'optimum est atteint. Il y a alors lieu d'arrêter la recherche.

Une fois sélectionnée la variable entrante, il faut déterminer la variable sortante. Au cours d'une itération quelconque, les coefficients de la colonne d'une variable hors base, à l'exception de celui de la première ligne, s'interprètent économiquement comme le **taux marginal de substitution** de la variable hors base et des variables de la base (repérées, rappelons-le, par des 1 cerclés en jaune). Ici une unité de la variable entrante x_4 se substitue *simultanément* à 1 unité de la variable x_5 , à 2 unités, de la variable x_6 et à 15 unités de la variable x_7 . Il s'ensuit que si x_4 se substituait en totalité à x_6 , il prendrait comme valeur le quotient de 120 (valeur actuelle de x_6) par 2 (taux marginal de substitution de x_4 à x_6), c'est-à-dire 60. De même si x_4 se substituait en totalité à x_7 , il prendrait comme valeur le quotient de 100 (valeur actuelle de x_7) par 15 (taux marginal de substitution de x_4 à x_7), c'est-à-dire $100/15 = 20/3 \approx 6,66$. Enfin, si x_4 se substituait en totalité à x_5 , il prendrait comme valeur $15/1 = 15$. Il est bien évident que si la variable entrante x_4 doit prendre la place de l'une des variables de base, c'est l'une de ces trois valeurs trouvées (15; 60; $20/3$) qu'elle doit prendre. La valeur que l'on retiendra ne peut être que la plus faible, c'est-à-dire ici $20/3$, puisque l'introduction de x_4 s'effectue au détriment de *toutes* les variables de base. Le critère de sélection de la variable sortante utilisé au cours de la **deuxième étape** de calculs d'une itération de la méthode du simplexe consiste à « choisir la variable de base dont le quotient de la valeur par le taux marginal de substitution est le plus faible possible ».

La **troisième** et dernière **étape** de calcul d'une itération a pour but de calculer le tableau du simplexe qui découle du choix de la nouvelle base, c'est-à-dire les nouvelles valeurs prises par les variables de base, les nouveaux taux marginaux de substitution et les nouvelles dérivées partielles de la fonction-objectif par rapport aux variables. Cette dernière étape, qualifiée de **changement de base**, s'effectue en deux temps. On divise tout d'abord la ligne de la variable sortante par le taux marginal de substitution de la variable entrante à la variable sortante, connu encore sous le nom de pivot (ici le pivot est 15), pour obtenir la ligne de la variable entrante (qui remplace la variable sortante) et que l'on appelle encore nouvelle ligne du pivot. Dans un second temps, on retranche aux autres lignes du tableau, la valeur prise par la variable entrante dans la ligne, multipliée par la nouvelle

ligne du pivot; par exemple, on retranchera à la ligne 1 la nouvelle ligne du pivot préalablement multipliée par -11 .

Ces différentes étapes de calcul de la première itération sont reprises dans le [tableau 344, page 1123](#). Pour mieux suivre la transformation progressive du tableau du simplexe, des conventions de couleurs ont été utilisées. Le tableau obtenu à la fin de la première itération devient le tableau initial sur lequel on travaille au début de la deuxième itération (et ainsi de suite...). Les calculs de la deuxième, troisième et quatrième itérations sont fournis aux pages suivantes. On constate que le choix de la variable x_4 , effectué au début de la première itération, a été remis en cause au début de la troisième itération. Ce genre de remise en cause est assez fréquent dans l'utilisation de la méthode du simplexe et découle du fait que l'on recherche «par tâtonnements» une combinaison de variables qui optimise la fonction-objectif tout en respectant les contraintes du problème.

Ajoutons enfin que certains des calculs effectués ici (pour simplifier l'exposé de la méthode) ne sont pas nécessaires: en effet, les colonnes des variables de base autres que la variable sortante ne subissent aucune transformation. Cette observation est à prendre en compte au niveau d'une résolution manuelle par la méthode du simplexe (ce qui conduit certains à supprimer purement et simplement les colonnes des variables de base, lesquelles sont mentionnées en marge de la première colonne).

I-4.2 Extensions de l'algorithme du simplexe

Dans le § I-4.1 nous avons décrit l'utilisation de la méthode du simplexe pour résoudre des programmes linéaires dans lesquels la fonction-objectif est à maximiser et où les contraintes sont toutes du type \leq . Levons maintenant ces deux restrictions.

L'adaptation de la méthode à un problème de minimisation sous contrainte ne soulève guère de difficulté. On sait, en effet, transcrire un problème de minimisation en un problème de maximisation: minimiser $\sum_j c_j x_j$ est équivalent à maximiser $\sum_j (-c_j) x_j$. Il suffit donc de changer le signe de tous les coefficients de la fonction-objectif à minimiser pour se ramener à un problème de maximisation, et donc être en mesure d'utiliser l'algorithme du simplexe tel qu'il est décrit au § I-4.1. On peut ajouter que les variables du problème étant nécessairement positives ou nulles, la solution d'un problème de minimisation dans lequel les coefficients de la fonction-objectif (avant changement de signes) seraient tous positifs ne peut qu'être obtenue avec des valeurs nulles pour les variables intervenant dans la forme canonique du problème.

TABLEAU 344
Exemple d'utilisation de la méthode du simplexe

ITÉRATION 1

- **Étape 1 :** sélection de la **variable entrante**

Min $(-4, -5, -9, -11) = -11 \rightarrow$ choix de x_4

- **Étape 1 :** sélection de la **-variable sortante**

$$\begin{array}{l} 15 / 1 = 15 \\ 120 / 2 = 60 \\ 100 / 15 = 6,66 \leftarrow \text{minimum} \end{array}$$

	0	1	2	3	4	5	6	7
$x_0 =$	0	-4	-5	-9	-11	0	0	0
$x_5 =$	15	1	1	1	1	1	0	0
$x_6 =$	120	7	5	3	2	0	1	0
$x_7 =$	100	3	5	10	15	0	0	1

$x_4 = 6,66$ et $x_7 = 0$ (x_7 variable sortante)

pivot = 15

- **Étape 3 :** changement de base

- Diviser la ligne du pivot par le pivot

	0	1	2	3	4	5	6	7
$x_0 =$	0	-4	-5	-9	-11	0	0	0
$x_5 =$	15	1	1	1	1	1	0	0
$x_6 =$	120	7	5	3	2	0	1	0
$x_4 =$	$\frac{100}{15} = \frac{20}{3}$	$\frac{3}{15} = \frac{1}{5}$	$\frac{5}{15} = \frac{1}{3}$	$\frac{10}{15} = \frac{2}{3}$	$\frac{15}{15} = 1$	$\frac{0}{15} = 0$	$\frac{0}{15} = 0$	$\frac{1}{15} = \frac{1}{15}$

nouvelle ligne du pivot

- Retrancher aux autres lignes du tableau la valeur prise par la variable entrante dans la ligne, multipliée par la nouvelle ligne du pivot (ligne 4)
 - ligne 1 : multiplier la ligne 4 par -11 et la retrancher à la ligne 1
 - ligne 2 : multiplier la ligne 4 par 1 et la retrancher à la ligne 2
 - ligne 3 : multiplier la ligne 4 par 2 et la retrancher à la ligne 3

	0	1	2	3	4	5	6	7
$x_0 =$	$0 - \frac{20}{3}(-11) = 220/3$	$-4 - \frac{1}{5}(-11) = -9/5$	$-5 - \frac{1}{3}(-11) = -4/3$	$-9 - \frac{2}{3}(-11) = -5/3$	$-11 - 1(-11) = 0$	$0 - 0(-11) = 0$	$0 - 0(-11) = 0$	$0 - \frac{1}{15}(-11) = 11/15$
$x_5 =$	$15 - \frac{20}{3} \cdot 1 = 25/3$	$1 - \frac{1}{5} \cdot 1 = 4/5$	$1 - \frac{1}{3} \cdot 1 = 2/3$	$1 - \frac{2}{3} \cdot 1 = 1/3$	$1 - 1 \cdot 1 = 0$	$1 - 0 \cdot 1 = 1$	$0 - 0 \cdot 1 = 0$	$0 - \frac{1}{15} \cdot 1 = 1/25$
$x_6 =$	$120 - \frac{20}{3} \cdot 2 = 320/3$	$7 - \frac{1}{5} \cdot 2 = 33/5$	$5 - \frac{1}{3} \cdot 2 = 13/3$	$3 - \frac{2}{3} \cdot 2 = 5/3$	$2 - 1 \cdot 2 = 0$	$0 - 0 \cdot 2 = 0$	$1 - 0 \cdot 2 = 1$	$0 - \frac{1}{15} \cdot 2 = -2/15$
$x_4 =$	$20/3$	$1/5$	$1/3$	$2/3$	1	0	0	$1/15$

D'où le tableau du simplexe à la fin de l'itération 1

	0	1	2	3	4	5	6	7
$x_0 =$	220/3	-9/5	-4/3	-5/3	0	0	0	11/15
$x_5 =$	25/3	4/5	2/3	1/3	0	1	0	-1/15
$x_6 =$	320/3	33/5	13/3	5/3	0	0	1	-2/15
$x_4 =$	20/3	1/5	1/3	2/3	1	0	0	1/15

Table des matières

Index thématique

ITÉRATION 2

- **Étape 1** : sélection de la **variable entrante**

$$\text{Min}\left(-\frac{9}{5}, -\frac{4}{5}, -\frac{5}{3}, \frac{11}{15}\right) = -\frac{9}{5} \rightarrow \text{choix de } x_1$$

- **Étape 2** : sélection de la **variable sortante**

$$\begin{array}{l} \boxed{25/3} / \boxed{4/5} = 125/12 \leftarrow \text{minimum} \\ \boxed{320/3} / \boxed{33/5} = 1600/99 \\ \boxed{20/3} / \boxed{1/5} = 100/3 \end{array}$$

	0	1	2	3	4	5	6	7
$x_0 =$	220/3	-9/5	-4/3	-5/3	0	0	0	11/15
$x_5 =$	25/3	4/5	2/3	1/3	0	1	0	-1/15
$x_6 =$	320/3	33/5	13/3	5/3	0	0	1	-2/15
$x_4 =$	20/3	1/5	1/3	2/3	1	0	0	1/15

$x_1 = 125/12$ et $x_5 = 0$ (x_5 variable sortante)

pivot = 4/5

- **Étape 3** : changement de base

- Diviser la ligne du pivot par le pivot

	0	1	2	3	4	5	6	7
$x_0 =$	220/3	-9/5	-4/3	-5/3	0	0	0	11/15
$x_1 =$	$\frac{25}{3} \cdot \frac{4}{5} = \frac{125}{12}$	$\frac{4}{5} \cdot \frac{4}{5} = 1$	$\frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} = \frac{5}{6}$	$\frac{1}{3} \cdot \frac{4}{5} = \frac{5}{12}$	$0 \cdot \frac{4}{5} = 0$	$1 \cdot \frac{4}{5} = \frac{5}{4}$	$0 \cdot \frac{4}{5} = 0$	$\frac{1}{15} \cdot \frac{4}{5} = \frac{1}{12}$
$x_6 =$	320/3	33/5	13/3	5/3	0	0	1	-2/15
$x_4 =$	20/3	1/5	1/3	2/3	1	0	0	1/15

nouvelle ligne du pivot

- Retrancher aux autres lignes du tableau la valeur prise par la variable entrante dans la ligne, multipliée par la nouvelle ligne du pivot (ligne 2)
 - **ligne 1** : multiplier la ligne 2 par $-9/5$ et la retrancher à la **ligne 1**
 - **ligne 3** : multiplier la ligne 2 par $33/5$ et la retrancher à la **ligne 3**
 - **ligne 4** : multiplier la ligne 2 par $1/5$ et la retrancher à la **ligne 4**

	0	1	2	3	4	5	6	7
$x_0 =$	$\frac{220}{3} - \frac{125 \cdot 9}{12 \cdot 5}$	$\frac{9}{5} + -1 \cdot \frac{-9}{5}$	$-\frac{4}{3} + -\frac{5 \cdot 9}{6 \cdot 5}$	$\frac{5}{3} - \frac{5 \cdot 9}{12 \cdot 5}$	$0 + -0 \cdot \frac{-9}{5}$	$0 + -\frac{5 \cdot 9}{4 \cdot 5}$	$0 + -0 \cdot \frac{-9}{5}$	$\frac{11}{15} + -\frac{-1 \cdot 9}{12 \cdot 5}$
	= 1105/12	= 0	= 1/6	= -11/12	= 0	= 9/4	= 0	= 7/12
$x_1 =$	125/12	1	5/6	5/12	0	5/4	0	-1/12
$x_6 =$	$\frac{320}{3} - \frac{125 \cdot 33}{12 \cdot 5}$	$\frac{33}{5} - 1 \cdot \frac{33}{5}$	$\frac{13}{3} - \frac{5 \cdot 33}{6 \cdot 5}$	$\frac{5}{3} - \frac{5 \cdot 33}{12 \cdot 5}$	$0 - 0 \cdot \frac{33}{5}$	$0 - \frac{5 \cdot 33}{4 \cdot 5}$	$1 - 0 \cdot \frac{33}{5}$	$\frac{-2}{15} - \frac{-1 \cdot 33}{12 \cdot 5}$
	= 455/12	= 0	= -7/6	= -13/12	= 0	= -33/4	= 1	= 5/12
$x_4 =$	$\frac{20}{3} - \frac{125 \cdot 1}{12 \cdot 5}$	$\frac{1}{5} - 1 \cdot \frac{1}{5}$	$\frac{1}{3} - \frac{5 \cdot 1}{6 \cdot 5}$	$1 - \frac{5 \cdot 1}{12 \cdot 5}$	$1 - 0 \cdot \frac{1}{5}$	$0 - \frac{5 \cdot 1}{4 \cdot 5}$	$0 - 0 \cdot \frac{1}{5}$	$\frac{1}{15} - \frac{-1 \cdot 1}{12 \cdot 5}$
	= 55/12	= 0	= 1/6	= 7/12	= 1	= -1/4	= 0	= 1/12

D'où le tableau du simplexe à la fin de l'itération 2

	0	1	2	3	4	5	6	7
$x_0 =$	1105/12	0	1/6	-11/12	0	9/4	0	7/12
$x_1 =$	125/12	1	5/6	5/12	0	5/4	0	-1/12
$x_6 =$	455/12	0	-7/6	-13/12	0	-33/4	1	5/12
$x_4 =$	55/12	0	1/6	7/12	1	-1/4	0	1/12

ITÉRATION 3

- **Étape 1** : sélection de la **variable entrante**

Min $\left(\frac{1}{6}, -\frac{11}{12}, \frac{9}{4}, \frac{7}{12}\right) = -\frac{11}{12} \rightarrow$ choix de x_3

- **Étape 2** : sélection de la **variable sortante**

$\frac{125}{12}$	/	$\frac{5}{12}$	= 25
$\frac{455}{12}$	/	$-\frac{13}{12}$	< 0
$\frac{55}{12}$	/	$\frac{7}{12}$	= $\frac{55}{7}$ ← minimum (positif)

	0	1	2	3	4	5	6	7
$x_0 =$	1105/12	0	1/6	-11/12	0	9/4	0	7/12
$x_1 =$	125/12	1	5/6	5/12	0	5/4	0	-1/12
$x_6 =$	455/12	0	-7/6	-13/12	0	-33/4	1	5/12
$x_4 =$	55/12	0	1/6	7/12	1	-1/4	0	1/12

→ $x_3 = 55/7$ et $x_4 = 0$ (x_4 variable sortante)
 pivot = 7/12

- **Étape 3** : changement de base

- Diviser la ligne du pivot par le pivot

	0	1	2	3	4	5	6	7
$x_0 =$	1105/12	0	1/6	-11/12	0	9/4	0	7/12
$x_1 =$	125/12	1	5/6	5/12	0	5/4	0	-1/12
$x_6 =$	455/12	0	-7/6	-13/12	0	-33/4	1	5/12
$x_3 =$	$\frac{55}{12} \cdot \frac{7}{12} = \frac{55}{7}$	$0 \cdot \frac{7}{12} = 0$	$\frac{1}{6} \cdot \frac{7}{12} = \frac{2}{7}$	$\frac{7}{12} \cdot \frac{7}{12} = 1$	$1 \cdot \frac{7}{12} = \frac{12}{7}$	$-\frac{1}{4} \cdot \frac{7}{12} = -\frac{3}{7}$	$0 \cdot \frac{7}{12} = 0$	$\frac{1}{12} \cdot \frac{7}{12} = \frac{1}{7}$

nouvelle ligne du pivot

- Retrancher aux autres lignes du tableau la valeur prise par la variable entrante dans la ligne, multipliée par la nouvelle ligne du pivot (ligne 4)
 - **ligne 1** : multiplier la ligne 4 par $-11/12$ et la retrancher à la **ligne 1**
 - **ligne 2** : multiplier la ligne 4 par $5/12$ et la retrancher à la **ligne 2**
 - **ligne 3** : multiplier la ligne 4 par $-13/12$ et la retrancher à la **ligne 3**

$x_0 =$	$\frac{105}{12} - \frac{55}{7} \cdot \frac{-11}{12} = \frac{695}{7}$	$0 + -0 \cdot \frac{-11}{12} = 0$	$\frac{1}{6} - \frac{2}{7} \cdot \frac{-11}{12} = \frac{3}{7}$	$\frac{-11}{12} - 1 \cdot \frac{-11}{12} = 0$	$0 + -\frac{12}{7} \cdot \frac{-11}{12} = \frac{11}{7}$	$\frac{9}{4} - \frac{-3}{7} \cdot \frac{-11}{12} = -\frac{13}{7}$	$0 + -0 \cdot \frac{-11}{12} = 0$	$\frac{7}{12} + \frac{1}{7} \cdot \frac{-11}{12} = \frac{5}{7}$
$x_1 =$	$\frac{125}{12} - \frac{55}{7} \cdot \frac{5}{12} = \frac{50}{7}$	$1 - 0 \cdot \frac{5}{12} = 1$	$\frac{5}{6} - \frac{2}{7} \cdot \frac{5}{12} = \frac{5}{7}$	$\frac{5}{12} - 1 \cdot \frac{5}{12} = 0$	$0 - \frac{12}{7} \cdot \frac{5}{12} = -\frac{5}{12}$	$\frac{5}{4} - \frac{-3}{7} \cdot \frac{5}{12} = \frac{10}{7}$	$0 - 0 \cdot \frac{5}{12} = 0$	$-\frac{1}{12} - \frac{1}{7} \cdot \frac{5}{12} = -\frac{1}{7}$
$x_6 =$	$\frac{55}{12} - \frac{55}{7} \cdot \frac{-13}{12} = \frac{325}{7}$	$0 - 0 \cdot \frac{-13}{12} = 0$	$\frac{7}{6} - \frac{2}{7} \cdot \frac{-13}{12} = -\frac{6}{7}$	$\frac{-13}{12} - 1 \cdot \frac{-13}{12} = 0$	$0 - \frac{12}{7} \cdot \frac{-13}{12} = \frac{13}{7}$	$\frac{33}{4} - \frac{-3}{7} \cdot \frac{-13}{12} = -\frac{61}{7}$	$1 - 0 \cdot \frac{-13}{12} = 1$	$\frac{5}{12} - \frac{1}{7} \cdot \frac{-13}{12} = \frac{4}{7}$
$x_3 =$	55/7	0	2/7	1	12/7	-3/7	0	1/7

D'où le tableau du simplexe à la fin de l'itération 3

	0	1	2	3	4	5	6	7
$x_0 =$	695/7	0	3/7	0	11/7	13/7	0	5/7
$x_1 =$	50/7	1	5/7	0	-5/12	10/7	0	-1/7
$x_6 =$	325/7	0	-6/7	0	13/7	-61/7	1	4/7
$x_3 =$	55/7	0	2/7	1	12/7	-3/7	0	1/7

Lorsque certaines contraintes du problème canonique sont des égalités, il n'y a pas lieu de créer de variables d'écart. Mais le problème qui se pose alors est celui de la détermination d'une solution initiale pour pouvoir utiliser la méthode du simplexe. Dans cette perspective, on crée une **variable artificielle** y_h qui est affectée du coefficient 1 et ajoutée à l'égalité considérée (tout comme les variables d'écart). La solution optimale devra nécessairement comporter des valeurs nulles pour toutes les variables artificielles. Nous verrons ci-après comment garantir le respect de cette condition par l'une des méthodes classiquement utilisées, la méthode des pénalités (désignée sous le nom de *big M Method* dans la littérature anglo-saxonne spécialisée).

Lorsqu'une contrainte du problème canonique comporte une inégalité du type « \geq », on la transforme tout d'abord en créant une variable d'écart¹. Changeons, par exemple, le sens de l'inégalité de la seconde contrainte de notre exemple introductif :

$$7x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 2x_4 \geq 120$$

avec l'introduction de la variable d'écart, cette contrainte devient, sous sa forme standard :

$$7x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 120 + x_6$$

ce que l'on peut encore écrire, en regroupant dans le premier membre toutes les variables :

$$7x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 2x_4 - x_6 = 120$$

Reste posé le problème de la détermination d'une solution initiale car x_6 s'analysant comme un «surplus» et non comme un «reliquat», on ne peut lui donner de valeur positive que lorsque certaines variables canoniques sont déjà positives, ce qui n'est habituellement pas le cas lorsque l'on amorce un calcul de simplexe. Pour amorcer le calcul itératif, il faudra donc, là encore, créer une variable artificielle.

Illustrons par un exemple numérique simple l'utilisation des variables artificielles et leur élimination dans le but d'obtenir une solution initiale. L'élimination préalable de ces variables est assurée par l'introduction de ces variables artificielles dans la fonction-objectif avec une très forte pénalité qui aura pour effet de commencer par «chasser» ces variables artificielles dans l'utilisation de l'algorithme du simplexe (rappelons que les variables d'écart n'interviennent pas dans la fonction-objectif, ou plus exactement interviennent avec des coefficients nuls). L'exemple numérique retenu est le suivant, sous sa forme canonique :

- maximiser x_0 , avec $x_0 = 2x_1 + 5x_2 + 4x_3$
- sous contraintes :
 - $x_1 + 2x_2 + x_3 = 10$
 - $4x_1 + x_2 + x_3 \geq 15$;

Ce problème devient, sous sa forme standard, en associant une forte pénalité M aux variables artificielles dans la fonction-objectif (cette pénalité pourrait être, par exemple, de -1000 dans l'exemple numérique retenu, compte tenu des valeurs

1. À moins que le coefficient de l'une des variables canoniques de cette contrainte ne soit égal à 1, auquel cas cette variable est retenue dans la solution initiale (et, bien sûr, elle ne peut l'être qu'au titre d'une seule contrainte).

numériques du problème ; on préférera cependant travailler ici, sous la forme littérale, pour bien montrer comment cette pénalité « disparaît » lorsqu'une solution initiale aura été trouvée).

$$\begin{aligned}0 &= -2x_1 - 5x_2 - 4x_3 - 0x_4 - My_1 - My_2 \\10 &= 1x_1 + 2x_2 + 1x_3 + 0x_4 + 1y_1 + 0y_2 \\15 &= 4x_1 + 1x_2 + 1x_3 - x_4 + 0y_1 + 1y_2\end{aligned}$$

On ne peut amorcer les calculs du simplexe, en gardant cette formulation du problème puisque, compte tenu de l'interprétation des coefficients de la première ligne du tableau du simplexe (dérivées partielles de la fonction-objectif par rapport aux variables), il est nécessaire que les coefficients des variables de base soient nuls. Pour qu'il en soit ainsi, on modifie la première équation en utilisant la propriété classique qui veut que l'on ne modifie pas une égalité en ajoutant ou en retranchant la même quantité aux deux membres de l'équation. Pour faire disparaître y_1 de la première équation, il suffit d'y ajouter membre à membre la seconde équation préalablement multipliée par M . Pour faire ensuite disparaître y_2 , il suffit d'ajouter membre à membre au résultat obtenu la troisième équation préalablement multipliée par M . La première équation devient donc :

$$\begin{aligned}(10 + 15)M &= \{(1 + 4)M - 2\}x_1 + \{(2 + 1)M - 5\}x_2 + \{(1 + 1)M - 4\}x_3 \\ &+ \{(0 - 1)M - 0\}x_4 + \{(1 + 0)M - M\}y_1 + \{(0 + 1)M - M\}y_2\end{aligned}$$

$$25M = (5M - 2)x_1 + (3M - 5)x_2 + (2M - 4)x_3 - Mx_4 + 0y_1 + 0y_2$$

Le tableau initial du simplexe devient le [tableau 345](#).

TABLEAU 345

Tableau initial du simplexe – exemple d'utilisation de contraintes du type « \geq » ou « = »

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	y_1	y_2
	25M	5M-2	3M-5	2M-4	-M	0	0
y_1	10	1	2	1	0	1	0
y_2	4	1	1	1	-1	0	1

Étant donné que la pénalité M est très grande et négative (la fonction-objectif étant à maximiser ; elle aurait été positive si la fonction-objectif avait été à minimiser), la variable entrante de la première itération est x_1 . La variable sortante est alors y_2 et le pivot est 4. Les tableaux du simplexe des deux premières itérations sont donnés dans le [tableau 346 de la page 1128](#).

L'élimination des variables artificielles conduit donc à la solution réalisable $x_1 = 20/7$ et $x_2 = 25/7$, les autres variables étant nulles. Cette solution n'est pas optimale puisque x_3 a une dérivée partielle négative ($-11/7$). Il faut donc poursuivre les itérations du simplexe. La pénalité M étant très grande, il est inutile de poursuivre les calculs dans les colonnes correspondant aux variables artificielles. On partira donc du [tableau 347 de la page 1128](#) (dans lequel il apparaît qu'il faut poursuivre les itérations en introduisant x_3) :

TABLEAU 346
Tableau du simplexe à la fin des deux premières itérations

	x_1	x_2	x_3	x_4	y_1	y_2	
PREMIÈRE ITÉRATION	25M $-(5M-2)\frac{15}{4}$ $= \frac{5M}{4} + \frac{15}{2}$	0	$3M-5$ $-(5M-2)\frac{1}{4}$ $= \frac{7M}{4} - \frac{18}{4}$	$2M-4$ $-(5M-2)\frac{1}{4}$ $= \frac{3M}{4} - \frac{7}{2}$	$-M$ $-(5M-2)\left(-\frac{1}{4}\right)$ $= \frac{M}{4} - \frac{1}{2}$	0	0 $-(5M-2)\frac{1}{4}$ $= -\frac{5M}{4} + \frac{1}{2}$
	y_1 $10-1\cdot\frac{15}{4}$ $= \frac{25}{4}$	0	$2-1\cdot\frac{1}{4}$ $= \frac{7}{4}$	$1-1\cdot\frac{1}{4}$ $= \frac{3}{4}$	$0-1\cdot\left(-\frac{1}{4}\right)$ $= \frac{1}{4}$	1	$0-1\cdot\frac{1}{4}$ $= -\frac{1}{4}$
	x_1 $\frac{15}{4}$	1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$
DEUXIÈME ITÉRATION	$\frac{5M}{4} + \frac{15}{2}$ $-\left(\frac{7M}{4} - \frac{18}{4}\right)\frac{25}{7}$ $= \frac{165}{7}$	0	0	$\frac{3M}{4} - \frac{7}{2}$ $-\left(\frac{7M}{4} - \frac{18}{4}\right)\frac{3}{7}$ $= -\frac{11}{7}$	$\frac{M}{4} - \frac{1}{2}$ $-\left(\frac{7M}{4} - \frac{18}{4}\right)\frac{1}{7}$ $= \frac{1}{7}$	0 $-\left(\frac{7M}{4} - \frac{18}{4}\right)\frac{4}{7}$ $= -M + \frac{18}{7}$	$-\frac{5M}{4} - \frac{1}{2}$ $-\left(\frac{7M}{4} - \frac{18}{4}\right)\left(-\frac{1}{7}\right)$ $= -M - \frac{1}{7}$
	x_2 $\frac{25}{7}$	0	1	$\frac{3}{7}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{4}{7}$	$-\frac{1}{7}$
	x_1 $\frac{15}{4} - \frac{1}{4} \cdot \frac{25}{7}$ $= \frac{20}{7}$	1	0	$\frac{1}{4} - \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{7} = \frac{1}{7}$	$-\frac{1}{4} - \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{7}$ $= -\frac{2}{7}$	$0 - \frac{1}{4} \cdot \frac{4}{7} = -\frac{1}{7}$	$\frac{1}{4} - \frac{1}{4} \cdot \left(-\frac{1}{7}\right)$ $= \frac{2}{7}$

TABLEAU 347
Tableau du simplexe au début de la troisième itération

	x_1	x_2	x_3	x_4
	165/7	0	0	-11/7
x_2	25/7	0	1	1/7
x_1	20/7	1	0	-2/7

I-4.3 Cas particuliers

Nous ne discuterons pas ici le cas de problèmes numériques n'ayant pas de solution, pour diverses raisons. On se contentera de signaler l'existence d'algorithmes x_j plus performants que celui du simplexe lorsque le problème posé revêt une structure particulière. Deux cas de figure sont particulièrement intéressants.

Lorsque les variables sont toutes comprises entre 0 et 1, une adaptation de l'algorithme du simplexe¹ permet d'éviter d'explicitier les contraintes $x_j \leq 1$, ce qui diminue d'autant le nombre de lignes du tableau du simplexe, et donc les calculs à effectuer à chaque itération, ainsi que le nombre de ces itérations. De très

1. Voir, par exemple, Wagner (1975, [435]), p. 150-153, où l'algorithme modifié est présenté et illustré d'un exemple numérique.

nombreux problèmes se caractérisent par l'existence de bornes supérieures imposées aux variables (à l'exclusion de bornes inférieures non nulles). Il est dans ce cas toujours possible de transformer le problème initial en un problème où toutes les variables sont comprises entre 0 et 1, et donc d'utiliser l'algorithme modifié du simplexe.

Le second cas de figure, que l'on rencontre dans certains problèmes de transport, se caractérise par des variables (flux de transport, par exemple) se différenciant par leur rattachement à l'une des modalités i d'un caractère qualitatif (localisation d'origine, par exemple) et leur attachement à l'une des modalités j d'un autre caractère qualitatif (localisation d'arrivée, par exemple). Un exemple de cette nature est traité à la [page 553](#). Les variables utilisées (flux transportés de i vers j , par exemple) comportent alors 2 indices (x_{ij}). La fonction-objectif est alors du type: maximiser x_0 , ou minimiser x_0 , avec $x_0 = x_0 = \sum_i \sum_j c_{ij} x_{ij}$. Si, en outre, les contraintes sont du type¹: $\sum_j x_{ij} = b_i$, $\sum_i x_{ij} = b_j$ et $\sum_j b_j = \sum_i b_i$. L'algorithme du simplexe est alors adapté pour tenir compte de cette structure particulière, avec des performances très supérieures².

I-4.4 Exemple de résolution par Excel

Examinons maintenant comment traiter notre exemple en utilisant la fonction «*Solveur*» du menu «Outils» du tableur Excel. Il convient d'abord de saisir dans une feuille de calcul les paramètres (a_{ij} , b_i , c_j) du problème, d'y ajouter des valeurs initiales (par exemple 0) pour les variables x_j du problème, de calculer dans des cellules les valeurs prises par les premiers membres des contraintes, pour les valeurs assignées aux x_j , ainsi que la valeur x_0 prise par la fonction-objectif. Le premier écran de la [figure 267, page 1130](#) montre la saisie effectuée pour les paramètres (les couleurs ont été ajoutées pour vous permettre de mieux repérer la structure du problème soumis) et le second écran est une variante du premier qui affiche les formules des cellules calculées pour vous permettre de mieux comprendre la façon de poser le problème.

Le lancement du solveur provoque l'affichage de la fenêtre de définition du problème à résoudre de la [figure 268](#). On y définit la cellule correspondant à la fonction objectif (ici x_0 mis dans la cellule B1), les cellules correspondant aux variables x_j (ici les cellules B3 à E3) et les contraintes, en commençant par celles qui imposent aux x_j d'être non négatifs (contenu de la cellule F4 devant être inférieur ou égal au contenu de la cellule G4, pour la première contrainte, etc.).

Une fois le problème spécifié, il faut déclencher la résolution en appuyant sur le bouton correspondant (cf. [figure 268](#)), ce qui provoque l'affichage de la fenêtre de la [figure 269](#), dans laquelle il faut sélectionner le résultat et les rapports des résultats de l'optimisation. Ceux-ci sont reproduits dans les écrans des figures [270](#) à [274](#). On retrouve les résultats du [tableau 343 de la page 1110](#). Pour aider à faire

1. Ces contraintes s'interprètent, dans l'exemple de certains problèmes de transport, comme l'exigence que les flux partant de i aient une destination j , que ceux arrivant en j aient une origine i et que la somme des flux de départ soit égale à celle des flux d'arrivée.

2. Voir, par exemple, Wagner (1975, [435]), p. 186-195.

FIGURE 267
Initialisation de la procédure

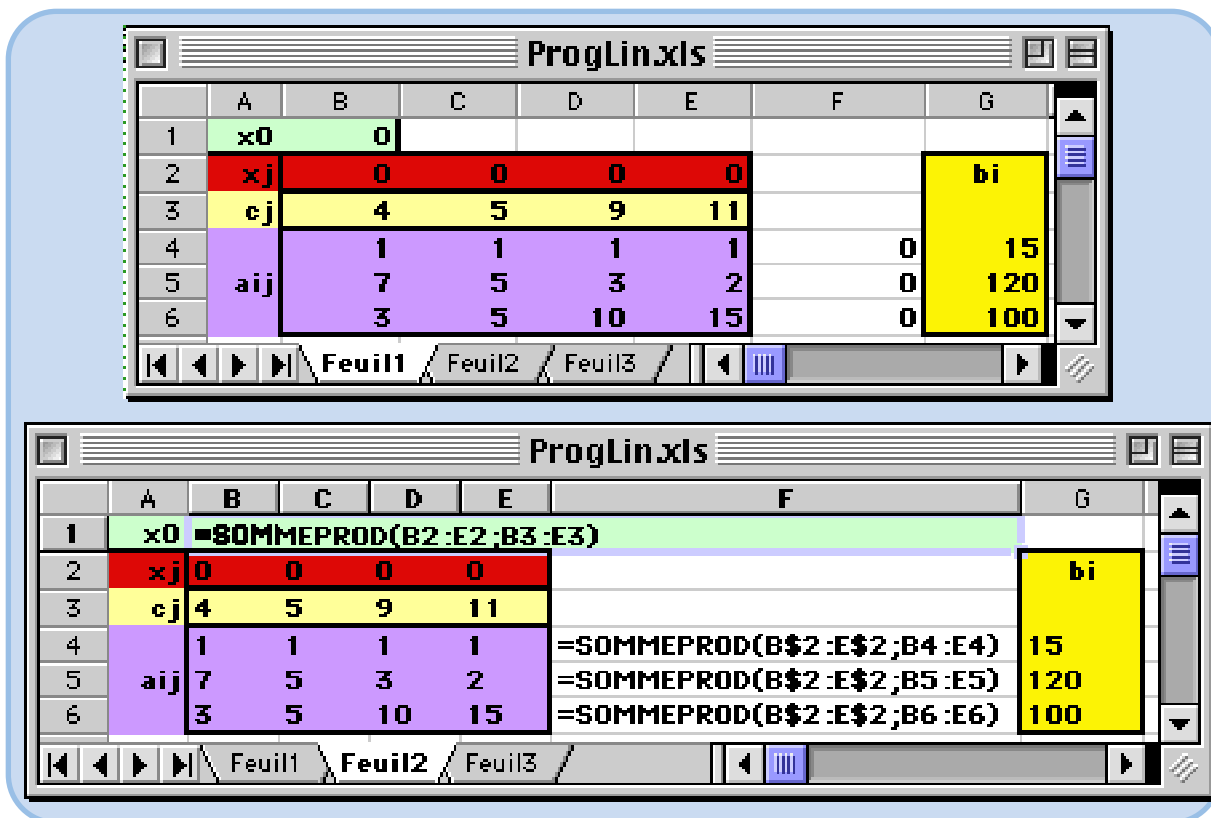


FIGURE 268
Définition du problème (paramètres du solveur)



le rapprochement, les valeurs fractionnaires des résultats sont ajoutées à ces copies d'écran. Le résultat de l'optimisation donne les valeurs optimales des x_j et la comparaison entre les premiers et seconds membres des contraintes montre que seule la seconde contrainte n'est pas saturée.

Table des matières

Index thématique

FIGURE 269
Sélection des affichages de résultats

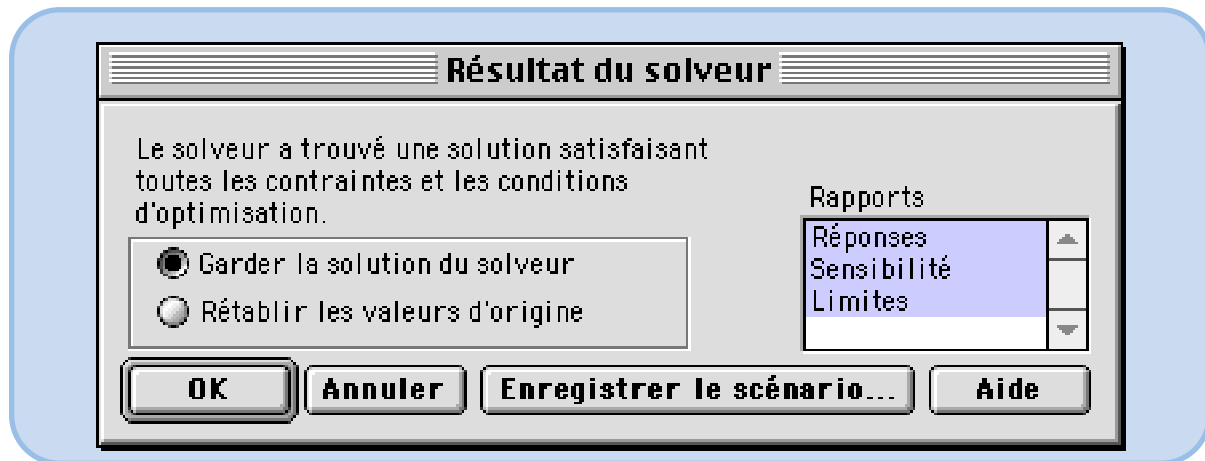
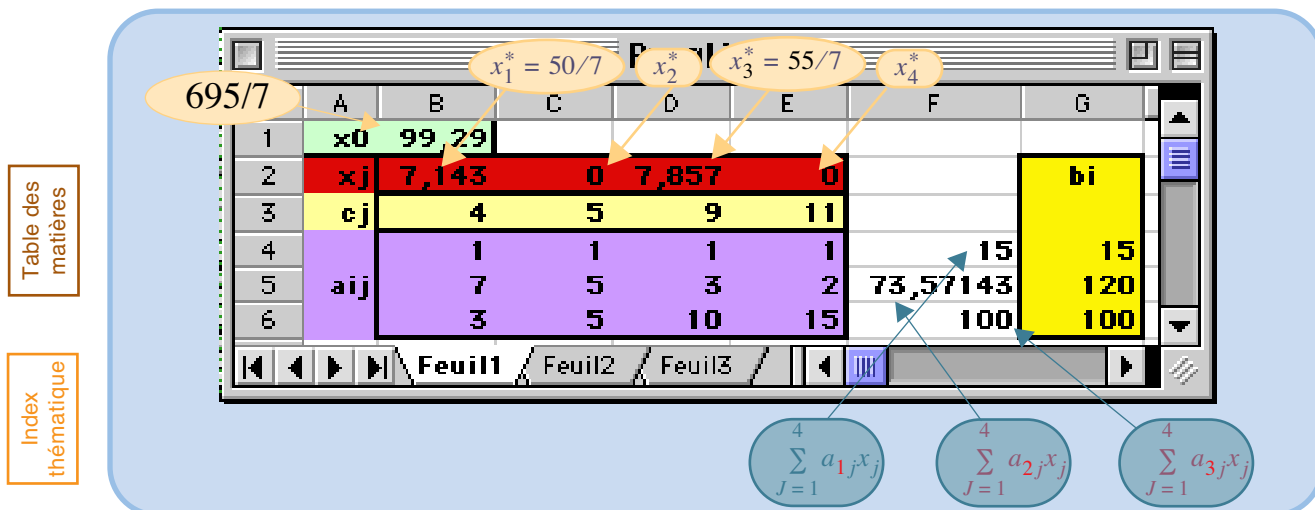


FIGURE 270
Résultat de l'optimisation



Le premier rapport (figure 271, page 1132) ne fournit comme information supplémentaire que les valeurs prises par les variables d'écart des contraintes non saturées (ce qui présente un intérêt limité).

Le deuxième rapport (figure 272, page 1133) est plus intéressant car il fournit les valeurs optimales des variables duales. La terminologie employée est un peu différente de celle habituellement utilisée et retenue dans ce chapitre.

Le troisième rapport (figure 273, page 1133) n'amène pas d'information nouvelle puisqu'il se contente d'indiquer que l'on ne peut pas augmenter la valeur optimale d'une variable de la base sans dégrader l'optimum. La seconde information fournie est quelque peu trompeuse: elle fournit la valeur de x_0 lorsque l'une des variables de la base est rendue nulle mais, implicitement sans modifier les valeurs prises par les autres variables. Prenons l'exemple de x_1 ; si l'on rend nulle sa valeur, la poursuite des calculs dans le tableau du simplexe montre que les ressources que ce choix dégage permettent non seulement d'introduire x_2 (=10) mais encore conduit à diminuer la valeur prise par x_3 (qui tombe alors à 5) pour

FIGURE 271
Premier rapport sur la solution optimale trouvée

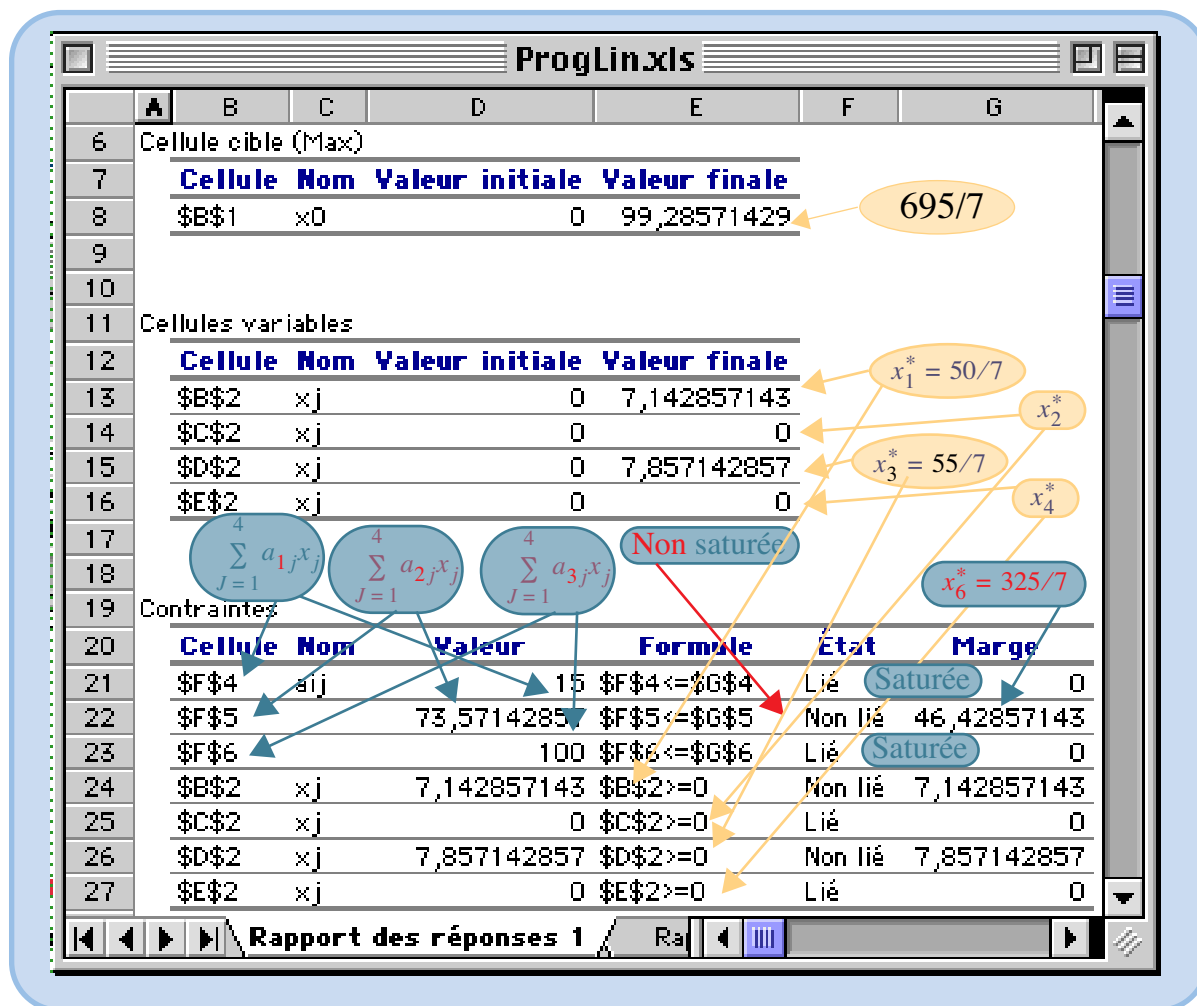


Table des matières

Index thématique

éviter de trop dégrader l'optimum, qui tombe à 95 et non 70,72 comme pourrait le laisser comprendre ce rapport.

SECTION II GÉNÉRALISATION

II-1 Un nouveau contexte pour la programmation linéaire

Ce sont des problèmes de production qui sont à l'origine de la programmation linéaire, il y a une cinquantaine d'années¹ mais, jusqu'à une époque récente, sa mise en œuvre pour résoudre des problèmes d'une certaine complexité ne pouvait être que le fait de grandes entreprises en raison de la puissance de calcul requise et des techniques utilisées pour définir le problème à résoudre par le programme informatique. Ce contexte a bien changé.

Il n'est pas besoin d'insister sur le fait que l'évolution de la micro-informatique se caractérise par une croissance importante et continue des puissances de traitement et des capacités de stockage, par une baisse constante des coûts des matériels et logiciels et par une réelle amélioration des facilités d'utilisation de ces moyens informatiques, les mettant à portée de tous. Toutes les entreprises disposent main-

1. Voir Jacquet-Lagrèze (1997, [241]), p. 14.

FIGURE 272
Deuxième rapport sur la solution optimale trouvée

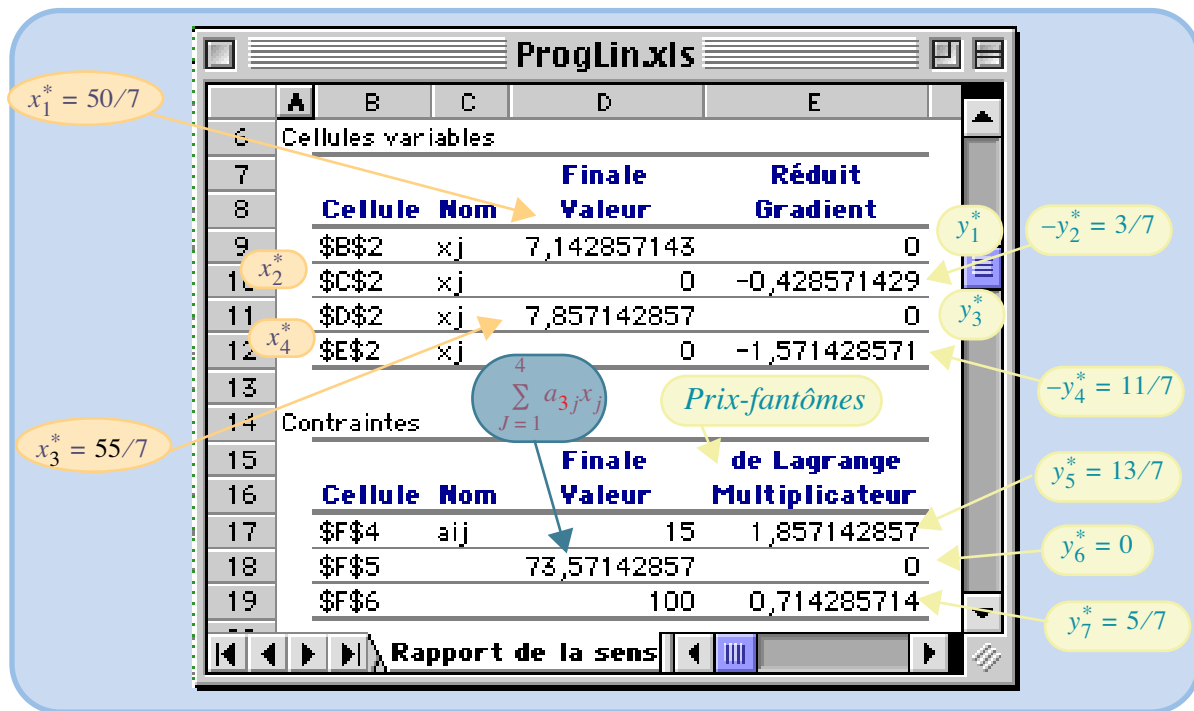
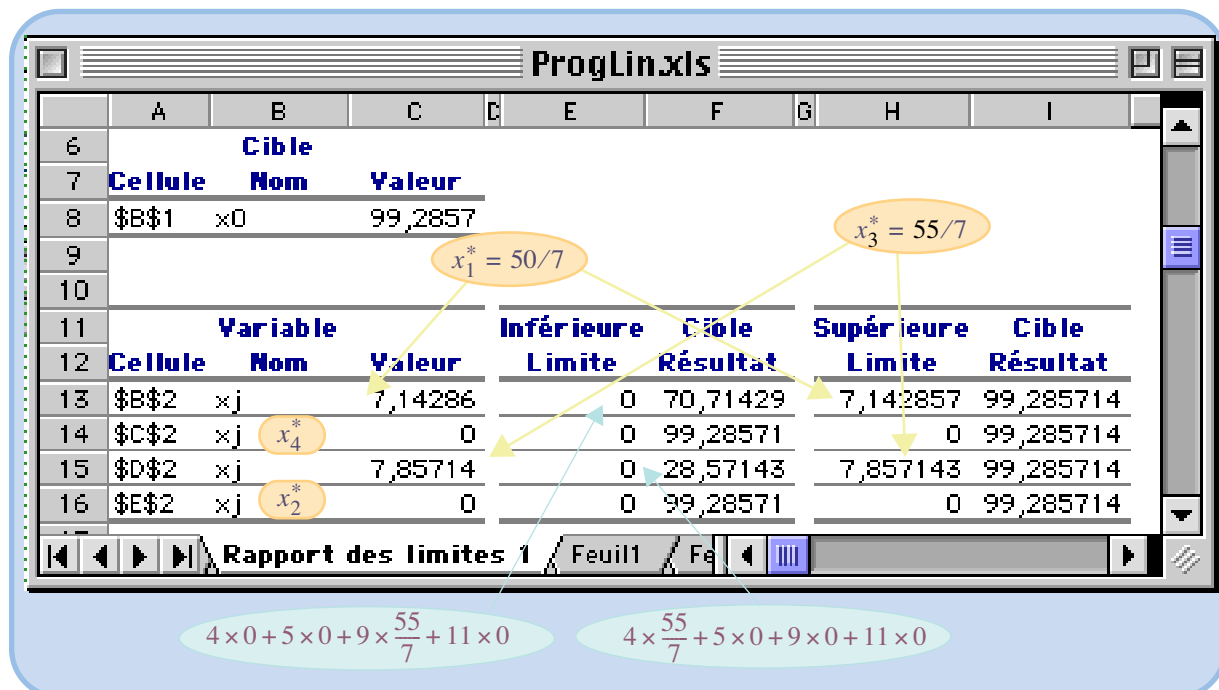


FIGURE 273
Troisième rapport sur la solution optimale trouvée

Table des matières

Index thématique



tenant, à un coût abordable, d'une puissance de traitements informatiques sans commune mesure avec celle dont disposaient les plus grosses entreprises il y a une vingtaine d'années.

La formalisation d'un problème d'optimisation d'une certaine envergure implique l'usage de matrices de données ne comportant qu'un pourcentage faible de valeurs non nulles. Les premiers programmes ont été mis au point à l'époque

des cartes perforées pour résoudre des problèmes de structure stable. La description de ces problèmes s'effectue alors par un jeu de données décrivant simultanément la structure du programme linéaire (variables, contraintes et fonction-objectif) et les valeurs de paramètres retenues par un ensemble de triplets du type « numéro de ligne – numéro de colonne – valeur du coefficient ». Cette approche présente deux inconvénients. Tout d'abord, les risques d'erreur dans le repérage des données dans la matrice sont grands, en particulier lorsque les variables du problème comportent plusieurs indices. Ensuite, et surtout, une transformation du problème aussi marginale que la modification de la borne d'un indice peut conduire à une réécriture complète des données du programme. Cette approche est donc fortement consommatrice de temps, ce qui en limite l'intérêt.

Une nouvelle approche, apparue à la fin des années quatre-vingt¹, résout ces problèmes de manière très efficace en s'appuyant sur une séparation claire et nette entre le modèle et les données utilisées, ce qui permet une mise au point très rapide et une généralisation immédiate de la formulation obtenue à une classe de problèmes. Cette nouvelle génération d'outils, connue sous le nom de **modeleurs**, est en fait un programme de définition automatique des triplets s'appuyant sur une analyse du **modèle** et des données et qu'un **solveur** (c'est-à-dire un programme de résolution du problème d'optimisation posé) choisi pour résoudre le problème utilisera. Les modeleurs s'appuient des langages non procéduraux (ou déclaratifs), proches de la notation mathématique conventionnelle, permettant une description concise du problème.

- Le modèle consiste en une définition littérale préalable des indices, des variables et des paramètres puis par une description des contraintes et de la fonction-objectif, sous une forme traduisant, avec la même concision, ces relations algébriques. Cette description utilise non seulement des variables indicées, des coefficients, des opérateurs «+», «-», «x», «/» mais aussi les opérateurs Σ et Π et les relations peuvent même être soumises à certaines conditions logiques. La compréhension de ce que fait le modèle est immédiate, contrairement aux approches antérieures qui obligeaient à un décryptage fastidieux; il s'ensuit que sa maintenabilité, sa communicabilité et sa portabilité sont fortes.
- La description des données commence par la liste des occurrences de chaque indice, puis pour chaque coefficient (indicé), par la liste des valeurs numériques.

Dans ces conditions, la maintenance du programme linéaire est aisée.

- L'adjonction (ou la suppression) d'une contrainte se traduit par l'adjonction (ou la suppression) d'une ligne du modèle et l'adjonction (ou la suppression)

1. Une présentation de cette approche par modeleur peut être trouvée dans Murphy, Stohr & Asthana (1992, [312]), Rosenthal (1996, [366]), Jacquet-Lagrèze (1997, [241]) et Giard (1997, [184]). La viabilité technique et économique de cette approche est attestée par de très nombreuses réalisations (par exemple, deux importantes applications industrielles de ces approches ont été réalisées à l'IAE de Paris dans le cadre de contrats de recherche; elles sont décrites dans Giard, Triomphe, André (1997, [201]), qui présente un exemple détaillé d'une utilisation d'un modeleur intégré dans un SIAD, et dans Giard & Triomphe (1996, [199]). Plusieurs modeleurs sont disponibles sur le marché. Parmi les plus connus, on peut signaler GAMS (voir Brooke, Kendrick & Meeraus, 1988, [68]) et XPRESS-MP. Plusieurs exemples de l'ouvrage de Jacquet-Lagrèze (1997, [241]) illustrent l'utilisation de XPRESS-MP. Il comporte en outre une liste des principaux modeleurs et comporte les références bibliographiques de base.

d'un ensemble de coefficients. Ces transformations sont locales, c'est-à-dire sans incidence sur le reste du modèle ou des données.

- Il suffit de changer tout ou partie des ensembles des indices ou des coefficients pour générer un nouveau programme linéaire et ce, sans toucher au modèle.

Cette approche focalise l'attention sur l'essentiel, à savoir la définition de problèmes pertinents. Elle permet de tester rapidement des idées sur un jeu de données restreint, le passage à un jeu plus complet ne remettant pas en cause le modèle. Il est intéressant de noter que ces modeleurs sont utilisés de plus en plus par des SIAD (systèmes d'aide à la décision), sans que l'utilisateur en ait conscience: le SIAD permet de sélectionner un modèle dans un portefeuille restreint de modèles, gère la sélection ou la saisie des données du modèle et présente les propositions de solutions sous une forme immédiatement exploitable et propice à une réflexion sur une éventuelle amélioration de l'énoncé du problème. Cette orientation transforme un peu le statut de la recherche opérationnelle, qui a longtemps été utilisée en postulant implicitement que l'on était, a priori, capable de formuler correctement un «problème pertinent», ce qui est rarement le cas, le «problème isolé» s'intégrant en fait dans un système ouvert.

II-2 Le dépassement du modèle linéaire

Certains modèles présentés ultérieurement s'appuient sur des «astuces» permettant de contourner les hypothèses de linéarité qui semblent limiter la démarche de modélisation dans sa tentative de «coller» à une réalité complexe.

Au préalable, il convient de préciser ce que peuvent représenter les variables utilisées dans un programme linéaire destiné à améliorer la gestion des processus productifs. En pratique, on rencontre deux types de variables: les variables de commande du problème étudié et les variables indicatrices.

- Les **variables de commande** correspondent à la traduction, dans le programme linéaire, des décisions qu'il est possible de prendre: niveaux de production, quantité de ressources requises, etc. Ces variables peuvent être continues ou discrètes. Parmi les variables discrètes, il faut souligner le rôle particulièrement important joué par les **variables binaires** (c'est-à-dire susceptibles de prendre seulement les valeurs 0 et 1). En effet, elles sont associées à des décisions du type «faire» (valeur 1) ou «ne pas faire» (valeur 0), cette décision ayant un impact direct sur la fonction-objectif. Les décisions de cette nature sont variées: exécuter ou non une commande ou une tâche, dédier ou non une ressource à la satisfaction d'une demande, partir ou non d'une localisation A pour se rendre dans une localisation B, retenir ou non l'une des alternatives décisionnelles (choix d'un équipement, d'une gamme, etc.).
- Les **variables indicatrices** sont définies ici comme des variables binaires auxiliaires qui sont associées aux valeurs prises par une ou plusieurs variables de commande et permettent de s'affranchir partiellement des contraintes de linéarité liant les variables de commande dans la programmation linéaire.

II-2.1 Analyse de la valeur prise par le premier membre d'une contrainte

Certains problèmes imposent de savoir si la valeur prise par une variable ou par une combinaison linéaire de variables appartient à un sous-ensemble E_1 des valeurs de z , ou au sous-ensemble complémentaire E_2 de ces valeurs de z ¹. Cette information est fournie par une variable indicatrice δ dont la valeur est liée à celle prise par z par l'intermédiaire d'une contrainte additionnelle que toute solution faisable devra respecter.

L'analyse de cette contrainte liant z et δ s'effectue facilement dans un tableau croisant les deux ensembles de valeurs de z , avec les deux valeurs de δ . À l'intersection d'une ligne et d'une colonne, on examine si la contrainte retenue peut ou non être respectée. Pour permettre l'interaction entre z et δ , la contrainte doit être telle qu'elle ne puisse pas être satisfaite dans une seule des quatre combinaisons analysées de valeurs prises par z et δ . En supposant par exemple, mais la généralisation est immédiate, que la contrainte n'est pas satisfaite pour la combinaison «ensemble E_2 et $\delta = 1$ », on peut tirer quatre propositions suivantes associées à toute solution réalisable (satisfaisant donc cette contrainte):

- si $\delta = 1$, alors la valeur de z appartient nécessairement à l'ensemble E_1 ;
- si la valeur de z appartient à l'ensemble E_2 , alors δ vaut nécessairement 0;
- si $\delta = 0$, alors la contrainte est respectée quelle que soit la valeur de z ;
- si la valeur de z appartient à l'ensemble E_1 , alors la contrainte est respectée quelle que soit la valeur de δ .

TABLEAU 348
Relations entre la contrainte, z et δ

	$\delta = 1$	$\delta = 0$
$z \in E_1$	Contrainte satisfaite	Contrainte satisfaite
$z \in E_2$	Contrainte <i>non</i> satisfaite	Contrainte satisfaite

D'une manière générale, il sera nécessaire² d'introduire deux contraintes liant δ et deux ensembles complémentaires de valeurs de z si l'on veut pouvoir conclure par la proposition « $\delta = 1$ si, et seulement si, la valeur de z appartient à l'ensemble E_1 ».

On analysera dans les tableaux 350 à 353 un ensemble de huit contraintes permettant de traiter les cas de figure habituellement rencontrés. Pour simplifier la présentation des ensembles de valeurs prises par z , on convient³ de délimiter par 0 les deux ensembles E_1 et E_2 (ce qui revient à retrancher b à toutes les valeurs de

1. E_1 et E_2 sont complémentaires soit dans l'ensemble des réels, soit dans l'ensemble des réels positifs ou nuls (cas du tableau 350, page 1137).

2. Pour qu'il en soit autrement, il faudrait que la contrainte ne puisse être satisfaite simultanément dans deux combinaisons situées dans l'une des diagonales du tableau. Il faut ajouter que, dans de nombreux problèmes, une seule relation suffit. Par exemple, l'examen du tableau 350 montre que $\delta = 1$ si $z > 0$ et que si $z = 0$, δ peut prendre indifféremment les valeurs 0 ou 1; si le fait que δ soit positif entraîne, directement ou non, une dégradation de la valeur de la fonction-objectif, δ aura alors «tendance» à rester nul et une seule contrainte sera suffisante.

3. Le cas d'ensembles E_1 et E_2 disjoints sera évoqué en note de la page 1140.

la variable ou de la combinaison linéaire de variables, si la valeur de partage des ensembles est b). D'une manière générale, z peut prendre des valeurs comprises entre m et $(M - \varepsilon)^1$ et la valeur 0 sépare les deux ensembles; m est normalement négatif, sauf si E_2 ne comporte que la valeur 0, auquel cas (étudié dans le [tableau 350](#)) m est défini comme étant la plus faible valeur positive que peut prendre z dans E_1 . Les hypothèses testées sont décrites dans le [tableau 349](#).

TABLEAU 349
Grilles de présentation des contraintes liant les valeurs prises par z et δ

Tableaux	Contraintes	Définition de z (avec $b \neq 0$)	E_1	E_2
tableau 350, page 1137	$C_1: \langle z \leq M\delta \rangle$ $C_2: \langle z \geq m\delta \rangle$	$z \geq 0$ avec $z = x$ ou $z = x - b$ ou $z = \sum_i a_i x_i - b$	$z > 0$	$z = 0$
tableau 351, page 1138	$C_3: \langle z \leq M(1-\delta) \rangle$ $C_4: \langle z \geq m\delta + \varepsilon(1-\delta) \rangle$	$z = x - b$ ou $z = \sum_i a_i x_i - b$	$z \leq 0$	$z > 0$
tableau 352, page 1138	$C_5: \langle z \leq M\delta + \varepsilon(\delta - 1) \rangle$ $C_6: \langle z \geq m(1 - \delta) \rangle$	$z = x - b$ ou $z = \sum_i a_i x_i - b$	$z \geq 0$	$z < 0$
tableau 353, page 1139	$C_7: \langle z \leq M\delta_1 + \varepsilon(\delta_1 - 1) \rangle$ $C_8: \langle z \geq m\delta_2 + \varepsilon(1 - \delta_2) \rangle$	$z = x - b$ ou $z = \sum_i a_i x_i - b$	$z = 0$	$z \neq 0$
tableau 354, page 1140	$C_1: \langle z \leq M\delta \rangle$ $C_2: \langle z \geq m\delta \rangle$	$z = x - b$ ou $z = \sum_i a_i x_i - b$	$z \neq 0$	$z = 0$

Table des matières

TABLEAU 350
Création de contraintes permettant d'associer la variable indicatrice δ à la proposition $\langle z > 0 \Leftrightarrow \delta = 1 \rangle$ (avec $z \geq 0$)

Index thématique

	La contrainte C_1 $\langle z \leq M\delta \rangle$ est		La contrainte C_2 $\langle z \geq m\delta \rangle$ est		Les contraintes C_1 et C_2 sont simultanément	
	Si $\delta = 1$	Si $\delta = 0$	Si $\delta = 1$	Si $\delta = 0$	Si $\delta = 1$	Si $\delta = 0$
Si $z > 0$	satisfaite	<i>non</i> satisfaite	satisfaite	satisfaite	satisfaites	<i>non</i> satisfaites
Si $z = 0$	satisfaite	satisfaite	<i>non</i> satisfaite	satisfaite	<i>non</i> satisfaites	satisfaites
Conclusions	Avec la seule contrainte $\langle z \leq \delta M \rangle$: $\delta = 1 \Rightarrow z > 0$ ou $z = 0$ $\delta = 0 \Rightarrow z = 0$ $z > 0 \Rightarrow \delta = 1$ $z = 0 \Rightarrow \delta = 1$ ou 0		Avec la seule contrainte $\langle z \geq \delta m \rangle$: $\delta = 1 \Rightarrow z > 0$ $\delta = 0 \Rightarrow z > 0$ ou $z = 0$ $z = 0 \Rightarrow \delta = 0$ $z > 0 \Rightarrow \delta = 1$ ou 0		Avec les 2 contraintes $\langle z \leq \delta M \rangle$ et $\langle z \geq \delta m \rangle$: $\delta = 1 \Leftrightarrow z > 0$ et $\delta = 0 \Leftrightarrow z = 0$	

II-2.2 Prise en compte de contraintes logiques

On a indiqué, [page 1135](#), que l'usage de variables binaires dans la modélisation par la programmation linéaire permet de traiter de manière efficace un certain nombre de contraintes logiques. Sachant que $x_i = 1$ signifie, selon les cas, soit que

1. M est une constante positive dont la valeur est supérieure à toutes celles que peut prendre z ; d'un point de vue opérationnel, il est conseillé (voir Williams, [444], p. 38) de ne pas « surdimensionner » M , dans la mesure où il est numériquement préférable de ne pas avoir de fortes variations des coefficients de la fonction-objectif.

TABLEAU 351
Création de contraintes permettant d'associer la variable indicatrice δ à la proposition « $z \leq 0 \Leftrightarrow \delta = 1$ » (z quelconque)

	La contrainte C_3 « $z \leq M(1 - \delta)$ » est		La contrainte C_4 « $z \geq m\delta + \varepsilon(1 - \delta)$ » est		Les contraintes C_3 et C_4 sont simultanément	
	Si $\delta = 1$	Si $\delta = 0$	Si $\delta = 1$	Si $\delta = 0$	Si $\delta = 1$	Si $\delta = 0$
Si $z \leq 0$	satisfaite	satisfaite	satisfaite	<i>non</i> satisfaite	satisfaites	<i>non</i> satisfaites
Si $z > 0$ (ou $z \geq \varepsilon$)	<i>non</i> satisfaite	satisfaite	satisfaite	satisfaite	<i>non</i> satisfaites	satisfaites
Conclusions	Avec la seule contrainte « $z \leq M(1 - \delta)$ »: $\delta = 1 \Rightarrow z \leq 0$ $\delta = 0 \Rightarrow z \leq 0$ ou $z > 0$ $z > 0 \Rightarrow \delta = 0$ $z \leq 0 \Rightarrow \delta = 1$ ou 0		Avec la seule contrainte « $z \geq m\delta + \varepsilon(1 - \delta)$ »: $\delta = 1 \Rightarrow z \leq 0$ ou $z > 0$ $\delta = 0 \Rightarrow z > 0$ $z > 0 \Rightarrow \delta = 1$ ou 0 $z \leq 0 \Rightarrow \delta = 1$		Avec les 2 contraintes « $z \leq M(1 - \delta)$ » et « $z \geq m\delta + \varepsilon(1 - \delta)$ » $z \leq 0 \Leftrightarrow \delta = 1$ et $z > 0 \Leftrightarrow \delta = 0$	

TABLEAU 352
Création de contraintes[†] permettant d'associer la variable indicatrice δ à la proposition « $z \geq 0 \Leftrightarrow \delta = 1$ » (z quelconque)

	La contrainte C_5 « $z \leq M\delta + \varepsilon(\delta - 1)$ » est		La contrainte C_6 « $z \geq m(1 - \delta)$ » est		Les contraintes C_5 et C_6 sont simultanément	
	Si $\delta = 1$	Si $\delta = 0$	Si $\delta = 1$	Si $\delta = 0$	Si $\delta = 1$	Si $\delta = 0$
Si $z \geq 0$	satisfaite	<i>non</i> satisfaite	satisfaite	satisfaite	satisfaites	<i>non</i> satisfaites
Si $z < 0$ (ou $z \leq -\varepsilon$)	satisfaite	satisfaite	<i>non</i> satisfaite	satisfaite	<i>non</i> satisfaites	satisfaites
Conclusions	Avec la seule contrainte « $z \leq M\delta + \varepsilon(\delta - 1)$ »: $\delta = 1 \Rightarrow z \geq 0$ ou $z < 0$ $\delta = 0 \Rightarrow z < 0$ $z \geq 0 \Rightarrow \delta = 1$ $z < 0 \Rightarrow \delta = 1$ ou 0		Avec la seule contrainte « $z \geq m(1 - \delta)$ »: $\delta = 1 \Rightarrow z \geq 0$ $\delta = 0 \Rightarrow z \geq 0$ ou $z < 0$ $z \geq 0 \Rightarrow \delta = 1$ ou 0 $z < 0 \Rightarrow \delta = 0$		Avec les 2 contraintes « $z \leq M\delta + \varepsilon(\delta - 1)$ » et « $z \geq m(1 - \delta)$ » $z \geq 0 \Leftrightarrow \delta = 1$ et $z < 0 \Leftrightarrow \delta = 0$	

Table des matières

Index thématique

†. Le problème posé est voisin de celui analysé au tableau 350, à ceci près que z , et donc m , peuvent maintenant être négatifs; ceci explique les différences entre les contraintes C_1 et C_3 (les contraintes C_2 et C_6 étant similaires).

la décision élémentaire i est prise auquel cas x_i est une **variable de commande** (cf. page 1135), soit que la contrainte élémentaire i est satisfaite, on dira, pour plus de généralité, que la proposition P_i est vraie. Dans ces conditions, six jeux de règles assez évidentes peuvent être énoncés¹. Les deux premiers portent sur la véracité d'un sous-ensemble de propositions prises dans un ensemble; elles permettent,

1. L'appel à la logique prédicative peut, bien sûr, s'avérer judicieux pour traiter des cas plus complexes que ceux évoqués ici (voir le chapitre IX de l'ouvrage de H. P. Williams, [444]).

TABLEAU 353

Création de contraintes[†] permettant d'associer la variable indicatrice δ à la proposition « $\delta = 0 \Rightarrow z \neq 0$ »[‡] (z quelconque)

		La contrainte C_7 « $z \leq M\delta_1 + \varepsilon(\delta_1 - 1)$ » est		La contrainte C_8 « $z \geq m\delta_2 + \varepsilon(1 - \delta_2)$ » est		Conséquences de la prise en compte simultanée des contraintes C_7 et C_6
		Si $\delta_1 = 1$	Si $\delta_1 = 0$	Si $\delta_2 = 1$	Si $\delta_2 = 0$	
Si $z > 0$ Si $z = 0$ Si $z < 0$	satisfaite	<i>non</i> satisfaite	satisfaite	satisfaite	<ul style="list-style-type: none"> • $\delta_1 = 0$ et $\delta_2 = 1 \Rightarrow z < 0$ • $\delta_1 = 1$ et $\delta_2 = 0 \Rightarrow z > 0$ • $\delta_1 = 1$ et $\delta_2 = 1 \Rightarrow z$ quelconque • $\delta_1 = 0$ et $\delta_2 = 0 \Rightarrow impossible$ • \Rightarrow seuls les 3 premiers cas pourront être observés $\Rightarrow \delta_1 + \delta_2 = 1$ ou 2 • avec la contrainte $\delta_1 + \delta_2 \leq 1 + \delta$, on obtient $\delta = 0$ si $z \neq 0$ 	
	satisfaite	<i>non</i> satisfaite	satisfaite	<i>non</i> satisfaite		
	satisfaite	satisfaite	satisfaite	<i>non</i> satisfaite		
Conclusions	Avec la seule contrainte « $z \leq M\delta_1 + \varepsilon(\delta_1 - 1)$ »: $\delta_1 = 1 \Rightarrow z = 0$ ou $z \neq 0$ $\delta_1 = 0 \Rightarrow z < 0$ $z \geq 0 \Rightarrow \delta_1 = 1$ $z < 0 \Rightarrow \delta_1 = 0$ ou 1		Avec la seule contrainte « $z \geq m\delta_2 + \varepsilon(1 - \delta_2)$ »: $\delta_2 = 1 \Rightarrow z = 0$ ou $z \neq 0$ $\delta_2 = 0 \Rightarrow z > 0$ $z > 0 \Rightarrow \delta_2 = 0$ ou 1 $z \leq 0 \Rightarrow \delta_2 = 0$		Avec les 3 contraintes « $z \leq M\delta_1 + \varepsilon(\delta_1 - 1)$ » « $z \geq m\delta_2 + \varepsilon(1 - \delta_2)$ » $\delta_1 + \delta_2 \leq 1 + \delta$ $\delta = 0 \Rightarrow z \neq 0$	

Table des matières

†. La contrainte C_7 est identique à la contrainte C_5 (tableau 352), au remplacement près de δ par δ_1 ; la contrainte C_8 est identique à la contrainte C_4 (tableau 351), au remplacement près de δ par δ_2 .

‡. Attention, la proposition réciproque n'est pas vraie car (voir dernière colonne du tableau) car on peut avoir $z = 0$ aussi bien avec $\delta = 0$ qu'avec $\delta = 1$.

Index thématique

notamment, de définir des **alternatives décisionnelles** ou des **contraintes disjonctives**, c'est-à-dire excluant la réalisation simultanée de plusieurs propositions, avec les variables binaires créées dans les tableaux 350 à 353. Les deux jeux suivants portent sur les relations causales entre deux propositions; elles permettent, notamment, d'introduire des décisions conditionnelles. Les deux dernières portent sur les conditions liant un groupe de propositions à une autre proposition et permettent d'élargir le champ d'application des deux premiers jeux de règles.

- **Règles 1:** «*parmi les propositions P_1, \dots, P_n , au plus, une seule peut être*

*vraie*¹» se traduit par la condition: $\sum_{i=1}^n x_i \leq 1$. Si «*parmi les propositions P_1, \dots, P_n , au plus, k propositions peuvent être vraies*», il suffit de remplacer 1 par k dans le second membre de la contrainte et si «*parmi les propositions P_1, \dots, P_n , au moins, k propositions n doivent être vraies*», il suffit de remplacer ≤ 1 par $\geq k$ dans la contrainte.

- **Règles 2:** «*parmi les propositions P_1, \dots, P_n , l'une d'entre elles, et une seule,*

1. Cette proposition peut aussi s'énoncer sous la forme « P_1 est vraie» ou « P_2 est vraie» ou... « P_n est vraie»; dans ce cas, on est en présence de ce que l'on appelle, en logique, un **ou exclusif**.

TABLEAU 354

Création de contraintes permettant d'associer la variable indicatrice δ aux propositions « $\delta = 0 \Rightarrow z = 0$ »[†] et « $z \neq 0 \Rightarrow \delta = 1$ »[‡] (z quelconque)

	La contrainte C_7 « $z \leq M\delta$ » est		La contrainte C_8 « $z \geq m\delta$ » est		Conséquences de la prise en compte simultanée des contraintes C_7 et C_6	
	Si $\delta = 1$	Si $\delta = 0$	Si $\delta = 1$	Si $\delta = 0$	Si $\delta = 1$	Si $\delta = 0$
Si $z > 0$	satisfaite	<i>non</i> satisfaite	satisfaite	satisfaite	satisfaites	<i>non</i> satisfaites
Si $z = 0$	satisfaite	satisfaite	satisfaite	satisfaite	satisfaites	satisfaites
Si $z < 0$	satisfaite	satisfaite	satisfaite	<i>non</i> satisfaite	satisfaites	<i>non</i> satisfaites
Conclusions	Avec la seule contrainte « $z \leq M\delta$ »: $\delta = 1 \Rightarrow z \neq 0$ ou $= 0$ $\delta = 0 \Rightarrow z \leq 0$ $z > 0 \Rightarrow \delta = 1$ $z \leq 0 \Rightarrow \delta = 0$ ou 1		Avec la seule contrainte « $z \geq m\delta$ »: $\delta = 1 \Rightarrow z \neq 0$ ou $= 0$ $\delta = 0 \Rightarrow z > 0$ $z \geq 0 \Rightarrow \delta = 0$ ou 1 $z < 0 \Rightarrow \delta = 1$		Avec les 2 contraintes « $z \leq M\delta$ » et « $z \geq m\delta$ » $\delta = 1 \Rightarrow z \neq 0$ ou $= 0$ $\delta = 0 \Rightarrow z \neq 0$	

†. Attention, la proposition réciproque n'est pas vraie car (voir dernière colonne du tableau) car on peut avoir $z = 0$ aussi bien avec $\delta = 0$ qu'avec $\delta = 1$.

‡. Attention, la proposition réciproque n'est pas vraie car (voir dernière colonne du tableau) car on peut avoir $\delta = 1$ aussi bien avec $z = 0$ qu'avec $z \neq 0$.

est nécessairement vraie» se traduit par la condition¹: $\sum_{i=1}^n x_i = 1$. Si «*parmi*

les propositions P_1, \dots, P_n , exactement k propositions ($k \leq n$) doivent être vraies», il suffit de remplacer 1 par k dans le second membre de la contrainte; si $k = n$, on retrouve une généralisation de la règle 4 ci-après.

- *Règles 3*: «si la proposition P_1 est vraie, alors la proposition P_2 doit être vraie» se traduit par la condition: $x_1 \leq x_2$ qui force x_2 à prendre la valeur 1 si x_1 vaut 1; ceci n'empêche pas x_2 à prendre la valeur 1 si x_1 vaut 0, c'est-à-dire que la proposition P_2 peut être vraie alors que la proposition P_1 est fautive. Si, en outre, on a « P_2 vrai» \Rightarrow « P_3 vrai», il faudra ajouter $x_2 \leq x_3$; la généralisation de ce raisonnement à une *causalité en cascade* est immédiate.
- *Règle 4*: «si la proposition P_1 est vraie, alors la proposition P_2 doit être vraie et, réciproquement, si la proposition P_2 est vraie, alors la proposition P_1 doit être vraie» se traduit par la condition: $x_1 = x_2$ qui oblige les deux propositions à être simultanément vraies ou simultanément fautes. La généralisation à n propositions devant être toutes simultanément vérifiées ou simultanément non vérifiées se traduit par les $n - 1$ contraintes suivantes: $x_1 = x_2$; $x_2 = x_3$; \dots ; $x_{n-1} = x_n$.

1. Un cas particulier de deux contraintes disjonctives est celui se traduisant par le fait que l'on ait soit $z \geq A$, soit $z \leq B$, avec $B < A$. Dans ce cas, on introduit la variable binaire δ , valant 1 seulement si la première des deux contraintes est satisfaite et 0 seulement dans le cas contraire, et les deux contraintes suivantes, où M est, comme précédemment, une constante positive de valeur très élevée: $z \geq A - (1 - \delta)M$ et $z \leq B + \delta M$.

- Règles 5: «si la proposition P_1 est vraie **ou** si la proposition P_2 est vraie, alors la proposition P_3 doit être vraie» se traduit¹ par la condition: $x_1 + x_2 \leq 2x_3$. La généralisation est immédiate²: «il suffit que l'une des propositions P_1, \dots, P_n soit vraie pour que la proposition P_{n+1} soit vraie» se traduit par la condition:
$$\sum_{i=1}^n x_i \leq nx_{n+1}$$
; dans ce dernier cas, plusieurs propositions P_i peuvent simultanément être vraies ($i \leq n$).
- Règles 6: «si la proposition P_1 est vraie **et si** la proposition P_2 est vraie, alors la proposition P_3 doit être vraie» se traduit par les conditions suivantes: $x_3 \leq x_1$; $x_3 \leq x_2$ et $x_1 + x_2 \leq 1 + x_3$. La généralisation est immédiate: «il est nécessaire que toutes les propositions P_1, \dots, P_n soient vraies pour que la proposition P_{n+1} soit vraie» se traduit par les n conditions « $x_{n+1} \leq x_i$ » (i variant de 1 à n), auxquelles il faut ajouter la condition « $\sum_{i=1}^n x_i \leq n - 1 + x_{n+1}$ ». Des adaptations de cette règle ont été utilisées à la page 139, dans des cas de figures où la fonction-objectif incluait x_{n+1} sous une forme tendant à le rendre nul dans un cas et égal à un dans l'autre, rendant inutiles les conditions « $x_{n+1} \leq x_i$ ».

II-2.3 Introduction des fonctions-objectifs non linéaires

Dans les fonctions-objectifs utilisées jusqu'ici, la vision économique passait principalement par une minimisation du coût d'un processus productif défini comme une somme de coûts variables directs constants, liés aux valeurs prises par les variables de commande. Par exemple, dans le cas simple d'une production x à laquelle est associé le coût variable unitaire c , la fonction-objectif est: $z = cx$. Cette production peut être une somme de productions dédiées (pour des clients, différents, pour des sites différents...), auquel cas, la fonction-objectif est: $z = c \sum_i x_i$. La généralisation à la production de plusieurs produits ou services est immédiate.

Cette vision économique n'est pas acceptable lorsque des charges fixes, variant éventuellement par palier, existent ou que certains coûts variables directs (ou recettes unitaires) ne sont pas les mêmes pour des plages disjointes de valeurs de production (et/ou de vente). Les fonctions linéaires par morceau couvrent assez bien les principaux cas de figure rencontrés³. On commencera par examiner le cas le plus simple, celui de l'existence de charges fixes (§ II-2.3.1), avant de généraliser la démarche (§ II-2.3.2).

1. En appliquant la contrainte C_1 du tableau 350, page 1137, avec $M = 2$. On peut ajouter que l'on est en présence d'un **ou inclusif**, lequel n'exclut pas la réalisation simultanée des propositions (contrairement au «ou exclusif»).

2. Il s'agit d'une utilisation de la contrainte C_1 du tableau 350, page 1137, avec $M = n$.

3. Certains problèmes nécessitent l'usage de fonctions-objectifs du type
$$\sum_{i=1}^n \sum_{i'=1}^n a_{i,i'} x_i x_{i'} + \sum_{i=1}^n b_i x_i$$
. Le lecteur est invité à se reporter à l'ouvrage de Jacquet-Lagrèze (1997, [241]), p. 33 et suivantes.

II-2.3.1 Introduction des charges fixes

Cette structure de coûts n'est pas acceptable dans un certain nombre de problèmes où une décision de production implique d'avoir à supporter une charge fixe, c'est-à-dire que le coût partiel de production du bien considéré est nul si la production est nulle, et égal à $cx + K$, si $x > 0$. Pour obtenir ce résultat, on introduit la variable y qui est telle que $y = 0$, si $x = 0$ et $y = 1$, seulement si $x > 0$, ce qui permet d'introduire la charge fixe dans la fonction-objectif:

$$\text{Min } z, \text{ avec } z = cx + Ky + \dots \quad \text{relation 481}$$

La liaison entre x et y est obtenue (en application de la contrainte C_1 du [tableau 350 de la page 1137](#)) avec la contrainte additionnelle suivante:

$$x \leq My \quad \text{relation 482}$$

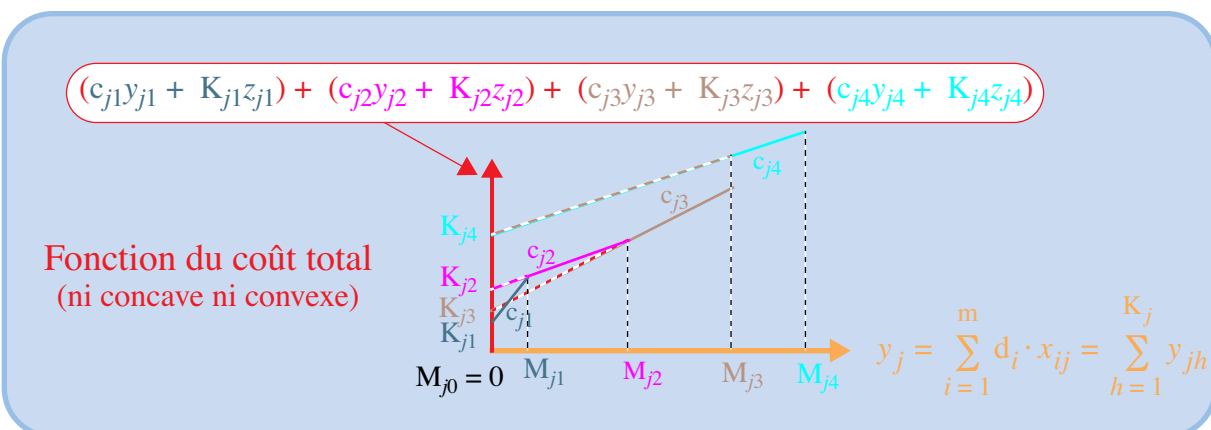
où M est une constante supérieure ou égale à la valeur maximale que peut prendre x .

II-2.3.2 Généralisation aux fonctions de coût (ou de recettes) linéaires par morceau

La généralisation à toute fonction de coût linéaire par morceau, s'effectue sans difficulté, en introduisant autant de productions fictives x_i qu'il y a de plages k de valeurs (comprise entre M_{k-1} et M_k , la borne supérieure appartenant seule à l'intervalle, avec $M_0 = 0$) sur lesquelles le coût variable est constant et qui sont toutes nulles, sauf celle qui inclut la production x dans sa plage de valeurs et qui est, bien entendu, égale à cette production ($x_k = x$). La [figure 274](#) illustre la fonction de coût utilisée qui, dans cet exemple, n'est ni concave (ce qui implique que le coût moyen de production ne croisse jamais lorsque x croît), ni convexe (ce qui implique que le coût moyen de production ne décroisse jamais lorsque x croît). Cette généralisation permet, notamment, de traiter le cas des rabais uniformes et rabais progressifs en approvisionnement externe ([figure 275, page 1143](#)).

FIGURE 274

Fonction de coût total quelconque



Il faut remplacer, dans le reste du problème, x , par $x_1 + x_2 + x_3 + x_4$, plutôt que d'introduire la contrainte $x = x_1 + x_2 + x_3 + x_4$. Dans ces conditions, la fonction-objectif devient (pour la partie relative à ce coût de production):

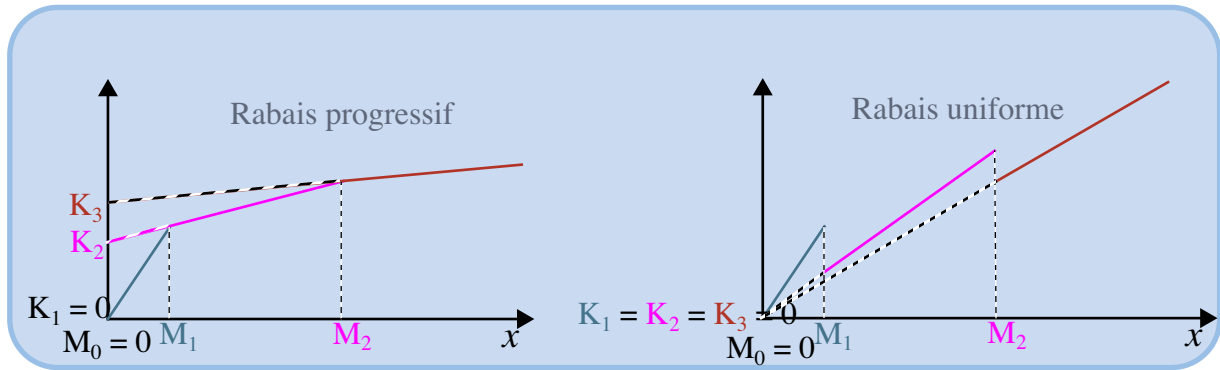
$$\text{Min } z, \text{ avec } z = (c_{j1}y_{j1} + K_{j1}z_{j1}) + (c_{j2}y_{j2} + K_{j2}z_{j2}) + (c_{j3}y_{j3} + K_{j3}z_{j3}) + (c_{j4}y_{j4} + K_{j4}z_{j4}) + \dots \quad \text{relation 483}$$

Table des matières

Index thématique

FIGURE 275

Fonction de coût total associée à un rabais progressif ou à un rabais uniforme



avec la série suivante de contraintes¹:

$$0 \leq y_{j1} < M_{j1} z_{j1}$$

$$M_{j1} z_{j2} \leq y_{j2} < M_{j2} z_{j2}$$

$$M_{j2} z_{j3} \leq y_{j3} < M_{j3} z_{j3}$$

$$M_{j3} z_{j4} \leq y_{j4} < M_{j4} z_{j4}$$

$$z_{j1} + z_{j2} + z_{j3} + z_{j4} = 1$$

Table des matières

Index thématique

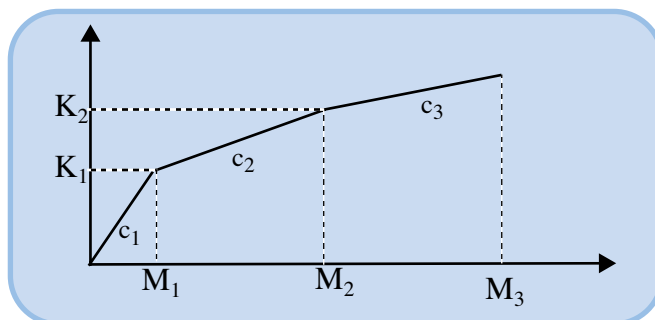
La dernière contrainte (en application de la règle 2, page 1139) permet d'activer au plus l'une des fonctions de coût ($c_k x_k + K_k y_k$), celle pour laquelle $y_k = 1$ (mais si l'on ne produit pas, tous les y_k sont nuls). Les contraintes précédentes généralisent le cas initialement étudié en permettant de forcer à 0 les productions x_k des tranches non retenues (lorsque $y_k = 0$, les deux bornes sont nulles, ce qui oblige la production correspondante x_k à être nulle).

Remarques:

- si la fonction de coût est concave (fonction de coût total non décroissante; voir illustration à la figure 276, page 1144), alors la « partie droite » des doubles inéquations est inutile car le coût total pour une quantité x_0 croît avec le numéro de tranche de coût, ce qui conduit à retenir la tranche de coûts ayant le numéro d'ordre le plus faible possible;
- cette formulation reste valable même en cas de variation de charges fixes par palier (ce qu'illustre l'exemple retenu);
- si x varie de manière discontinue, la plus faible variation pertinente pour la fonction de coût étant notée ε , il faut alors décider clairement si la quantité $x = M_i$ relève de la plage i ou de la plage $i + 1$. Supposons, dans notre exemple, que les bornes supérieures des classes soient exclues, on aura alors: $0 \leq x_1 \leq (M_1 - \varepsilon) y_1$; $M_1 y_2 \leq x_2 \leq (M_2 y_2 - \varepsilon)$; etc. On peut noter que la relation $y_1 + y_2 + \dots = 1$ empêche x de prendre une valeur comprise entre $M_i - \varepsilon$ et M_i . La

1. Les variables étant non négatives, la première contrainte double se réduit en réalité à $x_1 \leq M_1 y_1$; la formulation retenue a pour seul avantage de permettre la généralisation du raisonnement; il s'ensuit qu'après développement dans cet exemple, il y a 8 contraintes.

FIGURE 276
Fonction de coût total concave



transposition de ce qui vient d’être dit au cas de la borne inférieure est immédiate.

La généralisation du raisonnement à un nombre quelconque de plages de valeurs est immédiate¹ et conduit, dans le cas général, à créer un nombre de contraintes égal à $2 \times K$ contraintes mais il existe une formulation alternative plus efficace numériquement lorsque le nombre de plages K est supérieur à 3, puisqu’elle nécessite $K + 1$ contraintes (contre $2K - 1$ contraintes) et la création de K variables binaires additionnelles. Cette formulation s’appuie sur le fait que toute valeur de x comprise entre M_{k-1} et M_k peut encore s’écrire comme une combinaison linéaire de ces bornes, c’est-à-dire : $\alpha_{k-1}M_{k-1} + \alpha_k M_k$, avec $\alpha_{k-1} + \alpha_k = 1$ et qu’il en est de même pour la fonction de coût qui, pour toute valeur de x comprise entre M_{k-1} et M_k peut encore s’écrire $\alpha_{k-1}W_{k-1} + \alpha_k W_k$, où W_k est le coût total pour la valeur de x prise à la borne k considérée; on remplace dans la formulation les K variables x_k , par $K + 1$ variables α_k ; dans ces conditions, dans le reste

du problème, la production x est remplacée par $\sum_{k=0}^K \alpha_k H_k$ (avec $H_k = M_k + M_{k+1}$) et, pour obliger à n’avoir au plus que deux valeurs non nulles de α_k , de surcroît pour deux bornes consécutives, il faut introduire K variables binaires β_k , avec

$$\sum_{k=1}^K \beta_k = 1 \text{ et } K + 1 \text{ contraintes } \alpha_0 \leq \beta_1; \alpha_1 \leq \beta_1 + \beta_2; \alpha_2 \leq \beta_2 + \beta_3; \alpha_k \leq \beta_k + \beta_{k+1}; \alpha_{K-1} \leq \beta_{K-1} + \beta_K; \alpha_K \leq \beta_K.$$

Il faut ajouter que si la fonction-objectif consiste à maximiser une marge, au lieu de minimiser un coût, l’utilisation de la technique proposée ici ne se justifie pas, dès lors que la marge unitaire est une fonction non croissante (c’est-à-dire concave) de la quantité produite.

En effet, la production totale est la somme des productions sur chacune des tranches, c’est-à-dire $x_1 + x_2 + x_3$, dans notre exemple (et, d’une manière générale, $\sum_i x_i$), avec une contrainte de production pour chaque tranche : $x_1 < M_1; x_2 < M_2 -$

1. La fonction de coûts devient : $z = \sum_i (c_i x_i + K_i y_i) + \dots$, sous contraintes : $\sum_i y_i \leq 1$ et, pour chaque plage de valeurs i , délimitée par M_{i-1} et M_i (avec $M_0 = 0$) : $M_{i-1} y_i \leq x_i \leq M_i y_i$.

Table des matières

Index thématique

$M_1; x_3 < M_3 - M_2$. La marge totale est: $c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3$ (et, d'une manière générale, $\sum_i c_i x_i$). La fonction-objectif forcera donc l'utilisation prioritaire de la production la plus rentable, ce qui fait qu'il n'y a pas besoin de variable dichotomique comme dans le cas d'une fonction-objectif de coût quelconque.

Chapitre XVII

PRINCIPAUX ÉLÉMENTS DE MATHÉMATIQUES FINANCIÈRES

On ne cherchera ici qu'à fournir les quelques rudiments de mathématiques financières nécessaires à la compréhension des mécanismes de troc d'argent dans le temps¹. Une *calculatrice financière spécialisée dans les calculs faisant intervenir les intérêts composés, est accessible dans la version CD-Rom de ce chapitre, à partir de l'icône représentant une calculatrice mise en marge de chaque page. L'aide en ligne de cette calculatrice est «interfacée» avec ce chapitre. L'usage des fonctions financières du tableur Excel est expliqué en détail, pour vous permettre d'utiliser efficacement ces possibilités en entreprise.*



SECTION I LES DIVERSES NOTIONS D'INTÉRÊT

L'intérêt I s'analyse comme la rémunération du prêt d'une somme S pendant un temps t . On distingue deux types d'intérêt: l'intérêt simple et l'intérêt composé.

Table des matières

I-1 L'intérêt simple

Lorsque la durée du prêt est inférieure à l'année, il est habituel de convenir que l'intérêt I sera versé en une fois et sera proportionnel d'une part à un taux annuel i et, d'autre part, à la durée t (exprimée en fraction d'année) du placement, on parle alors d'intérêt simple.

Index thématique

$$I = Sit \quad (\text{intérêt simple}) \quad \text{relation 484}$$

Le taux i est encore appelé **taux annuel d'intérêt simple** et le produit it est appelé **taux proportionnel** (sous-entendu au taux annuel i , le coefficient de proportionnalité étant t , exprimé en année).

EXEMPLE: Prenons l'exemple d'un crédit de campagne (destiné à financer les stocks d'une activité saisonnière) avec $S = 25000$; $i = 10\%$; $t = (90 \text{ jours}) / (360 \text{ jours}) = 0,25$. On a alors un taux proportionnel $it = 2,5\%$ et un intérêt versé $I = 625 \text{ €}$. Dans cet exemple, la banque travaille avec des mois de 30 jours et une année de 360 jours mais les usages bancaires varient (travail en jours ouvrables ou en jours calendaires). La terminologie bancaire encore en usage appelle **diviseur**, le quotient du nombre annuel de jours par le taux d'intérêt annuel (ici $360/0,1 = 3600$) et **nombre**, le produit de la somme S par le nombre de jours du prêt (ici 25000×90).

1. Le lecteur qui désire approfondir ces points se reportera à l'ouvrage de Piermay, Hereil et Lazimi (1989, [334]) ou celui de Bonneau (1976, [61]), d'un niveau mathématique nettement plus élevé mais qui reste l'ouvrage de référence dans ce domaine.

= 2250000), l'intérêt se calculant comme le quotient du nombre par le diviseur (ici $2250000 / 3600 = 625$).

L'intérêt simple s'applique aux facilités de découvert accordées par une banque. Le découvert d'une entreprise peut varier d'un jour à l'autre. L'informatique permet facilement aux banques de calculer, pour une entreprise donnée et chaque mois, son découvert quotidien moyen, puis de calculer les agios dus en appliquant à cette valeur, le taux proportionnel calculé sur le mois.

La forme la plus répandue des mécanismes de l'intérêt simple est l'**escompte** qui s'analyse comme l'intérêt simple payé par un commerçant qui mobilise un effet commercial¹ auprès de son banquier. Pour l'entreprise, cette mobilisation consiste à se faire prêter par son banquier jusqu'à la date d'échéance de l'effet, le montant N de celui-ci dit **montant nominal** ou **valeur nominale**. L'escompte I n'est rien d'autre que le montant des frais financiers entraînés par ce prêt (s'y ajoute une commission dont l'importance varie avec le support utilisé pour matérialiser les titres, le support «magnétique» étant, bien entendu, le plus avantageux). Dans la pratique, l'entreprise fait appel à la mobilisation d'effets lorsque son compte devient débiteur, parce que son coût est inférieur à celui du découvert.

Le jour de valeur du débit de ces frais peut varier selon les banques, les entreprises et la technique de financement retenue. L'intérêt est dit **précompté** s'il est dû lors de l'octroi du prêt et il est dit **postcompté**, s'il est dû lors du remboursement de ce prêt. La première de ces deux solutions avantage la banque qui, pour une même rémunération, doit prêter une somme moindre.

I-2 Intérêt composé

I-2.1 Principes

Lorsque la durée du prêt ou du placement excède un an, il est d'usage que l'intérêt soit payé périodiquement au moins une fois par an et non en une seule fois. C'est même une obligation légale pour les emprunts obligataires à long terme qui comportent nécessairement un intérêt annuel à terme échu. Il est dès lors possible de replacer l'intérêt pendant le reste de la durée du prêt; c'est ainsi que si les intérêts sont versés annuellement, une somme $x_0 = 20000$, placée au taux $i = 10\%$, produit pendant un an un intérêt $ix_0 = 0,1 \times 20000 = 2000$. Le capital disponible x_1 à la fin de la première période est donc $x_1 = x_0 + ix_0 = x_0(1 + i)$, soit dans notre exemple numérique: $x_1 = 20000 + 2000 = 20000 \times 1,1 = 22000$.

Si l'on décide de placer encore un an le capital initial plus les intérêts, le capital disponible à la fin de la seconde période annuelle x_2 est égal au capital placé au début de cette période, c'est-à-dire $x_1 = 22000$, auquel il faut ajouter les intérêts produits pendant cette seconde période, c'est-à-dire $ix_1 = 0,1 \times 22000 = 2200$; en définitive x_2 est égal à:

$$x_2 = x_1 + ix_1 = x_1(1 + i) = 22000 + 2200 = 22000 \times 1,1 = 24200$$

1. On distingue traditionnellement trois catégories d'effets commerciaux:

- la **traite** ou **lettre de change**, tirée par le commerçant créancier et acceptée par son client,
- le **billet à ordre** émis par le client,
- le **warrant** endossé par l'emprunteur à l'ordre du prêteur.

Il existe par ailleurs, un effet financier (c'est-à-dire non lié à une ou plusieurs transactions commerciales particulières), appelé **billet de trésorerie**, qui est émis par une entreprise pour couvrir sur une courte période un découvert; techniquement le mécanisme est voisin de celui de l'escompte.

ce qui peut encore s'exprimer en fonction du placement initial x_0 en remplaçant x_1 par sa valeur exprimée en fonction de $x_0 = 20000$ c'est-à-dire $x_0 (1 + i) = 20000 \times 1,1$:

$$x_2 = x_1 (1 + i) = [x_0 (1 + i)] (1 + i) = x_0 (1 + i)^2$$

soit dans notre exemple numérique $x_2 = 20000 \times 1,1^2$.

En poursuivant le raisonnement, il est facile d'établir que le capital disponible après un nombre entier t d'années est:

$$x_t = x_0 (1 + i)^t \quad \text{relation 485}$$

Cette **relation 485** est applicable à un découpage temporel quelconque (mensuel, trimestriel, etc.), à condition que le taux soit défini de manière cohérente avec ce découpage (voir § II-2, page 1159).

Lorsque les intérêts produits sont aussitôt et intégralement remplacés (comme on vient de le voir), on parle de placement à intérêt composé, le capital disponible x_t est appelé par les actuaires: **valeur acquise** (pour un capital x_0 placé à l'intérêt composé au taux annuel i pendant t années) ou encore **valeur future**. L'opération qui consiste à calculer x_t à partir des valeurs x_0 , i et t est dite **capitalisation** et le coefficient $(1 + i)^t$ est appelé **coefficient de capitalisation**.

On peut ajouter que lorsque le nombre d'années t n'est pas entier, par exemple 2,25 années, deux méthodes sont utilisables:

- la première, utilisée généralement par les banques, est souvent qualifiée de **capitalisation mixte**:
 - elle consiste à ajouter à la valeur acquise au bout de la valeur tronquée du nombre d'années de placement, ici 24200 au bout de 2 ans, les intérêts simples calculés *pro rata temporis* sur la fraction d'année restante¹ (ici 0,25 an), soit $0,1 \times 0,25 \times 24200 = 605$, ce qui donne une valeur finale de $24200 + 605 = 24805$;
 - si l'on généralise le raisonnement en désignant par θ la valeur tronquée du nombre d'années de placement ($\theta = 2$, dans notre exemple), et par $(t - \theta)$ la fraction d'année résiduelle ($t - \theta = 0,25$, dans notre exemple), on peut écrire $x_t = x_0 (1 + i)^\theta [1 + (t - \theta) i] = 20000 \times 1,1^2 \times 1,025$;
 - on peut remarquer qu'il est indifférent de situer la fraction d'année résiduelle en **fin** de placement (ce que nous avons fait) ou au **début** de celui-ci (ce qui aurait conduit à avoir: $20000 \times 1,025 \times 1,1^2$);
- la seconde, utilisée principalement en calcul économique, consiste à appliquer directement la relation trouvée, avec une élévation à une puissance non entière, ce qui donne ici $20000 \times 1,1^{2,25} = 24783,55$; la différence entre les deux solutions numériques est faible et va toujours dans le sens d'une valeur supérieure pour la capitalisation mixte².

Table des matières

Index thématique

1. le calcul sera souvent plus complexe car pour de nombreuses opérations, les établissements bancaires calculent des intérêts simples pour la période qui va jusqu'au 31 décembre, puis capitalisent les intérêts par année civile.

2. ce qui tient au fait que $(1 + i)^{t-\theta} < [1 + (t - \theta) i]$, ce que l'on ne démontrera pas ici.

I-2.2 Les modalités pratiques de calcul d'une capitalisation

Nous n'aborderons ici que le cas de la capitalisation d'un versement unique (présenté dans ses principes au § I-2.1) et étudierons ultérieurement le cas de la capitalisation d'un échéancier de versements (cf. § II, page 1156). Les tables financières, longtemps utilisées, ne seront pas présentées parce que leur intérêt a été réduit à néant par l'évolution technologique. On se concentrera donc sur l'usage des calculettes et des tableurs.

Prenons l'exemple du calcul du capital disponible au bout de 12 ans après avoir placé à intérêts composés une somme de 20000, au taux annuel de 9%. L'application de la relation 485 de la page 1149, pour $t = 12$, $i = 9 / 100 = 0,09$ et $x_0 = 20000$, donne: $x_{12} = (1 + 0,09)^{12} \times 20000$. Trois approches permettent de résoudre le problème posé:

- l'utilisation d'une calculette de base, dotée de la fonction puissance, donne $1,09^{12} = 2,81266478$ qui, multiplié par 20000, donne 56253,29564 que l'on doit arrondir à 56253,30;
- l'utilisation d'une calculette dotée de fonctions financières fournit le même résultat que précédemment: on saisit les valeurs des paramètres x_0 , i et t à l'aide des touches appropriées, généralement repérées par:
 - **(PV)** pour x_0 , où PV signifie «*present value*», c'est-à-dire la valeur actuelle; ici on saisit la valeur - 20000 (le signe «-» s'imposant pour indiquer qu'il s'agit d'un décaissement),
 - **(N)** pour t , où N signifie «*number of periods*» (ici 12),
 - **(i)** restant i (i pour «*interest*»); le taux i est à saisir en pourcentage (par exemple: 9 pour 9%) et non en valeur décimale (c'est-à-dire 0,09 pour 9%);

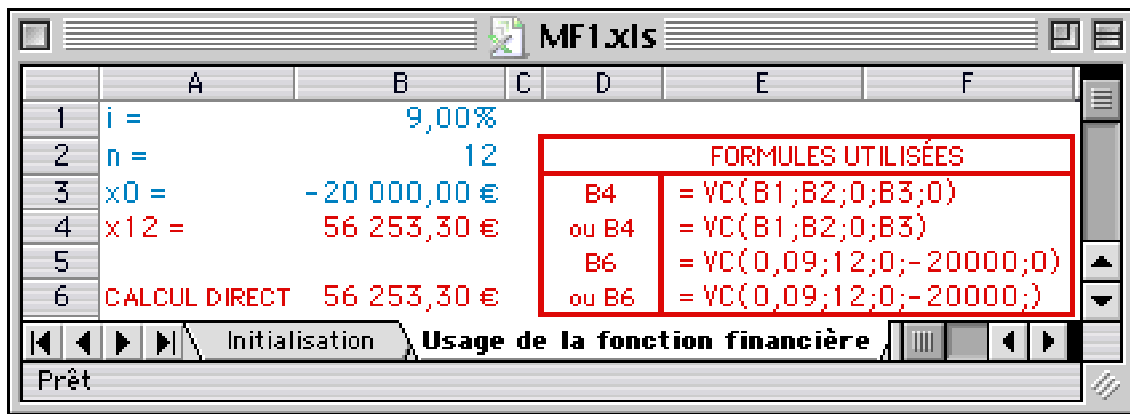
on appuie ensuite sur la touche **(FV)**, où FV signifie «*future value*» (*sur certaines machines*, cette frappe doit être précédée de celle de la touche **(CPT)**¹ où CPT signifie «*compute*», ce qui déclenche le calcul et l'affichage de la valeur cherchée x_t , ici $x_{12} = 56253,30$);

- *Les tableurs possèdent des fonctionnalités de mathématiques financières comparables à celles des calculettes financières. Examinons comment calculer avec la version 5 d'Excel[®] (tableur retenu systématiquement à titre d'exemple compte tenu de sa très large diffusion) la valeur capitalisée x_{12} , en supposant que les données du problème posé aient été préalablement saisies dans la feuille de calcul, dans les cellules A1 à B4 (la cellule B4 étant vide initialement). Il suffit alors de taper² «= VC(B1;B2;0;B3;0)», dans la cellule B4, pour obtenir le résultat voulu. On aurait obtenu le résultat souhaité en définissant n'importe quelle cellule (ici la cellule B6) comme étant «= VC(0,09;12;0; -20000; 0)». Enfin, pour calculer*

1. L'absence de cette touche sur la calculette implique qu'il suffit de frapper la touche «FV»; sur certaines calculettes (et en particulier celles qui utilisent la touche «CPT»), il faut d'abord s'assurer que la valeur prise par le paramètre P / Y (pour *payments / year*, c'est-à-dire nombre de versements effectués sur la période, ici l'année, retenue pour définir le taux) est égale à 1 (ce qui est bien le cas dans notre exemple, puisqu'il n'y a qu'un versement par an); cette initialisation s'effectue en utilisant la touche **(P/Y)**.

2. Une autre solution consiste à taper «=» dans le cadre de saisie de formule de la cellule active, ce qui déclenche l'affichage d'une touche fx, immédiatement à gauche de ce cadre, puis à cliquer sur ce bouton pour obtenir l'«assistant - fonction» (ou à choisir l'option «Fonction» de l'option ins. de la barre de menu). On obtient alors un double menu déroulant. Il faut alors choisir l'option Finances, puis passer dans le menu déroulant de droite pour sélectionner la fonction VC pour saisir les paramètres, il faut alors appuyer sur la touche suivant et l'utilisateur est alors guidé pas à pas. On peut ajouter qu'un système d'aide en ligne bien fait est disponible.

le coefficient de capitalisation $1,09^{12}$ dans une cellule quelconque, il suffit de donner à cette cellule la définition « = 1,09^12 ».



I-2.3 Représentation graphique de problèmes de mathématiques financières

Le calcul financier permet d'échanger un décaissement (ou une série de décaissements) contre un encaissement (ou une série d'encaissements). L'encaissement s'analyse comme une **somme positive** et le décaissement comme une **somme négative**. Encaissements et décaissements sont datés, c'est donc sur un graphique à 2 dimensions, l'une repérant le temps et l'autre les flux de trésorerie, que l'on représentera le phénomène.

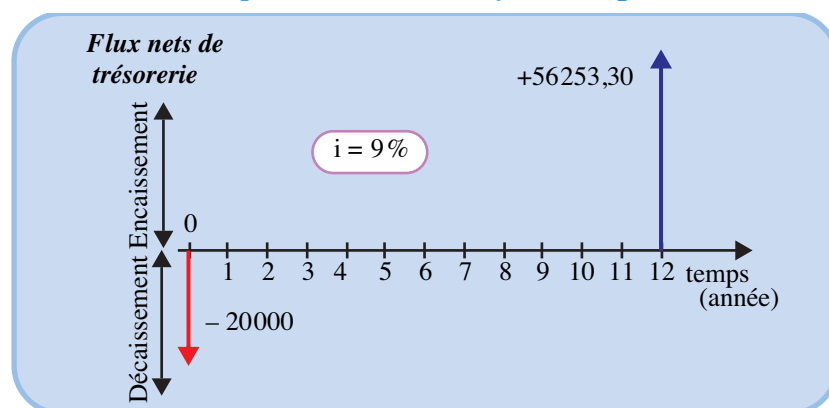
Table des matières

Dans l'exemple du paragraphe précédent, le calcul financier au taux annuel d'intérêt composé de **9%**, considéreraient comme équivalent un décaissement initial de 20000, c'est-à-dire du flux de trésorerie à la date $t = 0$ de **-20000**, et un remboursement 12 ans plus tard de 56253,30, c'est-à-dire un flux de trésorerie à la date $t = 12$ de **+56253,30**. Ces 2 flux pourraient se représenter simplement par 2 points sur un graphique, mais il est plus parlant de représenter ces flux par des vecteurs qui soulignent l'amplitude des flux et leur direction (voir **figure 277**).

Index thématique

FIGURE 277

Capitalisation d'un flux unique



I-2.4 Remarques

Dans la formulation implicite du problème des intérêts composés, on a $x_0 - x_t(1+i)^{-t} = 0$, où 4 paramètres interviennent (t, i, x_0, x_t); nous avons défini l'un d'entre eux à partir des 3 autres supposés connus, lorsque nous avons cherché

à déterminer x_0 (cf. § I-2, page 1148) et x_t (cf. § I-3, page 1154). Il est bien évident que l'on peut également chercher à déterminer t ou i , les autres paramètres étant supposés connus.

I-2.4.1 Recherche de i (t , x_0 et x_t étant supposés connus)

À partir de la relation 485 de la page 1149: $x_t = x_0 (1 + i)^t$, on déduit immédiatement que :

$$i = \left[\frac{x_t}{x_0} \right]^{1/t} - 1 \quad \text{relation 486}$$

Utilisation d'une calculette financière ou d'un tableur : Recherche du taux annuel d'intérêt qui, pour un placement de 20000 à intérêts composés servis annuellement à terme échu, donne 12 ans plus tard une valeur future de 56253,30. L'application de la relation 486

donne, avec $1 / 12 = 0,083333$: $i = \left[\frac{56253,30}{20000,0} \right]^{0,083333} - 1 = 0,09$, d'où $i = 9\%$. Cela étant, les

calculettes financières fournissent directement cette valeur: il suffit de saisir $x_0 = 20000$ (touche **PV**), $x_t = 56253,30$ (touche **FV**), $t = 12$ (touche **N**), puis de taper sur la touche **i** (sur certaines machines, cette frappe doit être précédée de celle de la touche **CPT**), pour obtenir $i = 9\%$. Examinons comment calculer ce taux avec le tableur Excel, en supposant que les données du problème aient été préalablement saisies dans la feuille de calcul, dans les cellules A1 à B4 (la cellule B1 étant vide). Il suffit alors de taper «=TAUX(B2;0;B3;B4;0)», dans la cellule B1, pour obtenir le résultat voulu. On aurait obtenu le résultat souhaité en définissant n'importe quelle cellule comme étant «=TAUX(12;0;-20000;56253,3;0)».



	A	B	C	D	E	F
1	i =	9,00%				
2	n =	12				
3	x0 =	20 000,00 €				
4	x12 =	56 253,30 €				
5						
6	CALCUL	9,00%				

FORMULES UTILISÉES	
B1	=TAUX(B2;0;B3;B4;0)
ou B1	=TAUX(B2;0;B3;B4)
B6	=TAUX(12;0;-20000;56253,3;0)
ou B6	=TAUX(12;0;-20000;56253,3)

Table des matières

Index thématique

Remarquons que ce problème aurait pu se formuler comme *rechercher le taux d'actualisation qui rend équivalent la disposition de 20000€ maintenant ou celle de 56253,30€ dans 12 ans*; implicitement, lorsque l'on parle de taux d'actualisation sans autre précision, la période est annuelle et le calcul se fait à intérêts composés.

Cette relation 486 permet de calculer le taux i_{12} mensuel (trimestriel ou semestriel...) équivalent au taux annuel si l'on retient une optique de placement à intérêts composés, c'est-à-dire servis respectivement toutes les fins de mois (ou 3 mois, ou 6 mois...), étant entendu que l'intérêt servi n'est pas le douzième (ou le quart, ou la moitié...) de l'intérêt annuel, ce qui serait le cas d'un placement à intérêt simple servi en plusieurs fois, mais que l'intérêt est capitalisé. Ceci implique que l'on ait: $x_0 (1 + i_{12})^{12} = x_1 = x_0 (1 + i)$, d'où: $i_{12} = (1 + i)^{1/12} - 1$ et, d'une façon générale, pour h versements par an, le **taux équivalent** i_h est:

$$i_h = (1 + i)^{1/h} - 1 \quad \text{relation 487}$$

On reviendra sur ces différentes définitions de taux au § II-2, page 1159.

EXEMPLE : Pour $i = 9\%$, le taux proportionnel mensuel est $= 0,09 / 12 = 0,0075$ tandis que le taux mensuel équivalent est $i_{12} = 1,09^{1/12} - 1 = 0,007207 = 0,7207\%$, et le taux trimestriel équivalent est $i_4 = 1,09^{0,25} - 1 = 0,021778 = 2,1778\%$.

Le taux équivalent est inférieur au taux proportionnel, en raison de la capitalisation des intérêts.

I-2.4.2 Recherche de t (i, x_0 et x_t étant supposés connus)

Le calcul de t , les autres paramètres étant fixés, est un peu plus compliqué car il nécessite de passer par les logarithmes. Nous venons de voir que :

$$(x_t / x_0) = (1 + i)^t$$

d'où : $\text{Log}(x_t) - \text{Log}(x_0) = t \text{Log}(1 + i)$ et :

$$t = \frac{\text{Log}(x_t) - \text{Log}(x_0)}{\text{Log}(1 + i)} \quad \text{relation 488}$$

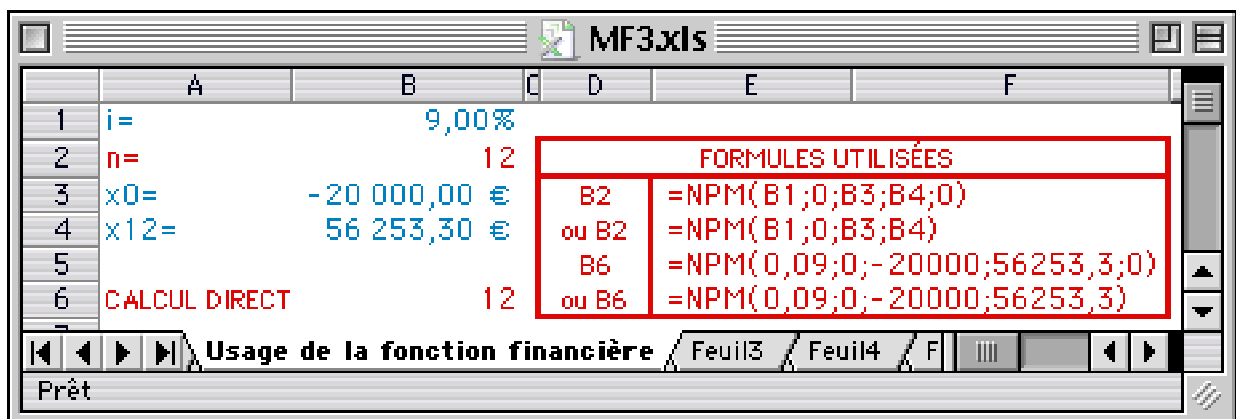
Les logarithmes utilisés ici sont les logarithmes népériens, mais la relation reste vraie si l'on utilise les logarithmes décimaux.

Utilisation d'une calculatrice financière ou d'un tableur : Recherche de la durée nécessaire t pour obtenir 56253,30 en plaçant 20000 à intérêts composés servis annuellement à terme échu, au taux annuel de 9%. L'utilisation d'une calculatrice donne les valeurs des logarithmes népériens ($\text{Log}(56253,3) = 10,937620$; $\text{Log}(20000) = 9,903488$; $\text{Log}(1,09) = 0,086178$) ou celle des logarithmes décimaux ($\log(56253,3) = 4,750148$; $\log(20000) = 4,301030$; $\log(1,09) = 0,037426$). Il s'ensuit que t a pour valeur : $t = \frac{10,937620 - 9,903488}{0,086178} = \frac{4,750148 - 4,301030}{0,037426}$

$= 12$. Cela étant, les calculatrices financières fournissent directement cette valeur : il suffit de saisir $x_0 = 20000$ (touche **PV**), $x_t = 56253,3$ (touche **FV**), $i = 9\%$ (touche **i**), puis de taper sur la touche **N** (sur certaines machines, cette frappe doit être précédée de celle de la touche **CPT**), pour obtenir $t = 12$. *Examinons comment calculer cette durée avec le tableur Excel, en supposant que les données du problème aient été préalablement saisies dans la feuille de calcul, dans les cellules A1 à B4 (la cellule B2 étant vide). Il suffit alors de taper «=NPM(B1;0;B3;B4;0)» (ou «=NPM(B1;0;B3;B4)»), dans la cellule B2, pour obtenir le résultat voulu. On aurait obtenu le résultat souhaité en définissant n'importe quelle cellule comme étant «=NPM(0,09;0;-20000;56253,3;0)».*

Table des matières

Index thématique



I-3 Actualisation

I-3.1 Principes

La formule $x_t = x_0 (1 + i)^t$ fait intervenir quatre paramètres (x_0 , x_t , t et i). La connaissance de trois d'entre eux entraîne nécessairement celle du quatrième. Si l'on connaît x_t , i et t , on peut chercher x_0 , c'est-à-dire le montant du capital qui, placé à intérêts composés au taux d'intérêt annuel i pendant t années, donne x_t . Cette opération est connue sous le nom d'**actualisation**. Mathématiquement on a :

$$x_t = x_0 (1 + i)^t \Leftrightarrow x_0 = x_t (1 + i)^{-t} \quad \text{relation 489}$$

Le coefficient $(1 + i)^{-t}$ qui, multiplié à la valeur future x_t , permet de retrouver la valeur actuelle x_0 est appelé **coefficient d'actualisation**. Pour i et t fixés, le coefficient d'actualisation est l'inverse du coefficient de capitalisation. La **figure 278**, illustre bien la différence de vision du temps dans les approches de capitalisation et d'actualisation; cela étant, la **relation 489** montre bien que mathématiquement il s'agit de la même chose. On peut ajouter que le taux d'actualisation est souvent noté α , pour éviter la confusion avec le taux d'intérêt.

FIGURE 278

Le déroulement du temps dans les processus de capitalisation et d'actualisation

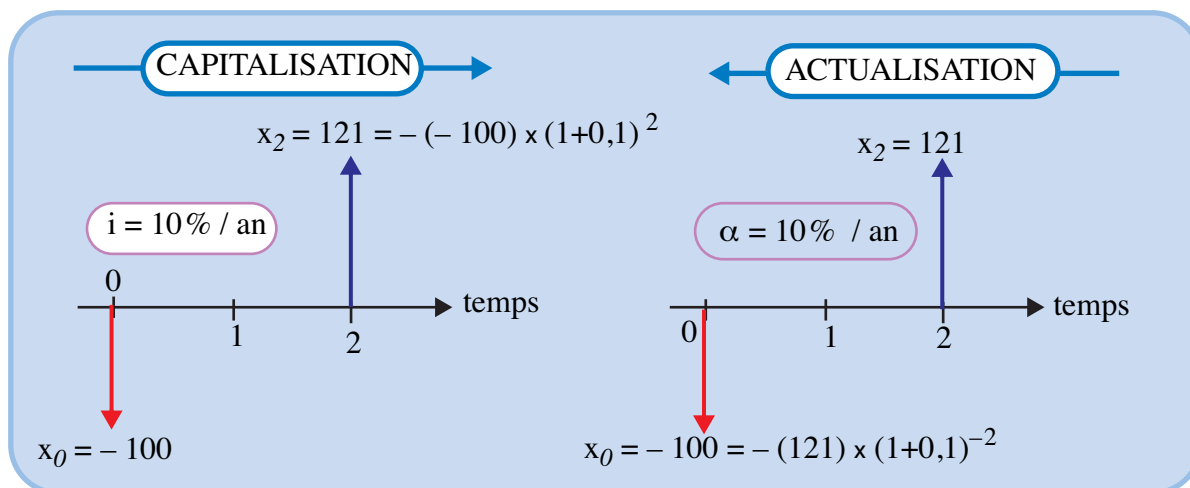


Table des matières

Index thématique

I-3.2 Modalités pratiques de calcul d'une actualisation

Soit à calculer la valeur d'une **obligation à coupons capitalisés** à 9% et remboursée 56253,30 € dans 12 ans (capital + intérêts). Techniquement¹, il s'agit de calculer la valeur actuelle x_0 d'une somme de 56253,30 € disponible dans 12 ans et résultant d'un placement à intérêts composés au taux d'intérêt annuel de 9%. Examinons successivement les trois approches de résolution :

- l'utilisation de la fonction puissance permet de calculer $1,09^{-12}$, ce qui donne 0,35553473 (pour un affichage à 8 chiffres après la virgule) qui, multiplié par 56253,3 donne 20000,00 € comme valeur actuelle (compte tenu du fait qu'il n'est pas possible de descendre en dessous du centime);

1. Le taux est constant sur la période pour les obligations à taux capitalisées; ce n'est pas le cas avec les **bons de capitalisation** où le taux varie par tranche de période (par exemple 10% pour les deux premières années, 7% pour les trois suivantes et 8% pour les deux dernières), les intérêts restant composés.

- l'utilisation d'une calculatrice dotée des fonctions financières donne le même résultat qu'à l'alinéa précédent. On entre les valeurs $t = 12$ (touche **N**), $i = 9$ (en %, touche **i**) et $x_t = 56253,3$ (touche **FV**), puis on appuie sur la touche **PV** (sur certaines machines, cette frappe doit être précédée de celle de la touche **CPT**), pour obtenir x_0 (valeur affectée du signe «moins»);
- examinons enfin comment calculer, avec le tableur Excel, cette valeur actualisée, en supposant que les données du problème aient été préalablement saisies dans la feuille de calcul, dans les cellules A1 à B4 (la cellule B3 étant vide); il suffit alors de taper «=VA (B1;B2;0;B4;0)» dans la cellule B3, pour obtenir le résultat voulu (voir page suivante). Pour calculer le coefficient d'actualisation $1,09^{-12}$ dans une cellule quelconque, il suffit de donner à cette cellule la définition «=1,09^(-12)».



	A	B	C	D	E	F
1	i =	9,00%				
2	n =	12				
3	x0 =	-20 000,00 €				
4	x12 =	56 253,30 €				
5						
6	CALCUL DIRECT	-20 000,00 €				

FORMULES UTILISÉES	
B3	=VA(B1;B2;0;B4;0)
ou B3	=VA(B1;B2;0;B4)
B6	=VA(0,09;12;0;56253,3;0)
ou B6	=VA(0,09;12;0;56253,3)

I-3.3 Actualisation et bilan actualisé

Table des matières

Index thématique

Dans un certain nombre de problèmes financiers, x_0 et x_t ne correspondent pas à des placements mais représentent des flux de trésorerie quelconques (recettes, dépenses, emprunt, prêt). L'actualisation ne fait alors que traduire une équivalence entre une somme disponible à la date t et une somme disponible maintenant. C'est ce principe d'équivalence qui est à la base du **bilan actualisé** qui est une technique de calcul économique permettant de synthétiser par un seul nombre la rentabilité d'un projet d'investissement en vue de la comparer à celle d'autres projets d'investissement (le terme bilan n'est donc pas à prendre ici dans son acception comptable). Un projet d'investissement se caractérise par un échéancier d'encaissements et de décaissements. L'indicateur synthétique de la rentabilité du projet est obtenu en effectuant la somme algébrique des valeurs actuelles des flux de trésorerie de cet échéancier. Cet indicateur est connu sous le nom de **Flux Net de Trésorerie Actualisé** (FNTA) ou encore sous celui de bénéfice actualisé¹ ou de **Valeur Actuelle Nette** (VAN).

Dans le bilan actualisé, le taux d'intérêt ne s'analyse plus comme la rémunération d'un placement, mais comme une technique cohérente permettant de «troquer» un échéancier contre une somme ponctuelle. Cette différence d'optique se marque en utilisant le terme de **taux d'actualisation** à la place de celui de taux d'intérêt.

Lorsque le FNTA, calculé avec le taux i , est positif, on est assuré que la rentabilité financière du projet examiné est supérieure au taux i et, lorsque le FNTA est

1. Cette dernière appellation est contestable car la comparaison de certains projets d'investissement peut ne porter que sur des dépenses et donc être exclusive de toute idée de bénéfice («achat d'immeuble» contre «location d'immeubles» pour le siège d'une société par exemple).

nul, que la rentabilité financière du projet est strictement égale à i . Dans ce dernier cas, il est financièrement indifférent de réaliser le projet d'investissement d'une durée de vie de T années ou de placer à intérêts composés la même somme pendant T ans, si le taux d'intérêt versé est i , ce qui confère à i le rôle de la rémunération non d'un placement financier, mais d'un « placement industriel ». Le taux d'actualisation qui donne un FNTA nul est appelé selon les auteurs **Taux de Rentabilité Interne (TRI)** ou encore **Taux Moyen de Rentabilité (TMR)**. Les financiers parlent de **taux actuariel** ou de **taux effectif** d'une opération lorsque les flux nets de trésorerie sont uniquement liés à des transactions financières. Sur certaines calculettes financières, ce taux est obtenu en utilisant la touche **(IRR)** (IRR pour *Internal Rate of Return*, qui est la traduction littérale de TRI).

Ajoutons enfin que, dans un bilan actualisé, il est d'usage de surligner (\bar{x}_t) les valeurs futures x_t , pour désigner les valeurs actuelles qui leur sont équivalentes au taux d'actualisation i . Cette convention est nécessaire dans la mesure où x_0 ne saurait sans ambiguïté désigner la valeur actuelle de l'une quelconque des valeurs futures.

Utilisation d'une calculette financière ou d'un tableur : Calculer le FNTA d'un projet d'investissement dont l'échéancier est le suivant : $- 2000$ (investissement, et donc décaissement) réalisé à la date 0, et de $+ 1000$ de flux net de trésorerie (= bénéfice après impôt + amortissement) disponibles à la fin de l'année 1, $+ 900$ à la fin de l'année 2, et $+ 1200$ à la fin de l'année 3, le taux d'actualisation étant de 5% :

$$\bar{x}_0 = - 2000$$

$$\bar{x}_1 = 1000 \times 1,05^{-1} = 952,381$$

$$\bar{x}_2 = 900 \times 1,05^{-2} = 816,327$$

$$\bar{x}_3 = 1200 \times 1,05^{-3} = 1036,605$$

$$\text{FNTA} = - 2000 + 952,381 + 816,327 + 1036,605 = 805,313$$

Le TRI de ce projet est $24,685115\%$, ce que l'on peut vérifier aisément à l'aide d'une calculette :

$$- 2000 + (1000 \times 1,24685115^{-1}) + (900 \times 1,24685115^{-2}) + (1200 \times 1,24685115^{-3}) = 0$$



Examinons comment calculer cette valeur actualisée avec le tableur Excel, en supposant que les données du problème aient été préalablement saisies dans la feuille de calcul, dans les cellules A1 à B7 (les cellules B6 et B7 étant vides). Pour calculer le FNTA, il suffit alors de taper dans la cellule B6 « =B2+VAN(B1;B3:B5) » ou « =B2+VAN(B1;B3;B4;B5) » ou d'utiliser les facilités offertes en insertion de fonction financière. Pour calculer le TRI, il faut taper dans la cellule B7 « = TRI (B2: B5) ». Pour le calcul du FNTA, on aurait obtenu le résultat souhaité en définissant n'importe quelle cellule comme étant « -2000+VAN(0,05;1000;900;1200) ». Par contre, pour le calcul du TRI, le calcul direct n'est pas possible. D'une manière générale, il est judicieux de séparer les données, des traitements à effectuer. Ceci permet ensuite très facilement de contrôler l'impact d'un changement de données sur des calculs et effectuer ainsi des analyses de sensibilité (par exemple ici, le changement de la valeur de la cellule B3 passant de 1000 à 1200, conduit à un FNTA de 995,79 et un TRI de 30,07%).

L'influence du taux d'actualisation sur la valeur prise par le FNTA est illustrée par la [figure 279](#).

SECTION II LE TRAITEMENT DES ÉCHÉANCIERS

Dans la section I, nous avons vu que l'utilisation d'un taux d'intérêt ou d'un taux d'actualisation donné permettait de définir l'équivalence de sommes disponibles à deux dates différentes. Mais en réalité, comme le laissait d'ailleurs entrevoir l'exemple du [§ I-3.3, page 1155](#), les principes de la capitalisation ou de l'actuali-

	A	B	C	D	E	F
1		i =	5,00%			
2		x0 =	-2 000,00 €			
3		x1 =	1 000,00 €			
4		x2 =	900,00 €			
5		x3 =	1 200,00 €			
6		FNTA =	805,31 €			
7		TRI =	24,69%			
8		CALCUL DIRECT :	805,31 €			

FORMULES UTILISÉES	
B6	= B2+YAN(B1;B3:B5)
B7	= TRI(B2:B5)
B8	= -2000+YAN(0,05;1000;900;1200)

FIGURE 279

Évolution des FNTA en fonction du taux d'actualisation

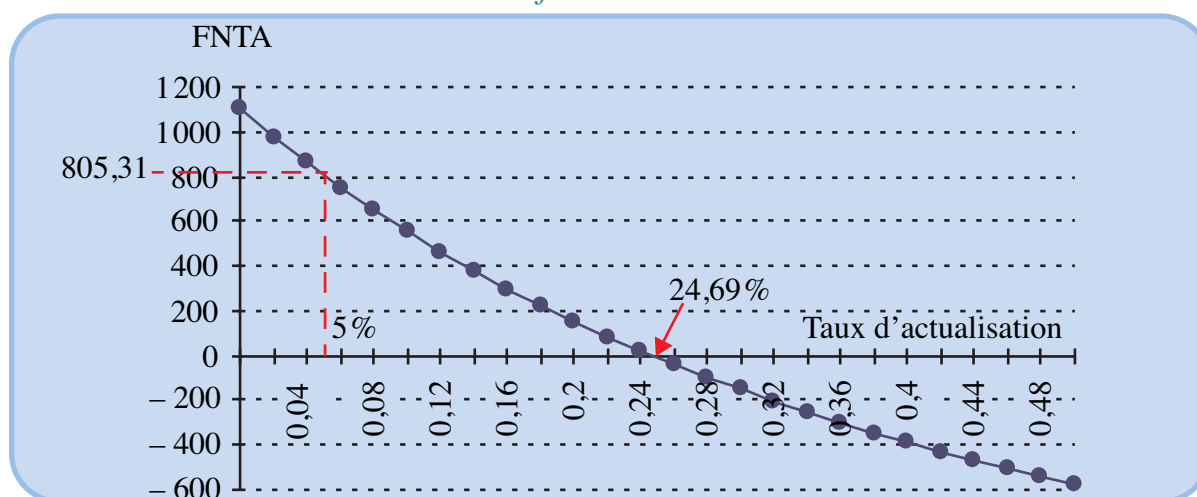


Table des matières

Index thématique

sation permettent également de définir l'équivalence entre un échéancier et une somme disponible à une date quelconque. De très nombreux problèmes financiers utilisent des échéanciers constants, ce qui permet l'emploi de formules de calcul relativement simples; ceux qui seront abordés dans cette section utilisent exclusivement une logique d'intérêts composés. Mais avant d'aborder ces points, on examinera d'une part, comment adapter au cas des échéanciers la représentation graphique présentée au § I-2.3, page 1151, et, d'autre part, les problèmes posés par la définition des taux.

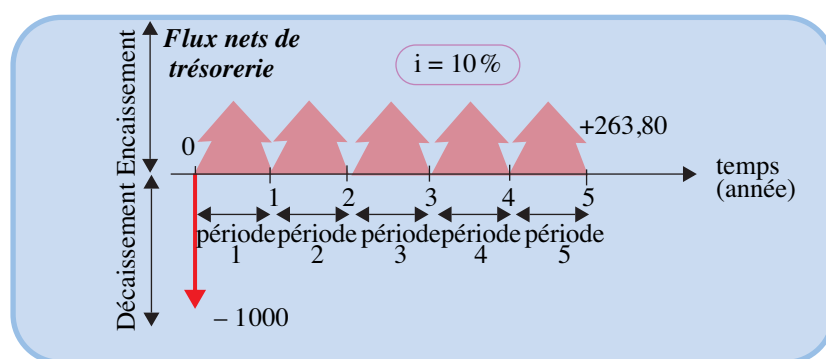
II-1 Représentation graphique des échéanciers

Dans de nombreux problèmes économiques, les flux de trésorerie peuvent être considérés comme secrétés à longueur de période (par exemple les ventes d'un article de consommation courante) et non à des dates ponctuelles, comme c'est le cas pour des remboursements d'emprunt, paiements de loyer, etc. Nous convenons toujours, dans ce chapitre, de définir la première période comme celle comprise entre les dates 0 et 1, la seconde période, comme celle comprise entre les dates 1 et 2, etc., ces dates sont, bien entendu, conventionnelles et dépendent du problème traité. Par exemple si l'on s'intéresse au versement trimestriel d'un loyer (la recette étant ponctuelle dans ce cas) à partir du 31 mars 2003, on peut convenir conventionnellement que la date 0 est celle du 1^{er} janvier 2003, puisqu'il

s'agit de versements trimestriels, la date 1 est celle du 31 mars 2003, date du premier versement; la date 2 est celle du 30 juin 2003, la date 3 est celle du 30 septembre 2003, etc.

Pour visualiser le problème des flux secrétés de manière plus ou moins continue, on utilise parfois un graphique du type de celui de la [figure 280](#), où les flux de trésorerie sont représentés par des flèches épaisses au-dessus (s'il s'agit d'encaissement) ou en dessous (s'il s'agit de décaissement) de l'axe des temps, à l'aplomb de chaque période concernée. Le problème analysé ici est celui d'un investissement de 1000 (décaissement \Rightarrow un flux égal à -1000) rapportant, au cours de chacune des 5 périodes suivantes, un flux net de trésorerie de 263,80 (encaissement \Rightarrow 5 flux égaux à $+263,80$).

FIGURE 280
Flux de période et flux ponctuels



Mais en réalité, le calcul financier nécessite de convenir que le flux de trésorerie d'une période est «secrété» ponctuellement à une date précise et non à longueur de temps (à moins de passer en notation continue ce qui dépasse l'objectif d'initiation poursuivi ici). Dans la pratique, on privilégie :

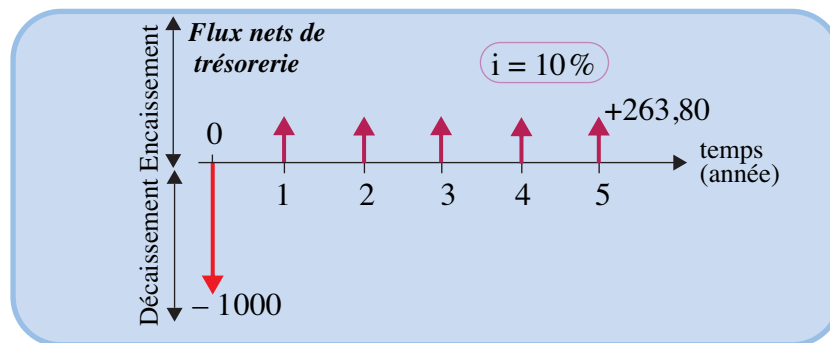
- soit la convention d'un **versement en fin de période**, appelé encore **versement à terme échu**,
- soit celle d'un **versement en début de période**, appelé encore **versement à terme d'avance** (lequel est simplement décalé d'une période par rapport au versement en **fin** de période).

De toute façon, on peut toujours calculer d'une façon simple l'incidence de toute autre convention comme celle d'un versement en milieu de période (comme on le verra au [§ II-6, page 1183](#)). Tant que l'on n'est pas familiarisé avec les conséquences du choix d'un raisonnement «**fin** de période» ou d'un raisonnement «**début** de période», l'appel à un schéma d'analyse s'avère indispensable pour ne pas se tromper. Les figures [281](#) et [282, page 1159](#), illustrent ce point :

- si la convention de flux secrété en **fin de période** est prise ([figure 281](#)), la rentabilité de l'investissement (voir définition au [§ I-3.3, page 1155](#)), c'est-à-dire son taux de rentabilité interne est de $10\% / \text{an}$.
- si la convention de flux secrété en **début de période** est prise ([figure 282](#)), tout se passe, du point de vue des calculs, comme si l'investissement net initial correspondait à un flux égal à $-1000 + 263,8 = -736,2$, étant entendu qu'il ne procure plus alors que 4 rentrées ponctuelles de $+263,8$; on peut ajouter, pour souligner le poids de l'hypothèse retenue, que, dans ce premier cas, la

FIGURE 281

Échéancier de flux en fin de période



rentabilité de l'investissement, c'est-à-dire son taux de rentabilité interne, est de $16,13\%$ / an.

FIGURE 282

Échéancier de flux en début de période

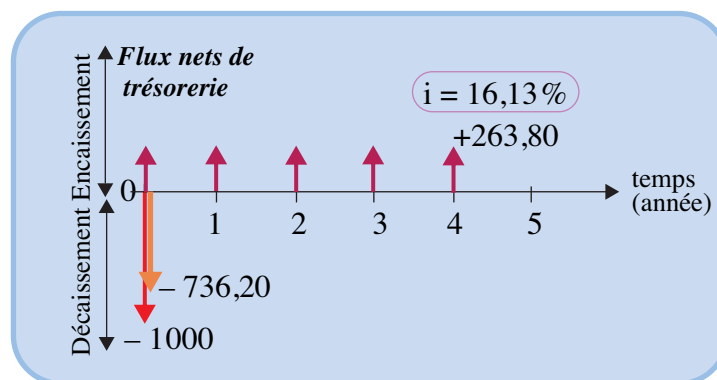


Table des matières

Index thématique

II-2 Les différents taux d'intérêt en cas de versements pluri-annuels

Le taux d'intérêt se définit toujours pour une période de référence donnée. On retiendra ici comme période l'année mais rien ne s'oppose à ce que celle-ci soit le trimestre, le semestre ou le mois. L'échéancier que l'on a à traiter peut être défini avec un découpage temporel plus fin ; par exemple, on peut avoir un taux annuel et devoir travailler sur des données mensuelles. Dans ce cas, le taux d'intérêt à utiliser dans les calculs n'est pas le taux annuel mais un taux défini pour la période la plus courte ; un tel taux est dit **taux périodique**. Le traitement de données trimestrielles conduit à utiliser un **taux trimestriel**, celui de données mensuelles, à utiliser un **taux mensuel**, etc. *L'usage d'un taux périodique n'a rien à voir avec le mode de calcul le liant au taux annuel.* Dans cette section, le taux périodique sera **toujours** utilisé en suivant la logique de l'intérêt composé, quel que soit le mode de calcul retenu. Deux modes de calcul sont possibles :

- le mode de calcul suivant la **logique de l'intérêt simple** présentée en section I ; dans ce cas, la règle de calcul liant taux périodique et taux annuel est

taux annuel = taux périodique \times nombre de périodes par an *relation 490*

on ajoute le qualificatif **nominal** (ou le qualificatif **proportionnel**) et l'on parle de **taux nominal annuel** (ou de **taux proportionnel annuel**) et de **taux nominal mensuel** (ou de **taux proportionnel mensuel**), en cas de verse-

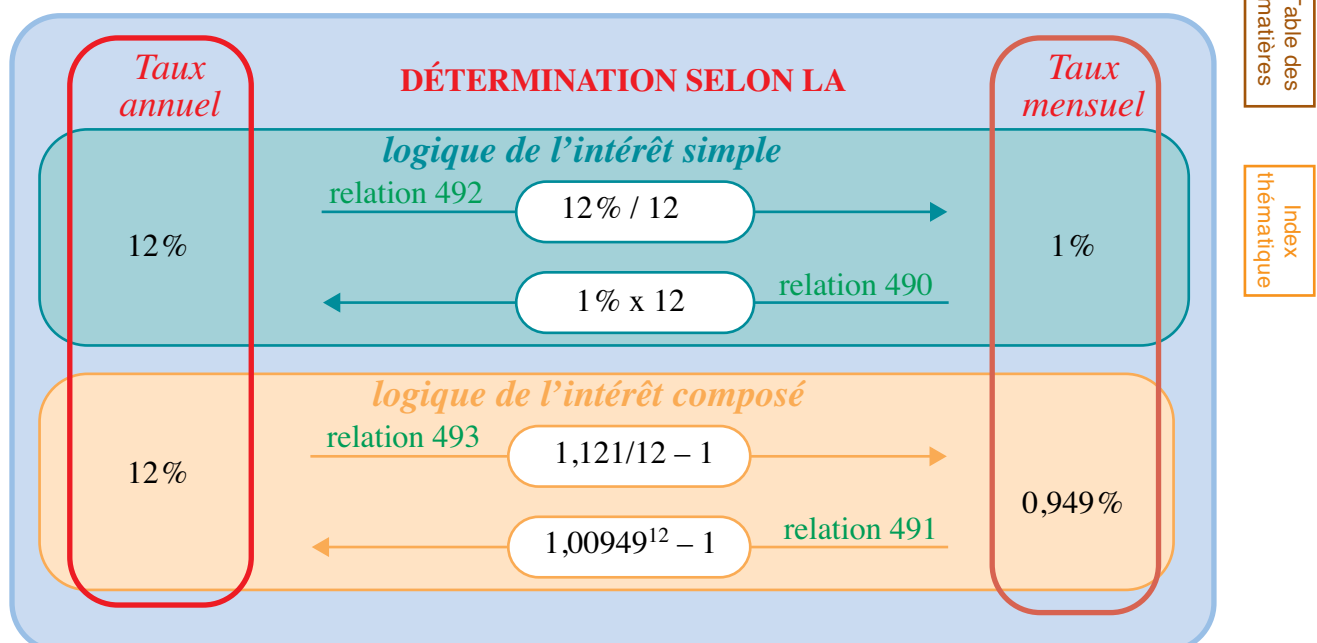
- ments mensuels, etc.; cette règle de calcul est celle utilisée par les banques dans les opérations de prêt consenti à plus d'un an; le plus souvent, lorsque l'on parle de taux nominal, il s'agit du taux nominal annuel; le taux effectif global utilisé dans les dossiers de prêt est un taux annuel proportionnel au taux périodique (mode de calcul) qui est régi suivant la logique des intérêts composés (usage), l'échange entre une somme disponible nette de frais de dossier et un échéancier de versements incluant remboursements, assurances et intérêts (voir § II-5.2, page 1180);
- le mode de calcul suivant la **logique des intérêts composés** présentée avec la **relation 485 de la page 1149**:

$$\text{taux annuel} = (1 + \text{taux périodique})^{\text{nombre de périodes par an}} - 1 \text{ relation 491}$$

on ajoute le qualificatif **actuariel** (ou le qualificatif **équivalent**) et l'on parle de **taux actuariel annuel** (ou de **taux équivalent annuel**) et de **taux actuariel mensuel** ou de (**taux équivalent mensuel**), en cas de versements mensuels, etc.; le taux périodique équivalent est utilisé systématiquement dans les analyses de rentabilité des dossiers d'investissement (dans le cadre de bilans actualisés présentés au chapitre III, § II-2.2, page 176) et généralement dans les opérations de crédit-bail.

FIGURE 283

Exemple de passage du taux annuel au taux périodique mensuel... et réciproquement



Si, pour qualifier le taux d'intérêt i , on utilise :

- un premier indice qui peut prendre :
 - la valeur a pour désigner un taux annuel
 - ou la valeur p , pour désigner un taux périodique (mensuel ou trimestriel ou...), calculé sur h versements par an ($h = 12$ ou $h = 4$ ou...)
- un second indice (pouvant être omis) qui peut prendre :
 - la valeur A pour désigner un taux actuariel (ou un taux effectif)
 - ou la valeur N , pour désigner un taux nominal (ou un taux proportionnel)

On peut alors synthétiser les relations qui existent entre ces taux :

- calcul du taux nominal périodique i_{Np} à partir du taux annuel i_a :

$$i_{Np} = i_a/h \quad \text{relation 492}$$

Remarque sur l'usage des calculettes financières : la plupart de ces calculettes permettent de travailler automatiquement avec ce taux périodique proportionnel en définissant :

- le paramètre P/Y (nombre de paiements par an) comme étant égal au nombre h de périodes par an (par exemple $h = 12$, si l'on travaille avec un taux annuel et que l'on traite des données mensuelles),
 - certaines calculettes (comme la BSII de Texas Instrument) utilisent un second paramètre, C/Y (nombre de compositions des intérêts par an) qui, dans ce cas, doit être égal aussi au nombre h de périodes par an ;
 - en conséquence de quoi, pour $i = 12\%$, $P/Y = 12$ (et $C/Y = 12$, pour les calculettes du type BSII), les calculs seront effectués sur des données mensuelles utilisant un repérage temporel exprimé en nombre de mois, avec le taux mensuel de 1% (en application de la [relation 492](#)). La contrepartie de cette facilité offerte est qu'il faut veiller à bien avoir $P/Y = 1$ (et $C/Y = 1$, pour les calculettes du type BSII), si l'on traite des données annuelles (ou des données définies avec la même unité de temps que celle utilisée pour le taux).
- calcul du taux périodique équivalent i_{Ap} à partir du taux annuel i_a : la [relation 493](#) reprend, avec une symbolique différente, la [relation 486 de la page 1152](#) :

$$i_{Ap} = (1 + i_{Aa})^{1/h} - 1 \quad \text{relation 493}$$

Remarque sur l'usage des calculettes financières : les calculettes (comme la BSII de Texas Instrument) utilisant les paramètres P/Y et C/Y permettent de travailler automatiquement avec ce taux périodique équivalent en définissant :

- le paramètre P/Y (nombre de paiements par an) comme étant égal au nombre de périodes par an (par exemple 12 , si l'on travaille avec un taux annuel et que l'on traite des données mensuelles),
- le paramètre C/Y (nombre de compositions des intérêts par an) comme étant égal à 1 , le taux d'intérêt i à saisir est toujours le taux annuel.

En conséquence de quoi, pour $C/Y = P/Y = 12$ et $i = 12\%$, les calculs seront effectués sur des données mensuelles, avec un repérage temporel exprimé en nombre de mois, avec le taux mensuel de $0,949\%$ (en application de la [relation 493](#)). Pour les calculettes n'utilisant pas le paramètre C/Y , une solution de remplacement sera évoquée à la fin de ce § II-2.

- calcul du taux nominal annuel i_{Na} à partir du taux périodique i_p :

$$i_{Na} = h \cdot i_p \quad \text{relation 494}$$

Remarque sur l'usage des calculettes financières : Les calculettes financières travaillant avec le paramètre P/Y (plus éventuellement, le paramètre C/Y) ayant pris la valeur du nombre h de périodes par an peuvent être utilisées pour calculer le taux qui assure l'échange entre un échancier constant et une somme ponctuelle (ce qui correspond à une généralisation de la démarche décrite au § I-2.4.1, page 1152) ; dans ce cas, c'est le taux annuel et non le taux périodique qui est affiché.

- calcul du taux actuariel (ou effectif) annuel i_{Aa} à partir du taux périodique i_p :

$$i_{Aa} = (1 + i_p)^h - 1 \quad \text{relation 495}$$

Il est fréquent de vouloir calculer le taux annuel équivalent associé à un taux nominal annuel utilisé sur une période mensuelle (ou trimestrielle ou, etc.). Le taux actuariel annuel correspondant au taux nominal mensuel calculé à partir du taux nominal annuel de 12% est, en application de la [relation 495](#) : $(1 + 0,12 / 12)^{12} - 1 = 12,6825\%$. Un usage bancaire assez répandu qualifie ce taux actuariel annuel de **taux équivalent mensuel** ; ceci s'explique par le fait que les banquiers

n'utilisant pas de taux périodiques équivalents (les taux périodiques qu'ils utilisent étant nécessairement proportionnels), l'expression utilisée ne semble pas ambiguë et correspond bien pour tous à un «taux annuel équivalent à un taux mensuel proportionnel à un taux nominal annuel» (il faut bien reconnaître que cette dernière expression est un peu longue!).

Utilisation d'une calculette financière ou d'un tableur : Les calculettes qui n'utilisent pas le paramètre C / Y donnent généralement la possibilité de passer du taux nominal annuel, au taux annuel équivalent au taux périodique proportionnel à ce taux nominal annuel; il suffit d'utiliser la fonction correspondante pour pouvoir se ramener au cas du taux périodique proportionnel: par exemple, pour un découpage temporel mensuel, à un taux annuel équivalent de 12,6825% correspond le taux annuel nominal de 12%, valeur que l'on rentre pour i (à la place de 12,6825%), ce qui conduit à travailler avec un taux mensuel de 1% qui est bien le taux mensuel équivalent au taux annuel de 12,6825%. Cette démarche est également implicitement celle des tableurs, comme on va le voir. *Examinons comment calculer le taux actuariel annuel correspondant au taux nominal annuel de 12% pour des versements mensuels. Pour effectuer cette conversion, il suffit de taper «=TAUX.EFFECTIF(0,12;12)» dans n'importe quelle cellule, pour obtenir la valeur cherchée (0,126825). On notera que cette fonction fait partie des fonctions additionnelles à installer sous Excel. Symétriquement, pour calculer le taux nominal annuel correspondant au taux effectif annuel de 4,0604%, pour des versements trimestriels, il suffit de taper «=TAUX.NOMINAL(0,126825;12)» dans n'importe quelle cellule, pour obtenir la valeur cherchée (0,12).*



	A	B	C	D	E
1	taux nominal i =	12,00%			
2	Nb de périodes / an =	12			
3	Taux effectif j =	12,6825%	FORMULES UTILISÉES B3 =TAUX.EFFECTIF(B1;B2) B4 =TAUX.EFFECTIF(0,12;12) B6 =TAUX.NOMINAL(B3;B2) B7 =TAUX.NOMINAL(0,12682503;12)		
4	Calcul direct	12,6825%			
5					
6	Taux nominal =	12,0000%			
7	Calcul direct	12,0000%			

Table des matières

Index thématique

II-3 CAPITALISATION D'UN ÉCHÉANCIER CONSTANT

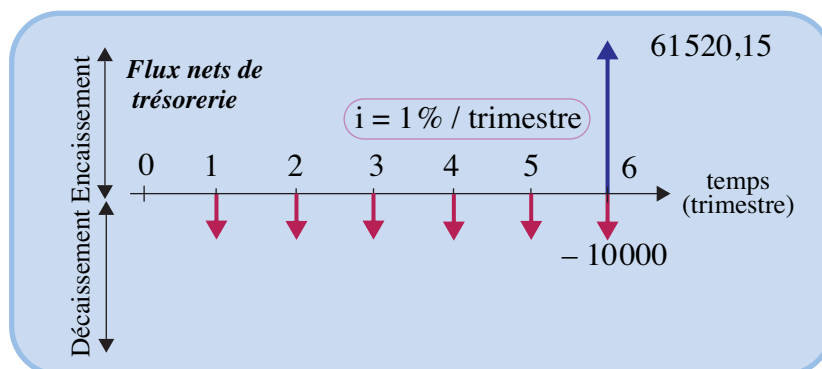
II-3.1 Capitalisation d'un échéancier constant de versements en fin de période (a_F)

Prenons l'exemple d'une compagnie d'assurance lidurienne qui perçoit à la fin de chaque trimestre une somme de 10000 € tirée de loyers des locaux commerciaux d'un immeuble. Cette somme payable à terme échu est aussitôt placée sur le marché financier à un **taux d'intérêt trimestriel de 1%** (\Rightarrow flux de fin de période = -10000). Supposons que le problème posé soit celui de la capitalisation, au 30 juin 2004, des loyers placés en 2003 et en 2004 jusqu'à cette date (ce qui implique que le loyer du second trimestre 2004, c'est-à-dire à la date conventionnelle $t = 6$, aura été perçu et placé mais n'aura pas eu le temps de produire des intérêts). L'analyse graphique de ce problème de capitalisation à terme échu est faite à la **figure 284**.

La solution du problème posé peut s'effectuer à partir des connaissances acquises en section I, en sommant les valeurs capitalisées des loyers perçus, ce qu'illustre le **tableau 355**. C'est donc une somme de **61520,15 €** dont dispose la

FIGURE 284

Capitalisation d'un échéancier constant de versements de fin de période



compagnie d'assurance au 30 juin 2004. Par ailleurs, ce tableau de calcul montre qu'il revient au même de multiplier l'annuité constante changée de signe¹ ($-10000 \Rightarrow +10000$) par la somme des coefficients de capitalisation ($10000 \times 6,152\ 015$) ou de faire le cumul des coefficients de capitalisation préalablement multipliés par l'annuité constante changée de signe ($10510,10 + 10406,04 + 10303,01 + 10201,00 + 10100,00 + 10000,00$), ce qui résulte d'une propriété bien connue de l'opérateur Σ : $\sum_t ax_t = a \sum_t x_t$. Il suffit donc de cumuler les coefficients de capitalisation de $t = 1$ à $t = n - 1$, et d'y ajouter 1 (pour le versement effectué à la date n) pour trouver directement la valeur cherchée.

Table des matières

Index thématique

TABLEAU 355

Capitalisation d'un échéancier constant de versements de fin de période

Date de perception du loyer		Durée de la capitalisation $n = 6 - t$	Coefficient de capitalisation $(1+0,01)^n$	Montant capitalisé $10000 \times 1,01^n$
Date réelle	Date conventionnelle t			
31 / 03 / 2003	1	5	1,051010	10510,10
30 / 06 / 2003	2	4	1,040604	10406,04
30 / 09 / 2003	3	3	1,030301	10303,01
31 / 12 / 2003	4	2	1,020100	10201,00
31 / 03 / 2004	5	1	1,010000	10100,00
30 / 06 / 2004	6	0	1,000000	10000,00
Σ	-	-	6,152 015	61520,15

Il existe une formule pour calculer directement cette somme:

$$1,01^5 + 1,01^4 + 1,01^3 + 1,01^2 + 1,01^1 + 1,01^0 = \sum_{t=0}^5 1,01^t = \frac{1,01^6 - 1}{1,01 - 1}$$

dont l'application donne: $\frac{1,061520 - 1}{0,01} = 6,152015$. D'une façon générale, on montre que, pour un nombre k quelconque, on a:

1. le changement de signe s'explique par le fait le flux résultant est l'encaissement échangé contre les décaissements correspondant aux annuités utilisées.

$$\sum_{t=0}^r k^t = \frac{k^{r+1} - 1}{k - 1} = \frac{1 - k^{r+1}}{1 - k} \quad \text{relation 496}$$

ce qui donne ici, en posant $k = 1 + i$:

$$\sum_{t=0}^r (1 + i)^t = \frac{(1 + i)^{r+1} - 1}{i} \quad \text{relation 497}$$

Dans cette **relation 497**, le nombre r représente le « nombre de versements moins 1 ». Si l'on préfère exprimer la formule de capitalisation à la date n (d'où $r = n - 1$), en fonction du nombre n de loyers trimestriels placés, on a alors en désignant par a_F le versement constant de **FIN** de période et x_n , la valeur capitalisée:

$$x_n = a_F \sum_{t=0}^{n-1} (1 + i)^t = a_F \left[\frac{(1 + i)^n - 1}{i} \right] \quad \text{relation 498}$$

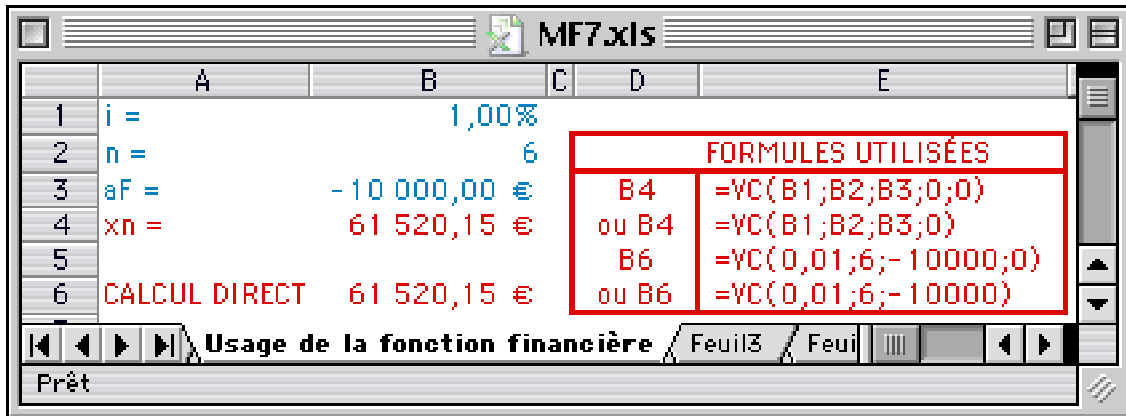
(x_n = valeur capitalisée à la date n , de n versements périodiques a_F en fin de période)

C'est à cette relation qu'il convient donc de faire appel si votre calculette n'est pas dotée des fonctions financières. Dans le cas contraire, il faut d'abord s'assurer (dans le mode d'emploi) que les calculs sont prévus pour des versements effectués en **fin** de période et non en **début** de période. En général, lorsqu'une seule des deux possibilités est offerte, ce sont des versements de **fin** période qui sont retenus. Certaines machines offrent les deux possibilités et sont alors dotées d'un « commutateur » spécifique aux « touches financières », comportant deux positions, l'une, notée BEGIN (= **début**), implique que les versements soient effectués en **début** de période, tandis que l'autre, notée END (= **fin**), s'applique aux problèmes financiers faisant intervenir les versements en **fin** de période. Une cinquième touche financière, généralement notée PMT (pour « *Payment* », c'est-à-dire versement), permet de saisir le versement constant de l'échéancier.

Utilisation d'une calculette financière ou d'un tableur: utilisons la calculette financière pour résoudre notre exemple, en supposant que le découpage temporel retenu¹ pour définir les données et le taux soit le même (trimestre) conduit à saisir $n = 6$ (*touche* **(N)**), $a_F = -10000$ (*touche* **(PMT)**), $i = 1\%$ (*touche* **(i)**), puis de taper sur la touche **(FV)** (*sur certaines machines, cette frappe doit être précédée de celle de la touche* **(CPT)**), pour obtenir $x_n = 61\,520,15$ €. *Examinons comment calculer cette valeur capitalisée avec le tableur Excel, en supposant que les données du problème aient été préalablement saisies dans la feuille de calcul, dans les cellules A1 à B4 (la cellule B4 étant vide) Il suffit alors de taper «=VC(B1;B2;B3;0;0)» ou «=VC(B1;B2;B3)» (ou d'utiliser les facilités offertes en insertion de fonction financière), dans la cellule B4, pour obtenir le résultat voulu. On aurait obtenu le résultat souhaité en définissant n'importe quelle cellule comme étant «=VC(0,01;6;-10000)» ou «=VC(0,01;6;-10000;0;0)»; dans cette dernière formulation, le dernier argument spécifie si les versements sont effectués en fin (0) ou en début (1) de période et l'avant-dernier argument correspond à la possibilité de spécifier un flux (positif ou négatif) à l'instant 0, indépendamment du versement périodique constant (certaines calculettes financières offrent également cette possibilité). Si l'on suppose maintenant que l'on veuille travailler avec la calculette financière en utilisant un taux défini sur une période annuelle (4% / an), le découpage temporel restant trimestriel. La démarche est identique à la précédente mais il faut préalablement avoir initialisé à 4 le paramètre P / Y (et, pour les calculettes de type BSII, le paramètre C / Y). La manipulation à effectuer est ensuite identique à celle précédemment décrite, sauf pour la valeur à saisir pour le taux:*

1. ce qui conduit préalablement à donner la valeur 1 au paramètre P / Y (ainsi qu'au paramètre C / Y pour les calculettes de type BSII ou BAII).





$n = 6$ (touche **N**), $a_F = -10000$ (touche **PMT**), $i = 4\%$ (touche **i**), puis il faut taper sur la touche **FV** (sur certaines machines, cette frappe doit être précédée de celle de la touche **CPT**), pour obtenir $x_n = 61\,520,15\text{ €}$. Sous Excel, pour expliciter le taux annuel il suffit, par exemple dans la dernière formulation présentée de remplacer « VC (0,01; 6; - 10000; 0; 0) » par « VC (0,04 / 4; 6; - 10000; 0; 0) ». Le choix de calculs effectués à partir d'un taux déjà défini sur la période de base utilisée par l'échéancier ou à partir d'un taux annuel et d'un découpage temporel plus fin est arbitraire. Dans la suite, on travaillera avec la première formulation dans les exemples d'utilisation de calculette ou de tableur, sans illustrer la seconde formulation qui repose toujours sur les principes que l'on vient de décrire.

II-3.2 Capitalisation à la fin de la période n d'un échéancier constant de versements de début de période (a_D)

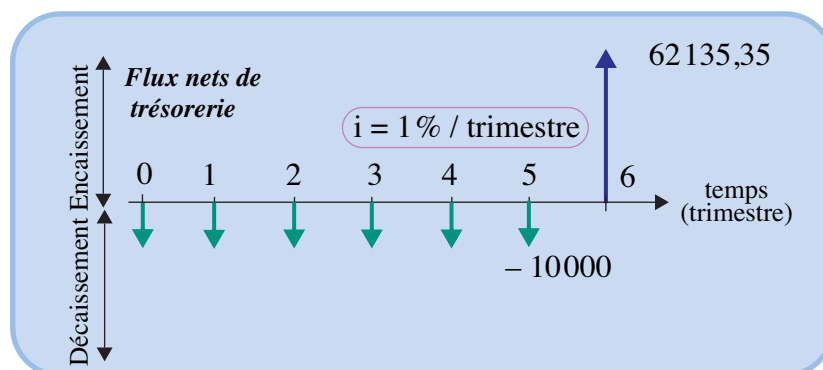
Table des matières

Supposons maintenant que les loyers sont, pour des raisons contractuelles, payables au **début** de chaque trimestre. Le problème posé est décrit à la **figure 285**, en excluant le loyer du 3^e trimestre 2004 (pour ne conserver que 6 versements). Si nous cherchons à résoudre ce problème à partir des connaissances acquises en section I, comme nous l'avons fait pour résoudre le cas précédent, on obtient le **tableau 356** de la page 1166.

Index thématique

FIGURE 285

Capitalisation d'un échéancier constant de versements de début de période



Le résultat obtenu (62135,35) aurait pu être trouvé directement en utilisant une formule, qui découle de la **relation 498** de la page 1164:

$$\sum_{t=1}^6 1,01^t = \frac{1,01}{1,01} \sum_{t=1}^6 1,01^t = 1,01 \sum_{t=0}^5 1,01^t$$

et qui conduit à multiplier par 1,01 la valeur capitalisée trouvée pour l'échéancier de **fin** de période (61520,15): $61\,520,15 \times 1,01 = 62\,135,35$. D'une façon générale, on peut écrire ce coefficient de capitalisation en fonction du nombre n de périodes:

TABLEAU 356
Capitalisation d'un échancier constant de versements effectués en début de période

Date de perception du loyer		Durée de la capitalisation $n = 6 - t$	Coefficient de capitalisation $(1+0,01)^n$	Montant capitalisé $10000 \times 1,01^n$
Date réelle	Date conventionnelle t			
1 / 01 / 2003	0	6	1,061 520	10615,20
1 / 04 / 2003	1	5	1,051 010	10510,10
1 / 07 / 2003	2	4	1,040 604	10406,04
1 / 10 / 2003	3	3	1,030 301	10303,01
1 / 01 / 2004	4	2	1,020 100	10201,00
1 / 04 / 2004	5	1	1,010 000	10100,00
Σ			6,213 535	62 135,35

$$x_n = a_D \sum_{t=1}^n (1+i)^t = a_D(1+i) \frac{(1+i)^n - 1}{i} \quad \text{relation 499}$$

(x_n = valeur capitalisée à la date n , de n versements périodiques a_D , en début de période)

Si la calculette dotée des fonctions financières ne traite que le cas de versements en fin de période et si l'on a à résoudre un problème de début de période, il convient alors de multiplier par $(1 + i)$ le résultat obtenu en raisonnant comme si les versements étaient effectués en fin de période. Cela est évident en comparant la relation 498, page 1164, avec la relation 499, mais ce résultat aurait pu être trouvé directement en remarquant que le versement a_F est financièrement équivalent au versement de a_D pendant un trimestre, ce qui donne:

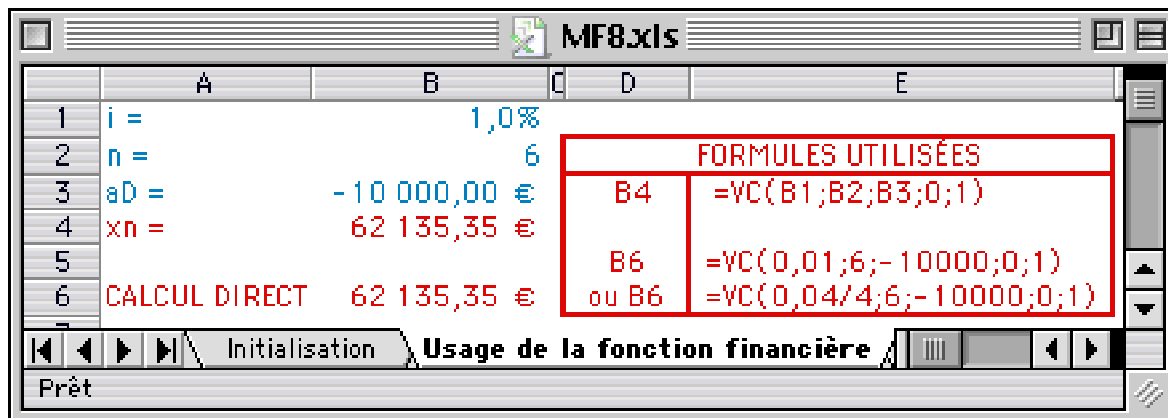
$$a_F = a_D (1 + i) \quad \text{relation 500}$$



Utilisation d'un tableur: examinons comment calculer cette valeur capitalisée avec le tableur Excel. Par rapport au cas des versements en fin de période, le processus est le même mais il faut changer la valeur du dernier argument et taper «=VC(B1;B2;B3;0;1)», dans la cellule B4, pour obtenir le résultat voulu. Bien entendu, on aurait obtenu le résultat souhaité en définissant n'importe quelle cellule comme étant «=VC(0,01;6;-10000;0;1)». L'interprétation des deux derniers arguments (ici «0;1») a été donnée en page 1164.

Table des matières

Index thématique



II-3.3 Recherche du versement constant périodique a_F ou a_D équivalant à une somme future x_n

La résolution de ces problèmes découle directement de celle des problèmes analysés au § II-3.1, page 1162, et au § II-3.2, page 1165. Concrètement, il s'agit de définir le montant unitaire d'une série de versements constants permettant de disposer d'un certain capital à une date donnée. Ce problème (toujours illustré par la figure 285, page 1165) se pose en pratique pour le calcul de certaines assurances et retraites.

II-3.3.1 Cas de versements de fin de période (a_F)

Le versement a_F , effectué à la FIN de chacune des n périodes, donne droit, à la date $t = n$, à une somme x_n . La relation 498 ($x_n = a_F \left[\frac{(1+i)^n - 1}{i} \right]$), permet d'écrire, après multiplication des deux membres de l'équation par $i / [(1+i)^n - 1]$:

$$a_F = x_n \frac{i}{(1+i)^n - 1} \quad (\text{versements de fin de période}) \quad \text{relation 501}$$

Utilisation d'une calculatrice financière ou d'un tableur : Soit à définir le versement annuel a_F qui, placé à la fin de chaque année à intérêt composé $i = 10\%$, donnera d'ici $n = 15$ ans, un capital de 100000 €. L'application directe de la relation 501 avec une calculatrice classique donne 3147,38; autrement dit, en versant chaque année en fin d'année une somme de 3147,38 €, on récupère à intérêts composés au taux de 10%, une somme de 100000 €, à la fin de la 15^e année. Les calculatrices financières fournissent directement cette valeur. Après avoir vérifié que l'on est bien en mode fin de période (option END), il suffit de saisir $i = 10\%$ (touche **i**), $n = 15$ (touche **N**), $x_{15} = 100000$ (touche **FV**), puis de taper sur la touche **PMT** (sur certaines machines, cette frappe doit être précédée de celle de la touche **CPT**), pour obtenir $a_F = -3147,38$. Examinons enfin comment calculer ce virement périodique de fin de période avec le tableur Excel, en supposant que les données du problème aient été préalablement saisies dans la feuille de calcul, dans les cellules A1 à B4 (la cellule B3 étant vide). Il suffit alors de taper «=VPM(B1;B2;0;B4;0)» (ou d'utiliser les facilités offertes en insertion de fonction financière), dans la cellule B3, pour obtenir le résultat voulu. On aurait obtenu le résultat souhaité en définissant n'importe quelle cellule comme étant «=VPM(0,1;15;0;100000;0)». On peut ajouter que le dernier argument spécifie si les versements sont effectués en fin (0) ou en début (1) de période et que le troisième argument correspond à la possibilité de spécifier un flux (positif ou négatif) à l'instant 0, indépendant du versement périodique constant et s'ajoutant à celui-ci. Ce type de possibilité a déjà été rencontré dans l'exemple de la page 1164, dans le problème symétrique de la recherche de x_n , a_F étant connu.

Table des matières

Index thématique



	A	B	C	D	E
1	i=	10,00%			
2	n=	15			
3	aF=	-3 147,38 €			
4	xn=	100 000,00 €			
5					
6	CALCUL DIRECT	-3 147,38 €			

FORMULES UTILISÉES	
B3	=VPM(B1;B2;0;B4;0)
ou B3	=VPM(B1;B2;0;B4)
B6	=VPM(0,1;15;0;100000;0)
ou B6	=VPM(0,1;15;0;100000)

Initialisation Usage de la fonction financière

Prêt

II-3.3.2 Cas de versements de début de période (a_D)

Si le versement a_D est effectué au **DEBUT** de chacune des n périodes et donne droit, à la date $t = n$, à une somme x_n , on a d'après la [relation 499](#), page 1166 :

$$x_n = a_D(1+i) \frac{(1+i)^n - 1}{i}, \text{ qui divisé membre à membre par } (1+i) \frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

donne :

$$a_D = x_n \frac{i}{(1+i)[(1+i)^n - 1]} \quad (\text{versements de début de période}) \quad \text{relation 502}$$

Utilisation d'une calculatrice financière ou d'un tableur : Même problème que précédemment mais avec des versements en **début** de période (y compris un versement immédiat au moment où le problème est posé). L'application directe de la [relation 502](#) avec une calculatrice classique donne 2861,25, somme qui n'est autre que l'annuité trouvée dans le problème précédent, divisée par $(1 + 0,1)$: $3147,38 / 1,1 = 2861,25$, ce qui ne saurait surprendre compte tenu de la [relation 500](#), page 1166. Cela étant, les calculatrices financières fournissent directement cette valeur, après avoir vérifié que l'on est bien en mode **début** de période (option BEGIN) : il suffit de saisir $i = 10\%$ (touche **i**), $n = 15$ (touche **N**), $x_{15} = 100000$ (touche **FV**), puis de taper sur la touche **PMT** (sur certaines machines, cette frappe doit être précédée de celle de la touche **CPT**), pour obtenir $a_D = 2861,25$. Examinons comment calculer ce versement périodique de début de période avec le tableur Excel. Par rapport au cas des versements en fin de période, le processus est le même mais il faut taper «=VPM(B1;B2;0;B4;1)» (ou d'utiliser les facilités offertes en insertion de fonction financière), dans la cellule B3, pour obtenir le résultat voulu. On aurait obtenu le résultat souhaité en définissant n'importe quelle cellule comme étant «=VPM(0,1;15;0;100000;1)». L'interprétation des 3° et 5° argument a été donné dans l'exemple précédent).



	A	B	C	D	E
1	i =	0,10			
2	n =	15			
3	aD =	-2 861,25 F			
4	xn =	100 000,00 F			
5					
6	CALCUL DIRECT	-2 861,25 F			

FORMULES UTILISÉES	
B3	=VPM(B1;B2;0;B4;1)
B6	=VPM(0,1;15;0;100000;1)

Table des matières

Index thématique

II-4 Actualisation d'un échéancier constant

Cette catégorie de problèmes est fréquente en calcul économique (bilan actualisé) et en crédit (détermination d'un emprunt à partir d'une capacité de remboursements constants périodiques). On retrouve, une fois de plus, le problème du choix entre des versements effectués en **début** ou en **fin** de période.

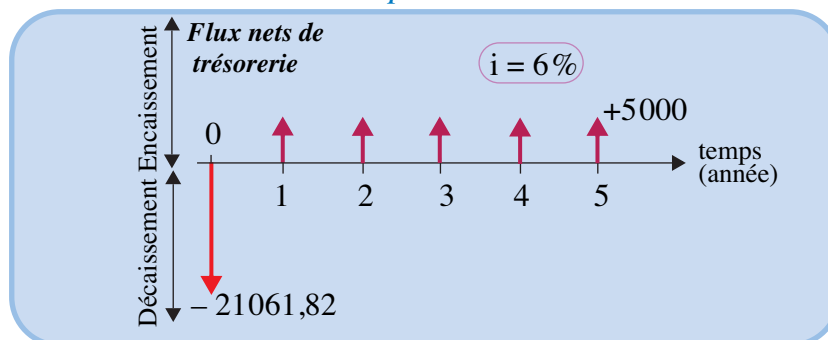
II-4.1 Actualisation d'un échéancier de versements constants en fin de période (a_F)

Soit un investissement, réalisé au 1^{er} janvier 2003, rapportant à la **fin** de chacune des 5 années de sa durée de vie¹, un flux net de trésorerie de +5000. Le problème posé est celui du calcul de la valeur x_0 équivalente à cet échéancier, pour un taux d'actualisation annuel de 6%, afin de décider de l'opportunité de procéder à cet

investissement qui coûte 15000. En effet, si cette valeur x_0 est supérieure à 15000, l'investissement peut être considéré comme intéressant, si le taux d'actualisation n'est pas inférieur au taux du meilleur placement financier¹. En effet, dans ce cas, un placement financier de 15000 à un taux d'intérêt égal au taux d'actualisation, ne permet pas d'obtenir un échéancier d'encaissements meilleur que celui étudié: il faut au moins que l'un des encaissements soit inférieur², les autres étant identiques.

FIGURE 286

Actualisation d'un échéancier constant d'un échéancier de flux constants de fin de période



La figure 286, effectue l'analyse graphique du problème, conformément à l'hypothèse de versements en fin de période. La solution du problème posé peut s'effectuer à partir des connaissances acquises en section I, en sommant les valeurs actualisées des flux nets de trésorerie dans le tableau 357. Bien entendu,

Table des matières

TABLEAU 357

Actualisation d'un échéancier constant d'un échéancier de versements constants de fin de période

Index thématique

Date de perception du flux de trésorerie FNT_t		Coefficient d'actualisation $(1+0,06)^{-t}$	Montants actualisés des FNT_t $5000 \times (1+0,06)^{-t}$
Date réelle	Date conventionnelle t		
1 / 1 / 2004	1	0,943 396	4716,98
1 / 1 / 2005	2	0,889 996	4449,98
1 / 1 / 2006	3	0,839 619	4198,10
1 / 1 / 2007	4	0,792 094	3960,47
1 / 1 / 2008	5	0,747 258	3736,29
Σ	-	4,212 364 [†]	21061,82

†. la somme des valeurs arrondies (ici 4,212 363) est légèrement différente de la valeur arrondie de la somme (4,212 364), qu'il est préférable d'utiliser.

1. Ici la fin d'année peut être conventionnellement la fin de la journée du 31 décembre ou le début du 1 janvier de l'année suivante (solution retenue ici), l'important étant de pouvoir considérer qu'il s'écoule exactement 1 an entre la date d'actualisation et la date du premier versement.

1. d'une durée d'immobilisation et d'un risque équivalent.

2. Par exemple, pour 6%, on peut troquer un décaissement initial de 15000, contre l'échéancier: [5000; 5000, 5000; 2064,07; 0], ce qui montre bien que l'investissement est plus intéressant que le placement financier (si les risques encourus ne sont pas sensiblement différents).

ce résultat peut être obtenu directement par l'intermédiaire d'une formule de calcul. En effet, le travail effectué dans le [tableau 357](#) peut être décrit comme suit :

$$1,06^{-1} + 1,06^{-2} + 1,06^{-3} + 1,06^{-4} + 1,06^{-5} = \sum_{t=1}^5 1,06^{-t} = 1,06^{-1} \sum_{t=0}^4 1,06^{-t}$$

Cette dernière formule en utilisant la [relation 496](#) (page 1164) et en posant $k = 1,06^{-1}$, devient :

$$\begin{aligned} \sum_{t=1}^5 [1,06^{-1}]^t &= [1,06^{-1}] \sum_{t=0}^4 [1,06^{-1}]^t = [1,06^{-1}] \frac{1 - [1,06^{-1}]^{4+1}}{1 - [1,06^{-1}]} \\ &= \frac{1 - 1,06^{-5}}{1,06 \{1 - [1,06^{-1}]\}} = \frac{1 - 1,06^{-5}}{1,06 - 1,06^{1-1}} = \frac{1 - 0,74725817}{0,06} = 4,212364 \end{aligned}$$

et l'on retrouve, la même valeur que par le calcul direct. On généralise facilement ce raisonnement. D'une façon générale, la formule de l'actualisation à la date 0 d'un échéancier de n versements périodiques a_F constants et versés en fin de période est, pour un taux d'actualisation i :

$$x_0 = a_F \sum_{t=1}^n (1+i)^{-t} = a_F \frac{1 - (1+i)^{-n}}{i} \quad \text{relation 503}$$

(x_0 = valeur actualisée à la date 0, de n versements périodiques a_F en fin de période).

Utilisation d'une calculatrice financière ou d'un tableur : Cette formule est celle à appliquer par ceux qui utilisent une calculatrice non financière. Dans le cas contraire, après avoir vérifié que l'on est bien en mode « fin de période » (option END) et que $P/Y (=C/Y) = 1$, on entre successivement $n = 5$ (touche **N**), $i = 6\%$ (touche **i**), $a_F = 5000$ (touche **PMT**), puis on appuie sur la touche **PV** (sur certaines machines, cette frappe doit être précédée de celle de la touche **CPT**), pour obtenir $x_0 = -21061,82$. Examinons comment calculer cette valeur actualisée avec le tableur Excel, en supposant que les données du problème aient été préalablement saisies dans la feuille de calcul, dans les cellules A1 à B4 (la cellule B4 étant vide). Il suffit alors de taper « =VA(B1;B2;B3;0;0) » ou « =VA(B1;B2;B3) » (ou d'utiliser les facilités offertes en insertion de fonction financière), dans la cellule B4, pour obtenir le résultat voulu. On aurait obtenu le résultat souhaité en définissant n'importe quelle cellule comme étant « =VA(0,06;5;5000) » ou « =VA(0,06;5;5000;0;0) ». Les deux derniers arguments de la dernière formulation sont nuls. Le dernier spécifie si les versements sont effectués en fin (0) ou en début (1) de période et l'avant-dernier offre la possibilité de spécifier un flux (positif ou négatif) à l'instant $t = n$, différent du versement périodique constant et s'ajoutant à celui-ci. Cette dernière possibilité, utilisée avec un échéancier de valeurs nulles, a déjà été utilisée dans le calcul de la valeur actuelle, d'une valeur future (page 1154).



Table des matières

Index thématique

MF11.xls				
	A	B	C	E
1	i =	6,00%		
2	n =	5		
3	aF =	5 000,00 €		
4	x0 =	-21 061,82 €		
5				
6	CALCUL DIRECT	-21 061,82 €		
				FORMULES UTILISÉES
			B4	=VA(B1;B2;B3;0;0)
			ou B4	=VA(B1;B2;B3;0)
			B6	=VA(0,06;5;5000;0;0)
			ou B6	=VA(0,06;5;5000;0)

Initialisation Usage de la fonction financier

Prêt

Une remarque doit être ajoutée sur le raisonnement d'*équivalence en cascade* que l'on effectue classiquement en mathématique financière :

- si l'on capitalise l'échéancier à la date $t = 5$, on obtient, en utilisant la **relation 499** (page 1166), une valeur x_5 équivalente à cet échéancier au taux de 6% :

$$x_5 = 5000 \times \frac{1,06^5 - 1}{0,06} = 28\,185,46;$$

- la valeur actuelle x_0 équivalente à la valeur future x_5 pour un taux de 6% est :
 $x_0 = x_5 \times 1,06^{-5} = 21\,061,82$.

Il est donc financièrement indifférent, au taux annuel de 6% :

- de disposer de 21061,82 en $t = 0$;
- de disposer de 28185,46 en $t = 5$;
- de disposer de 5000 aux dates $t = 1$ à $t = 5$.

Ceci illustre bien l'objectif des mathématiques financières qui est de **définir les conditions du troc d'une somme ponctuelle ou d'un échéancier contre une autre somme ponctuelle ou un autre échéancier**.

Rappelons enfin que lorsque l'actualisation est réalisée dans le cadre de l'analyse d'un projet d'investissement, le taux d'actualisation périodique est lié au taux d'actualisation annuel par le mécanisme d'équivalence (**relation 493**, page 1161) et non celui de proportionnalité (**relation 492**, page 1161).

Utilisation d'une calculette financière ou d'un tableur : l'actualisation d'une économie salariale mensuelle de 55000 pendant 8 ans ($\Rightarrow n = 12 \times 8 = 96$) au taux d'actualisation annuel de 9%, conduit à utiliser le taux mensuel équivalent de $1,09^{1/12} - 1 = 0,720732\%$, et à trouver une valeur actualisée de $-3801321,71$. *Sous Excel, ce résultat est obtenu en tapant dans une cellule quelconque «=VA(0,0720732;96;55000;0;0)» ou «=VA(TAUX.EFFECTIF(0,09;12);96;55000;0;0)».*

Table des matières

Il convient de ne pas oublier, dans ce cas, que la convention de signes utilisée par les calculettes financières et les tableurs est orientée vers les transactions bancaires. Ici, la transaction est «interne», il n'y a pas d'échange d'argent entre deux parties. Il s'ensuit que **le changement de signe n'est pas approprié dans l'actualisation de recettes ou de dépenses d'un projet**¹.

Index thématique

II-4.2 Actualisation d'un échéancier de versements constants en début de période (a_D)

Là encore, les deux mêmes approches du problème sont possibles, le calcul direct et l'utilisation de résultats analytiques. Si l'on reprend le même exemple, en supposant cette fois que l'on convienne de considérer que les flux nets de trésorerie sont disponibles en **début** de période, et non en **fin** de période, on obtient alors l'analyse graphique de la **figure 287** et le **tableau 358** de la page 1172.

Le résultat trouvé (22325,53) peut être trouvé directement par l'intermédiaire d'une formule permettant de calculer directement cette somme des coefficients d'actualisation. En effet, le travail effectué dans ce tableau peut s'écrire :

$$1 + 1,06^{-1} + 1,06^{-2} + 1,06^{-3} + 1,06^{-4} = \sum_{t=0}^4 1,06^{-t} = \frac{1 - 1,06^{-5}}{1 - 1,06^{-1}}$$

En multipliant le numérateur et le dénominateur par 1,06, on obtient :

1. Etant entendu qu'en cas de financement associé au projet, il est conseillé de dissocier les deux opérations (un projet «physique» et un projet «financier»), comme on l'a indiqué à la **page 178**.

FIGURE 287

Actualisation d'un échancier de versements constants en début de période

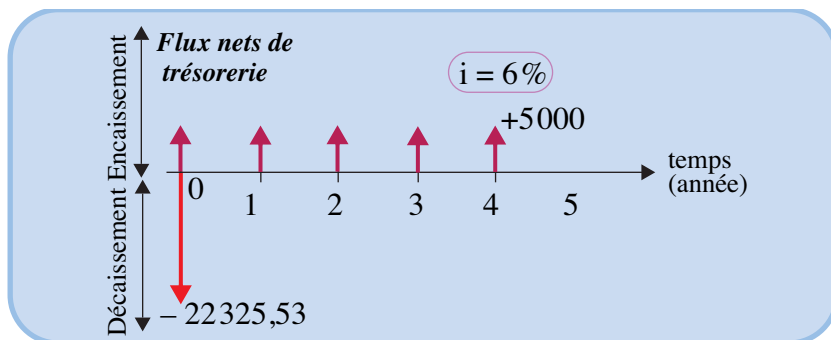


TABLEAU 358

Actualisation d'un échancier de versements constants en début de période

Date de perception du flux de trésorerie FNT _t		Coefficient d'actualisation (1+0,06) ^{-t}	Montants actualisés des FNT _t 5000 × (1+0,06) ^{-t}
Date réelle	Date conventionnelle t		
1 / 1 / 2003	0	1,000000	5000,00
1 / 1 / 2004	1	0,943396	4716,98
1 / 1 / 2005	2	0,889996	4449,98
1 / 1 / 2006	3	0,839619	4198,10
1 / 1 / 2007	4	0,792094	3960,47
Σ	-	4,465106	22325,53

$$\sum_{t=0}^4 1,06^{-t} = \frac{1,06(1 - 1,06^{-5})}{1,06 - 1,06^{-0}} = 1,06 \frac{1 - 1,06^{-5}}{0,06} = 4,465105$$

et l'on retrouve donc la même valeur que par le calcul direct¹. D'une façon générale, la formule de l'actualisation à la date 0 d'un échancier de n versements périodiques a_D constants et versés en début de période, pour le taux d'actualisation i, est:

$$x_0 = a_D \sum_{t=0}^{n-1} (1+i)^{-t} = a_D (1+i) \frac{1 - (1+i)^{-n}}{i} \tag{relation 504}$$

(x₀ = valeur actualisée de n versements périodiques a_D en début de période)

Exemple: Cette formule est à appliquer par ceux qui utilisent une calculatrice non financière. Dans le cas contraire, après avoir vérifié que l'on est bien en mode début de période (option BEGIN), on saisit successivement n = 5 (touche **N**), i = 6% (touche **i**), a_D = 5000 (touche **PMT**), puis on appuie sur la touche **PV** (sur certaines machines, cette frappe doit être précédée de celle de la touche **CPT**), pour obtenir x₀ = - 22325,53.² Examinons comment calculer cette valeur actualisée avec le tableur Excel. Par rapport au cas des versements en fin de période (voir page

Table des matières

Index thématique

1. La différence sur le dernier chiffre s'expliquant par le fait que la somme des arrondis n'est pas égale à l'arrondi de la somme.
 2. Si la calculatrice dotée des fonctions financières est prévue pour ne traiter que le cas des échanciers versés en fin de période, il convient, pour traiter un problème d'actualisation d'échancier de versements constants en début de période, de se ramener à un problème de fin de période, et de multiplier le résultat par (1 + i).

1170), le traitement est le même mais il faut changer la valeur du dernier argument et taper «=VA(B1;B2;B3;0;1)», dans la cellule B4, pour obtenir le résultat voulu.



	A	B	C	D	E
1	i =	6,00%			
2	n =	5			
3	AD =	5 000,00 €			
4	x0 =	-22 325,53 €			
5					
6	CALCUL DIRECT	-22 325,53 €			

FORMULES UTILISÉES	
B4	=VA(B1;B2;B3;0;1)
B6	=VA(0,06;5;5000;0;1)

II-4.3 Recherche du versement constant a d'un échancier équivalent à une somme actuelle (x_0)

Ce problème se pose en particulier dans la détermination de l'échéancier de remboursement d'un emprunt, lorsque le remboursement s'effectue par versements constants. Il convient de distinguer le cas de versements effectués en fin de période (§ II-4.3.1) de celui de versements effectués en début de période (§ II-4.3.2, page 1177).

II-4.3.1 Cas de versements a_F réalisés en fin de période

On examinera successivement le calcul du versement constant périodique et celui, important en cas de remboursement anticipé, du capital restant dû après un versement périodique.

II-4.3.1.1 Calcul des versements constants périodiques a_F (en fonction de n , i et x_0)

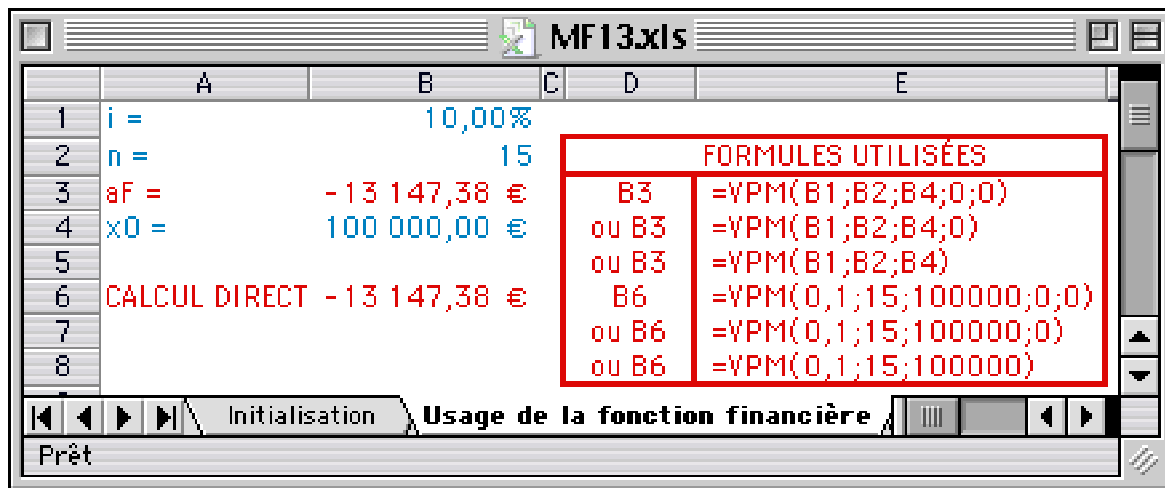
Si le versement est effectué à la FIN de chacune des n périodes, en contrepartie d'une libre disposition, à la date $t = 0$, d'une somme x_0 , on tire a_F de la relation

503, page 1170 $\left(x_0 = a_F \frac{1 - (1+i)^{-n}}{i}\right)$:

$$a_F = x_0 \frac{i}{1 - (1+i)^{-n}} \quad \text{relation 505}$$

(échancier de n versements a_F de fin de période, équivalent à une somme initiale x_0)

Utilisation d'une calculette financière ou d'un tableur : Soit à calculer l'annuité de remboursement à terme échu d'un prêt de 100000 € sur 15 ans pour un taux d'intérêt nominal de 10%. L'application directe de la relation 505 donne directement 13 147,38 €. Les calculettes financières fournissent directement cette valeur, après avoir vérifié que l'on est bien en mode «fin de période» (option END) et que $P/Y (=C/Y) = 1$, il suffit de saisir $i = 10\%$ (touche **i**), $n = 15$ (touche **N**), $x_0 = 100000$ (touche **PV**), puis de taper sur la touche **PMT** (sur certaines machines, cette frappe doit être précédée de celle de la touche **CPT**), pour obtenir $a_F = -13 147,38$ € (valeur négative, puis qu'il s'agit d'un décaissement, la valeur saisie pour x_0 étant positive). Avec le tableur Excel, en supposant que les données du problème aient été préalablement saisies dans la feuille de calcul, dans les cellules A1 à B4 (la cellule B3 étant vide), il suffit de taper «=VPM(B1;B2;B4;0;0)» ou «=VPM(B1;B2;B4)» dans la cellule B3, pour obtenir le résultat voulu mais on aurait obtenu le résultat souhaité en définissant n'importe quelle cellule comme



étant «=VPM(0,1;15;100000)». Les deux derniers arguments facultatifs de cette fonction VPM sont les mêmes que ceux de la fonction VA (voir page 1170) : le dernier spécifie si les versements sont effectués en fin (0) ou en début (1) de période et l'avant-dernier offre la possibilité de spécifier un flux (positif ou négatif) à l'instant $t = n$, différent du versement périodique constant et s'ajoutant à celui-ci. On peut ajouter que si le remboursement doit être mensuel et non annuel, il suffit sur les calculettes financières de modifier l'initialisation des paramètres $P / Y (=C / Y) = 12$ et de passer à $N = 15 \times 12 = 180$, pour trouver $- 1074,61$. Sur Excel, ce dernier résultat est obtenu en définissant n'importe quelle cellule comme étant «=VPM(0,1/12;15*12;100 000;0;0)» ou «=VPM(0,1/12;15*12;100000)».



II-4.3.1.2 Calcul du capital restant dû après un versement (fin de période) ainsi que du cumul des intérêts ou du capital remboursé au cours de versements successifs

Lorsque le remboursement d'un emprunt s'effectue par versements constants, il est évident qu'au début, ces remboursements intègrent davantage de paiement d'intérêt (= rémunération de l'emprunt), que de remboursement du capital (appelé encore **principal**). Par contre, pour les derniers remboursements, c'est l'inverse qui se produit puisque le capital étant progressivement remboursé, le capital restant dû (qui conditionne le montant des intérêts) est de plus en plus faible. La **relation 506** permet de calculer le capital c_t restant à rembourser à une date t , après versement effectué à la fin de cette période, dans le cas de n remboursements périodiques constants.

$$c_t = x_0 \frac{(1+i)^n - (1+i)^t}{(1+i)^n - 1} \quad \text{relation 506}$$

(c_t = capital restant à rembourser en fin de période t (après versement) dans le cas de n versements constants périodiques à terme échu)

Il découle de cette formule que :

- le montant du capital remboursé entre deux dates se calcule immédiatement et, par voie de conséquence le montant des intérêts versés, par différence entre le cumul des versements effectués (égal au produit du versement périodique par le nombre de périodes considérées) et le capital remboursé entre ces deux dates ;
- l'intérêt I_t versé en t au titre de la période t et calculé sur le capital restant à rembourser à la fin de la période précédente, c'est-à-dire à la date $t-1$, est :

Table des matières

Index thématique

$$I_t = ix_0 \frac{(1+i)^n - (1+i)^{t-1}}{(1+i)^n - 1} \quad \text{relation 507}$$

(I_t = intérêts versés en t , au titre de la période t , dans le cas de n versements périodiques de fin de période)

Ces deux relations sont disponibles sur les calculettes financières par l'intermédiaire de touches de fonctions.

On démontre facilement que ce capital restant dû peut se calculer également comme la valeur actuelle de l'échéancier des versements restant à courir¹. Cette observation a une conséquence importante : ***tout se passe comme si l'emprunteur, après chaque remboursement, aurait sa dette et contractait aussitôt un emprunt égal au capital restant dû et ce au taux initial.*** Le raisonnement souvent entendu selon lequel « l'emprunteur paye d'abord les intérêts » est donc tout à fait erroné, ce qui n'empêche pas que le poids des intérêts dans les remboursements baisse au cours du temps (ce qui s'explique tout simplement par la décroissance du capital restant dû sur lequel les intérêts sont calculés).

D'après la **relation 506 de la page 1174**, le capital restant dû au **début** de la période t_1 (après le versement effectué en $t_1 - 1$) est $c_{t_1-1} = x_0 \frac{(1+i)^n - (1+i)^{t_1-1}}{(1+i)^n - 1}$, tandis que celui restant dû à la **fin** de la période t_2 (après versement) est

$c_{t_2} = x_0 \frac{(1+i)^n - (1+i)^{t_2}}{(1+i)^n - 1}$. Le capital remboursé au titre des périodes t_1 à t_2 est donc :

$$x_0 \frac{(1+i)^{t_2} - (1+i)^{t_1-1}}{(1+i)^n - 1} \quad \text{relation 508}$$

(capital remboursé au titre des périodes t_1 à t_2 , dans le cas de n versements périodiques de fin de période)

Compte tenu qu'il y a eu $(t_2 - t_1 + 1)$ versements entre dates t_1 et t_2 , et donc que le total versé est $(t_2 - t_1 + 1) \left[x_0 \frac{i}{1 - (1+i)^{-n}} \right] = (t_2 - t_1 + 1) \left[x_0 \frac{i(1+i)^n}{(1+i)^n - 1} \right]$ (en utilisant la **relation 505, page 1173**), on en tire les intérêts versés au titre des périodes t_1 à t_2 :

$$(t_2 - t_1 + 1) \left[x_0 \frac{i(1+i)^n}{(1+i)^n - 1} \right] - x_0 \frac{(1+i)^{t_2} - (1+i)^{t_1-1}}{(1+i)^n - 1}, \text{ d'où:}$$

1. À la date t , il reste encore $n - t$ versements (fin de périodes), on peut donc écrire, une fois connue a_F

$$(a_F = x_0 \frac{i}{1 - (1+i)^{-n}}, \text{ d'après la relation 505 de la page 1173):}$$

$$c_t = \sum_{\theta=1}^{n-t} a_F \cdot (1+i)^{-\theta} = a_F \frac{1 - (1+i)^{-(n-t)}}{i}$$

$$c_t = x_0 \frac{i}{1 - (1+i)^{-n}} \cdot \frac{1 - (1+i)^{-(n-t)}}{i} \cdot \frac{(1+i)^{(n-t)}}{(1+i)^{(n-t)}} = x_0 \frac{(1+i)^n - (1+i)^t}{(1+i)^n - 1}$$

Table des matières

Index thématique

$$x_0 \frac{i(t_2 - t_1 + 1)(1+i)^n + (1+i)^{t_1-1} - (1+i)^{t_2}}{(1+i)^n - 1}$$

relation 509

(intérêts versés au titre des périodes t_1 à t_2 , dans le cas de n versements périodiques de fin de période)

Utilisation d'une calculatrice financière¹ ou d'un tableur : Soit un emprunt de 10000 remboursable par annuités constantes en 5 ans à terme échu, pour un taux d'intérêt de 10%. On peut alors décomposer l'annuité constante de remboursement (= 2637,97) dans le **tableau 359**, page 1176. L'application de la **relation 506** pour $t=3$ donne: $c_3 = 10000 \frac{1,1^5 - 1,1^3}{1,1^5 - 1} = 4578,3$

TABLEAU 359
Capital restant dû, après versement de l'annuité

t	C_{t-1}	$I_t = iC_{t-1}$	a	$a - I_t$	C_t
Année	Capital restant dû au cours de l'année t	Intérêts dus (au taux $i = 10\%$) sur le capital restant dû au cours de l'année t	Annuité constante d'amortissement	Remboursement du capital de l'année t	Capital restant dû à la fin de l'année t , après remboursement
1	10000,00	1000,00	2637,97	1637,97	8362,03
2	8362,03	836,20	2637,97	1801,77	6560,25
3	6560,25	656,03	2637,97	1981,95	4578,30
4	4578,30	457,83	2637,97	2180,14	2398,16
5	2398,16	239,82	2637,97	2398,16	0,00
Σ	-	31 89,87	13 189,87	10000,00	-

Table des matières

Index thématique

et celle de l'actualisation des versements restant dus (**relation 503**, page 1170) :

$$c_3 = 2637,97 \times \frac{1 - 1,1^{-(5-3)}}{0,1} = 4578,3.$$

Examinons comment calculer, avec le tableur Excel, le capital restant dû, en supposant que les données du problème aient été préalablement saisies dans la feuille de calcul, dans les cellules A1 à B6 (les cellules B5 et B6 étant vides). Il suffit alors de taper «=INTPER(B1;B2;B3;B4;0)» dans la cellule B5 et «=PRINCPER(B1;B2;B3;B4;0)» dans la cellule B6, pour obtenir les résultats voulus (les signes sont négatifs parce qu'il s'agit de la décomposition d'un décaissement). On aurait obtenu le montant des intérêts versés au titre de la période 3 en définissant n'importe quelle cellule comme étant «=INTPER(0,1;3;5;10000;0)». De même, on aurait obtenu le montant du capital remboursé au titre de la période 3 en définissant n'importe quelle cellule comme étant «=PRINCPER(0,1;3;5;10000;0)». On peut ajouter que l'on peut également calculer simplement le cumul des intérêts versés ou du capital remboursé entre les versements effectués en t_1 et celui effectué en t_2 ; par exemple, pour $t_1 = 2$ et $t_2 = 3$, on obtient le cumul des intérêts versés en définissant n'importe quelle cellule comme étant «=CUMUL.INTER(0,1;5;10000;2;3;0)»², pour obtenir la valeur cherchée (-1492,23; qui est bien la



1. L'application des formules 506 à 509 repose implicitement sur l'hypothèse d'un versement périodique correspondant exactement à celui défini par la relation 505 de la page 1173. Le nombre de chiffres après la virgule retenu dans les contrats – et donc dans les échéanciers de remboursements – s'aligne sur les possibilités offertes légalement de fractionnement maximal de l'unité monétaire utilisée dans le pays (en France, c'est le centime). Il s'ensuit que les résultats peuvent différer légèrement de ceux fournis par l'utilisation de ces formules. Certaines calculatrices financières s'appuyant sur ces contraintes, fournissent des résultats de capital restant dû et de cumul de paiements d'intérêt ou de remboursements de capital entre deux périodes qui sont cohérents avec le nombre de chiffres après la virgule retenu par l'utilisateur. Dès lors, le capital restant dû ne sera pas nécessairement le même en fonction du format d'affichage retenu par la calculatrice.

somme de 836,20 et de 656,03 (affectés du signe moins, puisqu'il s'agit de décaissements). De même, pour obtenir le capital remboursé entre ces deux versements, on utilisera «=CUMUL.PRINCPER(0,1;5;10000;2;3;0)», pour obtenir la valeur cherchée (-3783,72).

	A	B	C	D	E
1	i =	10,00%	t1 =	2	
2	t =	3	t2 =	3	
3	n =	5			
4	x0 =	10 000,00 €	FORMULES UTILISEES		
5	Intérêt versé à la fin de la période t = 3	- 656,03 €	B5	=INTPER(B1;B2;B3;B4;0)	
6	Calcul direct Capital	- 656,03 €	B6	=INTPER(0,1;3;5;10000;0)	
7	remboursé à la fin de la période t = 2	- 1 981,95 €	B7	=PRINCPER(B1;B2;B3;B4;0)	
8	Calcul direct	- 1 981,95 €	B8	=PRINCPER(0,1;3;5;10000;0)	
9	Cumul intérêts versés à la fin des périodes t1 = 2 à t2 = 3	- 1 492,23 €	B9	=CUMUL.INTER(0,1;5;10000;E1;E2;0)	
10	Calcul direct	- 1 492,23 €	B10	=CUMUL.INTER(0,1;5;10000;2;3;0)	
11	Cumul capital remboursé à la fin des périodes t1 = 2 à t2 = 3	- 3 783,72 €	B11	=CUMUL.PRINCPER(B1;B3;B4;E1;E2;0)	
12	Calcul direct	- 3 783,72 €	B12	=YPM(0,1;15;100000)	

Table des matières

Index thématique

II-4.3.2 Cas de versements a_D réalisés en début de période

II-4.3.2.1 Calcul des versements constants périodiques a_D (en fonction de n , i et x_0)

Si le versement est effectué au **début** de chacune des n périodes, en contrepartie d'une libre disposition à la date $t = 0$ d'une somme x_0 , on a, d'après la **relation 504**

(page 1172): $x_0 = a_D(1+i)\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$; d'où l'on tire a_D :

$$a_D = x_0 \frac{i}{(1+i)[1-(1+i)^{-n}]} \quad \text{relation 510}$$

(n versements a_D en **début** de période équivalents à une somme initiale x_0 au **début** de la première période)

Utilisation d'une calculatrice financière ou d'un tableur: Calculer la mensualité de remboursement payable en **début** de période d'un prêt de 100000 sur 15 ans, pour un taux d'intérêt nominal de 10% / an. L'application de la **relation 510**, pour $i = 0,1 / 12$ donne 1065,72 (valeur qui est égale à $1074,61 / \{1+0,1 / 12\}$, comme on pouvait s'y attendre avec la **relation**

2. Note de la page précédente. La syntaxe de cette fonction étant CUMUL.INTER(i, n, x_0, t_1, t_2, k), avec $k = 0$ pour un versement de fin de période; la syntaxe de la fonction CUMUL.PRINCPER est identique.

1. Certaines fonctions d'Excel ne sont pas disponibles par défaut. Pour disposer de l'ensemble des fonctions, il convient de cocher l'option «utilitaires d'analyse» de l'option «macros complémentaires» du menu «outils».

500, page 1166). Les calculettes financières fournissent directement cette valeur, après avoir vérifié que l'on est bien en mode **début** de période (option BEGIN) et que $P/Y (=C/Y) = 12$, il suffit de saisir $i = 10\%$ (touche **i**), $n = 180$ (touche **N**), $x_0 = 100000$ (touche **PV**), puis de taper sur la touche **PMT** (sur certaines machines, cette frappe doit être précédée de celle de la touche **CPT**), pour obtenir $a_D = -1065,72$ (valeur négative, puis qu'il s'agit d'un décaissement, la valeur saisie pour x_0 étant positive). Examinons comment calculer ce versement périodique de début de période avec le tableur Excel, en supposant que les données du problème aient été préalablement saisies dans la feuille de calcul, dans les cellules A1 à B4 (la cellule B3 étant vide). Il suffit alors de taper «=VPM(B1;B2;B4;0;1)», dans la cellule B3, pour obtenir le résultat voulu. On aurait obtenu le résultat souhaité en définissant n'importe quelle cellule comme étant «=VPM



	A	B	C	D	E
1	$i = 0,1/12 =$	$0,8333\%$			
2	$n = 15*12 =$	180			
3	$a_D =$	$-1\ 065,72\ €$			
4	$x_0 =$	$100\ 000,00\ €$			
5					

FORMULES UTILISÉES	
B3	=VPM(B1;B2;B4;0;1)
B6	=VPM(0,1/12;15*12;100000;0;1)

(0,1 / 12; 15*12; 100000; 0; 1)». On notera que le dernier argument spécifie si les versements sont effectués en fin (0) ou en début (1) de période et que l'avant dernier argument est utilisé pour saisir, si nécessaire, un flux quelconque (positif ou négatif) à la fin de la dernière période (qui comporte donc un versement en début de période et un versement en fin de période).

II-4.3.2.2 Calcul du capital restant dû après un versement (début de période) ainsi que du cumul des intérêts ou du capital remboursé au cours de versements successifs

Le calcul du capital résiduel restant dû, lorsque l'on se situe dans le cadre de versements de **début** de période est simple à établir. En effet, au moment même où l'on perçoit la somme x_0 , il faut reverser la somme a_D . Il s'ensuit que l'on est en présence d'un échange entre une somme ponctuelle de $x_0 - a_D$, disponible à la date $t = 0$, contre un échéancier constant de $n - 1$ versements a_D de **fin** de période. On en déduit la **relation 511** qui est le pendant, pour les échéanciers de **début** de période, de la **relation 506 de la page 1174**, établie pour les échéanciers de **fin** de période.

$$c_t = x_0 \frac{(1+i)^n - (1+i)^t}{(1+i)[(1+i)^n - 1]}, \text{ pour } t > 0 \quad \text{relation 511}$$

(c_t = capital restant à rembourser en **début** de période t (après le versement de **début** de période) dans le cas de n versements constants périodiques en **début** de période)

En adaptant le raisonnement suivi en **page 1176**¹, il est facile de calculer les intérêts versés au titre des périodes t_1 à t_2 (**relation 512**) :

$$x_0 \frac{i(t_2 - t_1 + 1)(1+i)^n + (1+i)^{t_1-1} - (1+i)^{t_2}}{(1+i)[(1+i)^n - 1]} \quad \text{relation 512}$$

(intérêts versés au titre des périodes t_1 à t_2 , pour² $1 < t_1 < t_2$, dans le cas de n versements périodiques de **début** de période)

II-5 Recherche du TRI (ou du taux actuariel) d'une opération

II-5.1 Principe

Il existe toujours un taux d'intérêt assurant l'équivalence entre une somme disponible à une date donnée et un échéancier, ou entre deux échéanciers quelconques, l'un d'investissement et l'autre de marges brutes, par exemple.

Utilisation d'une calculette financière ou d'un tableur : Si l'on reprend l'exemple du § II-4.1, page 1168, d'un échange en un versement initial de $-21061,82$ contre 5 versements périodiques (de fin de période) de $+5000$. Il existe un seul taux permettant ce troc au cours du temps. Avec une calculette financière, après avoir vérifié que l'on est bien en mode « fin de période » (option END) et que $P/Y (=C/Y) = 1$, il faut taper le décaissement initial ($-21061,82$; touche **PV**), puis le nombre de versements (5, touche **N**), puis le versement périodique constant (5000; touche **PMT**) et l'on obtient le taux effectif de l'opération (6%) en tapant sur la touche **i** (sur certaines machines, cette frappe devant être précédée de celle de la touche **CPI**). *Examinons comment calculer cette valeur capitalisée avec le tableur Excel, en supposant que les données du problème aient été préalablement saisies dans la feuille de calcul, dans les cellules A1 à B4 (la cellule B1 étant vide). Il suffit alors de taper «=TAUX(B2;B3;B4;0;0)» (ou d'utiliser les facilités offertes en insertion de fonction financière), dans la cellule B1, pour obtenir le résultat voulu. On aurait obtenu le résultat souhaité en définissant n'importe quelle cellule comme étant «=TAUX(5;5000;-21061,82;0;0)».*



	A	B	C	D	E
1	i =	6,00%			
2	n =	5			
3	aF =	5 000,00 €			
4	x0 =	-21 061,82 €			
5					

FORMULES UTILISÉES	
B3	=TAUX(B2;B3;B4;0;0)
B6	=TAUX(5;5000;-21061,82;0;0)

Table des matières

Index thématique

Les échéanciers traités peuvent être inégaux. En finance, un cas de figure très fréquent est celui du taux de rendement d'un emprunt pour l'investisseur qui souscrit à un emprunt de x_0 donnant lieu à un versement annuel d'intérêts (coupons) de $j \times x_0$ et remboursé x_n au bout de n années (x_n est supérieur à x_0 , une prime d'émission étant à déduire du prix nominal à l'achat et une prime de remboursement étant à ajouter à ce prix nominal lors du remboursement¹).

$$1. (t_2 - t_1 + 1) \left[x_0 \frac{i}{(1+i)[1-(1+i)^{-n}]} \right] - x_0 \frac{(1+i)^{t_2} - (1+i)^{t_1-1}}{(1+i)[(1+i)^n - 1]} = (t_2 - t_1 + 1) \left[x_0 \frac{i(1+i)^n}{(1+i)[(1+i)^n - 1]} \right] + x_0 \frac{(1+i)^{t_1-1} - (1+i)^{t_2}}{(1+i)[(1+i)^n - 1]}. \text{ Comme}$$

dans le cas des versements de fin de période, l'application des formules 511 à 512 repose implicitement sur l'hypothèse d'un versement périodique correspondant exactement à celui défini par la relation 510 de la page 1177. Le nombre de chiffres après la virgule retenu dans les contrats – et donc dans les échéanciers de remboursements – s'aligne sur les possibilités offertes légalement de fractionnement maximal de l'unité monétaire utilisée dans le pays (en France, c'est le centime). Il s'ensuit que les résultats peuvent différer légèrement de ceux fournis par l'utilisation de ces formules. Certaines calculettes financières s'appuyant sur ces contraintes, fournissent des résultats de capital restant dû et de cumul de paiements d'intérêt ou de remboursements de capital entre deux périodes qui sont cohérents avec le nombre de chiffres après la virgule retenu par l'utilisateur. Dès lors, le capital restant dû ne sera pas nécessairement le même en fonction du format d'affichage retenu par la calculette.

2. Le premier versement (en $t_1 = 1$) étant concomitant au prêt, il correspond à un remboursement de capital. Il s'ensuit que si $t_1 = t_2 = 1$, le montant des intérêts versé est nul et que si $t_1 = 1$ et $t_2 > 1$, le montant des intérêts versés est égal à celui versé au titre des périodes 2 à t_2 .

Ce taux d'intérêt correspond au Taux de Rentabilité Interne (**TRI**) ou au taux actuariel d'une opération financière (*soit* emprunt contre remboursements, *soit* versements contre valeur capitalisée) ou d'une opération d'investissement. Lorsque l'échéancier n'est pas constant, les calculs sont plus complexes. C'est ainsi que, si l'on prend le cas d'un emprunt x_0 remboursable en 5 annuités x_t et si l'on remplace $(1+i)^{-1}$ par y , le TRI de l'emprunt est tel que l'on a :

$$x_0 - x_1 y^1 - x_2 y^2 - x_3 y^3 - x_4 y^4 - x_5 y^5 = 0$$

qui est une équation polynomiale de degré 5 dont la résolution est passablement compliquée dans le cas général. Aussi procède-t-on en général par itération¹ pour chercher la valeur de y qui satisfait cette équation, qui normalement n'a qu'une racine réelle²; dans le cas contraire, on dit qu'il y a taux de rentabilité multiple (mais ces cas sont suffisamment peu fréquents pour pouvoir les ignorer ici).

Les calelles financières permettent maintenant de traiter sans problème des échéanciers comportant jusqu'à une dizaine ou une vingtaine de flux constants différents (par exemple 5 versements de 1000, puis 15 versements de 3000, puis 10 versements de 1500, puis...). Un exemple d'utilisation de la fonction d'Excel à utiliser pour ce calcul a été présenté en [page 1156](#).

II-5.2 Le Taux effectif global (TEG) d'un emprunt

La comparaison du coût d'emprunts est « brouillée » par des coûts de dossier et d'assurance. Pour faciliter la comparaison, le Ministère des finances a rendu obligatoire la mention du **taux effectif global** de l'emprunt qui est défini par le décret 2002-927 du 10 juin 2002 qui s'aligne sur la directive 98/7/CE du 16 février 1998³. Il s'agit d'un taux annuel équivalent au taux périodique calculé en tenant compte de l'emprunt, des remboursements et de tous les frais divers et charges. Pour un particulier, les frais divers liés à l'emprunt sont principalement les frais de dossier et d'assurance. Du point de vue strict des mathématiques financières, le problème à résoudre est simple, l'ensemble des données étant fixées par un contrat (§ II-5.2.1.). Nous verrons ensuite (§ II-5.2.2, [page 1181](#)) que la comparaison d'offre ne fait pas seulement jouer une comparaison de TEG.

II-5.2.1 Le calcul du TEG

Une fois déterminé l'échéancier, le calcul du TEG n'est rien d'autre qu'un calcul de taux annuel équivalent au taux périodique qui assure l'échange entre les

1. *Note de la page précédente*. Exemple nominal = 1000 €, coupon = 100 € (taux fixe de 10%), prix d'acquisition 980 €, remboursement de l'emprunt 1020 €. L'échéancier est donc $x_0 = -980$, $x_1 = x_2 = \dots = x_9 = +100$, $x_{10} = +100 + 1020 = +1120$ €. Le taux de rendement de cette opération est de 10,455 %.

1. Il existe plusieurs algorithmes permettant d'atteindre le résultat souhaité, avec une précision désirée des résultats en un nombre limité d'itérations (sauf si l'on se trouve dans le cas de racines multiples).

2. S'il n'y a pas plus d'un changement de signe entre deux monômes consécutifs du polynôme.

3. Voir <http://www.legifrance.gouv.fr/WAspad/UnTexteDeJorf?numjo=ECOT0214223D#>. Le décret 85-944 du 4 octobre 1985, en vigueur jusque qu'en 2002 définissait le TEG comme « un taux annuel proportionnel au taux de période, à terme échu et exprimé pour cent unités monétaires... le taux de période est calculé actuariellement, à partir d'une période unitaire correspondant à la périodicité des versements effectués par l'emprunteur. Il assure, selon la méthode des intérêts composés, l'égalité entre, d'une part, les sommes prêtées et, d'autre part, tous les versements dus au titre de ce prêt, en capital, intérêts et frais divers, ces derniers étant, le cas échéant, estimés ». Le changement porte donc sur le passage du taux périodique au taux annuel qui utilise la [relation 491 de la page 1160](#), à la place de la [relation 490](#).

sommes versées et perçues suivant la logique des intérêts composés. Appuyons-nous sur un exemple, pour illustrer la démarche.

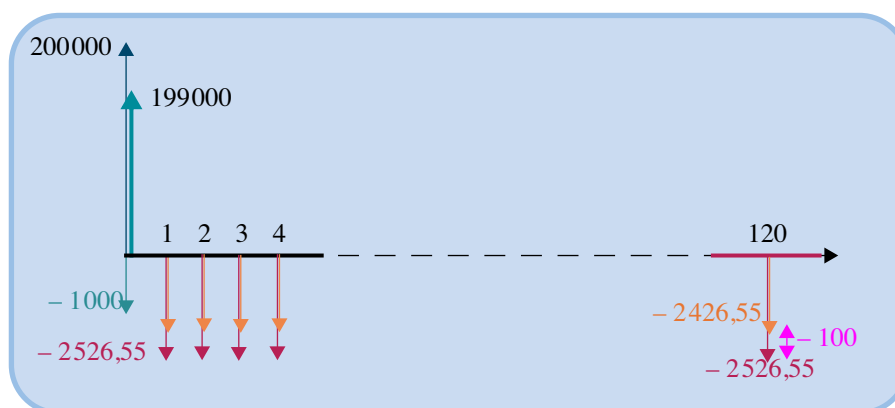
Supposons qu'un particulier emprunte 200000 € à sa banque, contre 120 mensualités constantes, la première étant due un mois après la réception de la somme empruntée, l'emprunt étant contracté au taux nominal de 8%. Le versement mensuel constant (intérêts + principal) est égal à -2426,55 €, comme vous pouvez le vérifier. Supposons maintenant que l'emprunteur a l'obligation de contracter une assurance-vie calculée sur la base de 5 € par tranche de 10000 € empruntée (assurance d'un montant constant à ajouter au versement périodique); il devra donc décaisser, chaque mois, 100 € de plus. On est alors en présence d'un flux mensuel égal à $-2426,55 - 100 = -2526,55$ €. Supposons en outre que l'octroi de ce prêt ait été conditionné à l'acceptation préalable de frais de dossier d'un montant de 1000 €, payables à mise à disposition des fonds. À cette date, le particulier recevra donc un solde de +199000 €. Comme vous pouvez le vérifier, le taux actuariel mensuel qui assure l'équivalence entre un virement ponctuel de +199000 € et 120 virements mensuels (fin de période) de -2526,55 € est 0,75441 %; le taux annuel équivalent (qui est le TEG) s'élève alors à $(1+0,0075441)^{12} = 9,4382\%$.

FIGURE 288

Détermination graphique de l'échéancier de calcul du TEG

Table des matières

Index thématique



Dans l'exemple retenu, l'assurance est calculée sur la base du capital initialement emprunté. Elle est parfois calculée sur la base du capital restant dû, le versement périodique avec assurance restant constant. Ceci revient à majorer le taux périodique du taux d'assurance et conduit à une prime d'assurance décroissante au cours du temps. Si l'on reprend l'exemple précédent en considérant que l'assurance mensuelle est égale à 0,05 % du capital restant dû, le taux périodique à appliquer est $0,08/12 + 0,0005 = 0,71667\%$; le versement mensuel s'élève alors à -2490,42 € et le TEG, à 9,0734 %. Cette diminution du TEG est facilement explicable: l'assurance ne s'élève à 100 € que pour le premier versement et diminue régulièrement ensuite. La feuille de calcul de ce problème est donnée ci-après.

II-5.2.2 La comparaison des offres de prêt

La comparaison d'offres de crédit ne doit pas s'effectuer uniquement sur la base du seul TEG. Deux éléments complémentaires doivent être pris en compte.

	A	B	C	D	E	F
1	Frais de dossier	1 000,00 €	1 000,00 €			
2	Somme à emprunter	200 000,00 €	200 000,00 €			
3	Taux nominal	8,00%	8,00%			
4	Nombre de remboursements par an	12	12	B8	FORMULES UTILISÉES =YPM(B3/B4+B7;B5;B2)-B2*B6	
5	Durée du remboursement (nombre de remboursements)	120	120	B9	=TAUX.EFFECTIF(TAUX(B5;B8;B2-B1)*B4;B4)	
6	Assurance 1 : % à appliquer au capital initialement emprunté	0,05%	0,00%	B10	=TAUX.EFFECTIF(TAUX(120;YPM(0,08/12;120;200000))-100;199000)*12;12)	
7	Assurance 2 : % à appliquer au capital résiduel	0,00%	0,05%	C9	=TAUX.EFFECTIF(TAUX(C5;C8;C2-C1)*C4;C4)	
8	Versement périodique avec assurance	-2 526,55 €	-2 490,42 €	C10	=TAUX.EFFECTIF(TAUX(120;YPM(0,08/12+0,0005;120;200000);199000)*12;12)	
9	TEG	9,4382%	9,0734%			
10	CALCUL DIRECT	9,4382%	9,0734%			

Usage des fonctions financières

Prêt

Table des matières

Index thématique



- Tout d'abord, il est évident que la capacité de remboursement vient restreindre l'ensemble des solutions admissibles: on peut raisonnablement préférer une offre dont la durée de remboursement et le TEG sont plus élevés que ceux d'une autre offre si cette dernière a une incidence inacceptable sur la trésorerie.
- Un second élément doit être pris en compte. Très souvent, un emprunt est contracté pour financer *partiellement* une dépense (par exemple, 500000€), sachant que *la partie autofinancée est prédéterminée* (par exemple, 200000€) et ne dépend pas des offres bancaires. Il s'ensuit qu'en pratique, tout se passe comme si l'emprunteur devait intégrer les frais de dossier (par exemple, 1000 €) dans la somme à emprunter (ce qui donne ici 301000 €). Refuser de considérer ainsi le problème posé n'est possible qu'à condition de modifier l'hypothèse relative à l'autofinancement (qui devrait passer à 201000 €, si l'on n'emprunte que 300000 €). Il doit être clair qu'une fois fixé le montant à emprunter, le contrat sera passé avec la banque sur cette base et le contractant disposera de 301000 + 200000 - 1000 = 500000€. Il doit être clair que cette intégration des frais de dossier au montant emprunté n'a de sens que vu du côté du contractant devant compléter le financement d'un projet. Du point de vue de la banque, ces frais de dossier correspondent à une rétribution de prestations qui est indépendante du montant emprunté.

On peut ajouter que deux emprunts permettant d'obtenir une même somme nette de frais de dossier (600000 €, par exemple) et faisant l'objet d'un remboursement constant sur le même calendrier (120 mensualités, par exemple) ont nécessairement le même classement avec les TEG ou les versements périodiques; ceci n'est plus forcément vrai si les comparaisons sont effectuées sur la base d'un autofinancement variable (la variation correspondant aux frais de dossier).

Exemple : Pour une capacité d'autofinancement de 400 000,00 € et une dépense à financer de 1 million deux banques sont consultées, pour un remboursement en 120 mensualités. La banque A propose un taux nominal de 8%, une assurance mensuelle de 0,05% du capital initialement emprunté et des frais de dossier de 8000,00 € ; on doit alors emprunter 608000,00 €, ce qui conduit à un versement périodique (assurance comprise) de 7680,72 € et un TEG est de 9,6483%. La banque B propose un taux nominal annuel de 8,25%, une assurance mensuelle de 0,06% du capital restant dû (ce qui doit être intégré au taux nominal annuel après multiplication préalable par 12, pour pouvoir retrouver un taux nominal mensuel augmenté de cette majoration de 0,06%) et demande 2000,00 € comme frais de dossier: dans ce cas, on emprunte 602000,00 €, le versement périodique est de 7616,11 € et le TEG, de 9,4327%. Il faut donc retenir la banque B. La feuille de calcul de ce problème est la suivante.



Table des matières

Index thématique

	A	B	C	E	F
3	Frais de dossier	8 000,00 €	2 000,00 €		
4	Somme à emprunter	608 000,00 €	602 000,00 €		
5	Taux nominal	8,00%	8,25%		
6	Nombre de remboursements par an	12	12	FORMULES UTILISÉES B10 =VPM(B3/B4+B7; B5;B2)-B2*B6 B11 =TAUX.EFFECTIF(TAUX(B7;B10;B4-B3)*B6;B6) C10 =VPM(C5/C6+C9;C7;C4)-C4*C8 C11 =TAUX.EFFECTIF(TAUX(C7;C10;C4-C3)*C6;C6)	
7	Durée du remboursement (nombre de remboursements)	120	120		
8	Assurance 1 : % à appliquer au capital initialement emprunté	0,05%	0,00%		
9	Assurance 2 : % à appliquer au capital résiduel	0,00%	0,06%		
10	Versement périodique avec assurance	-7 680,72 F	-7 616,11 F		
11	TEG	9,6483%	9,4327%		

II-6 Choix d'une date différente de celle de début ou de fin de période

On a évoqué, avec l'exemple du § II-1, page 1157, l'impact du choix d'une date conventionnelle de fin ou de début de période sur les calculs, et plus particulièrement sur le taux moyen de rentabilité. Ce problème se pose en particulier dans

l'analyse des projets d'investissement, où l'on ramène classiquement certains flux engendrés au cours d'une période, à une somme ponctuelle.

Les différentes formules obtenues montrent que pour passer des formules d'actualisation ou de capitalisation concernant des échéanciers de **fin** de période, à celles concernant les échéanciers de **début** de période, il convenait de multiplier par $(1 + i)$ les formules de **fin** de période pour obtenir celles de **début** de période (voir en particulier la **relation 500 de la page 1166**). Une généralisation de ce raisonnement peut immédiatement être faite pour toute date conventionnelle de transaction en cours d'année, comprises entre 0 et 1 (l'unité étant l'année).

Prenons le cas, par exemple, d'un échéancier de n versements constants pour lequel on décide de retenir comme date «ponctuelle» conventionnelle pour les flux de trésorerie secrétés au cours de la période t , c'est-à-dire celle qui s'étend de $t - 1$ à t , la date $t - d$, avec $0 < d < 1$. On peut écrire :

- pour une actualisation:
$$\sum_{t=1}^n (1+i)^{-(t-d)} = (1+i)^d \sum_{t=1}^n (1+i)^{-t}$$
- et pour une capitalisation:
$$\sum_{t=0}^{n-1} (1+i)^{(t+d)} = (1+i)^d \sum_{t=0}^{n-1} (1+i)^t$$

Il convient donc, si d est l'*avance* par rapport à t , de multiplier les formules de **fin** de période par $(1 + i)^d$ pour obtenir les formules correspondant à ces dates décalées. Il s'ensuit que la modification des dates conventionnelles ne fait que multiplier par une constante les résultats actualisés (ou capitalisés). L'importance respective des flux nets de trésorerie actualisés de différents projets examinés reste donc la même quelle que soit la date de référence choisie (**début** de période, **fin** de période ou cours de période). Ceci explique que des gestionnaires n'aient guère de scrupule à raisonner le plus souvent en **fin** de période dans l'analyse des projets d'investissement, ce qu'ils peuvent faire sans problème à condition d'être homogènes sur tous les projets étudiés, et qu'en outre le rythme de sécrétion des flux de trésorerie soit à peu près le même au cours d'une période, pour tous les projets. Il n'en est plus de même lorsque les comparaisons portent sur les taux de rentabilité interne.

Exemple: Reprenons l'exemple du § II-4.1, page 1168, et supposons que l'on convienne que les FNT sont ponctuellement secrétés au 31 mai (d'où: $d = 1 - 5 / 12 = 7 / 12$), la valeur actualisée de l'échéancier est alors: $21061,82 \times 1,06^{7/12} = 21061,82 \times 1,034 57 = 21790,02$.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] **ACGPS** (Association Canadienne pour la gestion de la production et des stocks), *Dictionnaire de la Gestion de la Production et des Stocks*, Presses HEC, 1993.
- [2] **AFITEP - ANACT**, *Ingénierie concourante : de la technique au social*, sous la direction de P. **Bossard**, C. **Chanchevri**, P. **Leclair**, Economica, 1997.
- [3] **AFITEP-Commission Estimation**, *Estimation des coûts d'un projet industriel*, Afnor-Gestion, 1995.
- [4] **-AFNOR**, *Management de projets- recueil de normes*, 2e édition, 1998.
- [5] **AFNOR**, *Norme X 50-115, Management de projet - présentation générale*, parution prévue début 2003.
- [6] **AFNOR**, *Qualité et systèmes de management ISO 9000* (recueil des normes), AFNOR, 2001.
- [7] **AFNOR**, *Norme NF X 50-600 Logistique : terminologie*, janvier 1999.
- [8] **AFNOR**, *Fascicule documentaire FD X 50-602 Logistique : Fonctions logistiques*, octobre 1997
- [9] **AFNOR**, *Fascicule documentaire FD X50-604 Logistique - Processus logistique*, 2002.
- [10] Y. **Akao**, *QFD - Prendre en compte les besoins du client dans la conception du produit*, AFNOR gestion, 1993, traduction de [11].
- [11] Y. **Akao**, *Practical Applications of Quality Deployment in New Product Development*, Japan Standards Association, Tokyo, 1988.
- [12] M. **Albouy**, *Décisions financières et création de valeur*, Economica, 2000.
- [13] C. **Alcouffe**, *Gestion des stocks, méthodes et applications*, Eyrolles, 1987.
- [14] S. **Allab**, N. **Swyngedauw**, D. **Talandier**, *La logistique et les nouvelles technologies de l'information et de la communication*, Economica, 2000.
- [15] O. D. **Anderson**, *Time series analysis and forecasting, the Box-Jenkins approach*, Butter Worths, Londres, 1976.
- [16] D. M. **Anderson**, J. **Pine II**, *Agile Product Development for Mass Customization: How to Develop and Deliver Products for Mass Customization*,

- Niche Markets, JIT, Build-to-Order and Flexible Manufacturing*, McGraw-Hill, 1997.
- [17] S. L. **Ansari** (Editor), *Target Costing: The Next Frontier in Strategic Cost Management*, Irwin, 1996.
- [18] R. N. **Anthony**, *Planning and Control Systems: a framework for analysis*, Harvard University Press, 1965.
- [19] A. L. **Arcus**, «COMSOAL: A computer method of sequencing operations for assembly lines», *International Journal of production research*, volume IV, n° 4, 1966.
- [20] C. **Argyris**, D. **Schon**, *Organizational Learning*, Addison Wesley, 1978.
- [21] G. C. **Armour**, E. S. **Buffa**, «A heuristic Algorithm and Simulation Approach to the relative location of facilities», *Management Sciences*, volume IX, n° 2, p. 294-309, janvier 1963.
- [22] **ASLOG**, *Le référentiel logistique de l'AFNOR - évaluation de l'aptitude à la performance logistique*, ASLOG, Paris, 2002
- [23] **ASLOG**, *Le référentiel logistique de l'ASLOG*, 2001.
- [24] G. **Augustin**, *La comptabilité et la révolution informatique*, Masson, 1986.
- [25] J.-M. **Aurifeille**, J. **Colin**, N. **Fabbe-Costes**, C. **Jaffeux**, G. **Paché**, *Management logistique - une approche transversale*, Dunod, 1997.
- [26] M. **Ayache**, A. **Flory**, *Approche Orientée Objet*, Economica, collection PIQ, 1996.
- [27] U. **Bagchi**, J. **Haya**, J. **Ord**, «Modeling demand during lead time», *Decision Sciences*, volume XV, p. 157-176, 1984.
- [28] G. **Baglin**, O. **Bruel**, A. **Garreau**, *Management industriel et logistique*, 3è édition, Economica, 2001.
- [29] G. **Baglin**, A. **Garreau**, M. **Greif**, L. **Maeder**, *Gestion informatique de la production et des stocks*, ouvrage à feuillets mobiles publié par les éditions Weka, Paris.
- [30] K. R. **Baker**, *Introduction to Sequencing and Scheduling*, Wiley, 1974.
- [31] C. Y. **Baldwin**, K. B. **Clark**, «Managing in an age of modularity», *Harvard Business Review*, septembre - octobre 1997, p. 84-93.
- [32] C. Y. **Baldwin**, K. B. **Clark**, *Design Rules: The Power of Modularity*, MIT Press, 2000.
- [33] R. H. **Ballou**, *Business Logistics Management*, Prentice-Hall, 4e édition, 1999.
- [34] S. **Balman**, J. **Noel**, «Noncontrollable Costs and Responsibility Accounting», *Journal of Accounting Research*, volume XXIII, n° 2, p. 486-501, automne 1985.
- [35] J. **Banks** (éditeur), *Handbook of simulation - Principles, Methodology, Advances, and Practice*, Wiley & EMP, 1998.

- [36] P. Baranger, G. Hugel, *Gestion de la production*, Vuibert, 1983.
- [37] P. Baranger, J. Chen, «Juste-à-temps», *Encyclopédie de gestion*, 2^e édition, Economica, 1997.
- [38] J. Bard, E. Dar-El, A. Shtub, «An analytic framework for sequencing mixed model assembly lines», *International Journal of Production Research*, volume XXX, 1992.
- [39] M.J. Bauer, C.C. Poirier, Computer Sciences Corporation, L. Lapide, J. Bermudez, AMR Research, *eBusiness: the strategic Impact on Supply Chain and Logistics*, Council of Logistics Management ed., Oak Brook, Illinois, USA, 2001
- [40] J. Bautista, R. Companys, A. Corominas, «Heuristics and exact algorithms for solving the Monden Problem», *European Journal of Production Research*, n° 88, p. 101-113, 1996.
- [41] C. S. Beightler, D.T. Phillips & D.J. Wilde, *Foundations of optimisation*, Prentice-Hall, 2e édition, 1979.
- [42] C. E. Bell, «Maintaining project networks in automated artificial intelligence planning», in *Management Science*, volume 35, n° 10, p. 1192-1214, octobre 1989.
- [43] C. E. Bell, K. Park, «Solving resource-constrained project scheduling problem», *Naval Research Logistics*, volume 37, p. 61-84, 1990.
- [44] G. Benchimol, *L'entreprise étendue*, Hermes, 1993.
- [45] M. Benoun, M.-L. Héliès-Hassid, *Distribution - Acteurs et Stratégies*, Economica, 2e édition, 1995.
- [46] A. Bensoussan, *La facture électronique EDI*, Hermes, 1992.
- [47] C. Berliner, J. Brimson, *CAM-I, Cost management for todays: advanced manufacturing conceptual design*, Harvard Business School Press, 1988.
- [48] M. Berry, *Une technologie invisible ? - L'impact des instruments de gestion sur l'évolution des systèmes humains*, CRG, juin 1983.
- [49] F. Berthélemy, *Le soutien logistique intégré ou la maîtrise du cycle de vie du système dès sa conception*, communication à la 8e convention nationale de l'AFITEP (actes, p. 301-313), Paris, 1992.
- [50] A. Berztiss, *Software Methods for Business Reengineering*, Springer, 1996.
- [51] Bierman, Smidt, *La préparation des décisions financières dans l'entreprise*, Dunod, 1972.
- [52] Billington, Mc Clain, Thomas, «Capacity-constrained MRP systems», *Management Science*, n° 10, p. 1126-1141, octobre 1983.
- [53] G. R. Bitran, A. C. Hax, «On the design of of Hierarchical Planning Production System», *Decision Science*, volume VIII, n° 1, janvier 1977.
- [54] J. H. Blackstone, D.T. Philips, G.L. Hogg, «A state of the art survey of dispatching rules for manufacturing job shop operations», *International Journal of Production Research*, volume XX, p. 27-45, 1982.

- [55] F. **Boctor**, «Heuristics for scheduling projects with resource restrictions and several resource-duration modes», *International Journal of Production Research*, volume 31, n° 11, p. 2547-2558, 1993.
- [56] F. **Boctor**, «Resource-constrained project scheduling by simulated annealing», *International Journal of Production Research*, volume 34, n° 8, p. 2335-2351, 1996.
- [57] F. **Boctor**, «A new and efficient heuristic for scheduling projects with resource restrictions and multiple execution modes», *European Journal of Operational Research*, n° 90, p. 349-361, 1996.
- [58] P. **Boisselier**, *Contrôle de gestion - cours et application*, 2e édition, Vuibert, 2001.
- [59] M. **Boiteux**, *Cours d'économie politique*, cours polycopié de l'Ecole Nationale des Ponts et Chaussées de Paris, 1964.
- [60] G. **Bonnafous**, *Le Technocentre Renault*, Hazan, 1998.
- [61] P. **Bonneau**, *Les mathématiques financières et leurs applications*, Dunod, 1976.
- [62] H. **Bouquin**, *Comptabilité de gestion*, 2e édition, Economica, 2003.
- [63] R. **Bourbonnais**, J-C. **Usunier**, *Prévision des ventes - Théorie et pratiques*, Economica, 3e édition, 2001.
- [64] P. **Bourdichon**, *Gestions simultanées du projet ou l'apport de la documentation*, communication à la 8e convention nationale de l'AFITEP (actes, p. 193-208), Paris, 1992.
- [65] G. E. P. **Box**, G. **Jenkins**, *Time series analysis, forecasting and control*, Holden-Day, San-Francisco, 1970 (édition révisée en 1976).
- [66] G. E. P. **Box**, G. **Jenkins**, G. C. **Reinsel**, *Time series analysis: forecasting and control*, Prentice-Hall, 1994.
- [67] J. A. **Brimson**, *Activity Accounting, An Activity-Based Costing Approach*, Wiley, New York, 1991.
- [68] A. **Brooke**, D. **Kendrick**, A. **Meeraus**, *GAMS: A User's Guide*, Scientific Press, Redwood City, CA, 1988.
- [69] R. G. **Brown**, *Statistical forecasting for inventory control*, McGraw-Hill, 1959.
- [70] R. G. **Brown**, *Smoothing forecasting and prediction*, Prentice-Hall, 1963.
- [71] R. G. **Brown**, «The new push for DRP», *Inventories & Production Magazine*, juillet-août 1981, p. 25-27.
- [72] E. S. **Buffa**, G. C. **Armour**, T. E. **Volmann**, «Allocating facilities with CRAFT», *Harvard Business Review*, volume XLII, n° 2, p. 136-159, 1964.
- [73] E. S. **Buffa** and W. H. **Taubert**, *Production-Inventory Systems: Planning and Control*, Irwin, 1972.
- [74] E. S. **Buffa** and J. G. **Miller**, *Production: Inventory Systems Planning and Control*, Irwin, 1979.

- [75] E. S. **Buffa**, *Modern Production Management: Operation Management*, 7e édition, Wiley, 1983.
- [76] A. **Burlaud**, C. **Simon**, *Coût/contrôle*, Vuibert, 1981.
- [77] A. **Burlaud**, C. **Simon**, *Le contrôle de gestion*, La Découverte, 1997.
- [78] A. **Burlaud**, C. **Simon**, *Comptabilité de gestion*, Vuibert, 2000.
- [79] F. **Burns**, J. **Rooker**, «Three-stage flow shops with recessive second stage», *Operations Research*, volume XXVI, n° 1, p. 207-208, janvier-février 1978.
- [80] D. **Burnstein** (éditeur), *The Digital MBA*, McGraw-Hill, 1955.
- [81] T. A. **Burton**, «The Gamma Distribution and Inventory Control», dans *Operation Research Quarterly*, volume XXVI, p. 507-525, 1975.
- [82] G. **Calot**, *Cours de statistique descriptive*, Dunod, 2e édition, 1973.
- [83] R. V. **Calvasina**, J. **Calvasina**, «Standard costing games that managers play», *Management Accounting*, mars 1984, p. 49-51.
- [84] H. G. **Campbell**, R. A. **Dudek**, M. L. **Smith**, «A heuristic Algorithm for the n job m machine sequencing problem», *Management Science*, volume XVI, n° 10, 1970.
- [85] J. **Carlier**, P. **Chrétienne**, *Problèmes d'ordonnancement: modélisation / complexité / algorithmes*, Masson, 1988.
- [86] B. **Caspar**, G. **Enselme**, *Comptabilité approfondie et révision*, 5e édition, Litec, 2002.
- [87] E. **Castelain**, M. **Delaval**, H. **Ohl**, J.-C. **Gentina**, J.-C. **Riat**, P.-A. **Yvars**, «Algorithmes de cadencement réactif des véhicules en entrée de ligne de montage automobile», *Revue d'automatique et de productique appliquées*, volume VIII, n° 5, p. 663-682.
- [88] **Chakravarty**, «Multi-stage production/inventory deterministic lot size computations», in *International Journal of Production Research*, volume XXII, n° 3, p. 405-420, mai-juin 1984.
- [89] A. D. **Chandler**, *The Visible Hand: the Managerial Revolution in American Business*, Harvard University Press, 1977.
- [90] G. **Charreaux**, *Gestion financière*, LITEC, 1986.
- [91] C. **Chatfield**, *The analysis of time-series: Theory and practice*, Chapman and Hall, Londres, 5e édition, 1996.
- [92] C. **Chatfield**, *Time-series forecasting*, Chapman and Hall, Londres, 2001.
- [93] P. **Chevalier**, *CALS et les systèmes d'information électroniques*, Hermes, 1993.
- [94] **Christofides**, «The Vehicle Routing Problem», *RAIRO, RO*, volume X, n° 2, février 1976, p. 55-70
- [95] J. M. **Clark**, *Studies in the Economics of overhead cost*, University of Chicago Press, 1923.

- [96] C. E. **Clark**, «The PERT Model for the distribution of an Activity Time», *Operations Research*, volume X, n° 3, p. 145-162, mai-juin 1962.
- [97] **Cliffe, Mac Mannus**, «An Approach to Optimization with Heuristic Methods of Scheduling», *International Journal of Production Research*, volume XVIII, n° 4, p. 479-490, juillet-août 1980.
- [98] **Cliffe**, «ERP implementation», *Harvard Business Review*, volume LXXVII, n° 1, p. 16 - 17, 1999.
- [99] G. **Cliquet**, A. **Fady**, G. **Basset**, *Management de la distribution*, Dunod, 2002.
- [100] P. **Cohendet**, P. **Lléréna**, *Flexibilité, information, décision*, Economica, 1989.
- [101] S. **Codling**, *Best Practice: Benchmarking, an international Perspective*, Gulf Publishing Company, 1992.
- [102] E. G. **Cofman** & al., *Computer and Job-shop Scheduling Theory*, John Wiley & sons, 1976.
- [103] J. **Colin**, G. **Paché**, *La logistique de distribution - L'avenir du marketing*, Chotard, 1988.
- [104] R. W. **Conway**, W. L. **Maxwell**, L. W. **Miller**, *Theory of Scheduling*, Addison-Wesley publishing Company, 1967.
- [105] D. F. **Cooper**, «Heuristics for scheduling resource-constrained projects: an experimental investigation», *Management Science*, volume XXII, n° 11, p. 1186-1194, juin 1976.
- [106] R. **Cooper**, *When Lean Enterprises Collide: Competing Through Confrontation*, Harvard Business School Press, 1995.
- [107] R. **Cooper**, R. **Slagmulder**, *Target Costing and Value Engineering*, Strategies in Confrontational Cost Management Series, Productivity Press, 1997.
- [108] M. **Cotsaftis**, F. **Vernadat** (éditeurs), *Advances in Factories of the Future, CIM and Robotics*, série Manufacturing Research and Technology, Elsevier, 1993.
- [109] J.-C. **Courbon**, S. **Tajan**, *Groupware et Intranet*, Dunod, 2e édition, 1999.
- [110] H. **Courtot**, *Une approche quantitative du risque : les enseignements d'une expérience*, communication à la 7^e convention de l'AFITEP (Paris, 1991).
- [111] H. **Courtot**, *La gestion des risques dans les projets*, Economica, 1998.
- [112] M. **Crouhy**, *La gestion informatique de la production industrielle*, Éditions de l'Usine Nouvelle, Paris, 1983.
- [113] **Crowder, Padberg** «Solving Large-scale Symmetric Travelling Salesman Problems to Optimality», *Management Science*, volume XXVI, n° 5, p. 495-509, mai 1980.
- [114] N. **Curien** et al., *Économie et management des entreprises de réseau*, Economica, 1992.

- [115] T. A. Curran, A. Ladd, *SAP R/3 Business Blueprint*, Prentice-Hall 2e édition, 2000.
- [116] CXP, www.cxp.fr, mise à jour permanente d'une base de fiches signalétiques des logiciels de gestion..
- [117] F. Danjou, V. Giard, E. Le Roy, «Analyse de la robustesse des ordonnancements/réordonnements sur ligne de production et d'assemblage dans l'industrie automobile», *Revue Française de Gestion Industrielle*, n° 1, 2000.
- [118] D. G. Dannenbring, «An Evaluation of Flow Shop Sequencing Heuristics», *Management Science*, volume XXII, n° 11, p. 1174-1182, 1977.
- [119] J.-J. Daudin, C. Tapiero, *Les outils et le contrôle de la qualité*, Economica, collection PIQ, 1996.
- [120] T. Davenport, *Process Innovation: Reengineering Work Through Information Technology*, Boston, Harvard Business School Press, 1993.
- [121] T. Davenport, «Putting the enterprise into the enterprise system», *Harvard Business Review*, volume LXXVI, n° 4, p. 121 - 131, 1998.
- [122] M. David, *Statistique des modèles de régression à erreurs liées: cas des estimateurs de Box et Jenkins*, Thèse de Doctorat de 3e cycle, Rennes, mai 1975.
- [123] R. David, *Du Grafcet aux réseaux de Petri*, Hermes, 1993.
- [124] E.W. Davis, G. E. Heidorn, «An algorithm for optimal project scheduling under multiple resource constraints», *Management Science*, volume XVII, n° 12, p. 803-816, 1971.
- [125] E. W. Davis, J. H. Patterson, «A comparison of heuristic and optimum solutions in resource-constrained project scheduling», *Management Science*, volume XXI, n° 8, p. 944-955, 1975.
- [126] E. W. Davis, «Project Scheduling under Resource Constraints: Historical Review and Categorization of Procedures», *AIIE Transaction*, volume V, n° 4, p. 297-313, 1973.
- [127] R. Declerck, J. P. Debourse, C. Navarre, *Méthode de direction générale: le management stratégique*, Hommes et Techniques, 1983.
- [128] A. Dell'Isola, *Value Engineering: Practical Applications*, R. S. Means, 1997.
- [129] W. E. Deming, *Quality, Productivity and Competitive Position*, MIT Press, 1982.
- [130] D. M. Dilts, G. W. Russel, «Accounting for the Factory of the Future», *Management Accounting*, avril 1985, p. 34-52.
- [131] DODI-7000.2, *Performance Measurement for Selected Acquisitions*, Department of Defense Instruction, 22 décembre 1967.

- [132] **DOD JIG**, *Cost / Schedule Control System Criteria - Joint Implementation Guide*, instruction conjointe des «Departments of the Air Force, the Army, the Navy, the Defense Logistic Agency, and the Defense Contract Audit Agency» du 1er octobre 1987.
- [133] P. **Dumas**, G. **Charbonnel**, *La méthode OSSAD*, Éditions d'organisation, 1990.
- [134] **ECOPSIP** (ouvrage collectif), *Gestion industrielle et mesure économique : approches et applications nouvelles*, Economica, 1990.
- [135] **ECOSIP** (ouvrage collectif, sous la direction de V. **Giard**, C. **Midler**), *Pilotages de projet et entreprises : diversité et convergences*, Economica, 1993.
- [136] *Encyclopédie de gestion* (ouvrage collectif, sous la direction de Y. **Simon** & P. **Joffre**), Economica, 2e édition, 1997.
- [137] *Encyclopédie de comptabilité, contrôle de gestion et Audit* (ouvrage collectif, sous la direction de B. **Colasse**), Economica, 2000.
- [138] *Encyclopédie du management* (ouvrage collectif), Vuibert, 1992.
- [139] G. **Enselme**, *Comptabilité financière - comptabilité de gestion*, 3e édition, Litec, 2002.
- [140] P. **Esquirol**, P. **Lopez**, *L'Ordonnancement*, Economica, 1999.
- [141] S. **Everette**, J. R. **Gardner**, «Automatic Monitoring of Forecast Errors», *Journal of Forecasting*, volume II, p. 1-21, 1983.
- [142] N. **Fabbe-Costes**, J. **Colin**, G. **Paché**, *Faire de la recherche en logistique et distribution*, Vuibert, 2000.
- [143] W. **Fabrycky**, B. **Blanchard**, *Life Cycle Cost and Economic Analysis*, Prentice-Hall, 1991.
- [144] N. R. **Farnum**, L. W. **Stanto**, «Some Results Concerning the Estimation of Beta Distribution Parameters in PERT», *Journal of Operational Research Society*, volume XXXVIII, n° 3, p. 287-290, 1987.
- [145] R. **Faure**, C. **Roucairol**, P. **Tolla**, *Chemin et flots, ordonnancement*, Gauthier Villars, 1976.
- [146] M. **Favier** (éditeur), F. **Coat**, J. **Trahand**, J.-C. **Courbon**, *Le travail en groupe à l'âge des réseaux*, Economica, 1998.
- [147] T. **Feare**, «GM runs in top gear with as/rs sequencing», *Modern Material Handling*, volume LIII, n° 9, p. 50-52, 1998.
- [148] M. **Filser**, *Canaux de distribution - description, analyse, gestion*, Vuibert, 1989.
- [149] J. **Finkelstein**, J. **Kramer**, B. **Nuseibeh** (eds), *Software Process Modelling and Technology*, Wiley, 1994.
- [150] G. S. **Fishman**, *Principles of discrete event simulation*, Wiley, 1978.
- [151] A. **Flory**, *Bases de Données*, 2e édition, Economica, 1987.

- [152] A. Flory, F. Laforest, *Les bases de données relationnelles*, Economica, collection PIQ, 1996.
- [153] A. Flory, V. Giard, «Modelling requirements of a manufacturing design application using an E/R schema», Congrès *Entity/Relationship*, New-York, Novembre 1987, publié dans *E/R approach* (S. March editor), Elsevier 1988.
- [154] J. W. Forrester, *Industrial dynamics*, MIT Press et Wiley, 1961.
- [155] R. Fould, «Technics for Facilities Layout», *Management Sciences*, volume XXIX, n° 12, p. 414-426, 1983.
- [156] T. Fouque, *Impact de la réduction de la diversité des produits sur les stocks*, Thèse de doctorat de gestion soutenue à l'Université Paris X, novembre 1997.
- [157] T. C. Fowler, *Value Analysis in Design*, Wiley, 1997.
- [158] Fox, Allen, Smith, Strohm, «ISIS: a constraint-directed reasoning approach to job shop scheduling; system summary», *Proceeding of IEE Conference on Trends an Application*, 1983.
- [159] R. L. Francis, J. A. White, *Facility Layout and Location: an Analytical Approach*, Prentice-Hall, 1974.
- [160] J. Freidenfelds, *Capacity Expansion: Analysis of Simple Models with applications*, North-Holland, 1981.
- [161] S. French, *Sequencing and Scheduling: an introduction to the Mathematics of the job-shop*, Ellis Horwood, 1982.
- [162] D.R. Fulkerson, «A network flow computation for project cost curve», *Management Science*, volume VII, n° 2, p. 167-178, 1961.
- [163] A.T. Fuller, *Introduction to statistical time series*, Wiley, 1976.
- [164] G. Garel., «L'entreprise sur un plateau: un exemple de gestion de projet concourante dans l'industrie automobile», *Gestion 2000*, n° 3, p. 111 - 134, 1996.
- [165] G. Garrel, V. Giard, C. Midler, «Management de projet et Gestion des Ressources humaine», *Cahier de recherche du GREGOR*, 2002.
- [166] F. Gautier, «Évaluation économique des activités de conception et de développement des produits nouveaux», *Cahier de recherche du GREGOR* 1997.12, IAE de Paris (<http://www.univ-paris1.fr/GREGOR/>), 1997.
- [167] F. Gautier, V. Giard, «Vers une meilleure maîtrise des coûts engagés sur le cycle de vie, lors de la conception de produits nouveaux», *Comptabilité, Contrôle, Audit*, tome VI, volume II, p. 43-75, 2000.
- [168] D. Garwood, *Bills of Material, Structured for Excellence*, Dogwood Publishing Company, 1997.
- [169] M. Gervais, *Contrôle de gestion*, 7e édition, Economica, 2000.
- [170] M. Gervais, *Stratégie de l'entreprise*, 5e édition, Economica, 2002.

- [171] M. Gesler (éditeur), *TIMS Studies in Management Sciences*, Vol I, Logisttic, North Holland / American Elsevier, 1975.
- [172] V. Giard, «Gestion de production: évaluation économique et prise de décision», *Revue Française de Gestion*, n° 67, p. 13-28, 1988.
- [173] V. Giard, *Gestion de projets*, Economica, 1991.
- [174] V. Giard, «Quelques problèmes méthodologiques actuels en gestion de projets», *Revue Française de Gestion Industrielle*, n° 2, p. 51-68, 1991.
- [175] V. Giard, «Une comptabilité de gestion en crise», in *Gestion industrielle et mesure économique: approches et applications nouvelles*, [134], 1990.
- [176] V. Giard, *Economic Evaluation of Schedules in Job Shops*, 6th International Conference on CAD/CAM, Robotics and Factories of the Future, Londres, 1991, actes du congrès.
- [177] V. Giard, «Vers une véritable gestion administrative assistée par ordinateur», *Congrès national des IAE de 1992 Annales du Management*, p. 1063-1081, Economica, 1992.
- [178] V. Giard, «Project definition: some methodological problems», 8th international Conference on CAD/CAM, Robotics and factories of the Future, 1992, publié dans *Advances in Factories of the Future, CIM and Robotics*, Elsevier, série «Manufacturing and Technology», volume XVI, p. 25 - 34, 1993.
- [179] V. Giard, «Les systèmes d'information de la production», *Ingénierie des systèmes d'information*, n° 3, p. 280-303, AFCET, 1993.
- [180] V. Giard, «Les bases d'une évaluation économique de l'ordonnancement en ateliers spécialisés», *Revue Française de Gestion industrielle*, n° 4, p. 73-93, 1993.
- [181] V. Giard, «Gestion de production et entreprises de réseau», *Le manager des entreprises de réseau*, n° 5, p. 2 - 6, 1994.
- [182] V. Giard, *Statistique appliquée à la gestion*, 7e édition, Economica, 1995.
- [183] V. Giard, «Structure et coordination des systèmes productifs», in [414].
- [184] V. Giard, *Processus productifs et programmation linéaire*, Economica, collection PIQ, 1997.
- [185] V. Giard, «De nouvelles formes d'organisation pour l'entreprise - gestion et management de projet», *Management et organisation des entreprises*, Cahiers Français n° 287, La documentation française, 1998.
- [186] V. Giard, «Economical analysis of product standardization», présenté à la seconde Conference *Management and Control of Production and Logistics* de l'IFAC/IFIP/IEEE, Grenoble, juillet 2000, repris dans *Management and Control of Production and Logistic*, sous la direction de Binder, Elsevier, 2001.
- [187] V. Giard, «Analyse économique de la standardisation des produits», *Congrès national des IAE*, septembre 2000, actes du congrès, version anglaise [186] publiée chez Elsevier.

- [188] V. Giard, «Besoins technologiques et réseaux», *Revue Française de Gestion*, n° 129, p. 5-20, 2000.
- [189] V. Giard, H. Courtot, A. Vergnenègre, *La prise en compte du risque dans la gestion des projets*, communication au congrès des IAE, Clermont-Ferrand, octobre 1991.
- [190] V. Giard, R. André, J. Le Guluche, «Organisation de la concentration du courrier: définition des tournées filaires et du niveau de ségrégation du courrier», *Système de décision*, volume IV, n° 3, p. 175-198, 1995.
- [191] V. Giard, V. Boitout, P. Bonmarchand, «Apport de la simulation à la conception et l'interprétation de tableaux de bord de back office bancaire (CCP) et à la comptabilité de Gestion», *Comptabilité, Contrôle, Audit*, vol 1, n° 2, p. 65-84, 1995.
- [192] V. Giard, F. Danjou, F. Boctor, «Analyse théorique des décyclages sur lignes de production», Papier de Recherche 1999.08 du GREGOR, IAE de Paris, adapté pour le *Journal Européen des Systèmes Automatisés (JESA)*, volume XXXV, n° 5, p. 623-645, 2001.
- [193] V. Giard, F. Danjou, F. Boctor, «Rank changes in production/assembly lines: impact and analysis», *Papier de Recherche 2000.11 du GREGOR*, IAE de Paris (<http://www.univ-paris1.fr/GREGOR/>).
- [194] V. Giard, F. Danjou, «Indicateur de performance et stocks de sécurité sur lignes de production perturbées», *Papier de Recherche 1999.14 du GREGOR*, IAE de Paris (<http://www.univ-paris1.fr/GREGOR/>).
- [195] V. Giard, C. Fray, «Le pilotage économique des projets», conférence invitée au congrès de l'Association Française de Comptabilité, Toulouse, mai 1993; repris dans *Revue internationale en gestion et management de projets*, n° 2, 1993.
- [196] V. Giard, P.-Y. Lagroue, «Quel contrôle pour le systèmes productifs travaillant à la commande et devant faire face à une demande fortement aléatoire», *Comptabilité Contrôle, Audit*, tome VII, volume II, p. 147-163, novembre 2001.
- [197] V. Giard, C. Midler, «Management et gestion de projet: bilan et perspectives», *Encyclopédie de gestion*, Economica, 1997, [136].
- [198] V. Giard, C. Pellegrin, «Fondements de l'évaluation économique dans les modèles économiques de gestion», *Revue Française de Gestion*, p. 18 - 31, mars-mai 1992.
- [199] V. Giard, C. Triomphe, *SIAD visant à définir les services offerts au personnel d'un centre de production et s'appuyant sur la programmation mathématique*, Cahier de recherche du GREGOR 1996.03 de l'IAE de Paris (<http://www.univ-paris1.fr/GREGOR/>).
- [200] V. Giard & C. Triomphe, «Investissement et flexibilité organisationnelle», *RAIRO*, volume XXIX, n° 3, p. 299-320, AFCET, Paris, 1995.
- [201] V. Giard, C. Triomphe, R. André, «Organist: un Système Interactif d'Aide à la Définition du niveau de traitement du courrier des bureaux de

- poste et des tournées d'acheminement à un centre de tri», *Cahier de recherche du GREGOR 1997.06* de l'IAE de Paris (<http://www.univ-paris1.fr/GREGOR/>).
- [202] V. Giard, C. Triomphe, A. Vergnenègre, *Définition d'un projet d'investissement : quelques réflexions et propositions*, papier de recherche G 90/4, URA 1257 – IAE de Lyon, 1990.
- [203] Giglio, Wagner, «Approximate solutions to the three-machines scheduling problem», *Operations Research*, volume XII, n° 2, 1964.
- [204] F. Giraud, O. Saulpic, G. Naulleau, M.-H. Delmond, P.-L. Bescos, *Contrôle de gestion et pilotage de la performance*, Montchrestien-Gualino, 2002.
- [205] S. L. Goldman, R. N. Nagel and K. Preiss, *Agile competitors and Virtual Organizations: Strategies for Enriching the Customer*, Van Nostrand Reinhold, 1995.
- [206] E.M. Goldratt, J. Cox, *The Goal*, North River Press, 1984.
- [207] E.M. Goldratt, J. Cox, *The Race*, North River Press, 1986.
- [208] C. Gouriéroux, A. Monfort, *Séries temporelles et modèles dynamiques*, Economica, 1990.
- [209] A. Gratacap, P. Médan, *Management de la production - Concepts méthodes - cas*, Dunod, 2001.
- [210] C. Guéret, C. Prins, M. Sevaux, *Programmation linéaire : 65 problèmes d'optimisation modélisés et résolus avec Visual Xpress*, Eyrolles, 2000.
- [211] Gupta, «A Review of Flow Shop Scheduling Research», *Disagregation: Problems in Manufacturing and Service Organizations*. Martinus Nijhoff, 1979.
- [212] G. Hadley, T. Whitin, *Étude et pratique des modèles de stocks*, Dunod, 1966.
- [213] R. W. Hall with APICS (The American Production and Inventory Control Society), *Zero inventory*, Dow Jones-Irwin, 1983.
- [214] M. Hammer, «Reengineering work: don't automate, obliterate», *Harvard Business Review*, July-August, 104-114, 1990.
- [215] M. Hammer, J. Champy, *Le Reengineering : Réinventer l'entreprise pour une amélioration spectaculaire de ses performances*, Dunod, 1993.
- [216] R. B. Handfield and E. L. Nichols Jr, *Introduction to Supply Chain Management*, Prentice-Hall, 1999.
- [217] J. E. Hanke, A. G. Reitsch, *Business Forecasting*, Prentice-Hall, 1998.
- [218] G. A. Hansen, *Automating: Business Process Reengineering*, Prentice-Hall, 1997.
- [219] F. W. Harris, «How many parts to make at once», *Factory, The Magazine of Management*, 1913, repris dans *Operations Research*, volume 38, n° 6, p. 947 - 950, 1990.

- [220] N. A. J. **Hasting**, «On resource allocation in project network», *Operational Research Quarterly*, volume XXIII, n° 2, p. 217-221, 1972
- [221] A. C. **Hax** (éditeur), *Studies in operations management*, volume VI de la collection Studies in the management sciences, North Holland, 1978.
- [222] A. C. **Hax**, J. J. **Golovin**, «Computer Based Operations Management System (COMS)», publié dans [221], 1978.
- [223] A. C. **Hax**, H. C. **Meal**, «Hierarchical Integration of Production Planning and Scheduling», publié dans [171], 1975.
- [224] A. C. **Hax**, D. **Candea**, *Production and inventory management*, Prentice-Hall, 1984.
- [225] E. J. **Hay**, *The Just-In Time Breakthrough: Implementing the New Manufacturing Basics*, Wiley, 1988.
- [226] R. H. **Hayes**, S. C. **Wheelwright**, K. B. **Clark**, *Dynamic Manufacturing: Creating the Learning Organization*, The Free Press, 1992.
- [227] J. **Heizer** and B. **Render**, *Production and Operations Management: Strategies and Tactics*, Allyn and Bacon, 1993.
- [228] J.-P. **Helfer**, M. **Kalika**, J. **Orsoni**, *Management - Stratégie et Organisation*, Vuibert, 1996.
- [229] **Hershauer**, **Ebert**, «Search and Simulation Selection of a Job-shop Sequencing Rule», *Management Science*, volume XXI, n° 7, mars 1975.
- [230] D. B. **Hertz**, «Investment policies that pay off», *Harvard Business Review*, janvier-février 1968.
- [231] C. **Hoarau**, *Le diagnostic financier*, Groupe Revue Fiduciaire, 1998.
- [232] C. **Hoarau**, *Comptabilité et management*, Foucher, 2002.
- [233] **Holloway** et **Nelson**, «Alternative Formulation of the Job-Shop problem with due dates», *Management Science*, volume XX, n° 1, p. 65 - 75, 1973.
- [234] C. A. **Holloway**, R. T. **Nelson**, V. **Suraphongschai**, «Comparison of a multi-pass heuristic decomposition procedure with other resource-constrained project scheduling procedures», *Management Science*, volume XXV, n° 9, p. 862-872, 1979.
- [235] V. D. **Hunt**, *Process Mapping: How to Reengineer your Business Processes*, Wiley, 1996.
- [236] **Hurrion**, «An Investigation of Visual Interactive Simulation Methods Using the Job-shop Scheduling Problem», *Journal of the Operational Research Society*, volume XXIX, n° 11, p. 1085-1093, 1978.
- [237] M. **Imai**, *Kaizen: la clé de la compétitivité japonaise*, Eyrolles, Paris, 3e édition, 1992.
- [238] R. R. **Inman**, R. L. **Bulfin**, «Sequencing JIT mixed-model assembly lines», *Management Science*, volume 37, n° 7, p. 901-904, 1991.
- [239] **IPMA**, *IPMA Competence Baseline*, édition trilingue, IPMA (<http://www.ipma.org>), 1999.

- [240] M. **Jackson**, G. **Twaddle**, *Business Process Implementation: Building Workflow Systems*, Addison-Wesley, 1997.
- [241] E. **Jacquet-Lagrèze**, *Programmation linéaire - Modélisation mise en œuvre informatique*, Economica, collection PIQ, 1998.
- [242] R. **Johansen** et al., *Groupware: computer support for business teams*, Free Press, 1988.
- [243] R. **Johansen** et al., *Leading Business teams*, Addison Wesley (Organization Development Series), 1991.
- [244] R. V **Johnson**, «Spacecraft for multi-floor layout planning», *Management Science*, volume XXVIII, n° 4, p. 407-417, 1982.
- [245] L. A. **Johnson**, D. C. **Montgomery**, *Operation research in production planning, scheduling and inventory control*, Wiley, 1974.
- [246] L. A. **Johnson**, D. C. **Montgomery**, *Forecasting and time series analysis*, McGraw-Hill, 1976, 2e édition en 1990, [308].
- [247] H. T. **Johnson**, R. S. **Kaplan**, *Relevance lost*, Harvard Business School Press, 1987.
- [248] F. **Jolivet** et C. **Navarre**, «Grands projets, auto-organisation méta-règles: vers de nouvelles formes de management des grands projets», *Gestion 2000*, p. 191-200, 1993.
- [249] F. **Jolivet**, «Management de projet: et si l'on parlait vrai?», *Gérer et comprendre*, septembre 1998, p. 19-31; adapté pour *La Cible*, n° 86, p. 30-38, 2001.
- [250] M. **Joly**, J. **Le Bissonnais**, J.-L. **Muller**, *Maîtriser le coût de vos projets – Manuel de coûtéance*, Afnor - Gestion, 1993.
- [251] J. V. **Jones**, *Integrated Logistics Support Handbook*, 2e édition, McGraw-Hill, 1995.
- [252] S. H. **Joo**, W. E. **Wilhelm**, «A review of quantitative approaches in just-in-time manufacturing», *Production Planning and Control*, volume IV, p. 207-222, 1993.
- [253] **Jorgenson**, **Mac Call**, **Radner**, *Optimal Replacement Policy*, North-Holland, 1974.
- [254] R. S. **Kaplan**, «The Evolution of Management Accounting», *The Accounting Review*, volume LIX, n° 3, p. 390-418, 1984.
- [255] R. S. **Kaplan**, «Yesterday Accounting Undermines Production» *Harvard Business Review*, p. 95-101, juillet-août 1984.
- [256] R. S. **Kaplan** and R. **Cooper**, *Cost and Effect: using Integrated Cost Systems to Drive Profitability and Performance*, Harvard Business School Press, 1998.
- [257] A. **Kaufman**, G. **Desbazeille**, *La méthode du chemin critique*, Dunod, 1974.

- [258] P. G. W. **Keen**, M. S. **Scott Morton**, *Decision support system: an organizational perspective*, Addison Wesley, 1978.
- [259] F. P. **Kelly**, *Reversibility and Stochastic Network*, Wiley.
- [260] M. G. **Kendall**, *Time series*, Griffin, 2e édition, 1976.
- [261] M. G. **Kendall**, A. **Stuart**, *The advanced theory of statistics* (volume III) Griffin, 3e édition 1976.
- [262] M G. **Kendall**, **Beale**, **Mann**, «The discarding of variables in the multivariable analysis», *Biometrika*, volume 52, p. 359, 1967.
- [263] H. **Kerzner**, *Project Management: A System Approach to Planning, Scheduling, and Controlling*, 6e édition, Wiley, 1997.
- [264] H. **Kerzner**, *In Search of Excellence in Project Management: Successful Practices in High Performance Organizations*, Van Nostrand Reinhold, 1998.
- [265] **King** et **Spachis**, «Heuristics for Flow-shop Scheduling», *International Journal of Production Research*, volume XVIII, n° 3, p. 345-357, 1980.
- [266] W. **Kubiak**, «Minimizing variation of production rates in just-in-time systems: A survey», *European Journal of Operational Research*, volume 66, p. 259-271, 1993.
- [267] W. **Kubiak**, S. **Sethi**, «A note on “Level Schedules for mixed-models assembly lines in just-in-time production system”», *Management Science*, volume 37, p. 121-122, 1991.
- [268] I. **Kurtulus**, E. W. **Davis**, «Multiproject Scheduling: Categorization of Heuristic Rules Performance», *Management Science*, volume XXVIII, n° 2, p. 161-172.
- [269] .S. **Kurtulus**, S. C. **Narula**, «Multi-project scheduling: analysis of project performance», in *IIE Transactions*, volume XVII, n° 1, p. 58-66, mars 1985.
- [270] **Land**, «Solution of purchase storage program: part 2», *Operational Research Quarterly*, volume IX, n° 3, p. 188-197, 1958.
- [271] J-L. **Lapon**, *La direction informatique et le pilotage de l'entreprise*, Hermes-science, 1999.
- [272] P. **Lauzel**, R. **Teller**, *Contrôle de gestion et budgets*, Sirey, 1997.
- [273] J. **Laverty**, R. **Demeestère**, *Les nouvelles règles du contrôle de gestion industrielle*, Dunod, Paris, 1990.
- [274] E. L. **Lawler**, J. K. **Lenstra**, A. H. **Rinnooy Kan**, D. B. **Shmoys**, *The Traveling Salesman Problem. A guided tour of combinatorial optimization*, John Wiley & Sons, 1992.
- [275] J. L. **Lequeux**, *Manager avec les ERP*, Éditions d'organisation, 1999.
- [276] J. **Lesourne**, *Modèles de croissance des entreprises*, Dunod, 1973.
- [277] R. I. **Levin**, D. S. **Rubin**, J. P. **Stinson**, E. S. **Gardener Jr**, *Quantitative Approaches to Management*, McGraw-Hill Book Company, 1989.

- [278] T. **Levitt**, «Exploit the Product Life Cycle», *Harvard Business Review*, novembre - décembre 1965.
- [279] F. K. **Levy**, G. L. **Thompson**, J. D. **Wiest**, «Multiship, Multishop, Workload-smoothing program», *Naval Research Logistic Quarterly*, p. 37-44, 1961.
- [280] **Lévy-Lambert**, **Dupuy**, *Les choix économiques dans l'entreprise et l'administration*, Dunod, Paris, 1973.
- [281] R. **Lewandowski**, *La prévision à court terme*, Dunod, 1979.
- [282] J. D. **Little**, K. G. **Murty**, D. W. **Sweeney**, C. **Karel**, «An algorithm for the traveling salesman problem», *Operations Research*, volume XI, p. 973-989, 1963.
- [283] D. **Lock**, *Project management*, Gower, 1991.
- [284] K. **Lockyer**, J. **Gordon**, *Critical Path Analysis and other Project Network Techniques*, Pitman, 1991.
- [285] C. **Longépé**, *Le projet d'urbanisation du système d'information*, Dunod, 2001.
- [286] P. **Lopez**, F. **Roubellat** (éditeurs), *Ordonnancement de la production*, Hermes, 2001.
- [287] P. **Lorino**, *Le contrôle de gestion stratégique: la gestion par activité*, Dunod, 1991.
- [288] R. A. **Lundin**, C. **Midler** (éditeurs), *Projects as arenas for renewal and learning processes*, Kluwer, 1998.
- [289] P. **Maillet**, *La décision à long terme dans l'entreprise*, Cujas, 1974.
- [290] S. **Makridakis**, S. C. **Wheelwright**, *Interactive forecasting*, Holden-Day, 4e édition, 1985.
- [291] S. **Makridakis**, S. C. **Wheelwright** and R. J. **Hyndman**, *Forecasting: methods and applications*, Wiley, 1998.
- [292] J-L. **Malo**, J.-C. **Mathé**, *L'essentiel du contrôle de gestion*, Éditions d'Organisation (collection les indispensables de la gestion), 1998.
- [293] R. **Marciniak**, F. **Rowe**, *Système d'information, dynamique et organisation*, Economica, collection PIQ, 1997.
- [294] A. **Martin**, *Distribution resource planning*, Prentice-Hall, 1983.
- [295] E. **Maurel**, D. **Roux**, D. **Dupont**, *Techniques opérationnelles d'ordonnancement fondées sur la méthode PERT potentiel-tâche*, Eyrolles, 1977.
- [296] C. **Mendoza**, E. **Cauvin**, M.-H. **Delmond**, P. **Dobler**, V. **Malleret**, *Coûts et décisions*, Montchrestien-Gualino, 2002.
- [297] J. R. **Meredith**, S. J. **Mantel Jr**, *Project management*, Wiley, 1989.
- [298] P. **Mévellec**, *Outils de gestion: la pertinence retrouvée*, Édition comptables Malesherbes, 1990.

- [299] M. H. Meyer and A. P. Lehnerd, *The power of product platforms: building value and cost leadership*, The Free Press, 1997.
- [300] J. V. Michaels, W. P. Wood, *Design to Cost: New Dimensions in Engineering*, Wiley, 1989.
- [301] C. Midler, *L'auto qui n'existait pas, management des projets et transformation de l'entreprise*, InterÉditions, 1993
- [302] C. Midler, «Modèles gestionnaires et régulations économiques de la conception», de Terssac, Friedberg éditeurs, *Coopération et Conception*, [414].
- [303] J. Miltenburg, «Level Schedules for mixed-models assembly lines in just-in-time production system», *Management Science*, volume 35, p. 192-207, 1989.
- [304] J. Miltenburg, G Sinnamon, 1989, «Scheduling mixed-model multi-level just-in-time production system», *International Journal of Production Research*, volume 27, n° 9, p. 1487-1509, 1989.
- [305] F. Mitchell, «A commentary on the applications of activity based costing», *Management Accounting Research*, volume 5, p. 261-277, 1994.
- [306] Y. Monden, *Cost Reduction Systems : Target Costing and Kaizen Costing*, Productivity Press, 1995.
- [307] Y. Monden, *Toyota Production System : An Integrated Approach to Just-In-Time*, 3e édition, Engineering & Management Press, Norcross, USA, 1998.
- [308] D. C. Montgomery, L. A. Johnson, J. S. Gardiner, *Forecasting and time series analysis*, McGraw-Hill, 1990.
- [309] T. E. Morton, D. W. Pentico, *Heuristic Scheduling Systems with applications to production systems and project management*, Willey, 1993.
- [310] C. Morley, *Gestion d'un projet système d'information - Principes, techniques de mise en œuvre et outils*, 3e édition, Dunod, 2001.
- [311] C. Morley, J. Hughes, B. Leblanc, *UML pour l'analyse d'un système d'information*, Dunod, 2002.
- [312] F. Murphy, E. Stohr, A. Asthana, «Representation schemes for linear programming models», *Management Science*, volume 38, n° 7, p. 964-991, 1992.
- [313] E. Naddor, *Inventory Systems*, Wiley, 1966.
- [314] S. Narasimhan, D. W. McLeavey, P. Billington, *Production Planning and Inventory Control*, Prentice-Hall, 2e édition, 1995.
- [315] C. R. Nelson, *Applied Time series analysis for managerial forecasting*, Holden-Day, 1973.
- [316] R. C. Newbold, *Project Management in the Fast Lane: Applying the Theory of Constraints*, The St. Lucie Press, 1998.
- [317] **NF-ISO-10006**, *Management de la qualité – Lignes directrices pour la qualité en management de projet*, Afnor, 1996.

- [318] S. Y. Nof, W. E. Wilhelm, H. J. Warnecke, *Industrial Assembly*, Chapman and Hall, 1997.
- [319] N. Nouhi, *Les apports de l'approche hiérarchisée à la planification industrielle: une application possible chez Renault Véhicules Industriels*, thèse de 3e cycle, IAE de Lyon, Université Lyon-3, 1984.
- [320] B. Obel, *Issues of organizational design, a mathematical programming view of organizations*, Pergamon Press, 1981.
- [321] J. Orlicky, *Material Requirement Planning*, McGraw-Hill, 1975.
- [322] OTAN, *Manuel de la logistique de l'OTAN*, 3e édition, 1997.
- [323] M. A. Ould, *Business Processes: Modelling and Analysis for Re-engineering and Improvement*, Wiley, 1995.
- [324] G. Paché, C. Paraponaris, *L'entreprise en réseau*, PUF, collection «Que sais-je?», 1993.
- [325] C. N. Parkinson, *Parkinson's Law*, The Riverside Press, Cambridge, 1957.
- [326] J. H. Patterson, W. D. Huber, «A horizon-varying, zero-one approach to project scheduling», *Management Science*, volume XX, n° 6, p. 990-998, 1974.
- [327] J. H. Patterson, «Project Scheduling: the Effects of Problem Structure on Heuristic Performance », *Naval Research Logistic Quarterly*, volume XXIII, p. 95-123, 1976.
- [328] J. H. Patterson, G. W. Roth, «Scheduling a project under multiple resource constraints: a zero-one programming approach», *AIIE Transaction*, volume VIII, n° 4, p. 449-455, 1976.
- [329] J. H. Patterson, «A comparison of exact approaches for solving the multiple constrained resource project scheduling problem», *Management Science*, volume XXX, n° 9, p. 854-867, 1984.
- [330] J.-L. Peaucelle, *Système d'information: le point de vue des gestionnaires*, Economica, 1999.
- [331] J.-L. Peaucelle, «Hammer avait raison! Les conditions d'efficacité du BPR», 4e colloque de l'AIM, 1999,
- [332] J.-L. Peaucelle, «La performance en coûts et délais: théorie des files d'attente et BPR», *Revue Française de Gestion Industrielle*, volume XIX, n° 4, p. 71- 96, 2000.
- [333] C. Pellegrin, *Fondements de la Décision de Maintenance*, Economica, collection PIQ, 1997
- [334] M. Piermay, O. Hereil, A. Lazimi, *Mathématiques financières*, 2e édition, Economica, 1998.
- [335] J. N. Petroff, *Handbook of Mrp II and Jit: Strategies for Total Manufacturing Control*, Prentice-Hall, 1993.
- [336] J. F. Phélizon, *Méthodes et Modèles de la Recherche Opérationnelle*, Economica, 1998.

- [337] Y. **Pimor**, *Logistique - Techniques et mise en œuvre*, 2e édition, Dunod, 2001.
- [338] M. **Pinedo**, *Scheduling: Theory, Algorithms, and Systems*, Prentice-Hall, 1995.
- [339] M. **Pinedo**, X. **Chao**, *Scheduling: Operations scheduling with application in manufacturing and services*, Irwin McGraw-Hill, 1999.
- [340] G. W. **Plossl**, *Production and inventory control, applications*, George Plossl educational services inc. (Atlanta, Georgia 30325, USA), 1983.
- [341] L. **Poiaga**, «Operations research in project management and cost engineering: an outlook for new operational developments», *European Journal of Operational Research*, n° 41, p. 1-14, 1989.
- [342] C. **Poirier**, S. **Reiter**, *La supply chain - Optimiser la chaîne logistique et le réseau interentreprises*, Dunod, 2001.
- [343] M. **Porter**, *Competitive Advantage*, The Free Press, 1985; traduction: *L'avantage concurrentiel*, InterÉditions, 1986.
- [344] W. F. **Pounds**, «The process of problem finding», *Sloan Management Review*, 1969.
- [345] A. A. B. **Pritsker**, L. S. **Watters**, P. M. **Wolfe**, «Multi-Project Scheduling with Limited Resources: a Zero-One Programming Approach», *Management Science*, volume XVI, n° 1, p. 93-108, septembre 1969.
- [346] A. A. B. **Pritsker**, *Modeling and Analysis Using Q-GERT Network*, 2e édition, Wiley, 1979.
- [347] A. A. B. **Pritsker**, C.E. **Sigal**, *Management Decision Making, A Network Simulation Approach*, Prentice-Hall, 1983.
- [348] D. **Profozich**, *Managing Change, with Business Process Simulation*, Prentice-Hall, 1998.
- [349] **Project Management Institute**, *A Guide to the Project Management Body of Knowledge (PMBOK)*, 1996, traduit sous le titre *Management de projet, un référentiel de connaissance*, Afnor, 1998. Une nouvelle version millésimée 2000 est disponible en version livre et CD à <http://www.pmibooks-tore.org>.
- [350] J. M. **Proth**, H. Q. **de Gromar**, *Systèmes flexibles de production: conception préliminaire*, Masson, 1986.
- [351] J. M. **Proth**, *Conception et gestion des systèmes de production*, PUF, 1992.
- [352] C. **Proust**, M. **Drogou**, J. **Foucher**, E. **Foucheyrand**, «Une heuristique pour le problème d'ordonnancement statique de type n/m/flowshop, avec prise en compte des temps de montage et démontage d'outils», *Revue d'Automatique, d'Informatique et de Recherche Opérationnelle*, APII, volume 22, p. 453-470, 1988.
- [353] C. **Proust**, J. N. D. **Gupta**, V. **Deschamps**, «Flowshop scheduling with setup, processing and removal times separated», *International Journal of Production Research*, volume XXIX, n° 3, p. 479-493, 1991.

- [354] C. **Ptak**, *ERP: Tools, Techniques, and Applications for Integrating the Supply Chain*, The St Lucie Press (APICS Series on Resource Management), 2000.
- [355] R. M. **Rachamadugu**, C.A. **Yano**, 1994, «Analytical tools for assembly line design and sequencing», *IIE Transaction*, volume XXVI, n° 2, mars 1994, p. 2-10.
- [356] M. **Raharison**, *Ordonnancement en ateliers spécialisés: conception et réalisation d'un outil d'aide à la décision de lancement*, thèse de doctorat «nouveau régime», IAE de Lyon, 1991.
- [357] A. **Redford**, J. **Chal**, *Design for assembly: principles and practice*, McGraw-Hill, 1994.
- [358] R. **Reix**, *Systèmes d'information et management des organisations*, Vuibert, 1995.
- [359] R. **Reix**, «Flexibilité», in *Encyclopédie de gestion*, [136].
- [360] J. B. **Revelle**, J. W. **Moran**, C. **Cox**, *The QFD Handbook*, Wiley, 1997.
- [361] A. H. **Rinnooy Kan**, *Machines Scheduling Problems - Classification, Complexity and Computations*, Nijhoff, 1976.
- [362] **RG.Aéro 00040**, *Recommandation générale pour la spécification de management de programme*, avril 1999, Bureau de Normalisation de l'Aéronautique et de l'Espace (Technopolis 54 -199 rue Jean-Jacques Rousseau, 92138 Issy les Moulineaux Cedex)
- [363] N. **Riou-Long**, *Analyse de la littérature traitant de l'ordonnancement en ateliers spécialisé*, papier de recherche G 83/3, Centre Lyonnais de Recherches en Sciences de Gestion (I.A.E. de Lyon), 1983.
- [364] N. **Riou-Long**, *Problèmes méthodologiques posés pour la définition d'un Système d'Aide à la Décision de Lancement en ateliers spécialisés*, thèse de 3e cycle, IAE de Lyon, 1986.
- [365] C. **Riveline**, *Évaluation des coûts: éléments d'une théorie de la gestion*, Cours Ecole Nationale Supérieure des Mines de Paris, 1985.
- [366] R. E. **Rosenthal**, «Algebraic Modeling Languages for optimization», *Encyclopedia of Operations Research and Management Science*, Saul I. Gass & Carl M. Yarris éditeurs, Kluwer Academic Publishers, Boston, 1996.
- [367] D. F. **Ross**, *Distribution: Planning and Control*, Kluwer Academic Publishers, 1996.
- [368] B. **Roy**, *Algèbre moderne et théorie des graphes*, Dunod, 1969.
- [369] B. **Boy**, *Méthodologie multicritère d'aide à la décision*, Economica, 1985.
- [370] A. **Samii**, *Stratégie logistique - Fondements méthodes application*, Dunod, 2e édition, 2001.
- [371] V. **Sandoval**, *Technologie de l'EDI*, Hermes, 1990.

- [372] R. W. **Schemenner**, *Production/Operation Management: Concepts and Situations*, Science Research Associates, Chicago, 1984.
- [373] A. **Scholl**, *Balancing and sequencing in assembly lines*, Physica-Verlag, 1999.
- [374] L. **Schrage**, *Lindo: an optimization modeling system*, 4^e édition, The Scientific Press, San Francisco, 1991.
- [375] **Schrage, Baker**, *Dynamic programming solution of sequencing problems with precedence constraints*, Operations Research, volume XXVI, n° 3, p. 444-449, mai/juin 1978.
- [376] R. G. **Schroeder**, *Operations Management, decision making in the operations function*, 2^e édition, Wiley, 1985.
- [377] L. B. **Schwarz** (éditeur), *Multi-level production/inventory control systems: theory and practice*, volume XVI de la collection *Studies in the Management Sciences*, North Holland, 1981.
- [378] G. A. F. **Seber**, *Linear regression analysis*, Wiley, 1976.
- [379] S. M. **Shafer**, J. R. **Meredith**, *Operations Management: A Process Approach with Spreadsheets*, Wiley, 1998.
- [380] R. D. **Shapiro**, *Optimization models for planning and allocation: text and cases in mathematical programming*, Wiley, 1984.
- [381] C. **Shapiro**, H. R. **Varian**, *Information Rules: A strategic Guide to the Network Economy*, Harvard Business School Press, 1999.
- [382] S. **Shingo**, *Maîtrise de la production et méthode Kanban: le cas Toyota*, Éditions d'organisation, 1983.
- [383] S. **Shingo**, *Le système SMED*, Éditions d'organisation, 1987.
- [384] **Shiskin, Young, Musgrave**, *The X-11 variant of the census method 2 seasonal adjustment program*, Bureau of the census, U.S. Department of Commerce, édition révisée 1967.
- [385] A. **Shtub**, *Enterprise Resource Planning (ERP)*, Kluwer Academic Publisher, 1999.
- [386] E.A. **Silver**, H.C. **Meal**, «A heuristic for selecting lot size requirement for the case of a deterministic time-varying demand rate and discrete opportunities of replenishment», *Production and Inventory Management*, volume XIV, n° 2, p. 64-74, 1973.
- [387] E. A. **Silver**, D. F. **Pyke**, R. **Peterson**, *Inventory Management and Production Planning and Scheduling*, Wiley, 3^e édition, 1998.
- [388] H. A. **Simon**, *The new science of management decision*, Harper & Row, 1960.
- [389] H. A. **Simon**, *Administration et processus de décision*, Economica, 1983.
- [390] P. G. **Smith** and D. G. **Reinertsen**, *Developing Products in Half the Time: new rules, new tools*, 2^e édition, Wiley, 1998.

- [391] M. P. **Spinner**, *Project Management: Principles and practices*, Prentice-Hall, 1997.
- [392] G. **Stalk jr**, T. M. **Hout**, *Competing against time: how time-based competition is reshaping global markets*, Free Press, 1990.
- [393] G. **Stalk jr**, T. M. **Hout**, *Vaincre le temps*, traduction de [392], 1993.
- [394] M. K. **Starr**, D. M. **Miller**, *La gestion des stocks: théorie et pratique*, Dunod, 1966.
- [395] M. K. **Starr**, *Operation Management*, Prentice-Hall, 1978.
- [396] J. **Stinson**, W. **Davis**, B. **Khumawala**, «Multiple resource-constrained scheduling using Branch and Bound», *AIIE Transaction*, volume X, n° 3, p. 252-259, septembre 1978.
- [397] J.R. **Sulzer**, *Comment construire le tableau de bord: les objectifs et méthodes d'élaboration*, Dunod, 2e édition, 1985.
- [398] R. S. **Swanson**, *Quality Improvement Handbook: Team Guide to Tools and Techniques*, St. Lucie Press, 1995.
- [399] T. **Sybord**, *Méthode d'analyse et d'évaluation économique des décisions en production*, mémoire de DEA, 1987, 193 pages + annexes.
- [400] F. B. **Talbot**, «Resource-constrained project scheduling with time-resource tradeoffs: the nonpreemptive case», *Management Science*, volume XXVIII, n° 10, octobre 1982, p. 1197-1210.
- [401] M. **Tanaka**, T. **Yoshikawa**, J. **Innes**, F. **Mitchell**, *Contemporary Cost Management*, Chapman & Hall, Londres, 1993.
- [402] D. **Tapscott** (éditeur), *Creating Value in the Network Economy*, Harvard Business Review Book, 1999.
- [403] J. C. **Tarondeau**, *Produits et technologie: choix politiques de l'entreprise industrielle*, Dalloz, 1982.
- [404] J. C. **Tarondeau**, *Recherche et développement*, Vuibert, 1994.
- [405] J. C. **Tarondeau**, *Stratégie industrielle*, Vuibert, Paris, 2e édition, 1998.
- [406] J. C. **Tarondeau**, *La gestion de la production*, PUF, 1996.
- [407] J. C. **Tarondeau**, *Le management des savoirs*, PUF, 1998.
- [408] J. C. **Tarondeau**, *La flexibilité dans les entreprises*, PUF, 1999.
- [409] J. C. **Tarondeau**, D. **Xardel**, *La distribution*, PUF, 1995.
- [410] S. **Tayur**, R. **Ganeshan**, M. **Magazine**, *Quantitative models for supply chain management*, Kluwer, 1999.
- [411] R. **Teller**, *Le contrôle de gestion en avenir incertain*, Dunod, 1977.
- [412] R. **Teller**, «Le contrôle de gestion en avenir incertain: quelques aspects méthodologiques», Communication au colloque de l'Association Française de Comptabilité, actes du congrès, mars 1983.

- [413] A. R. **Tenner**, I. J. **De Toro**, *Process Redesign: The Implantation Guide for Managers*, Addison-Wesley, 1997.
- [414] G. **de Terssac**, E. **Friedberg**, *Coopération et Conception*, Octares Éditions, Toulouse, 1996.
- [415] S. R. **Thangavelu**, C. M. **Shetty**, «Assembly Line Balancing by Zero-One Integer Programming», *AIIE Transaction*, volume III, p. 61-68, 1971.
- [416] A. **Thesen**, «Heuristic Scheduling of Activities under Resource and Precedence Restrictions», *Management Science*, volume XXIII, n° 4, p. 412-422, décembre 1976.
- [417] D. **Thiel** (éditeur), *La dynamique des systèmes*, Hermes, 1998.
- [418] N.T. **Thomopoulos**, «Line balancing - sequencing for mixed model assembly», *Management Science*, volume XIV, n° B, p. 59-75, 1967.
- [419] N.T. **Thomopoulos**, 1970, «Mixed-model balancing with smoothed station assignments», *Management Science*, volume XIX, n° 9, p. 593-603.
- [420] **Tiao, Cleveland**, «Decomposition of seasonal time series: A model for the census X-11 programm», *Journal of American Statistical Association*, volume 71, p. 581-587, 1976.
- [421] D. **Tixier**, D. **Mathé**, J. **Colin**, *La logistique d'entreprise*, Dunod, 1996.
- [422] J. W. **Toomey**, *Mrp II: Planning for Manufacturing Excellence*, Chapman & Hall Materials Management/Logistics Series, 1996.
- [423] D. W. **Trigg**, A. G. **Leach**, «Exponential smoothing with an adaptive response rate», *Operational Research Quarterly*, volume XVIII, n° 1, p. 53-59, 1967.
- [424] K. **Ulrich**, D **Sartorius**, S. **Pearson**, M. **Jakiela**, «Including the Value of Time in Design-for-Manufacturing Decision making», *Management Science*, volume 39, n° 4, avril, 1993.
- [425] G. **Ülüsoy**, L. **Özdamar**, «Heuristic performance and network/resource characteristics in resource-constrained project scheduling», *Journal of operational Research Society*, volume 40, n° 12, p. 1145-1152, 1989.
- [426] P. **Vallin**, *La Logistique*, Economica, 2e édition, 2001.
- [427] J. C. **Van Horne**, *Fundamentals of Financial Management*, Prentice-Hall, 1977.
- [428] R. M. **Van Slyke**, «Monte Carlo Methods and the PERT problem», *Operation Research*, volume XI, n° 5, p. 839-860, 1963.
- [429] P. F. **Velleman**, D. C. **Hoaglin**, *Applications, Basics, and Computing of Exploratory Data Analysis*, Duxbury Press, 1981.
- [430] F. **Vernadat**, *Enterprise Modelling and Integration: Principles and Applications*, Chapman & Hall, 1996.
- [431] F. **Vernadat**, *Techniques de Modélisation en Entreprise: Applications aux Processus Opérationnels*, Economica, 1999.

- [432] A. **Vignier**, J.-C. **Billot**, C. **Proust**, «Les problèmes d'ordonnancement de type flow-shop hybride: un état de l'art», *RAIRO Recherche Opérationnelle*, volume 33, n° 2, p. 117-183, 1999.
- [433] T. E. **Vollmann**, W. L. **Berry**, D. C. **Whybark**, *Manufacturing planning and control system*, McGraw-Hill, 4e édition, 1997.
- [434] D. **Vose**, *Quantitative Risk Analysis: A Guide to Monte-Carlo Simulation Modelling*, 2e édition, Wiley, 2000.
- [435] H. M. **Wagner**, *Principles of operations research with applications to managerial decisions*, Prentice-Hall International editions, 1975.
- [436] H. M. **Wagner**, T. M. **Whitin**, «Dynamic version of the economic lot size model», *Management Science*, volume V, numéro 1, p. 139-96, 1959.
- [437] **Watson**, **Foulds**, «The Vehicule Scheduling Problem: a Survey», *New Zealand Operational Research*, volume IX, n° 2, p. 73-92, 1981.
- [438] H. M. **Weingartner**, *Mathematical programming and the Analysis of Capital Budgeting Problems*, Prentice-Hall, 1963.
- [439] H. M. **Weingartner**, «Capital Budgeting of Interrelated Projects: Survey and Synthesis», *Management Science*, volume XII, p. 485-516, 1966.
- [440] R. **Westphal**, D. **Scholz**, «A Method for Predicting Direct Operating Costs During Aircraft Sysytem Design», *Cost Engineering*, volume 39, n° 6, juin, 1997.
- [441] S. C. **Wheelwright**, K. B. **Clark**, *Revolutionizing Product Development, Quantum Leaps in Speed, Efficiency and Quality*, The Free Press, New York, 1992.
- [442] D. E. **Whitney**, «Manufacturing by Design», *Harvard Business Review*, volume LXVI, n° 4, 1988.
- [443] **Williams**, «Heuristic Techniques for Simultaneous Scheduling of Production and Distribution in Multi-echelon structures: Theory and Empirical Comparisons», *Management Science*, volume XXVII, n° 3, mars 1981.
- [444] H. P. **Williams**, *Model Building in Mathematical Programming*, 3^e édition révisée, Wiley, 1993.
- [445] J. D. **Wiest** and F. **Levy**, *A Management Guide to PERT/CPM*, Prentice-Hall, 1977.
- [446] O. **Wight**, *Manufacturing Resource Planning: MRP II*, Oliver Wight éditeur, 1980, révisé en 1984.
- [447] T. **Wild**, *Best Practice in Inventory Management*, Wiley, 1997.
- [448] R. **Willis**, *A guide to forecasting for planners and managers*, Prentice-Hall, 1987.
- [449] P. R. **Winters**, «Forecasting sales by exponentially weighted moving averages», *Management Science*, n° 6, p. 324-342, 1960.
- [450] J. P. **Womack**, D. T. **Jones**, D. **Roos**, *The machine that changed the world*, Rawson Associates, Boston, 1991.

- [451] J.P. **Womack**, D. T. **Jones**, D. **Roos**, *Le système qui va changer le monde, une analyse des industries automobiles mondiales par le Massachusetts Institute of Technology*, Dunod, Paris, 1992, traduction de [450].
- [452] J. P. **Womack** and D. T. **Jones**, *Lean Thinking: Banish waste and create wealth in your corporation*, Simon and Schuster, 1996.
- [453] W.I. **Zangwill**, «A deterministic multi-period production scheduling model with backlogging», *Management Science*, volume XIII, n° 1, p. 105-119, 1966.

Table des
matières

Index
thématique

INDEX THÉMATIQUE

A

@Risk (logiciel) ...	187, 190, 193, 195, 197, 331, 594, 858
@Risk for Project (logiciel)	327, 332
Abonnement de charges fixes	89
Absorption des charges fixes	76
Absorption des délais.	473
Acteur-métier	269
Acteur-projet	269
Actigramme	161
Action corrective	979
Action préventive	979
Activité	161, 275
Actualisation	1154
Actuariel	1160
AFNOR	110, 893, 972
Algorithme	
• CDS	379
• de Jackson	374
• de Johnson	372, 379
• de Land	576
• de Little	382, 907
• de Wagner et Whitin	492, 494
• de Wagner-Whitin	582
• du Recuit Simulé	407
• du simplexe	1122
• génétique	196, 223, 402, 408
• rétrograde	576
• Tabou	407
Alternative décisionnelle	1139
Amortissement économique	126, 176
Analyse	
• de la valeur	72, 110
• de sensibilité	186
• paramétrée	1112
• post-optimale	1111
• spectrale	1007
• systémique	155
Ancêtre	275
Antécédent	275
APICS	461
Appel par l'aval	509
Approche hiérarchique	152, 160
Approche processus	974
Approvisionnement	632
• à flux tendus	666
• synchrone	509, 599, 904
Arborescence technique	277
Arc d'un graphe	288
Architecture « client-serveur »	960
Article	149
ASLOG	895
Assemblage à la commande	48, 49, 465, 509, 624
Assemblage final	465
Assurance de la qualité	972
Atelier	
• à cheminement unique	362
• à cheminements libres	362
• à cheminements multiples	362
• spécialisé	319
Attente	368
Attribut de qualité	107
Augmentation tarifaire	783
AV	110
Avant-projet	260

B

B2B	900
B2C	900
Baan	958
Back office	970
Baisse momentanée de tarif	784
Baptême progressif	620
BCWP	349
Besoins bruts	470

Besoins nets	471
Bestfit	245
Bilan	
• actualisé	174, 1155
• différentiel	78, 177
• économique	174
Billet à ordre	1148
Billet de trésorerie	1148
Bloodhood.Macmacro	8
Bons de capitalisation	1154
Bound	393
Branch and bound	390, 391
Bruit blanc	990
Budget	
• à date	348
• encouru	349
• initial	347
Bureau des méthodes	511
Business logistics	892
Business to Business	900
Business to Consumer	900
C	
Cahier des charges fonctionnel	111
CALS	63, 931
Capacité	666
Capacité d'autofinancement	177
Capacités de production en MRP	468
Capitalisation	1149
Capitalisation mixte	1149
Cartographie de flux	69
Cartographie de processus	69, 160
Castelain	604
CBTE	349
CBTP	349
Cellule	59
Cellule virtuelle	60
CEN	973
Census Board	1020, 1026
Centre de décision	157
Certification	895
CFAO	146
Chaîne	
• critique	305, 317
• d'assemblage	53, 589
• de production	53, 589
• de valeur	961
• logistique 43, 48, 63, 68, 461, 622, 895, 931, 970, 971	
Chaîne logistique	927
Changement de base	1121
Charge	74
• de structure	77
• différentielle	78, 445
• directe	75, 643
• érudable	78, 445
• fixe	643, 1142
• incrémentale	78, 445
• indirecte	75
• opérationnelle	77
• supplétive	657
• variable	643
Chargeur	900
Chariot élévateur	904
Chariot filoguidé	904
Chemin critique	168, 294, 300
Chevauchement	283, 297, 333
Chroniques	981
Chrono-compétition ..	67, 68, 466, 629, 921
CIMOSA	162
Citroën	105
Classement des activités par niveaux	289
Clé	934
CLM	895
Closed loop MRP	461
Closest Unvisited-city Algorithm	401
Coefficient	
• d'actualisation	1154
• d'autocorrélation	999
• d'autocorrélation d'ordre j	1000
• de capitalisation	1149
• de corrélation partiel	1088
Comité Européen de Normalisation	973
Commande	360
Commande ferme	462
Commercial of the shelf	144
Commissionnaire	900
Composant optionnel	103
Composante	
• aléatoire	987
• cyclique	987
• tendancielle	987
Comptabilité	
• analytique d'exploitation	74
• de gestion	74, 638
• industrielle	74
• par activité	68
COMSOAL	599
Conception	104
• à coût objectif	120, 264
• modulaire	103, 589
Concurrence	112
Conditions d'invertibilité	1089

Contrainte	
• cumulative	286, 322, 323
• d'antériorité	282, 320, 321
• d'enclenchement	282
• de localisation temporelle	285
• disjonctive	286, 321, 322, 1139
• non saturée	1116
• potentielle	285, 320
• saturée	1117
Contribution propre	78
Contrôle	161
Contrôle de qualité	663
Contrôle statistique de la qualité	972
Convolution	609
Convoyeur	904
Corrélogramme	1001
COTS	144
Council of Logistic Management	895
Couplage	470
Courbe de décyclage	605
Courbon	272, 1192
Coût	74
• Budgété du Travail Effectué	349
• Budgété du Travail Prévu	349
• concave	582, 1142
• convexe	1142
• d'opportunité	74, 656
• de détention	655
• de lancement	663, 800
• de possession	655
• de revient complet	76
• de rupture	660
• de stockage	659
• direct	75
• direct mixte	76
• encouru	349
• fantôme	1109
• fixe	77
• global de possession	120
• historique	78
• préétabli	78
• prévisionnel réestimé	348
• réel	78
• Réel du Travail Effectué	349
• standard	78, 175
• variable	77
Coût marginal	78
CPM	274
Critère régulier	406
Critical Path Method	274
Cross-docking	901
CRTE	349
Crystal Ball	190
Cycle	832
• de fabrication	593
• de production	48
• de vie	101, 118, 263, 894
Cycle de vie	117
D	
Datagramme	161
Date calendaire	295
Date relative	295
Décision	
• de routine	628
• non programmable	46
• non structurée	46
• opérationnelle	45
• programmable	46
• semi-structurée	46
• stratégique	45, 99, 143
• structurée	46
• tactique	45
Decision Support System	425
Déclassement	242
Décomposition fonctionnelle	161
Découplage	416, 512, 601, 624
Décyclage	603
Délai	
• arithmétique	295
• calendaire	295
• d'obtention	468, 629
• de réaction	517
• de sécurité	468
Demande dynamique	630
Demande statique	630
Démarche ascendante	279
Démarche descendante	278
Démarche logistique	893
Denrée périssable	529
Dépendance fonctionnelle	934
Désamorçage d'une ligne	601
Descendant	276
DFA	115
DFM	115
DFMA	115
Diagramme de Gantt	365
Différenciation retardée	104, 105, 466, 620, 722
Direct costing	77
• évolué	77
• simple	77
Direction de projet	259

Discipline de file d'attente	409	• de conservation temporelle des stocks	
Dispatching rules	380	556	
Distancier	905	Équilibrage de chaîne	55
Distribution	632	Équivalent	1160
Distribution Requirement Planning	497	ERM	146, 456, 933, 957
Diversité	589	ERP	68, 146, 456, 514, 622, 896, 933, 957, 958
Diviseur	1147	Escompte	1148
DoD	931	Étape	307
DRP	497	Étiquette	513
DSS	425	• de fabrication	513
Durée de vie optimale	234	• de production	513
Dynamic lot size-model	582	• de transfert	515
E			
EANCOM	932	European Logistics Association	895
Earned value	349	Évaluation	393
Écart		Événement	962
• de coût	351	Evolver	187
• de coût relatif	352	Explosion des nomenclatures	475
• de performance	352	F	
• de performance relatif	352	Fabrication à la commande	48
• de planning	351	Facilities Management	62
• de planning relatif	351	FAS	466
• de productivité	352	Favier	272, 1192
eCommerce	897, 900, 901, 970	FD X 50-171	975
Économie d'échelle	784	FD X 50-174	975
EDF	62, 65	Feeding buffer	305
EDI	63, 931	Fiat	105
Effet de lotissement	460, 932	File d'attente	150
Effet Slutsky-Yule	1065	Film	509, 603
ELA	895	Filtre linéaire	1008
Élimination	394	Final Assembly Schedule	466
Enclenchement	160	Flexibilité	55, 104, 116, 135, 511, 589, 591
Encyclage	509, 600, 604, 615	• organisationnelle	147
Énergie	280, 346	• physique	147
Engagement	58, 614	Flow shop	51, 60, 362, 530, 602
Engineer-to-Order	48	Flow shop hybride	383
Enregistrement	977, 978	Flux Net de Trésorerie	174
Enterprise Resources Planning	456	Flux Net de Trésorerie Actualisé	202, 1155
Entité	149	Flux poussés	466
Entrepôt	901	Flux tirés	466
Entrepôt de transit	901	Fonction	962
Entreprise de réseau	62	• (analyse de la valeur)	110
Entreprise Resource Planning	68, 622, 896, 933, 957, 958	• concave	575
Equation		• convexe	575
• spatiale de conservation des flux	548	• de contraintes	111
Équation		• de coût linéaire par morceau	1142
• comptable	556	• de hasard cumulée	247
• de conservation	556	• de service	111
		• économique	642
		• logistique	893

• objectif	1115
• objectif non linéaire	1141
• technique	111
Force	408
Forme canonique	1106
Forme standard	1106, 1119
Formule de Leibniz	673
France Télécom	62, 65
Front scheduling	422
FTNA	202

G

Gamme	100, 151, 943, 944
• alternative	283, 322, 331, 943, 952
• convergente	944
• d'assemblage	469
• de fabrication	469
• divergente	944
GAMS	1134
Gantt fléché	307
Gaspillage	833
General Electric	110
General Motors	604
Gerbeur	904
Gestion calendaire	634
Gestion calendaire conditionnelle	634
Gestion de production	44
Gestion de projet	259
Gestion des risques d'un projet	267
Gestion des stocks	45
Gestionnaire de cas	169
Goal programming	220
Goodwill	661, 673, 677, 853
Goulot d'étranglement	385, 953
GRAFCET	161
Graphe	
• AoA	288
• AoN	288
• d'une gamme opératoire	69
• PERT	307
• PERT-Étapes	307
• Potentiel-Étapes	307
• Potentiel-Tâches	293
Graphique	
• de Gantt	365
• du point mort	60
• en toile d'araignée	188
• en tornade	188
Gross Requirement	470
Groupware	272

H

Hasard (fonction de)	247
Hausse tarifaire anticipée	785
Hausse tarifaire subie	785
Haut le pied	922
Haut-le-pied	64
Heuristique	361, 456, 604
Heuristique de Silver et Meal	492
Horizon de planification	573
Horizontal loading	421
Hub	64, 901

I

IDF0	161
IDF3	162
ILS	121
Indice de criticité	330
Inducteur de coûts	105
Industrie de process	58
Information primaire	927
Information traitée	927
Ingénierie concourante	118, 132, 270
Ingénierie simultanée	270
Innovation - procédé	101
Innovation - produit	101
Inspection de la qualité	972
Integrated Logistic Support	121
Intégrité référentielle	935
Intel	142
Intérêt	
• composé	1148
• postcompté	1148
• précompté	1148
International Standard Organisation	972
Interpolation linéaire	709
Intersection de Fisher	206
Inventaire périodique	628
Inventaire permanent	628
Invertibilité	1089
ISO	972
ISO 9000	973
ISO 9001	71, 977
ISO 9004	979
ISO/TR 10017	975
Item Master File.	467

J

J.D. Edwards (société)	958
Jalon	275
Jalonnement au plus tôt	422

Job shop 51, 362, 602
 Juste-à-temps 509, 919

K

Kaizen 70, 143, 972
 Kanban 513
 • électronique 514

L

La Poste 62
 Lancement 473
 Lancia 105
 Lettre de change 1148
 Ligne
 • d'assemblage 53
 • de production 53, 530
 • hiérarchique 169
 Lignes directrices 977
 Lissage 312
 Livraison attendue 471, 473
 Livraison programmée 473
 Logistique 893, 932
 Logistique répartie 893
 Loi
 • Bêta 325
 • Bêta-PERT 191, 326
 • de fiabilité 244
 • de Pareto 636
 • de Parkinson 281
 • de service 409
 • triangulaire 328
 • uniforme 328
 Lotissement 459
 Lump sum problem 629

M

Machine 361
 MAF 510, 904
 Magasin automatique 904
 Magasin Avancé Fournisseur 510, 904
 Maintenance 243, 940, 943
 Maison de la qualité 112
 Maître d'œuvre 262
 Maître d'ouvrage 262
 Management des risques d'un projet 267
 Management par la Qualité Totale 972
 Manuel qualité 977, 978
 Manufacturing Resource Planning 456
 Manutention 943
 Marge 76, 368, 370
 • indépendante 303

• libre 301
 • semi-brute 78
 • sur coût direct mixte 76
 • sur coût direct opérationnel 76
 • totale 300
 • totale sur la période 685
 Master Production Schedule 458
 Material Requirement Planning 455, 957
 Matrice 99
 Matrice de la qualité 112
 Matrice réduite 391
 Mécanisme 161
 Mécanisme de croisement 408
 Mécanisme de mutation 408
 Merise 934, 959, 964
 Méta-heuristique 407
 Méta-règle 273, 440
 Méthode ABC 636
 Méthode de Quenouille ... 1001, 1002, 1087
 Méthode des coûts variables 77
 Méthode des Potentiels 274
 Méthode du Recuit Simulé 407
 Méthode Tabou 407
 Modèle 1134
 • additif 995
 • autoprojectif 1005
 • de Holt et Winters 1056
 • de Kano 107
 • dynamique d'ordonnancement 363
 • explicatif 1005
 • multiplicatif 995
 Modèle économique de gestion 639
 Modèle stationnaire 1092
 Modèle statique d'ordonnancement 363
 Modeleur 903, 908, 919, 1134
 Modélisation 147
 • mono-période 528
 • multi-périodes 528
 Module 103, 465
 Moindres carrés généralisés 1101
 Montant nominal 1148
 Moyenne mobile centrée 1013
 MPS 458, 466
 MRP 455, 957
 MRP I 456
 MRP II 456
 Multi-projets 262, 282

N

Nervosité 495
 Net Requirement 471

NF EN 30011	976
NF EN ISO 9000	973
NF EN ISO 9001	977
Nissan	105
Niveau de remplètement ...	634, 665, 708, 948
Niveau de rétablissement	708
Nivellement	312
Nivellement basé sur une liste d'installation	313
Nœud d'un graphe	288
Nombre (banque)	1147
Nombre moyen de commandes	653
Nomenclature	100, 105, 463
• d'ordonnancement	374
• de planification	465
• fantôme	467
Nomogramme	629
Norme	973
Norme CE	973
Normes européennes	973
NP- complet	361
NP- difficile	361
NTIC	932

O

Obligation à coupons capitalisés	1154
OM	100
Open shop	362
Opérateur	150
Opération	361
OPT	386
Oracle	958
Ordonnancement	45, 359
• admissible	437
• au plus tard	298
• au plus tôt	296
• de production en petite série	262
Ordre	
• de fabrication	360, 361
• de fabrication ouvert	513
• de modification	100
• de réquisition	600, 604
• ferme	470, 495
Organigramme des tâches	277
Organigramme technique	277
Organisme de normalisation	972
OSSAD	165
OT	277
Ou « exclusif » (opérateur logique)	1139
Ou « inclusif » (opérateur logique)	1141

Outillage	150
-----------------	-----

P

Paradoxe du voyageur de Calais	78
Parallélisme	168
Paramètre	640
Parc industriel de fournisseurs	510
PBC	455
PDCA	71
PDP	458
Pegging	470
People Soft	958
Période de révision calendaire	665
PERT	274, 307
Perturbation aléatoire	987
PGI	958
Picking	901
PIF	510
Pilotage	
• en dérive	267
• en stop or go	267
• informatique en temps réel	46
Piquage	901
Pistage	470
Place de marché virtuelle	970
Placement au plus tard	424
Placement au plus tôt	422
Placement chronologiquement progres- sif d'opérations exécutables	424
Placement progressif d'ordres de fabrication	421
Plan	
• Comptable Général	78
• de transport	45
• Directeur d'Assemblage	466
• Directeur de Production	458, 461, 512
Plan qualité	977
Planification	
• de la production	45
• glissante	494
• hiérarchisé	498
• opérationnelle	274
Plateau	271
Plate-forme (logistique)	901
Plate-forme (produit)	103, 589
Point de commande	633, 665, 779, 948
Point de régénération	583
Point mort	60, 77
Point mort en univers aléatoire	666, 698
Points de commande multiples	780
Poka-yoke	116

Polyvalence	169, 940	• homogène	589
Pool resource	286	• sur étagère	144
Position de stock	471, 731, 779	Profil moyen de chargement	469
Precedence Diagramming Method	288	Progiciel de Gestion Intégrée	958
Prédécesseur	275	Programme	
Préemption	361, 368	• de production	58, 614
Prestation de service	625	Programme linéaire en nombres	
Prévision	981	entiers	1118
Principal	1174	Projet	894
Principe		Propagation	172, 624
• d'économie	304	Propriété	934
• d'optimalité	564	PSA	604
• de Bellman	564	PSE	391
• de conservation des aires ...995, 1022, 1073		Pseudo-fonction de répartition	676, 716
• de prudence	303		
Prix-fantôme	1109	Q	
Problème dual	1106	QAD	958
Problème non préemptif	361	QFD	111, 135
Problème préemptif	361	Q-GERT	331
Problème primal	1106	Qualification	941
Problème stochastique du voyageur de commerce	402	Qualité	475, 972, 973
Procédure		Qualité Totale	972
• d'allocation en parallèle	313	Quality Function Deployment	111
• d'allocation en série	313	Quantité	
• par placement d'opérations	424	• de commande de Wilson	776
• par placement des travaux	421	• de Wilson	772
• par Séparation et Évaluation	391	• économique de commande	948
Processeur	150	• économique de Wilson	491
Processus	69, 160, 259, 961	• économique périodique	491
• autorégressif	1085	• fixe de commande	491, 634
• de Markov	1085		
• de Yule	1085	R	
• dynamique	630	Rabais	
• en moyenne mobile	1089	• progressif	787
• mixte	1091	• uniforme	787
• purement aléatoire	989	Raisonnement à prix constants	185
• stationnaire	994, 1084	Raisonnement en francs constants	183
• statique	630	Raisonnement en francs courants	183
Production	41	RATP	62
• à flux poussés	509	Rebut	948
• à flux tirés	509	Recouvrement	283, 297, 946
• à la commande	48, 464, 559, 624	Recuit Simulé	407
• de masse de produits sur mesure ...105		Réduction de matrice	391
• de type «série unitaire»	50	Reengineering	68, 72
• en ateliers spécialisés	51	Référence	935
• fatale	1111	Régénération périodique	494
• pour stock	48, 559, 623	Régime de croisière	174
• sur mesure	102	Régime stationnaire	409
Produit		Régime transitoire	173
• hétérogène	589	Règle	
		• d'unicité de la clé	935

• de conception115	SCC 896
• de Jackson370	SCOR 160, 896
• de la date de livraison minimale ...369	Séparation 394
• de la marge minimale371	Séquence de groupes d'opérations
• de Smith369	permutables 437
• dynamique413	Séquencement 359
• ECT384	Série 360
• FAM384	• chronologique981
• LAPT384	• désaisonnalisée 1020
• LSM384	• économique772
• LWKR413	• temporelle981
• MWR385	Serveur d'applications 960
• PAPS412	Serveur de données 960
• RANDOM412	Serveur de présentation 960
• S/OPN413	Service 921
• statique413	SIAD ... 46, 168, 425, 905, 919, 1134, 1135
• TOM367, 413	Silver 585
• TOM pondéré368, 369	Simplexe 1122
Relation 934	Simul8 (logiciel) 152
Relation d'antériorité 282, 463	Simulation 94, 148
Relaxation de contrainte 435, 648	Site Avancé Fournisseur 510, 904
Remora 959	SLI 121, 930
Renault 142, 604	SMED 106, 168, 511, 652
Rendement d'échelle décroissant 575	SNCF 62, 65
Renfort 611	Socks à étages 627
Réseau de Petri 161	Solveur 919, 1134
Responsable de lot 262	Sommet d'un graphe 288
Ressource	SOT rule 367
• consommable286, 529	Sous-traitance de capacité 144
• non stockable286, 529, 656	Sous-traitance de spécialité 144
• renouvelable286, 529	Soutien Logistique Intégré 121, 930
• stockable286, 529, 656	Spare insurance 662
Retard algébrique 368	Spécifications 977
Retard vrai 368	Spectre 1085
Retour à vide 900	SPT rule 367
Risk Optimizer 187, 197, 402, 594	Standardisation 48, 64, 133, 971
Robustesse d'un modèle 650	Start-up 265
Rôle 160, 936	Station 54, 592
Rotation 921	STL 1026
Roue de Deming 71, 975	Stock 149
Rough cut planning 469	• à étages 406, 458, 459, 548
Rupture de stock 667	• de distribution 458, 549, 632
Rupture de stock moyenne653, 667, 671	• de fabrication 549, 632
	• de sécurité 623, 831
	• de spéculation 623
	• de tri 604, 620
	• moyen possédé 653
	• multi-échelons 406, 458, 627
	• tampon 605
	Stockage
	• dynamique 903
	• mobile 903

S

SADT 161
SAF 510
SAP 958
Satisfaction du besoin 893
Saturation 601
Saturation d'un centre productif 433

• rotatif	903	• proportionnel mensuel	1159
• statique	903	• trimestriel	1159
Storable resource	286	Technique des deux casiers	634
STRIM	163, 164	Technique du lot-pour-lot	473, 491
Structure en U	54, 56	Technologie de groupe	53, 59
Successeur	276	TEG	1180
Supply chain	43	Temps	
Supply-Chain Council	896	• de cycle	55, 517
Sur-qualité	113	• de montage	380
Système à événement discret	148	• masqué	511
Système de management de la qualité ...	976	• opératoire	364
Système de Relations - Entités	935	• Opérateur Minimum	313
Système Interactif d'Aide à la Décision .46,	425	Terme résiduel	987
Système-expert	440	Test	
T			
Tableau de Buys-Ballot	996	• d'Anderson-Darling	245
Tableau du simplexe	1120	• de Durbin Watson	1080
Tâche	275, 361, 962	• de Kolmogorov-Smirnov	245
• critique	299	• du Khi2	245
• d'attente	275	Théorème d'horizon de planification	580
• fictive	309	Théorie des contraintes	386
• subcritique	304	Time buffer	386
Tampon	305	Tiroir	604
Taux		Top Rank	187
• actuariel	1156	Total Quality Management	972
• actuariel annuel	1160	Tournée	905
• actuariel mensuel	1160	• filaire	919
• annuel d'intérêt simple	1147	Tournées multiples	402
• d'actualisation	1155	Toyota	604
• d'actualisation de référence	126	TQM	972
• d'enrichissement relatif	202	Traçage	470
• d'opportunité	657	Tracking signal	1069
• de défaillance	243, 244	Traite	1148
• de Rentabilité Interne 203, 1156, 1180		Transaction	149
• de rotation d'un stock	782	Transpalette	904
• effectif	1156	Transport haut-le-pied	900
• effectif global	1180	Transporteur privé	900
• équivalent	1152	Transtockeur	904
• équivalent annuel	1160	Trend	987
• équivalent mensuel	1160, 1161	TRI	203, 1156, 1180
• marginal de substitution	1121	Tri-stock	604
• mensuel	1159	Type d'association	935
• Moyen de Rentabilité	203, 1156	Type d'entité	934
• nominal	1159	U	
• nominal annuel	1159	UDC	162
• nominal mensuel	1159	UML	959
• périodique	1159	UN/EDIFACT	932
• proportionnel	1147, 1159	Unité de comportement	162
• proportionnel annuel	1159	Urbanisation	931

V

Valeur	
• acquise	349, 1149
• Actuelle Nette	202, 1155
• Ajoutée Directe	446
• budgétaire du réalisé	349
• future	1149
• nominale	1148
VAN	202, 1155
Variable	
• artificielle	1126
• binaire	1135
• d'état	641, 652
• de commande	640, 1135, 1138
• de la base	1113
• hors base	1113
• indicatrice	1135
Variété externe	105
Variété interne	105
VBA	331
Ventes différées	661
Ventes manquées	660
Versement	
• à terme d'avance	1158
• à terme échu	1158
• en début de période	1158
• en fin de période	1158
Vertical loading	424

W

Warrant	1148
WBS	277
Web	960
Web office	149, 970
What-if analysis	186
Witness	152
Work Breakdown Structure	277

X

X 50-131	977
X 50-136	976
X 50-150	110
X 50-153	110
X-11	1026
X-12-ARIMA	1026
XPRESS-MP	1134

INDEX DES AUTEURS

A

ACGPS	1185
AFITEP	266, 1185
AFITEP - ANACT	270
AFNOR	1185
Akao	111, 112, 1185
Albouy	200, 202, 1185
Alcouffe	1185
Allab	927, 932, 1185
Allen	440, 1193
AMR Research	1187
ANACT	270, 1185
Anderson ...	102, 106, 135, 990, 1091, 1185
Andradottir	152
André	919, 920, 1134, 1195
Ansari	1186
Anthony	45, 1186
APICS	455, 1196
Arcus	599, 1186
Argyris	969, 1186
Armour	231, 233, 1186
ASLOG	1186
Asthana	1134, 1201
Augustin	1186
Aurifeille	1186
Ayache	933, 1186

B

Bagchi	991, 992, 1186
Baglin	1186
Baker	368, 370, 371, 372, 377, 378, 379, 406, 1186, 1205
Baldwin	103, 1186
Ballou	893, 1186
Balman	1186
Banks	148, 152, 1186
Baranger	1187
Bard	1187

Barlett	1004, 1087
Basset	1190
Bauer	901, 1187
Bautista	600, 1187
Beale	1082, 1199
Beightler	1187
Bell	314, 1187
Bellman	564
Benchimol	63, 931, 1187
Benoun	899, 1187
Bensoussan	1187
Berliner	119, 120, 263, 357, 443, 1187
Bermudez	1187
Berry	455, 468, 489, 498, 1187, 1208
Berthélemy	930, 1187
Bertziss	1187
Bescos	1196
Bierman	200, 204, 1187
Billaut	383
Billington	386, 498, 1187, 1201
Billot	1208
Birnie	596, 597
Bitran	507, 1187
Blackstone	1187
Blanchard	1192
Boctor	407, 605, 1188, 1195
Boisselier	1188
Boiteux	126, 128, 214, 235, 241, 242, 1188
Boitout	90, 1195
Bonmarchand	90, 1195
Bonnafous	272, 1188
Bonneau	1147, 1188
Bossard	1185
Bouquin	74, 106, 638, 1188
Bourbonnais	1188
Bourdichon	1188
Box	989, 994, 1026, 1084, 1085, 1086, 1088, 1089, 1090, 1098, 1188
Boy	1204

Brimson 119, 120, 263, 357, 443, 1187, 1188
 Brooke 1134, 1188
 Brown 1046, 1049, 1054, 1068, 1188
 Briel 1186
 Buffa... 231, 233, 412, 432, 597, 599, 1186,
 1188, 1189
 Bulfin 600, 1197
 Burlaud 74, 79, 357, 638, 645, 1189
 Burns 377, 1189
 Burnstein 1189
 Burton 1189
 Buys-Ballot 1073

C

Calot 995, 1022, 1026, 1189
 Calvasina 1189
 Campbell 379, 1189
 Campy 1196
 Candea.. 274, 327, 364, 498, 499, 503, 504,
 507, 579, 1197
 Carlier 359
 Caspar 1189
 Castelain 604, 1189
 Cauvin 1200
 Chakravarty 825, 1189
 Chal 115, 135, 1204
 Champy 72, 73, 170, 968
 Chanchevri 1185
 Chao 359, 1203
 Charbonnel 165, 1192
 Chatfield . 989, 994, 995, 1007, 1056, 1080,
 1084, 1086, 1090, 1189
 Chen 1187
 Chevalier 63, 1189
 Chrétienne 359, 1189
 Christofides 402, 1189
 Clark 78, 101, 102, 103, 177, 445, 645,
 1186, 1189, 1190, 1197, 1208
 Cleveland 1027
 Cliff 970
 Cliffe 438, 971, 1190
 Cliquet 1190
 Coat 272, 1192
 Codling 1190
 Cofman 1190
 Cohendet 67, 1190
 Colasse 1192
 Colin . 892, 893, 895, 896, 932, 1186, 1190,
 1192, 1207
 Collignon 68
 Companys 600, 1187

Computer Sciences Corporation 1187
 Conway 369, 370, 372, 374, 375, 378, 389,
 390, 401, 410, 411, 412, 438, 1190
 Cooper 122, 312, 1190, 1198
 Corominas 600, 1187
 Costa 407
 Cotsaftis 1190
 Courbon 1190
 Courtot 130, 267, 328, 332, 1190, 1195
 Cox 107, 108, 112, 1204
 Crouhy 1190
 Crowder 389, 1190
 Curien 62, 1190
 Curran 958, 959, 970, 1191
 CXP 455, 1191

D

Danjou 104, 603, 605, 1191, 1195
 Dannebring 406
 Dannenbring 379, 1191
 Dantzig 1117
 Dar-El 1187
 Darling 245
 Daudin 972, 1191
 Davenport 72, 971, 1191
 David 161, 1101, 1102, 1191
 Davis 312, 314, 1191, 1199, 1206
 de Gromar 1203
 de Terssac 1201, 1207
 De Toro 163, 164, 1207
 Debourse 261, 1191
 Declerck 261, 1191
 Delaval 1189
 Dell'Isola 1191
 Delmond 1200
 Demeestère 74, 357, 1199
 Deming 71, 972, 975, 1191
 Desbazeille 1198
 Deschamps 380
 Dilts 1191
 Dobler 1200
 Drogou 380, 1203
 Dudek 379, 1189
 Dumas 165, 1192
 Dupont 308, 313, 325, 341, 1200
 Dupuy 126, 1200
 Durbin 1072

E

Ebert 438, 1197
 ECOSIP . 90, 262, 270, 272, 357, 443, 1192

Enselme 1189, 1192
 Esquirol 280, 359, 371, 381, 384, 406, 1192
 Everette..... 1069, 1192

F

Fabbe-Costes 896, 932, 1186, 1192
 Fabrycky 1192
 Fady 1190
 Farnum 326, 1192
 Faure 1192
 Feare 604, 1192
 Feigenbaum 972
 Fenneteau 117
 Filser 899, 1192
 Finkelstein 960, 1192
 Fishman 959, 993, 1192
 Flory 456, 933, 936, 1186, 1193
 Forrester 148, 1193
 Foucher 380, 1203
 Foucheyrand 380, 1203
 Fould 233, 1193
 Foulds 402, 1208
 Fouque 104, 1193
 Fowler 1193
 Fox 386, 440, 1193
 Francis 233, 1193
 Fray 95, 175, 354, 1195
 Freidenfelds 1193
 French 1193
 Friedberg 1201, 1207
 Fulkerson 341
 Fuller 1080, 1193

G

Ganeshan 627, 1206
 Gantt 365
 Gardener Jr 1199
 Gardiner 1201
 Gardner 1069, 1192
 Garreau 1186
 Garrel 261, 270, 272, 1193
 Garwood 463, 1193
 Gautier 106, 122, 124, 141, 1193
 Gavett 401
 Gentina 1189
 Gervais 1193
 Gesler 1194
 Giard . 47, 62, 63, 68, 90, 95, 104, 106, 122,
 124, 130, 135, 141, 160, 175, 190, 194,
 261, 262, 270, 272, 315, 322, 326, 328,
 349, 354, 443, 528, 601, 603, 605, 615,

639, 672, 675, 676, 678, 697, 858, 861,
 919, 920, 931, 936, 987, 988, 990, 994,
 1030, 1042, 1134, 1191, 1192, 1193,
 1194, 1195, 1196

Giglio 377, 1196
 Giraud 1196
 Godin 432
 Goldman 1196
 Goldratt 305, 386
 Golovin 500, 1197
 Gordon 313, 314, 324, 1200
 Gouriéroux 1196
 Gratacap 893, 932, 1196
 Greene 455
 Greif 1186
 Guéret 595, 1196
 Gupta 380, 406, 1196

H

Hadley .. 671, 702, 731, 737, 777, 790, 791,
 835, 838, 841, 843, 853, 858, 859,
 1196
 Hall 511, 1196
 Hammer 72, 73, 167, 170, 968, 1196
 Handfield 1196
 Hanke 1196
 Hansen 1196
 Harris 776, 1196
 Hasting 314, 1197
 Hax 274, 327, 364, 498, 499, 500, 503,
 504, 507, 579, 1187, 1197
 Hay 1197
 Haya 991, 992, 1186
 Hayes 1197
 Heidorn 314, 1191
 Heizer 1197
 Helfer 99, 1197
 Helgeson 596, 597
 Héliès-Hassid 899, 1187
 Hereil 1147, 1202
 Hershauer 438, 1197
 Hertz 190, 407, 1197
 Hoaglin 1012, 1207
 Hoarau 1197
 Hodgson 370
 Hogg 1187
 Holloway 312, 378, 442, 1197
 Holt 989, 995, 1046
 Hout 67, 68, 70, 1206
 Huber 319, 1202
 Hugel 1187

Hughes 960, 1201
 Hunt 163, 167, 1197
 Hurriion 440, 1197
 Hyndman 1026, 1101, 1200

I

Imai 70, 1197
 Inman 600, 1197
 Innes 1206

J

Jackson 1198
 Jacquet-Lagrèze 1105, 1132, 1134, 1141,
 1198
 Jaffeux 1186
 Jakiela 1207
 Jenkins .. 989, 994, 1026, 1084, 1085, 1086,
 1088, 1089, 1090, 1098, 1188
 Joffre 1192
 Johansen 1198
 Johnson . 233, 377, 390, 443, 576, 582, 594,
 596, 599, 731, 802, 838, 841, 1046,
 1069, 1198, 1201
 Jolivet 273, 1198
 Joly 346, 1198
 Jones 117, 263, 432, 511, 1198, 1208, 1209
 Joo 600, 1198
 Jorgenson 235, 237, 241, 1198
 Juran 972

K

Kalika 99, 1197
 Kano 107
 Kaplan 75, 77, 443, 444, 1198
 Karel 390, 1200
 Kaufman 1198
 Keen 46, 1199
 Kelly 410, 1199
 Kendall 992, 1003, 1004, 1005, 1007, 1035,
 1082, 1086, 1087, 1199
 Kendrick 1134, 1188
 Kerzner 1199
 Khumawala 314, 1206
 Kilbridge 597, 598, 599
 King 406
 Kramer 960, 1192
 Kubiak 600, 1199
 Kurtulus 312, 314, 1199

L

Ladd 958, 959, 970, 1191

Laforest 456, 933, 1193
 Lagroue 354, 1195
 Land 576, 1199
 Lapede 1187
 Lapon 1199
 Lauzel 74, 76, 77, 1199
 Laverty 74, 357, 1199
 Lawler 391, 1199
 Lazimi 1147, 1202
 Le Bissonnais 346, 1198
 Le Guluche 920, 1195
 Le Roy 104, 603, 1191
 Leach 1069, 1207
 Leblanc 960, 1201
 Leclair 1185
 Leguluche 919
 Lehner 103
 Lehnerd 1201
 Leibniz 726
 Lenstra 391, 1199
 Lequeux 958, 959, 1199
 Lesourne 216, 653, 1199
 Levin 1199
 Levit 117
 Levitt 117, 1200
 Levy 324, 1200, 1208
 Lévy-Lambert 126, 1200
 Lewandowski 987, 1069, 1200
 Little 390, 1200
 Lléréna 67, 1190
 Lock 313, 1200
 Lockyer 313, 314, 324, 1200
 Longépé 68, 932, 1200
 Lopez ... 280, 359, 371, 381, 383, 384, 406,
 407, 408, 437, 1192, 1200
 Lorino 74, 106, 357, 1200
 Lundin 1200

M

Mac Call 235, 237, 241, 1198
 Mac Mannus 438, 1190
 Madridakis 1026
 Maeder 1186
 Magazine 627, 1206
 Maillet 204, 1200
 Makridakis 1069, 1084, 1101, 1200
 Malleret 1200
 Malo 1200
 Mann 1082, 1199
 Mantel 313, 319, 1200
 Marciniak 925, 1200

Markov 1085
 Martin 496, 1200
 Marty 390
 Mathé 892, 893, 895, 1200, 1207
 Maurel 308, 313, 325, 341, 1200
 Maxwell 369, 370, 372, 374, 375, 378, 389,
 390, 401, 410, 411, 412, 438, 1190
 Mc Clain 498, 1187
 McLeavey 386, 1201
 Meal 492, 503, 585, 1197, 1205
 Médan 893, 932, 1196
 Meeraus 1134, 1188
 Mendoza 1200
 Meredith 313, 319, 1205
 Mévellec 74, 106, 357, 1200
 Meyer 103, 111, 1201
 Michaels 1201
 Midler 68, 129, 261, 262, 263, 270, 272,
 1192, 1193, 1195, 1200, 1201
 Miller 369, 370, 372, 374, 375, 378, 389,
 390, 401, 410, 411, 412, 432, 438, 740,
 1188, 1190, 1206
 Miltenburg 1201
 Mintelberg 600
 Mintelburg 600
 Mitchell 1206
 Monden 122, 123, 511, 600, 604, 1201
 Monfort 1196
 Montgomery . 377, 390, 576, 582, 594, 599,
 731, 802, 838, 841, 1046, 1069, 1198,
 1201
 Moran 107, 108, 112, 1204
 Morley 960, 1201
 Morton 359, 386, 1201
 Muller 346, 1198
 Murphy 1134, 1201
 Murty 390, 1200
 Musgrave 1026, 1205

N

Naddor 709, 716, 737, 777, 784, 1201
 Nagel 1196
 Nanot 412
 Narasimhan 386
 Narula 312, 314, 1199
 Naulleau 1196
 Navarre 261, 1191, 1198
 Nelson 312, 378, 442, 994, 1084, 1090,
 1197, 1201
 Newbold 305, 1201
 Noel 1186

Nof 135, 596, 599, 612, 615, 1202
 Nouhi 1202
 Nuseibeh 960, 1192

O

Obel 1202
 Ohl 1189
 Ord 991, 992, 1186
 Orlicky 455, 457, 1202
 Orsoni 99, 1197
 OTAN 1202
 Ould 163, 164, 1202
 Özdamar 314, 1207

P

Paché 63, 893, 896, 932, 1186, 1190, 1192,
 1202
 Padberg 389, 1190
 Paraponaris 63, 1202
 Pareto 636
 Park 314, 1187
 Parkinson 281, 1202
 Patterson 312, 314, 319, 1191, 1202
 Pearson 1207
 Peaucelle 167, 925, 968, 970, 1202
 Pellegrin 132, 243, 601, 639, 647, 1195,
 1202
 Pentico 359, 386, 1201
 Peterson 498, 499, 784, 828, 1205
 Petroff 455, 1202
 Phélizon 1202
 Philips 1187
 Phillips 1187
 Piermay 1147, 1202
 Pike 828
 Pimor 892, 932, 1203
 Pine 102, 135, 1185
 Pinedo 359, 1203
 Plossl 1203
 PMI 1203
 Poiaga 314, 1203
 Poirier 1187, 1203
 Porter 893, 896, 961, 1203
 Portmann 408
 Pounds 171, 1203
 Preiss 1196
 Prins 384, 595, 1196
 Pritsker 319, 321, 331, 1203
 Profozich 1203
 Proth 161, 1203
 Proust 380, 383, 1203, 1208

Ptak 958, 1204
 Pyke 498, 499, 784, 1205

R

Rachamadugu 614, 615, 1204
 Radner 235, 237, 241, 1198
 Raharison 432, 1204
 Redford 115, 135, 1204
 Reinertsen 118, 186, 1205
 Reinsel 1084
 Reiter 1203
 Reitsch 1196
 Reix 925, 1204
 Renard 134
 Render 1197
 Revelle 107, 108, 112, 1204
 Riat 1189
 Rinnooy Kan 391, 404, 1199, 1204
 Riou-Long 404, 432, 1204
 Riveline 1204
 Rooker 377, 1189
 Roos 117, 263, 511, 1208, 1209
 Rosenthal 1134, 1204
 Ross 1204
 Roth 319, 1202
 Roubellat 359, 383, 384, 406, 407, 408, 437,
 1200
 Roucairol 1192
 Roux 308, 313, 325, 341, 1200
 Rowe 925, 1200
 Roy 274, 285, 653, 1204
 Rubin 1199
 Russel 1191

S

Samii 1204
 Sandoval 63, 932, 1204
 Sartorius 1207
 Saulpic 1196
 Scharage 542
 Schemenner 1205
 Scholl 594, 612, 615
 Scholz 123, 1208
 Schon 969, 1186
 Schrage 371, 1205
 Schroeder 1205
 Shtub 968, 969
 Schwarz 498, 1205
 Scott Morton 46, 1199
 Seber 1080, 1082, 1101, 1205
 Sethi 600, 1199

Sevaux 595, 1196
 Shafer 1205
 Shapiro 1205
 Shetty 594, 1207
 Shewart 972
 Shingo 511, 1205
 Shiskin 1020, 1026, 1205
 Shmoys 391, 1199
 Shtub 958, 1187, 1205
 Sigal 331, 1203
 Silver 492, 498, 499, 784, 828, 1205
 Simon 74, 79, 170, 171, 357, 638, 645, 1189,
 1192, 1205
 Sinamon 600, 1201
 Slagmulder 122, 1190
 Slutzky 1065
 Smidt 200, 204, 1187
 Smith 118, 186, 379, 440, 1189, 1193, 1205
 Spachis 406, 1199
 Spinner 1206
 Stalk 1206
 Stalk jr 67, 68, 70
 Stanto 1192
 Stanton 326
 Starr 597, 740, 1206
 Stinson 314, 1199, 1206
 Stohr 1134, 1201
 Strohm 440, 1193
 Stuart 992, 1035, 1199
 Sulzer 90
 Suraphongschai 312, 442, 1197
 Swanson 1206
 Sweeney 390, 1200
 Swyngedaum 927, 932
 Swyngedaw 1185
 Sybord 1206

T

Tajan 1190
 Talandier 927, 932, 1185
 Talbot 314, 1206
 Tanaka 122, 1206
 Tapiero 972, 1191
 Tapscott 1206
 Tarondeau 103, 104, 105, 111, 1206
 Taubert 597, 599, 1188
 Tayur 627, 1206
 Teller 74, 76, 77, 695, 1199, 1206
 Tenner 163, 164, 1207
 Thangavelu 594, 1207
 Thesen 312, 1207

Thiel 148, 1207
 Thomas 498, 1187
 Thomopoulos 1207
 Thompson 1200
 Thomson 324
 Tiao 1027
 Tixier 892, 893, 895, 1207
 Tolla 1192
 Toomey 455, 1207
 Trahand 272, 1192
 Trigg 1069, 1207
 Triomphe .. 160, 528, 919, 920, 1134, 1195,
 1196
 Twaddle 1198

U

Ulrich 115
 Ülusooy 314, 1207
 Usunier 1188

V

Vallin 1207
 Van Horne 206, 1207
 Van Slyke 327, 1207
 Varian 1205
 Velleman 1012, 1207
 Vergnenègre 160, 328, 1195, 1196
 Vernadat 161, 162, 1190, 1207
 Vignier 383, 408, 1208
 Vollmann 233, 455, 468, 489, 496, 498,
 1208
 Vose 327, 1208
 Vosse 190

W

Wagner . 238, 377, 390, 410, 492, 494, 567,
 576, 577, 579, 582, 841, 1105, 1128,
 1129, 1196, 1208
 Warnecke 135, 596, 599, 615, 1202
 Watson 402, 1072, 1208
 Watters 319, 321, 1203
 Weingartner 216, 1208
 Wester 597, 598, 599
 Westphal 123, 1208

Wheelright 101, 102, 1026
 Wheelwright 1026, 1069, 1101, 1197, 1200,
 1208
 White 233, 1193
 Whitin .. 492, 494, 582, 671, 702, 731, 737,
 777, 790, 791, 835, 838, 841, 843, 853,
 858, 859, 1196, 1208
 Whitney 115, 1208
 Whybark 455, 468, 489, 498, 1208
 Widmer 407
 Wiest 324, 1200, 1208
 Wight 455, 1208
 Wild 1208
 Wilde 1187
 Wilhelm 135, 596, 599, 600, 615, 1198,
 1202
 Williams 406, 1138, 1208
 Willis 1208
 Wilson 491, 776
 Winters 989, 995, 1046, 1056, 1208
 Wolfe 319, 321, 1203
 Womack 117, 263, 511, 1208, 1209
 Wood 1201

X

Xardel 1206

Y

Yano 614, 615, 1204
 Yoshikawa 1206
 Young 1026, 1205
 Yule 1065, 1085
 Yvars 1189

Z

Zangwill 582, 1209

Les mathématiques financières traitent des modalités d'échanges de sommes d'argent au cours du temps. Les dates de ces transactions sont repérées sur un référentiel temporel qui utilise un découpage temporel s'appuyant sur une période de référence: le jour, le mois, le trimestre ou l'année. En règle générale, une transaction est rattachée à un jour, sans pousser plus loin la précision sur le moment exact où elle a été réalisée. Quand le découpage temporel retenu n'est pas quotidien, une transaction est réputée se produire en fin ou en début de période. Dans de nombreux problèmes, il revient au même de considérer qu'une transaction s'effectue à la fin d'une période ou au début de la période suivante. L'usage de graphiques (voir § I-2.3, page 1151) permet de définir sans ambiguïté un problème.

Dans l'analyse de dossier d'investissement, on est amené à regrouper conventionnellement l'ensemble des transactions qui se sont produites au cours d'une période soit au début de cette période, soit à la fin de cette période (voir § II-1, page 1157), soit à une date différente de celle de début ou de fin de période (voir § II-6, page 1183).



Il y a $(t_2 - t_1)$ versements périodiques, d'un montant **PMT** ou a_F ou a_D , effectués entre t_1 et t_2 . **Si aucun versement additionnel** n'est effectué à la fin de la dernière période (x_n), le cumul des remboursements de capital réalisés au cours de ces $(t_2 - t_1)$ est donné par:

- la **relation 507 de la page 1175** dans le cas de versements de **fin** de période):

$$c_t = x_0 \frac{(1+i)^n - (1+i)^t}{(1+i)^n - 1}$$

(c_t = capital restant à rembourser en **fin** de période t (après versement) dans le cas de n versements constants périodiques à terme échu)

- la **relation 511 de la page 1178** dans le cas de versements de **début** de période:

$$c_t = x_0 \frac{(1+i)^n - (1+i)^t}{(1+i)[(1+i)^n - 1]}, \text{ pour } t > 0$$

(c_t = capital restant à rembourser en **début** de période t (après le versement de **début** de période) dans le cas de n versements constants périodiques en début de période)

L'application de ces formules repose implicitement sur l'hypothèse d'un versement périodique correspondant exactement à celui défini par la **relation 505 de la page 1173** ($a_F = x_0 \frac{i}{1 - (1+i)^{-n}}$) – versements de fin de période – ou par la **relation**

510 de la page 1177 ($a_D = x_0 \frac{i}{(1+i)[1 - (1+i)^{-n}]}$) – versement de début de

période—. Le nombre retenu de chiffres après la virgule dans les contrats – et donc dans les échéanciers de remboursements – s'aligne sur les possibilités offertes légalement par l'unité monétaire la plus petite utilisée dans le pays (en France, c'est le centime). Il s'ensuit que les résultats peuvent différer légèrement de ceux fournis par l'utilisation de ces formules. Certaines calculettes financières s'appuyant sur ces contraintes, fournissent des résultats de capital restant dû et de cumul de paiements d'intérêt ou de remboursements de capital entre deux périodes qui sont cohérents avec le nombre retenu de chiffres après la virgule par l'utilisateur. Dès lors, le capital restant dû ne sera pas nécessairement le même en fonction du format d'affichage retenu par la calculette.

Pour en savoir plus, se reporter au § II-4.3.1.2, page 1174, et au § II-4.3.2.2, page 1178.

Si un versement additionnel est effectué à la fin de la dernière période (x_n), ces formules ne sont pas applicables mais les résultats fournis sont, bien évidemment, exacts.



Il y a $(t_2 - t_1)$ versements périodiques, d'un montant **PMT** ou a_F ou a_D , effectués entre t_1 et t_2 . **Si aucun versement additionnel** n'est effectué à la fin de la dernière période (x_n), **et si l'option « L'application des formules (précision maximale des versements) »** est choisie, le cumul des intérêts versés au cours de ces $(t_2 - t_1)$ est donné par :

- la **relation 509 de la page 1176** dans le cas de versements de **fin** de période) :

$$x_0 \frac{i(t_2 - t_1 + 1)(1 + i)^n + (1 + i)^{t_1 - 1} - (1 + i)^{t_2}}{(1 + i)^n - 1}$$

(intérêts versés au titre des périodes t_1 à t_2 , dans le cas de n versements périodiques de **fin** de période)

- la **relation 512 de la page 1178** dans le cas de versements de **début** de période :

$$x_0 \frac{i(t_2 - t_1 + 1)(1 + i)^n + (1 + i)^{t_1 - 1} - (1 + i)^{t_2}}{(1 + i)[(1 + i)^n - 1]}$$

(intérêts versés au titre des périodes t_1 à t_2 , pour $1 < t_1 < t_2$, dans le cas de n versements périodiques de **début** de période)

Pour en savoir plus, se reporter au § II-4.3.1.2, page 1174, et au § II-4.3.2.2, page 1178.

Si un versement additionnel est effectué à la fin de la dernière période (x_n) **et si l'option « Versements arrondis à 2 chiffres après la virgule »**, ces formules ne sont pas applicables est choisie, le capital restant dû aussitôt après le versement effectué en période t_2 est calculé sur la base de la reconstitution exacte des échéanciers de remboursement.



Si aucun versement additionnel n'est effectué à la fin de la dernière période (x_n), **et si l'option «L'application des formules (précision maximale des versements)»** est choisie, le capital restant dû aussitôt après le versement effectué en période t_2 est donné par:

- la **relation 506 de la page 1174** dans le cas de versements de **fin** de période):

$$c_t = x_0 \frac{(1+i)^n - (1+i)^t}{(1+i)^n - 1}$$

(c_t = capital restant à rembourser en **fin** de période t (après versement) dans le cas de n versements constants périodiques à terme échu)

- la **relation 511 de la page 1178** dans le cas de versements de **début** de période:

$$c_t = x_0 \frac{(1+i)^n - (1+i)^t}{(1+i)[(1+i)^n - 1]}$$

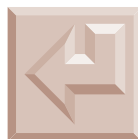
c_t = capital restant à rembourser en **début** de période t (après le versement de **début** de période) dans le cas de n versements constants périodiques en début de période)

Pour en savoir plus, se reporter au § II-4.3.1.2, page 1174, et au § II-4.3.2.2, page 1178.

Si un versement additionnel est effectué à la fin de la dernière période (x_n) **et si l'option «Versements arrondis à 2 chiffres après la virgule»**, ces formules ne sont pas applicables est choisie, le capital restant dû aussitôt après le versement effectué en période t_2 est calculé sur la base de la reconstitution exacte des échéanciers de remboursement.

Si $x_n \neq 0$, lorsque $t_2 = n$, le capital restant dû est égal:

- à x_n (au signe près), lorsque l'on est dans le cas de versements de **fin** de période)
- à $x_n(1+i)^{-1}$, lorsque l'on est dans le cas de versements de **début** de période, ce qui signifie qu'après capitalisation pendant une période, on retrouvera le montant x_n (au signe près).



L'application des relations de calcul du capital restant dû après versement, de celles du montant cumulé des intérêts versées au titre des versements effectués de la période t_1 à la période t_2 , et de celles du montant cumulé du capital remboursé au titre des versements effectués de la période t_1 à la période t_2 , suppose implicitement que le versement périodique correspondant *exactement* à celui défini par la

relation 505 de la page 1173 ($a_F = x_0 \frac{i}{1 - (1+i)^{-n}}$) – versements de fin de période

– ou par la relation 510 de la page 1177 ($a_D = x_0 \frac{i}{(1+i)[1 - (1+i)^{-n}]}$) – versement

de début de période –, et implique **l'usage de versements périodiques non arrondis, définis avec la précision maximale autorisée par le tableur.**

Le nombre retenu de chiffres après la virgule dans les contrats – et donc dans les échéanciers de remboursements – s'aligne sur les possibilités offertes légalement par la fraction de l'unité monétaire la plus petite utilisée dans le pays (en France, c'est le centime). Il s'ensuit que les résultats peuvent différer légèrement de ceux fournis par l'utilisation de ces formules. Certaines calculettes financières s'appuyant sur ces contraintes, fournissent des résultats de capital restant dû et de cumul de paiements d'intérêt ou de remboursements de capital entre deux périodes qui sont cohérents avec le nombre retenu de chiffres après la virgule par l'utilisateur. Dès lors, le capital restant dû ne sera pas nécessairement le même en fonction du format d'affichage retenu par la calculette. L'option **« versements arrondis à 2 chiffres après la virgule »** est en accord avec l'usage bancaire des pays dont les transactions sont libellées avec une précision n'allant pas au-delà du centième de l'unité monétaire utilisée dans le pays (le centime, en France, le cent aux US, etc.).



Dans les problèmes portant sur des transactions s'étalant sur plus d'un an et survenant plusieurs fois par an, on repère ces transactions avec le découpage temporel approprié (mensuel, trimestriel, etc.) et on utilise un taux périodique (taux mensuel en cas de découpage mensuel, taux trimestriel en cas de découpage trimestriel, etc.) Deux modes de calcul sont utilisés pour définir le **taux périodique** à partir du taux annuel (ou l'inverse):

- la **méthode de proportionnalité**, principalement utilisée dans les opérations de prêts bancaires, repose sur la méthode de calcul suivante:

$$\text{taux annuel} = \text{taux périodique} \times \text{nombre de périodes par an}$$

- la **méthode d'équivalence, principalement** utilisée dans les opérations de crédit-bail et l'analyse des dossiers d'investissement s'appuie sur la méthode de calcul suivante:

$$\text{taux annuel} = (1 + \text{taux périodique})^{\text{nombre de périodes par an}} - 1$$

Il importe de souligner que dans cette classe de problèmes, le taux périodique est toujours utilisé dans une logique d'intérêts composés, quel que soit le mode de calcul retenu pour définir le taux périodique. Pour en savoir plus, reportez-vous au § II-2, page 1159.



Dans les problèmes portant sur des transactions s'étalant sur plus d'un an et survenant plusieurs fois par an, on repère ces transactions avec le découpage temporel approprié (mensuel, trimestriel, etc.) et on utilise un **taux périodique** (taux mensuel en cas de découpage mensuel, taux trimestriel en cas de découpage trimestriel, etc.) Deux modes de calcul sont utilisés pour définir le taux périodique à partir du taux annuel (ou l'inverse):

- la méthode de proportionnalité, principalement utilisée dans les opérations de prêts bancaires, repose sur la logique suivante:

$$\text{taux annuel} = \text{taux périodique} \times \text{nombre de périodes par an}$$

- la méthode d'équivalence, principalement utilisée dans les opérations de crédit-bail et l'analyse des dossiers d'investissement s'appuie sur la méthode de calcul suivante:

$$\text{taux annuel} = (1 + \text{taux périodique})^{\text{nombre de périodes par an}} - 1$$

Il importe de souligner que dans cette classe de problèmes, le taux périodique est toujours utilisé dans une logique d'intérêts composés, quel que soit le mode de calcul retenu pour définir le taux périodique.

Une fois déterminé un taux périodique (par l'une ou l'autre méthode), on peut alors calculer le taux annuel correspondant à ce taux périodique en utilisant la méthode d'équivalence; ce taux est appelé taux équivalent, taux actuariel ou **taux effectif**. À un taux nominal annuel de 12% correspond un taux mensuel de 1% selon la méthode de proportionnalité, ce qui conduit à un taux annuel équivalent de $1,01^{12} - 1 = 12,68\%$. Bien évidemment, le taux effectif est égal au taux annuel si c'est la méthode d'équivalence qui est retenue. Pour en savoir plus, reportez-vous au [§ II-2, page 1159](#).

Vous pouvez saisir indifféremment l'un des trois taux (taux périodique, taux annuel ou taux équivalent), les deux autres étant automatiquement calculés en fonction du mode de calcul retenu pour lier le taux périodique au taux annuel.



Trois cas de figure sont possibles (le taux utilisé i étant le taux périodique si le nombre de périodes par an est supérieur à 1 et le taux annuel dans le cas contraire):

- Vous désirez connaître la valeur actuelle (**PV** ou x_0) équivalente à une somme ponctuelle (**FV** ou x_n) disponible à la période N (ou n), en fin ou début de période selon le choix que vous avez effectué dans la calculette. Dans ce cas, la relation de calcul utilisée est la [relation 489 de la page 1154](#)

$$x_0 = x_n (1 + i)^{-n}$$

- Vous désirez connaître la valeur actuelle (**PV** ou x_0) d'un échancier de N versements constants (**PMT** ou a_F ou a_D) effectués en fin ou début de période (selon le choix que vous avez effectué). Dans ce cas, la relation de calcul utilisée ici est:

- dans le cas de versements de **fin** de période, la [relation 503 de la page 1170](#):

$$x_0 = a_F \sum_{t=1}^n (1 + i)^{-t} = a_F \frac{1 - (1 + i)^{-n}}{i}$$

(x_0 = valeur actualisée à la date 0, de n versements périodiques a_F en **fin** de période)

- dans le cas de versements de **début** de période, la [relation 504 de la page 1172](#):

$$x_0 = a_D \sum_{t=0}^{n-1} (1 + i)^{-t} = a_D (1 + i) \frac{1 - (1 + i)^{-n}}{i}$$

(x_0 = valeur actualisée de n versements périodiques a_D en **début** de période)

- Vous désirez connaître la valeur actuelle (**PV** ou x_0) d'un échancier de N versements constants (**PMT** ou a_F ou a_D) effectués en fin ou début de période (selon le choix que vous avez effectué), auquel s'ajoute un versement (**FV** ou x_n) effectué en fin de période N . Dans ce cas, la relation de calcul utilisée est:

- dans le cas de versements de **fin** de période:

$$x_0 = a_F \sum_{t=1}^n (1 + i)^{-t} + x_n (1 + i)^{-n} = a_F \frac{1 - (1 + i)^{-n}}{i} + x_n (1 + i)^{-n}$$

- dans le cas de versements de **début** de période:

$$x_0 = a_D \sum_{t=0}^{n-1} (1 + i)^{-t} + x_n (1 + i)^{-n} = a_D (1 + i) \frac{1 - (1 + i)^{-n}}{i} + x_n (1 + i)^{-n}$$



Ce taux d'intérêt (I/Y) est un taux annuel calculé à partir du taux périodique selon la méthode que vous avez sélectionnée (méthode de proportionnalité ou méthode d'équivalence; pour plus de précision, utilisez le bouton d'aide correspondant). Le taux périodique est calculé de telle sorte qu'il rend égaux les deux membres de l'une des équations définies ci-après.

Cinq cas de figure sont possibles pour calculer ce taux périodique i :

- Vous désirez connaître le taux d'intérêt périodique associé à l'échange d'une somme ponctuelle (**PV** ou x_0) disponible au début de la première période, contre une somme ponctuelle (**FV** ou x_n) disponible à la période N (en fin ou début de période selon le choix effectué dans la calculette):

$$x_n = x_0(1 + i)^n \text{ ou } x_0 = x_n(1 + i)^{-n} \text{ (relation 489 de la page 1154)}$$

- Vous désirez connaître le taux d'intérêt périodique i associé à l'échange d'une somme ponctuelle (**PV** ou x_0) disponible au début de la première période, contre un échéancier de N versements constants (**PMT** ou a_F ou a_D) effectués en fin ou début de période (selon le choix que vous avez effectué dans la calculette). Dans ce cas, la relation de calcul utilisée ici est:

- dans le cas de versements de **fin** de période):

$$x_0 = a_F \sum_{t=1}^n (1 + i)^{-t} = a_F \frac{1 - (1 + i)^{-n}}{i} \text{ (relation 503 de la page 1170) ;}$$

- dans le cas de versements de **début** de période:

$$x_0 = a_D \sum_{t=0}^{n-1} (1 + i)^{-t} = a_D(1 + i) \frac{1 - (1 + i)^{-n}}{i} \text{ (relation 504 de la page 1172).}$$

- Vous désirez connaître le taux d'intérêt périodique i associé à l'échange d'une somme ponctuelle (**FV** ou x_n) disponible à la fin de la période N, contre un échéancier de N versements constants (**PMT** ou a_F ou a_D) effectués en fin ou début de période (selon le choix que vous avez effectué dans la calculette). Dans ce cas, la relation de calcul utilisée ici est:

- dans le cas de versements de **fin** de période):

$$x_n = a_F \sum_{t=0}^{n-1} (1 + i)^t = a_F \left[\frac{(1 + i)^n - 1}{i} \right] \text{ (relation 498 de la page 1164) ;}$$

- dans le cas de versements de **début** de période:

$$x_n = a_D \sum_{t=1}^n (1 + i)^t = a_D(1 + i) \frac{(1 + i)^n - 1}{i} \text{ (relation 499 de la page 1166).}$$

- Vous désirez connaître le taux d'intérêt périodique i associé à l'échange d'une somme ponctuelle (**PV** ou x_0) disponible au début de la première période, contre un échéancier de N versements constants (**PMT** ou a_F ou a_D) effectués en fin ou début de période (selon le choix que vous avez effectué dans la calculette), auquel s'ajoute une somme ponctuelle (**PV** ou x_0) disponible au début de la première période. Dans ce cas, la relation de calcul utilisée ici est:

- dans le cas de versements de **fin** de période:

$$x_0 = a_F \sum_{t=1}^n (1+i)^{-t} + x_n(1+i)^{-n} = a_F \frac{1-(1+i)^{-n}}{i} + x_n(1+i)^{-n};$$

- dans le cas de versements de **début** de période:

$$x_0 = a_D \sum_{t=0}^{n-1} (1+i)^{-t} + x_n(1+i)^{-n} = a_D(1+i) \frac{1-(1+i)^{-n}}{i} + x_n(1+i)^{-n}.$$

- Vous désirez connaître le taux d'intérêt périodique i associé à l'échange d'une somme ponctuelle (**FV** ou x_n) disponible au début de la première période, contre un échéancier de N versements constants (**PMT** ou a_F ou a_D) effectués en fin ou début de période (selon le choix que vous avez effectué dans la calculette), auquel s'ajoute une somme ponctuelle (**PV** ou x_0) disponible au début de la première période. Dans ce cas, la relation de calcul utilisée ici est:

- dans le cas de versements de **fin** de période:

$$x_n = a_F \sum_{t=0}^{n-1} (1+i)^t + x_0(1+i)^n = a_F \left[\frac{(1+i)^n - 1}{i} \right] + x_0(1+i)^n;$$

- dans le cas de versements de **début** de période:

$$x_n = a_D \sum_{t=1}^n (1+i)^t + x_0(1+i)^n = a_D(1+i) \frac{(1+i)^n - 1}{i} + x_0(1+i)^n.$$



Ce taux d'intérêt (I/Y) est un taux annuel calculé à partir du taux périodique selon la méthode que vous avez sélectionnée (méthode de proportionnalité ou méthode d'équivalence; pour plus de précision, utilisez le bouton d'aide correspondant). Le taux périodique est calculé de telle sorte qu'il rend égaux les deux membres de l'une des équations définies ci-après.

Cinq cas de figure sont possibles pour calculer ce taux périodique i :

- Vous désirez connaître le taux d'intérêt périodique associé à l'échange d'une somme ponctuelle (**PV** ou x_0) disponible au début de la première période, contre une somme ponctuelle (**FV** ou x_n) disponible à la période N (en fin ou début de période selon le choix effectué dans la calculette):

$$x_n = x_0(1 + i)^n \text{ ou } x_0 = x_n(1 + i)^{-n} \text{ (relation 489 de la page 1154)}$$

- Vous désirez connaître le taux d'intérêt périodique i associé à l'échange d'une somme ponctuelle (**PV** ou x_0) disponible au début de la première période, contre un échéancier de N versements constants (**PMT** ou a_F ou a_D) effectués en fin ou début de période (selon le choix que vous avez effectué dans la calculette). Dans ce cas, la relation de calcul utilisée ici est:

- dans le cas de versements de **fin** de période):

$$x_0 = a_F \sum_{t=1}^n (1 + i)^{-t} = a_F \frac{1 - (1 + i)^{-n}}{i} \text{ (relation 503 de la page 1170) ;}$$

- dans le cas de versements de **début** de période:

$$x_0 = a_D \sum_{t=0}^{n-1} (1 + i)^{-t} = a_D(1 + i) \frac{1 - (1 + i)^{-n}}{i} \text{ (relation 504 de la page 1172).}$$

- Vous désirez connaître le taux d'intérêt périodique i associé à l'échange d'une somme ponctuelle (**FV** ou x_n) disponible à la fin de la période N, contre un échéancier de N versements constants (**PMT** ou a_F ou a_D) effectués en fin ou début de période (selon le choix que vous avez effectué dans la calculette). Dans ce cas, la relation de calcul utilisée ici est:

- dans le cas de versements de **fin** de période):

$$x_n = a_F \sum_{t=0}^{n-1} (1 + i)^t = a_F \left[\frac{(1 + i)^n - 1}{i} \right] \text{ (relation 498 de la page 1164) ;}$$

- dans le cas de versements de **début** de période:

$$x_n = a_D \sum_{t=1}^n (1 + i)^t = a_D(1 + i) \frac{(1 + i)^n - 1}{i} \text{ (relation 499 de la page 1166).}$$

- Vous désirez connaître le taux d'intérêt périodique i associé à l'échange d'une somme ponctuelle (**PV** ou x_0) disponible au début de la première période, contre un échéancier de N versements constants (**PMT** ou a_F ou a_D) effectués en fin ou début de période (selon le choix que vous avez effectué dans la calculette), auquel s'ajoute une somme ponctuelle (**PV** ou x_0) disponible au début de la première période. Dans ce cas, la relation de calcul utilisée ici est:

- dans le cas de versements de **fin** de période:

$$x_0 = a_F \sum_{t=1}^n (1+i)^{-t} + x_n(1+i)^{-n} = a_F \frac{1 - (1+i)^{-n}}{i} + x_n(1+i)^{-n};$$

- dans le cas de versements de **début** de période:

$$x_0 = a_D \sum_{t=0}^{n-1} (1+i)^{-t} + x_n(1+i)^{-n} = a_D(1+i) \frac{1 - (1+i)^{-n}}{i} + x_n(1+i)^{-n}.$$

- Vous désirez connaître le taux d'intérêt périodique i associé à l'échange d'une somme ponctuelle (**FV** ou x_n) disponible au début de la première période, contre un échéancier de N versements constants (**PMT** ou a_F ou a_D) effectués en fin ou début de période (selon le choix que vous avez effectué dans la calculette), auquel s'ajoute une somme ponctuelle (**PV** ou x_0) disponible au début de la première période. Dans ce cas, la relation de calcul utilisée ici est:

- dans le cas de versements de **fin** de période:

$$x_n = a_F \sum_{t=0}^{n-1} (1+i)^t + x_0(1+i)^n = a_F \left[\frac{(1+i)^n - 1}{i} \right] + x_0(1+i)^n;$$

- dans le cas de versements de **début** de période:

$$x_n = a_D \sum_{t=1}^n (1+i)^t + x_0(1+i)^n = a_D(1+i) \frac{(1+i)^n - 1}{i} + x_0(1+i)^n.$$



Quatre cas de figure sont possibles (le taux utilisé i étant le taux périodique si le nombre de périodes par an est supérieur à 1 et le taux annuel dans le cas contraire):

- Vous désirez connaître la valeur du versement constant (**PMT** ou a_F ou a_D) d'un échéancier de N versements effectués en fin ou début de période (selon le choix que vous avez effectué dans la calculatrice) qui est équivalent à une valeur (**PV** ou x_0) disponible au début de la première période. Dans ce cas, la relation de calcul utilisée ici est:

- dans le cas de n versements a_F de **fin** de période, la **relation 505 de la page**

$$1173: a_F = x_0 \frac{i}{1 - (1 + i)^{-n}};$$

- dans le cas de n versements a_D de **début** de période, la **relation 510 de la**

$$\text{page 1177: } a_D = x_0 \frac{i}{(1 + i)[1 - (1 + i)^{-n}]}.$$

- Vous désirez connaître la valeur du versement constant (**PMT** ou a_F ou a_D) d'un échéancier de N versements effectués en fin ou début de période (selon le choix que vous avez effectué dans la calculatrice) qui est équivalent à une valeur (**FV** ou x_n) disponible à la fin de la période N . Dans ce cas, la relation de calcul utilisée ici est:

- dans le cas de n versements a_F de **fin** de période, la **relation 501 de la page**

$$1167: a_F = x_n \frac{i}{(1 + i)^n - 1};$$

- dans le cas de n versements a_D de **début** de période, la **relation 502 de la**

$$\text{page 1168: } a_D = x_n \frac{i}{(1 + i)[(1 + i)^n - 1]}.$$

- Vous désirez connaître la valeur du versement constant (**PMT** ou a_F ou a_D) d'un échancier de N versements effectués en fin ou début de période (selon le choix que vous avez effectué dans la calculatrice), auquel s'ajoute un versement (**FV** ou x_n) effectué en fin de période N et qui est équivalent à une valeur (**PV** ou x_0) disponible au début de la première période. Dans ce cas, ce versement constant satisfait la relation :

- $x_0 = a_F \sum_{t=1}^n (1+i)^{-t} + x_n(1+i)^{-n} = a_F \frac{1-(1+i)^{-n}}{i} + x_n(1+i)^{-n}$, dans

le cas de n versements a_F de **fin** de période ;

- $x_0 = a_D \sum_{t=0}^{n-1} (1+i)^{-t} + x_n(1+i)^{-n} = a_D(1+i) \frac{1-(1+i)^{-n}}{i} + x_n(1+i)^{-n}$

dans le cas de n versements a_D de **début** de période.

- Vous désirez connaître la valeur du versement constant (**PMT** ou a_F ou a_D) d'un échancier de N versements effectués en fin ou début de période (selon le choix que vous avez effectué dans la calculatrice), auquel s'ajoute une somme ponctuelle (**PV** ou x_0) disponible au début de la première période et qui est équivalent à une valeur (**FV** ou x_n) disponible à la fin de la période N. Dans ce cas, ce versement constant satisfait la relation :

- $x_n = a_F \sum_{t=0}^{n-1} (1+i)^t + x_0(1+i)^n = a_F \left[\frac{(1+i)^n - 1}{i} \right] + x_0(1+i)^n$, dans

le cas de n versements a_F de **fin** de période ;

- $x_n = a_D \sum_{t=1}^n (1+i)^t + x_0(1+i)^n = a_D(1+i) \frac{(1+i)^n - 1}{i} + x_0(1+i)^n$,

dans le cas de n versements a_D de **début** de période.



Trois cas de figure sont possibles (le taux utilisé i étant le taux périodique si le nombre de périodes par an est supérieur à 1 et le taux annuel dans le cas contraire):

- Vous désirez connaître la valeur capitalisée (**FV** ou x_n) disponible à la fin de la période N (ou n), équivalente à une somme ponctuelle (**PV** ou x_0) disponible au début de la période 1. Dans ce cas, la relation de calcul utilisée est la [relation 485 de la page 1149](#): $x_n = x_0 (1 + i)^n$
- Vous désirez connaître la valeur capitalisée (**FV** ou x_n) disponible à la fin de la période N (ou n), équivalente à un échéancier de N versements constants (**PMT** ou a_F ou a_D) effectués en fin ou début de période (selon le choix que vous avez effectué dans la calculette). Dans ce cas, la relation de calcul utilisée ici est:

- dans le cas de versements de **fin** de période, la [relation 498 de la page 1164](#):

$$x_n = a_F \sum_{t=0}^{n-1} (1+i)^t = a_F \left[\frac{(1+i)^n - 1}{i} \right]$$

(x_n = valeur capitalisée à la date n , de n versements périodiques a_F en **fin** de période)

- dans le cas de versements de **début** de période, la [relation 499 de la page 1166](#):

$$x_n = a_D \sum_{t=1}^n (1+i)^t = a_D (1+i) \frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

(x_n = valeur capitalisée à la date n , de n versements périodiques a_D , en **début** de période)

- Vous désirez connaître la valeur capitalisée (**FV** ou x_n) disponible à la fin de la période N (ou n), équivalente à un échéancier de N versements constants (**PMT** ou a_F ou a_D) effectués en fin ou début de période (selon le choix que vous avez effectué dans la calculette), auquel s'ajoute un versement (**PV** ou x_0) effectué en début de période 1. Dans ce cas, la relation de calcul utilisée ici est:

- dans le cas de versements de **fin** de période:

$$x_n = a_D \sum_{t=1}^n (1+i)^t + x_0 (1+i)^n = a_D (1+i) \frac{(1+i)^n - 1}{i} + x_0 (1+i)^n$$

- dans le cas de versements de **début** de période:

$$x_n = a_D \sum_{t=1}^n (1+i)^t + x_0 (1+i)^n = a_D (1+i) \frac{(1+i)^n - 1}{i} + x_0 (1+i)^n$$



Il y a $t_2 - t_1$ versements périodiques, d'un montant **PMT** ou a_F ou a_D , effectués entre t_1 et t_2 . Il s'ensuit que le cumul des versements entre t_1 et t_2 est:

$$\mathbf{PMT} (t_2 - t_1) \text{ ou } a_F (t_2 - t_1) \text{ ou } a_D (t_2 - t_1)$$



Nomenclature

Les techniques de MRP sont utilisées pour planifier les opérations de production / assemblage de produits comportant plusieurs niveaux de nomenclature. Le niveau 0 de nomenclature est celui des produits finis. Ces références de niveau 0 sont élaborées à partir de références de niveau 1, les références de niveau 1, à partir de celles de niveau 2, etc. Une référence donnée de niveau i est généralement utilisée par plusieurs références de niveau inférieur à i . Pour en savoir plus, reportez-vous au chapitre VI, [page 459](#) et au [§ II-2, page 463](#).

INDEX THÉMATIQUE

A

@Risk (logiciel)	187, 190, 193, 195, 197, 331, 594, 858
@Risk for Project (logiciel)	327, 332
Abonnement de charges fixes	89
Absorption des charges fixes	76
Absorption des délais.	473
Acteur-métier	269
Acteur-projet	269
Actigramme	162
Action corrective	979
Action préventive	979
Activité	161, 275
Actualisation	1154
Actuariel	1160
AFNOR	110, 893, 972
Algorithme	
• CDS	379
• de Jackson	374
• de Johnson	372, 379
• de Land	576
• de Little	382, 907
• de Wagner et Whitin	492, 494
• de Wagner-Whitin	582
• du Recuit Simulé	407
• du simplexe	1122
• génétique	196, 223, 402, 408
• rétrograde	576
• Tabou	407
Alternative décisionnelle	1139
Amortissement économique	126, 176
Analyse	
• de la valeur	72, 110
• de sensibilité	186
• paramétrée	1112
• post-optimale	1111
• spectrale	1007
• systémique	155
Ancêtre	275
Antécédent	275
APICS	461
Appel par l'aval	509
Approche hiérarchique	152, 160
Approche processus	974
Approvisionnement	632
• à flux tendus	666
• synchrone	509, 599, 904
Arborescence technique	277
Arc d'un graphe	288
Architecture « client-serveur »	960
Article	149
ASLOG	895
Assemblage à la commande	48, 49, 465, 509, 624
Assemblage final	465
Assurance de la qualité	972
Atelier	
• à cheminement unique	362
• à cheminements libres	362
• à cheminements multiples	362
• spécialisé	319
Attente	368
Attribut de qualité	107
Augmentation tarifaire	783
AV	110
Avant-projet	260

B

B2B	900
B2C	900
Baan	958
Back office	969
Baisse momentanée de tarif	783
Baptême progressif	620
BCWP	349
Besoins bruts	470

Contrainte	
• cumulative	286, 322, 323
• d'antériorité	282, 320, 321
• d'enclenchement	282
• de localisation temporelle	285
• disjonctive	286, 321, 322, 1139
• non saturée	1116
• potentielle	285, 320
• saturée	1117
Contribution propre	78
Contrôle	161
Contrôle de qualité	663
Contrôle statistique de la qualité	972
Convolution	609
Convoyeur	904
Corrélogramme	1001
COTS	144
Council of Logistic Management	895
Couplage	470
Courbe de décyclage	605
Courbon	272, 1194
Coût	74
• Budgété du Travail Effectué	349
• Budgété du Travail Prévu	349
• concave	582, 1142
• convexe	1142
• d'opportunité	74, 656
• de détention	655
• de lancement	663, 800
• de possession	655
• de revient complet	76
• de rupture	660
• de stockage	659
• direct	75
• direct mixte	76
• encouru	349
• fantôme	1109
• fixe	77
• global de possession	120
• historique	78
• préétabli	78
• prévisionnel réestimé	348
• réel	78
• Réel du Travail Effectué	349
• standard	78, 175
• variable	77
Coût marginal	78
CPM	274
Critère régulier	406
Critical Path Method	274
Cross-docking	901
CRTE	349
Crystal Ball	190
Cycle	832
• de fabrication	593
• de production	48
• de vie	101, 118, 263, 894
Cycle de vie	117
D	
Datagramme	162
Date calendaire	295
Date relative	295
Décision	
• de routine	628
• non programmable	46
• non structurée	46
• opérationnelle	45
• programmable	46
• semi-structurée	46
• stratégique	45, 99, 143
• structurée	46
• tactique	45
Decision Support System	425
Déclassement	242
Décomposition fonctionnelle	162
Découplage	416, 512, 601, 624
Décyclage	603
Délai	
• arithmétique	295
• calendaire	295
• d'obtention	468, 629
• de réaction	517
• de sécurité	468
Demande dynamique	630
Demande statique	630
Démarche ascendante	279
Démarche descendante	278
Démarche logistique	893
Denrée périssable	529
Dépendance fonctionnelle	934
Désamorçage d'une ligne	601
Descendant	276
DFA	115
DFM	115
DFMA	115
Diagramme de Gantt	365
Différenciation retardée	104, 105, 466, 620, 722
Direct costing	77
• évolué	77
• simple	77
Direction de projet	259

Discipline de file d'attente	409	556
Dispatching rules	380	Équilibrage de chaîne	55
Distancier	905	Équivalent	1160
Distribution	632	ERM	146, 456, 933, 957
Distribution Requirement Planning	497	ERP 68, 146, 456, 514, 622, 896, 933, 957,	958
Diversité	589	Escompte	1148
Diviseur	1147	Étape	307
DoD	931	Étiquette	513
DRP	497	• de fabrication	513
DSS	425	• de production	513
Durée de vie optimale	234	• de transfert	515
Dynamic lot size-model	582	European Logistics Association	895
E			
EANCOM	932	Évaluation	393
Earned value	349	Événement	961
Écart		Evoluer	187
• de coût	351	Explosion des nomenclatures	475
• de coût relatif	352	F	
• de performance	352	Fabrication à la commande	48
• de performance relatif	352	Facilities Management	62
• de planning	351	FAS	466
• de planning relatif	351	Favier	272, 1194
• de productivité	352	FD X 50-171	975
eCommerce	897, 900, 901, 970	FD X 50-174	975
Économie d'échelle	784	Feeding buffer	305
EDF	62, 65	Fiat	105
EDI	63, 931	File d'attente	150
Effet de lotissement	460, 932	Film	509, 603
Effet Slutsky-Yule	1065	Filtre linéaire	1008
ELA	895	Final Assembly Schedule	466
Élimination	394	Flexibilité 55, 104, 116, 135, 511, 589, 591	
Enclenchement	160	• organisationnelle	147
Encyclage	509, 600, 604, 615	• physique	147
Énergie	280, 346	Flow shop	51, 60, 362, 530, 602
Engagement	58, 614	Flow shop hybride	383
Engineer-to-Order	48	Flux Net de Trésorerie	174
Enregistrement	977, 978	Flux Net de Trésorerie Actualisé 202, 1155	
Enterprise Resources Planning	456	Flux poussés	466
Entité	149	Flux tirés	466
Entrepôt	901	Fonction	962
Entrepôt de transit	901	• (analyse de la valeur)	110
Entreprise de réseau	62	• concave	575
Entreprise Resource Planning 68, 622, 896,		• convexe	575
933, 957, 958		• de contraintes	111
Equation		• de coût linéaire par morceau	1142
• spatiale de conservation des flux	548	• de hasard cumulée	247
Équation		• de service	111
• comptable	556	• économique	642
• de conservation	556	• logistique	893
• de conservation temporelle des stocks		• objectif	1115

• objectif non linéaire	1141
• technique	111
Force	408
Forme canonique	1106
Forme standard	1106, 1119
Formule de Leibniz	673
France Télécom	62, 65
Front scheduling	422
FTNA	202

G

Gamme	100, 151, 943, 944
• alternative	283, 322, 331, 943, 952
• convergente	944
• d'assemblage	469
• de fabrication	469
• divergente	944
GAMS	1134
Gantt fléché	307
Gaspillage	833
General Electric	110
General Motors	604
Gerbeur	904
Gestion calendaire	634
Gestion calendaire conditionnelle	634
Gestion de production	44
Gestion de projet	259
Gestion des risques d'un projet	267
Gestion des stocks	45
Gestionnaire de cas	169
Goal programming	220
Goodwill	661, 673, 677, 852
Goulot d'étranglement	385, 953
GRAF CET	160
Graphe	
• AoA	288
• AoN	288
• d'une gamme opératoire	69
• PERT	307
• PERT-Étapes	307
• Potentiel-Étapes	307
• Potentiel-Tâches	293
Graphique	
• de Gantt	365
• du point mort	60
• en toile d'araignée	188
• en tornade	188
Gross Requirement	470
Groupware	272

H

Hasard (fonction de)	247
Hausse tarifaire anticipée	785
Hausse tarifaire subie	785
Haut le pied	922
Haut-le-pied	64
Heuristique	361, 456, 604
Heuristique de Silver et Meal	492
Horizon de planification	573
Horizontal loading	421
Hub	64, 901

I

IDF0	161
IDF3	162
ILS	121
Indice de criticité	330
Inducteur de coûts	105
Industrie de process	58
Information primaire	927
Information traitée	927
Ingénierie concourante	118, 132, 270
Ingénierie simultanée	270
Innovation - procédé	101
Innovation - produit	101
Inspection de la qualité	971
Integrated Logistic Support	121
Intégrité référentielle	935
Intel	142
Intérêt	
• composé	1148
• postcompté	1148
• précompté	1148
International Standard Organisation	972
Interpolation linéaire	709
Intersection de Fisher	206
Inventaire périodique	628
Inventaire permanent	628
Invertibilité	1089
ISO	972
ISO 9000	973
ISO 9001	71, 977
ISO 9004	979
ISO/TR 10017	975
Item Master File.	467

J

J.D. Edwards (société)	958
Jalon	275
Jalonnement au plus tôt	422

Job shop 51, 362, 602
 Juste-à-temps 509, 919

K

Kaizen 70, 143, 972
 Kanban 513
 • électronique 514

L

La Poste 62
 Lancement 473
 Lancia 105
 Lettre de change 1148
 Ligne
 • d'assemblage 53
 • de production 53, 530
 • hiérarchique 169
 Lignes directrices 977
 Lissage 312
 Livraison attendue 471, 473
 Livraison programmée 473
 Logistique 893, 932
 Logistique répartie 893
 Loi
 • Bêta 325
 • Bêta-PERT 191, 326
 • de fiabilité 244
 • de Pareto 636
 • de Parkinson 281
 • de service 409
 • triangulaire 328
 • uniforme 328
 Lotissement 459
 Lump sum problem 629

M

Machine 361
 MAF 510, 904
 Magasin automatique 904
 Magasin Avancé Fournisseur 510, 904
 Maintenance 243, 940, 943
 Maison de la qualité 112
 Maître d'œuvre 262
 Maître d'ouvrage 262
 Management des risques d'un projet 267
 Management par la Qualité Totale 972
 Manuel qualité 977, 978
 Manufacturing Resource Planning 456
 Manutention 943
 Marge 76, 368, 370
 • indépendante 303

• libre 301
 • semi-brute 78
 • sur coût direct mixte 76
 • sur coût direct opérationnel 76
 • totale 300
 • totale sur la période 685
 Master Production Schedule 458
 Material Requirement Planning 455, 957
 Matrice 99
 Matrice de la qualité 112
 Matrice réduite 391
 Mécanisme 161
 Mécanisme de croisement 408
 Mécanisme de mutation 408
 Merise 934, 959, 964
 Méta-heuristique 407
 Méta-règle 273, 440
 Méthode ABC 636
 Méthode de Quenouille ... 1001, 1002, 1087
 Méthode des coûts variables 77
 Méthode des Potentiels 274
 Méthode du Recuit Simulé 407
 Méthode Tabou 407
 Modèle 1134
 • additif 995
 • autoprojectif 1005
 • de Holt et Winters 1056
 • de Kano 107
 • dynamique d'ordonnancement 363
 • explicatif 1005
 • multiplicatif 995
 Modèle économique de gestion 639
 Modèle stationnaire 1092
 Modèle statique d'ordonnancement 363
 Modeleur 903, 908, 919, 1134
 Modélisation 147
 • mono-période 528
 • multi-périodes 528
 Module 103, 465
 Moindres carrés généralisés 1101
 Montant nominal 1148
 Moyenne mobile centrée 1013
 MPS 458, 466
 MRP 455, 957
 MRP I 456
 MRP II 456
 Multi-projets 262, 282

N

Nervosité 495
 Net Requirement 471

NF EN 30011	976
NF EN ISO 9000	973
NF EN ISO 9001	977
Nissan	105
Niveau de remplètement ...	634, 665, 708, 948
Niveau de rétablissement	708
Nivellement	312
Nivellement basé sur une liste d'installation	313
Nœud d'un graphe	288
Nombre (banque)	1147
Nombre moyen de commandes	653
Nomenclature	100, 105, 463
• d'ordonnancement	374
• de planification	465
• fantôme	467
Nomogramme	629
Norme	972
Norme CE	973
Normes européennes	973
NP- complet	361
NP- difficile	361
NTIC	932

O

Obligation à coupons capitalisés	1154
OM	100
Open shop	362
Opérateur	150
Opération	361
OPT	386
Oracle	958
Ordonnancement	45, 359
• admissible	437
• au plus tard	298
• au plus tôt	296
• de production en petite série	262
Ordre	
• de fabrication	360, 361
• de fabrication ouvert	513
• de modification	100
• de réquisition	600, 604
• ferme	470, 495
Organigramme des tâches	277
Organigramme technique	277
Organisme de normalisation	972
OSSAD	165
OT	277
Ou « exclusif » (opérateur logique)	1139
Ou « inclusif » (opérateur logique)	1141

Outillage	150
-----------------	-----

P

Paradoxe du voyageur de Calais	78
Parallélisme	168
Paramètre	640
Parc industriel de fournisseurs	510
PBC	455
PDCA	71
PDP	458
Pegging	470
People Soft	958
Période de révision calendaire	665
PERT	274, 307
Perturbation aléatoire	987
PGI	958
Picking	901
PIF	510
Pilotage	
• en dérive	267
• en stop or go	267
• informatique en temps réel	46
Piquage	901
Pistage	470
Place de marché virtuelle	970
Placement au plus tard	424
Placement au plus tôt	422
Placement chronologiquement progressif	
d'opérations exécutables	424
Placement progressif d'ordres de	
fabrication	421
Plan	
• Comptable Général	78
• de transport	45
• Directeur d'Assemblage	466
• Directeur de Production	458, 461, 512
Plan qualité	977
Planification	
• de la production	45
• glissante	494
• hiérarchisé	498
• opérationnelle	274
Plateau	271
Plate-forme (logistique)	901
Plate-forme (produit)	103, 589
Point de commande	633, 665, 780, 948
Point de régénération	583
Point mort	60, 77
Point mort en univers aléatoire	666, 698
Points de commande multiples	780
Poka-yoke	116

Polyvalence	169, 940	• homogène	589
Pool resource	286	• sur étagère	144
Position de stock	471, 731, 780	Profil moyen de chargement	469
Precedence Diagramming Method	288	Progiciel de Gestion Intégrée	958
Prédécesseur	275	Programme de production	58, 614
Préemption	361, 368	Programme linéaire en nombres entiers	1118
Prestation de service	625	Projet	894
Prévision	981	Propagation	172, 624
Principal	1174	Propriété	934
Principe		PSA	604
• d'économie	304	PSE	391
• d'optimalité	564	Pseudo-fonction de répartition	676, 716
• de Bellman	564		
• de conservation des aires ...	995, 1022, 1073	Q	
• de prudence	303	QAD	958
Prix-fantôme	1109	QFD	111, 135
Problème dual	1106	Q-GERT	331
Problème non préemptif	361	Qualification	941
Problème préemptif	361	Qualité	475, 972, 973
Problème primal	1106	Qualité Totale	972
Problème stochastique du voyageur de commerce	402	Quality Function Deployment	111
Procédure		Quantité	
• d'allocation en parallèle	313	• de commande de Wilson	776
• d'allocation en série	313	• de Wilson	772
• par placement d'opérations	424	• économique de commande	948
• par placement des travaux	421	• économique de Wilson	491
• par Séparation et Évaluation	391	• économique périodique	491
Processeur	150	• fixe de commande	491, 634
Processus	69, 160, 259, 961		
• autorégressif	1085	R	
• de Markov	1085	Rabais	
• de Yule	1085	• progressif	787
• dynamique	630	• uniforme	787
• en moyenne mobile	1089	Raisonnement à prix constants	185
• mixte	1091	Raisonnement en francs constants	183
• purement aléatoire	989	Raisonnement en francs courants	183
• stationnaire	994, 1084	RATP	62
• statique	630	Rebut	948
Production	41	Recouvrement	283, 297, 946
• à flux poussés	509	Recuit Simulé	407
• à flux tirés	509	Réduction de matrice	391
• à la commande	48, 464, 559, 624	Reengineering	68, 72
• de masse de produits sur mesure ...	105	Référence	935
• de type «série unitaire»	50	Régénération périodique	494
• en ateliers spécialisés	51	Régime de croisière	174
• fatale	1111	Régime stationnaire	409
• pour stock	48, 559, 623	Régime transitoire	173
• sur mesure	102	Règle	
Produit		• d'unicité de la clé	935
• hétérogène	589	• de conception	115

- de Jackson370
 - de la date de livraison minimale ...369
 - de la marge minimale371
 - de Smith369
 - dynamique413
 - ECT384
 - FAM384
 - LAPT384
 - LSM384
 - LWKR413
 - MWR385
 - PAPS412
 - RANDOM412
 - S/OPN413
 - statique413
 - TOM367, 413
 - TOM pondéré368, 369
 - Relation934
 - Relation d'antériorité282, 463
 - Relaxation de contrainte435, 648
 - Remora959
 - Renault142, 604
 - Rendement d'échelle décroissant575
 - Renfort611
 - Réseau de Petri160
 - Responsable de lot262
 - Ressource
 - consommable286, 529
 - non stockable286, 529, 656
 - renouvelable286, 529
 - stockable286, 529, 656
 - Retard algébrique368
 - Retard vrai368
 - Retour à vide900
 - Risk Optimizer187, 197, 402, 594
 - Robustesse d'un modèle650
 - Rôle160, 935
 - Rotation921
 - Roue de Deming71, 974
 - Rough cut planning469
 - Rupture de stock667
 - Rupture de stock moyenne653, 667, 671
- S**
- SADT161
 - SAF510
 - SAP958
 - Satisfaction du besoin893
 - Saturation601
 - Saturation d'un centre productif433
 - SCC896
 - SCOR160, 896
 - Séparation394
 - Séquence de groupes d'opérations
 - permutables437
 - Séquencement359
 - Série360
 - chronologique981
 - désaisonnalisée1020
 - économique772
 - temporelle981
 - Serveur d'applications960
 - Serveur de données960
 - Serveur de présentation960
 - Service921
 - SIAD ... 46, 168, 425, 905, 919, 1134, 1135
 - Silver585
 - Simplexe1122
 - Simul8 (logiciel)152
 - Simulation94, 148
 - Site Avancé Fournisseur510, 904
 - SLI121, 930
 - SMED106, 168, 511, 652
 - SNCF62, 65
 - Socks à étages627
 - Solveur919, 1134
 - Sommet d'un graphe288
 - SOT rule367
 - Sous-traitance de capacité144
 - Sous-traitance de spécialité144
 - Soutien Logistique Intégré121, 930
 - Spare insurance662
 - Spécifications977
 - Spectre1085
 - SPT rule367
 - Standardisation48, 64, 133, 971
 - Start-up265
 - Station54, 592
 - STL1026
 - Stock149
 - à étages406, 458, 459, 548
 - de distribution458, 549, 632
 - de fabrication549, 632
 - de sécurité623, 831
 - de spéculation623
 - de tri604, 620
 - moyen possédé653
 - multi-échelons406, 458, 627
 - tampon605
 - Stockage
 - dynamique903
 - mobile903
 - rotatif903

V	W
Valeur	Warrant 1148
• acquise349, 1149	WBS 277
• Actuelle Nette202, 1155	Web 960
• Ajoutée Directe446	Web office 149, 970
• budgétaire du réalisé349	What-if analysis 186
• future1149	Witness 152
• nominale1148	Work Breakdown Structure 277
VAN202, 1155	
Variable	X
• artificielle1126	X 50-131 977
• binaire1135	X 50-136 976
• d'état641, 652	X 50-150 110
• de commande640, 1135, 1138	X 50-153 110
• de la base1113	X-11 1026
• hors base1113	X-12-ARIMA 1026
• indicatrice1135	XPRESS-MP 1134
Variété externe 105	
Variété interne 105	
VBA331	
Ventes différées661	
Ventes manquées660	
Versement	
• à terme d'avance1158	
• à terme échu1158	
• en début de période1158	
• en fin de période1158	
Vertical loading424	

Lotissement

Le lotissement consiste à définir la taille du lot à livrer au début d'une période (et donc à lancer en fabrication antérieurement) à partir des besoins nets de cette période et des périodes suivantes. La technique la plus simple, connue sous le nom de «lot pou lot» consiste à livrer systématiquement en début de période de quoi couvrir les besoins de cette période (en tenant éventuellement compte de l'existence de stock de sécurité). D'autres techniques existent et procèdent à un arbitrage entre un coût de lancement et un coût de possession de stocks non consommés au cours de la période de livraison. Pour en savoir plus, reportez-vous au chapitre VI, § IV-1.2, page 491.

Ajustement - charge capacité

Dans la MRPII on vérifie, avant toute poursuite du processus d'explosion des nomenclatures, que la charge de travail induite par les lancements programmés des références d'un niveau donné, dans les différents centres de production retenus pour la MRP, ne dépasse pas la capacité de production de ces centres. S'il n'en n'est pas ainsi, un ajustement préalable «charge - capacité» s'impose. Plusieurs possibilités sont exploitables : anticipation de la production, augmentation de la capacité par transfert de personnel ou par un appel aux heures supplémentaires ou à la sous-traitance. Ici, seul l'ajustement par anticipation de la production est envisagé. Pour en savoir plus, reportez-vous au chapitre VI, § III-4, page 481.

Plan Directeur de Production (PDP)

Le PDP fixe une programmation de la mise à disposition des produits finis, aux Services Commerciaux. Il est établi conjointement par la Production et le Commercial en réponse à une demande prévisionnelle, en fonction des capacités disponibles et en cohérence avec le plan à long terme de production. Dans certains cas d'assemblage à la commande, le PDP est établi au niveau de sous-ensembles. Pour en savoir plus, reportez-vous chapitre [VI](#), [page 458](#), au [§ II-1](#), [page 461](#) et à la [page 464](#).

Données relatives aux références

Plusieurs informations sont indispensables pour pouvoir utiliser la technique de MRP sous sa forme la plus fruste (MRP-I) :

- un plan directeur de production (voir le § II-1, page 461 du chapitre VI),
- une nomenclature des produits (voir § II-2, page 463 du chapitre VI),
- une connaissance correcte des stocks et des livraisons attendues (voir le § II-3, page 467 du chapitre VI),
- une connaissance des délais d'obtention (voir le § II-4, page 468 du chapitre VI).

Lorsque l'on travaille dans un environnement de MRP-II, il faut en outre disposer :

- des gammes de production (voir le § II-5, page 468 du chapitre VI),
- des informations nécessaires permettant de choisir sur quoi faire porter un éventuel ajustement (voir le § II-6, page 469 du chapitre VI).

Données relatives aux capacités de production

Ces informations sont nécessaires pour s'assurer, à chaque étape du processus d'explosion des nomenclatures, que les lancements programmés sont possibles. Dans chaque centre productif concerné, la charge de travail qui résulte des lancements programmés et des gammes doit être rapprochée de la capacité disponible. Lorsque celle-ci s'avère insuffisante, on procède à un ajustement par anticipation de la production ou par augmentation de la capacité. Pour en savoir plus, reportez-vous au § II-5, page 468 du chapitre VI).

Politiques de gestion calendaire traitées par ce didacticiel

Les politiques de gestion calendaire que gère ce didacticiel sont

- les politiques sans contraintes pour un problème défini pour un ou plusieurs articles stockables (§ I-2, page 708, pour le délai d'obtention nul; pour le délai d'obtention positif mais inférieur à la durée de la période calendaire, il traite du cas des demandes non satisfaites totalement perdues § II-2.2.1, page 741 ou différées § II-2.1, page 730; pour le délai d'obtention positif compris entre une fois et deux fois la durée de la période calendaire, il traite uniquement du cas des demandes non satisfaites totalement perdues § II-2.2.2, page 749);
- pour un problème défini pour plusieurs les articles, les politiques avec contraintes financières portant sur le montant de la commande ou du volume de livraison des articles stockables ou non (§ II-3.1, page 754) ;
- pour un problème défini pour plusieurs les articles stockables avec un délai d'obtention positif compris entre une fois et deux fois la durée de la période calendaire, il traite uniquement du cas des demandes non satisfaites totalement différées (§ II-3.2, page 758) il traite de contraintes financières ou non portant sur le stock moyen après livraison.

Choix de la politique d'approvisionnement

S'il y a plusieurs articles gérés indépendamment, c'est-à-dire sans contrainte de stockage ou financière, vous pouvez retenir :

- une politique optimale ;
- une politique non optimale définie par un niveau de service (probabilité de rupture ou pourcentage de demandes non satisfaites) ; dans ce cas, le didacticiel ne permet de traiter que des problèmes abordés dans l'ouvrage (restrictions en cas de délais d'obtention non nuls).

Un certain nombre de contrôles sont effectués pour éviter que votre définition du problème permette d'aboutir à une solution. Il est vraisemblable que tous les contrôles nécessaires ne sont pas présents. Vous devez veiller à définir un problème réaliste et, pour articles stockables, à vous trouver dans un cas de figure où l'hypothèse simplificatrice de calcul du stock moyen possédé ait des chances d'être respectée.

Prix de vente

Cette information conditionne la possibilité de calculer la marge que permet d'obtenir la politique de gestion calendaire choisie. Elle est facultative et n'a pas de sens dans certains problèmes comme ceux de l'approvisionnement de composants utilisés en production ou de pièces détachées utilisées en maintenance. Dans ce cas, l'information relative au coût de rupture est obligatoire pour déterminer une politique optimale.

Valeur de récupération

Cette information est nécessaire à la définition de la politique optimale d'articles non stockable ne faisant pas l'objet d'une vente. Elle est facultative pour les articles non stockables vendus et, sans intérêt pour les articles stockables..

Coût de rupture

Cette information est nécessaire à la définition de la politique optimale d'articles non stockable ne faisant pas l'objet d'une vente.

Pour les articles vendus, cette information est facultative si les demandes non satisfaites sont perdues. Dans ce cas, le didacticiel le définit automatiquement comme la marge non réalisée à la suite d'une vente ; si vous décidez de saisir une valeur, celle-ci ne peut être inférieure à cette marge et, sans intérêt pour les articles stockables. Si les demandes non satisfaites sont différées, alors le coût de rupture est indispensable et correspond aux dépenses supplémentaires occasionnées par le retard de mise à disposition d'un article manquant.

